ANALISIS PEWARNAAN r-DINAMIS PADA GRAF-GRAF KHUSUS

TESIS

Oleh

Devi Eka Wardani Meganingtyas
NIM 141820101006

Pembimbing I	**:**	**Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.**
Pembimbing II	**:**	**Kosala Dwidja P., S.Si., M.Si**

MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2015

ANALISIS PEWARNAAN r-DINAMIS PADA GRAF-GRAF KHUSUS

TESIS

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Magister Matematika (S2)
dan mencapai gelar Magister Sains

Oleh

Devi Eka Wardani Meganingtyas
NIM 141820101006

MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2015

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, tesis ini penulis persembahkan kepada:

1. Ayah Ahmad Rifa'i, S.Pd, Mama Sumiatun dan Adik Dicky Fattah Dwi Satria Mahardhika, yang telah mendukung dan memberikan doa, kasih sayang, motivasi, kepercayaan dan senyuman yang selalu menguatkan aku di setiap perjalanan hidup;

2. Budhe Sumiati, Budhe Katini, Paman Ahmad Zainuri, Mbak Iken Nafikadini, S.KM., M.Kes., Mas Annaas Pamungkas, dan seluruh keluarga besar, yang banyak menginspirasi, memberi bantuan dan mendoakan;

3. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D selaku DPU dan Kosala Dwidja P., S.Si, M.Si selaku DPA yang telah membimbing, memotivasi, mendukung, dan berkorban demi kesuksesan mahasiswa-mahasiswanya;

4. Seluruh guru dan dosen beserta almamater sekolah, yang telah memberikan banyak ilmu dan suasana kekeluargaan di setiap masanya;

5. Teman-teman S1 (*sixters*, dkk.), teman-teman S2 (Lisa, Wicha, Mifta, Mbak Ana, dan Mas Jesy), keluarga JBS (PT. Bank BNI Syariah), dan keluarga CGANT, yang senantiasa saling memberikan semangat, pengalaman dan ilmu tentang kehidupan.

MOTTO

"Selalu mencoba! Lebih baik kalah setelah bertanding daripada menang sebelum berperang."
(D.E.W. Meganingtyas)

"We shall not cease from exploration and the end of all our exploring will be to arrive where we started and know the place for the first time."
(T.S. Eliot)

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Devi Eka Wardani Meganingtyas

NIM : 141820101006

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa tesis yang berjudul: analisis pewarnaan r-dinamis pada graf-graf khusus adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 30 Desember 2015

Yang menyatakan,

Devi Eka Wardani M.

NIM. 141820101006

TESIS

ANALISIS PEWARNAAN r-DINAMIS PADA GRAF-GRAF KHUSUS

Oleh

Devi Eka Wardani Meganingtyas
NIM 141820101006

Pembimbing I	:	Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
Pembimbing II	:	Kosala Dwidja P., S.Si., M.Si

PERSETUJUAN

ANALISIS PEWARNAAN r-DINAMIS PADA GRAF-GRAF KHUSUS

TESIS

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Magister Matematika (S2)
dan mencapai gelar Magister Sains

Nama Mahasiswa	: Devi Eka Wardani Meganingtyas
NIM	: 141820101006
Jurusan	: MIPA
Program Studi	: Matematika
Angkatan Tahun	: 2014
Daerah Asal	: Jember
Tempat, Tanggal Lahir	: Jember, 16 Mei 1990

Disetujui oleh:

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D	Kosala Dwidja Purnomo, S.Si.,M.Si
NIP. 19680802 199303 1 004	NIP. 19690828 199802 1 001

HALAMAN PENGESAHAN

Tesis berjudul Analisis Pewarnaan r-dinamis pada Graf-graf Khusus telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

Hari : Rabu

Tanggal : 30 Desember 2015

Tempat : MIPA UNEJ

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D
NIP.19680802 199303 1 004

Dosen Pembimbing Anggota,

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si.,M.Si
NIP.19690828 199802 1 001

Penguji I,

Prof. Drs. Slamin M.Com Sc.,Ph.D
NIP.19670420 199201 1 001

Penguji II,

Kusbudiono, S.Si., M.Si
NIP.19770430 200501 1 001

Mengetahui,
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Prof. Drs. Kusno, DEA.,Ph.D.
NIP. 19610108 198602 1 001

RINGKASAN

Analisis Pewarnaan r-dinamis pada Graf-graf Khusus; Devi Eka Wardani Meganingtyas, 141820101006; 2015: 71 halaman; Program Studi Magister Matematika S2, Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Pewarnaan graf merupakan salah satu topik kajian pada teori graf. Pewarnaan r-dinamis merupakan pengembangan dari pewarnaan k-warna dinamis yang diperkenalkan oleh Montgomery pada tahun 2002. Pewarnaan k-warna dinamis pada graf G merupakan pewarnaan titik pada graf G sebanyak k warna sedemikian hingga setiap titik berderajat minimum dua pada G setidaknya memiliki dua warna berbeda dengan titik-titik ketetanggaannya. Nilai k terkecil dimana graf G memiliki pewarnaan k-warna dinamis disebut sebagai bilangan kromatik dinamis, disimbolkan dengan $\chi_d(G)$.

Graf-graf khusus yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf Prisma, graf *Circulant*, graf Lintasan, graf Sikel, graf Roda, graf Bintang, graf Tangga, dan graf *Friendship*. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik, yang diawali dengan istilah yang tidak didefinisikan dan istilah yang didefinisikan, kemudian dapat disusun pernyataan pangkal yang biasa disebut aksioma atau postulat. Setelah itu, disusun teorema-teorema ataupun definisi-definisi. Adapun teorema yang disusun harus dibuktikan melalui proses deduktif sehingga kebenarannya berlaku secara umum dalam ruang lingkupnya.

Hasil penelitian ini berupa teorema baru mengenai pewarnaan titik r-dinamis dan pewarnaan sisi r-dinamis pada graf-graf khusus. Teorema yang dihasilkan adalah:

a. Bilangan kromatik r-dinamis pewarnaan titik r-dinamis pada graf Prisma, $\mathbf{P}_n$, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\chi(\mathbf{P}_n) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases} \quad \chi_d(\mathbf{P}_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 3k, k \in N \\ 4, & \text{untuk } n \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\chi_{r\geq 3}(\mathbf{P}_n) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n = 4k, k \in N \\ 6, & \text{untuk } n = 3, 7, 11 \\ 5, & \text{untuk } n \text{ lainnya} \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.1.1**;

b. Misalkan G merupakan graf *Circulant*, yakni $C_n(1, \frac{n}{2})$, dimana $n \geq 4$ dan n genap. Bilangan kromatik dinamis pewarnaan titik r-dinamis pada graf *Circulant*, $C_n(1, \frac{n}{2})$, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\chi(C_n(1, \frac{n}{2})) &= \begin{cases} 4, \text{ untuk } n = 4 \\ 2, \text{ untuk } n = 4k + 2, k \in N \\ 3, \text{ untuk } n = 4k + 4, k \in N \end{cases} \\
\chi_d(C_n(1, \frac{n}{2})) &= 4 \\
\chi_{r \geq 3}(C_n(1, \frac{n}{2})) &= \begin{cases} n, \text{ untuk } n = 4, 6, 8 \\ 4, \text{ untuk } n = 8k + 4, k \in N \\ 5, \text{ untuk } n = 8k + 6, k \in N \\ 6, \text{ untuk } n \text{ lainnya} \end{cases}
\end{aligned}$$

yang telah dibuktikan melalui pembuktian **Teorema 4.1.2**;

c. Misalkan G merupakan graf *Circulant*, yakni $C_n(1, 2)$, dimana $n \geq 5$. Bilangan kromatik dinamis pewarnaan titik r-dinamis pada graf *Circulant*, $C_n(1, 2)$, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\chi(C_n(1, 2)) = \chi_2(C_n(1, 2)) &= \begin{cases} 5, \text{ untuk } n = 5 \\ 3, \text{ untuk } n = 3k, \ k \in A \\ 4, \text{ untuk } n \text{ lainnya} \end{cases} \\
\chi_3(C_n(1, 2)) &= \begin{cases} 4, \text{ untuk } n = 4k, \ k \in A \\ 5, \text{ untuk } n \text{ lainnya} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\chi_{r \geq 4}(C_n(1, 2)) = \begin{cases} n, \text{ untuk } 5 \leq n \leq 9 \\ 5, \text{ untuk } n = 5k + 5, \ k \in A \\ 6, \text{ untuk } n = 5k + 6, 5k + 7, \ k \in A \\ 7, \text{ untuk } n = 5k + 8, 5k + 9, \ k \in A \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema ??**;

d. Jika G merupakan graf hasil operasi *join* antara P_n dan C_m, dinotasikan dengan $P_n + C_m$ maka bilangan kromatik r-dinamis graf G adalah sebagai berikut:

$$\chi_4(P_n + C_m) = \begin{cases} 5, \text{ untuk } m = 3k, k \in A \\ 6, \text{ untuk } m \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\chi_5(P_n + C_m) = \begin{cases} 6, \text{ untuk } m = 3 \\ 8, \text{ untuk } m = 5 \\ 7, \text{ untuk } m \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\chi_{r\geq 6}(P_n + C_m) = \begin{cases} r + m - 2, \text{ untuk } 3 \leq m \leq r - 2, m \geq r - 1, n \geq m - 1 \\ 2r - 3, \text{ untuk } m \text{ lainnya}, n \geq r - 1 \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.1.4**;

e. Misalkan G merupakan graf hasil operasi korona antara P_n dan C_m, yaitu $C_m \odot P_n$. Jika $n \geq 2$, $m \geq 3$, and $r \geq 4$ maka bilangan kromatik r-dinamis graf G adalah sebagai berikut:

$$\chi_{r\geq 4}(C_m \odot P_n) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m \neq 5, n = 1, \\ 5, & \text{untuk } n = 2 \text{ dan } m = 5, n = 1, \\ n + 3, & \text{untuk } 3 \leq n \leq r - 3, \\ r + 1, & \text{untuk } n \text{ lainnya}, \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.1.5**;

f. Misalkan G merupakan graf hasil operasi korona antara P_n dan C_m, yaitu $P_n \odot C_m$. Jika $n \geq 2$, $m \geq 3$, dan $r \geq 6$ maka bilangan kromatik r-dinamis graf G adalah sebagai berikut:

$$\chi_{r\geq 6}(P_n \odot C_m) = \begin{cases} m + 3, & \text{untuk } 3 \leq m \leq r - 3, \\ r + 1, & \text{untuk } m \text{ lainnya}, \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.1.6**;

g. Bilangan kromatik dinamis pewarnaan sisi r-dinamis pada graf Lintasan, P_n, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\lambda(P_n) = 2, n \geq 2$$

$$\lambda_2(P_n) = \lambda_r(P_n) = 3, n \geq 2, r \geq 2$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.2.1**;

h. Bilangan kromatik dinamis pewarnaan sisi r-dinamis pada graf Sikel, $C_n, n \geq 3$, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\lambda(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\lambda_{r\geq 2}(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 3k, k \in N \\ 4, & \text{untuk } n = 3k+1, k \in N \\ 5, & \text{untuk } n = 3k+2, k \in N \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.2.2**;

i. Bilangan kromatik dinamis pewarnaan sisi r-dinamis pada graf Bintang, $S_n, n \geq 3$, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\lambda_{r\geq 1}(S_n) = n$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.2.3**;

j. Bilangan kromatik dinamis pewarnaan sisi r-dinamis pada graf Roda, $W_n, n \geq 5$, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_{r\leq n-1}(W_n) &= n, \text{ untuk } 1 \leq r \leq n-1 \\ \lambda_{r\geq n}(W_n) &= \begin{cases} 10, & \text{untuk } n = 5, r \geq n \\ n+3, & \text{untuk untuk} n = 3k+3, k \in N, r \geq n \\ n+4, & \text{untuk } n \text{ lainnya}, r \geq n \end{cases} \end{aligned}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.2.4**;

k. Bilangan kromatik dinamis pewarnaan sisi r-dinamis pada graf Prisma, $\mathbf{P}_n$, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\lambda(\mathbf{P}_n) = \lambda_2(\mathbf{P}_n) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases} \quad \lambda_3(\mathbf{P}_n) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n = 3 \\ 5, & \text{untuk } n \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\lambda_{r\geq 4}(\mathbf{P}_n) = \begin{cases} 9, & \text{untuk } n = 3 \\ 6, & \text{untuk } n = 4k, k \in N \\ 8, & \text{untuk } n = 5, 6, 4k+7, k \in N \\ 7, & \text{untuk } n \text{ lainnya} \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.2.5**;

l. Bilangan kromatik dinamis pewarnaan sisi r-dinamis pada graf Tangga, $L_n, n \geq 3$, adalah:

$$\begin{aligned} \lambda(L_n) = \lambda_2(L_n) &= 3 \\ \lambda_3(L_n) &= 5 \\ \lambda_4(L_n) = \lambda_r(L_n) &= 6 \end{aligned}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.2.6**;

h. Bilangan kromatik dinamis pewarnaan sisi r-dinamis pada graf Sikel, $C_n, n \geq 3$, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\lambda(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\lambda_{r\geq 2}(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 3k, k \in N \\ 4, & \text{untuk } n = 3k+1, k \in N \\ 5, & \text{untuk } n = 3k+2, k \in N \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.2.2**;

m. Bilangan kromatik dinamis pewarnaan sisi r-dinamis pada graf *Friendship*, F_n, adalah:

$$\begin{aligned} \lambda_{r\leq 2n-1}(F_n) &= 2n \\ \lambda_{r\geq 2n}(F_n) &= 2n+1 \end{aligned}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.2.7**;

n. Misalkan G adalah graf hasil operasi amalgamasi dari graf Lintasan P_n, dinotasikan $G = amal(P_n, v, m), n \geq 2, m \geq 3$, maka bilangan kromatik sisi

r-dinamis pada graf G adalah:

$$\begin{aligned}\lambda(amal(P_n, v, m)) = \lambda_2(amal(P_n, v, m)) &= m \\ \lambda_{r\geq 3}(amal(P_n, v, m)) &= m+1\end{aligned}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.2.8**;

o. Jika T adalah graf Pohon, maka berlaku:

$$\chi(C_n + T) = \chi_2(C_n + T) = \chi_3(C_n + T) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 5, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.3.1**;

p. Misalkan G adalah graf yang merupakan hasil operasi *join* graf G_1 dan G_2, maka pada graf G berlaku pewarnaan titik r-dinamis sebagai berikut:

$$\chi(G_1 + G_2) = \chi_2(G_1 + G_2) = \cdots = \chi_r(G_1 + G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$$

dimana $r = \min\{|c(N(v(G_1)))|, |c(N(v(G_2)))|\} + \min\{\chi_{G_1}, \chi_{G_2}\}$, yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.3.2**;

q. Jika G merupakan graf Pohon maka $\lambda_r(G) = \min\{r, \max\{d(u)+d(v)-2\}\}+1$, dimana $r \geq \max\{d(u)+d(v)-2\}\}$, yang telah dibuktikan pada **Teorema 4.3.3**.

Dari penelitian juga terdapat dugaan mengenai pewarnaan titik r-dinamis pada graf $P_n + C_m$ sebagaimana tertulis pada **Dugaan 4.3.1**:
Misalkan G adalah graf yang merupakan hasil operasi *join* graf G_1 dan G_2, maka $\chi_r(G_1 + G_2) \geq \chi_r(G_1) + \chi_r(G_2)$.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul Analisis Pewarnaan r-dinamis pada Graf-graf Khusus. Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Magister Matematika (S2) pada Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (MIPA) Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan tesis ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas MIPA Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Magister Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember;
4. Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I dan Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan tesis ini;
5. Dosen dan Karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya tesis ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tesis ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tesis ini dapat bermanfaat.

Jember, Desember 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMBANG

G	graf
$V(G)$	himpunan titik graf G
$E(G)$	himpunan sisi graf G
$\|V(G)\|$	banyaknya titik graf G
$\|E(G)\|$	banyaknya sisi graf G
N	himpunan bilangan asli
u	titik pada graf
uv	sisi pada graf yang menghubungkan titik u dan v
$N(u)$	himpunan semua tetangga dari u / ketetanggaan dari u
$\|c(N(v))\|$	banyaknya warna ketetanggaan titik u
$d(v)$	derajat titik v
$\delta(G)$	derajat terkecil titik pada graf G
$\triangle\ (G)$	derajat terbesar titik pada graf G
P_n	graf lintasan dengan n titik
C_n	graf sikel dengan n titik
K_n	graf lengkap dengan n titik
$K_{m,n}$	graf bipartit lengkap dengan $m+n$ titik
W_n	graf roda dengan $n+1$ titik
S_n	graf bintang dengan $n+1$ titik
$+$	operasi *join* graf
$\circ$	operasi corona graf
$amal\{G_i, v_{oi}, m\}$	operasi amalgamasi graf G_i terhadap titik v_{oi} sebanyak m salinan
$c(u)$	pewarnaan pada titik u
$\chi(G)$	bilangan kromatik titik graf G
$\chi_d(G)$	bilangan kromatik titik dinamis graf G
$\chi_r(G)$	bilangan kromatik titik r-dinamis graf G
$\lambda(G)$	bilangan kromatik sisi graf G
$\lambda_d(G)$	bilangan kromatik sisi dinamis graf G
$\lambda_r(G)$	bilangan kromatik sisi r-dinamis graf G

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf menjadi salah satu bidang ilmu matematika diskrit yang banyak diminati oleh peneliti. Hal ini dikarenakan kesederhanaan objek yang diteliti pada graf, yaitu titik dan sisi, namun memiliki banyak manfaat pada aplikasi di kehidupan sehari-hari. Graf tidak hanya berguna pada situasi khusus saja, namun juga sangat berguna dalam merepresentasikan berbagai macam situasi.

Situasi-situasi yang ada dalam kehidupan sehari-hari dapat digambarkan dengan sebuah diagram yang terdiri atas himpunan titik yang berpasangan dengan himpunan sisi yang terhubung dengan titik-titik tersebut. Sebagai contoh, kita dapat menggambarkan sebuah graf dimana titik mewakili kota-kota pada suatu wilayah dan sisi mewakili jalan raya (bisa juga sebagai rel atau jalur telepon) yang menghubungkan antarkota dalam wilayah tersebut.

Kita juga bisa menggunakan graf untuk menggambarkan jaringan listrik, misalnya kartu papan sirkuit yang terdapat pada komputer. Jadi, graf dapat digunakan pada setiap situasi dimana terdapat relasi antara benda-benda yang dapat didefinisikan. Bahkan terkadang titik dan sisi pada graf juga dapat mewakili benda-benda yang abstrak, misalnya titik mewakili tahapan-tahapan pada proyek konstruksi dan sisi mewakili hubungan antartahapan pada proyek konstruksi tersebut (Lov*á*sz, 2003:129).

Dalam berbagai bidang matematika, upaya-upaya yang dilakukan untuk menemukan solusi pada permasalahan-permasalahan yang belum terpecahkan telah membawa ilmuwan pada kemajuan ide-ide dan teknik pemecahan masalah. Contohnya saja pada teori graf, permasalahan pada pewarnaan peta yang dikenal dengan sebutan "*Four-Color Problem*" menjadi motivasi tersendiri bagi para peneliti untuk mengembangkannya selama hampir seratus tahun (Bondy dan Murti, 2008:287).

Permasalahan ini merupakan salah satu permasalahan pada topik pewarnaan graf. Adapun topik teori graf lain yang juga banyak dikaji diantaranya adalah pelabelan graf, *spanning trees*, graf planar, jaringan (*networking*), *matching*, *Hamiltonian Cycles*, dan *Eulerian Tours* (Eshghi, 2002:8). Banyak buku teks maupun artikel pada jurnal yang membahas topik-topik tersebut.

Pada penelitian ini akan dikaji salah satu topik pada teori graf, yaitu pewarnaan graf, baik pewarnaan titik maupun pewarnaan sisi. Hal ini dikarenakan telah banyak penelitian yang dilakukan oleh peneliti-peneliti terdahulu mengenai pewarnaan graf. Bahkan hingga saat ini pun penelitian terkait pewarnaan graf masih dilakukan dengan berbagai pengembangannya yang telah divariasi.

Sebagai contoh, penelitian terhadap pewarnaan titik telah dilakukan oleh G. Szeekers dan Herbert S. Wilf pada tahun 1968, yang meneliti tentang pertidaksamaan pada bilangan kromatik graf. Adapun J. A. Bondy pada tahun 1969 meneliti tentang batasan bilangan kromatik pada suatu graf, Peter J. Cameron pada tahun 2007 meneliti tentang bilangan kromatik kuantum pada graf, dan Graeme Kemkes dkk. pada tahun 2010 meneliti tentang bilangan kromatik pada sebarang graf d-reguler.

Penelitian-penelitian pada topik pewarnaan sisi juga telah banyak dikaji. Pada tahun 1977, P. Erd*ö*s dan Robin J. Wilson meneliti tentang indeks kromatik yang berlaku pada hampir keseluruhan graf. Pada tahun 1983, Michael J. Plantholt meneliti tentang kromatik indeks pada graf yang derajat maksimumnya besar. Pada tahun 1984, R.J. Faudree dan J. Sheehan meneliti tentang graf reguler dan bilangan kromatik sisinya. Pada tahun 1995, Fred Galvin mendaftar nilai-nilai kromatik indeks pada pada multigraf bipartit. Adapun pada tahun 1999, A.J.W. Hilton mengemukakan tentang dua konjektur/dugaan pada pewarnaan sisi graf.

Selanjutnya, pada tahun 2001, Bruce Montgomery memperkenalkan konsep baru pada pewarnaan titik graf yang menjadi topik kajian pada tesisnya. Pewarnaan titik yang dimaksud disebut sebagai pewarnaan dinamis. Pada tahun 2002, H. Lai dan B. Montgomery menuangkan konsep pewarnaan dinamis tersebut dalam suatu artikel yang berjudul *Dynamic Coloring of Graphs*. Adapun pada tahun 2003, H. Lai, B. Montgomery, dan H. Poon juga membuat artikel yang berjudul *Upper Bounds of Dynamic Chromatic Number*. Pada kedua artikel tersebut antara lain dikaji tentang bilangan kromatik dinamis pada graf, batas atas pewarnaan dinamis, dan perbandingan antara bilangan kromatik dan bilangan kromatik dinamis. Selain itu, pengembangan konsep pewarnaan dinamis menjadi pewarnaan r-dinamis juga dikaji pada artikel tersebut. Beberapa teorema telah dihasilkan terkait dengan pewarnaan r-dinamis.

Pewarnaan r-dinamis dapat diaplikasikan pada permasalahan jaringan. Contohnya dalam jaringan komunikasi, misalnya dalam suatu ruangan, komputer yang berdekatan harus diberikan sumber daya yang berbeda. Untuk meningkatkan aksesibilitas sumber daya, setiap komputer harus dapat menemukan banyaknya sumber daya yang ada di sekitarnya. Jika semua komputer yang berada di sekitarnya diharuskan memiliki sumber daya yang berbeda, maka sumber daya yang digunakan terlalu banyak. Pewarnaan r-dinamis dapat diaplikasikan pada kasus ini untuk dapat menentukan banyaknya sumber daya yang dibutuhkan sedemikian hingga penggunaan sumber daya tersebut menjadi efektif.

Berdasarkan pengamatan peneliti, dewasa ini penelitian mengenai pewarnaan dinamis dan pewarnaan r-dinamis mulai menunjukkan perkembangannya. Peneliti-peneliti lain berusaha untuk mengkaji lebih dalam dan menghasilkan teorema-teorema baru terkait dengan topik tersebut. Beberapa diantaranya adalah N. Mohanapriya, dkk. (2010) yang meneliti tentang bilangan kromatik dinamis pada graf 4-reguler dengan *girth* 3 dan 4, M. Alishahi (2011) meneliti tentang pewarnaan dinamis pada graf dan hipergraf, S. Kim, dkk. (2012) meneliti tentang pewarnaan dinamis pada graf planar, R. Kang, dkk. (2014) meneliti tentang pewarnaan r-dinamis pada graf *grid* dan S. Jahanbekam, dkk. (2014) meneliti tentang pewarnaan r-dinamis pada graf yang membahas tentang bilangan kromatik, batas-batas pewarnaan r-dinamis, diameter, dan hasil kali *Cartesian*.

Berdasarkan hasil-hasil penelitian yang telah dilakukan oleh para peneliti sebelumnya, pada penelitian ini peneliti tertarik untuk turut mengkaji lebih lanjut mengenai pewarnaan r-dinamis pada graf-graf khusus dan juga pengembangannya pada pewarnaan sisi. Pengembangan yang dimaksud adalah pewarnaan sisi r-dinamis pada graf. Dengan demikian, pada penelitian ini akan dilakukan kajian terhadap pewarnaan titik r-dinamis dan pewarnaan sisi r-dinamis pada graf-graf khusus. Adapun graf-graf khusus yang dimaksud adalah graf d-reguler dan hasil operasi *join*, *crown*, *shackle*, komposisi, dan amalgamasi pada graf Sikel dan Lintasan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan sebelumnya, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

a. Bagaimana pewarnaan titik r-dinamis pada graf-graf khusus (graf d-reguler, Prisma, dan hasil operasi *join* dan *crown* pada graf Sikel dan Lintasan)?

b. Bagaimana pewarnaan sisi r-dinamis pada graf-graf khusus (graf Lintasan, Bintang, Sikel, Tangga, Roda, *Friendship*, Prisma, dan hasil operasi amalgamasi pada graf Lintasan)?

c. Bagaimana analisis hasil pewarnaan titik r-dinamis dan pewarnaan sisi r-dinamis pada graf-graf khusus?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah yang telah dikemukakan sebelumnya, maka tujuan dari penelitian adalah sebagai berikut:

a. Untuk mengetahui pewarnaan titik r-dinamis pada graf-graf khusus (graf d-reguler, Prisma dan hasil operasi *join* dan *crown* pada graf Sikel dan Lintasan).

b. Untuk mengetahui pewarnaan sisi r-dinamis pada graf-graf khusus (graf Lintasan, Bintang, Sikel, Tangga, Roda, *Friendship*, Prisma, dan hasil operasi amalgamasi pada graf Lintasan).

c. Untuk menganalisis hasil pewarnaan titik r-dinamis dan pewarnaan sisi r-dinamis pada graf-graf khusus .

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

a. Menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya mengenai pengembangan pewarnaan r-dinamis, baik titik maupun sisi, pada graf-graf khusus.

b. Membuka peluang bagi peneliti lain untuk melakukan analisis lebih lanjut terhadap hasil penelitian ini.

c. Hasil penelitian ini diharapkan dapat berguna untuk perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah pewarnaan graf.

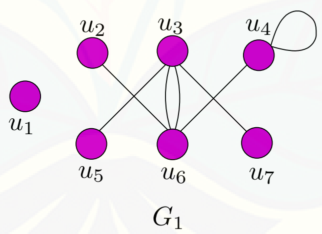
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Graf dan Operasi Graf

2.1.1 Konsep Dasar Teori Graf

Sebuah graf G merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut $\{u, v\}$ dari titik-titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi (Slamin, 2009: 11-12). $V(G)$ disebut himpunan titik dari G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G. Secara sederhana, dapat juga ditulis $G = (V, E)$. Untuk menyederhanakan notasi, sebuah sisi $\{u, v\}$ sering dinotasikan dengan uv.

Ordo dari sebuah graf G adalah banyaknya titik pada G (Slamin, 2009: 12). Sebuah graf G mungkin mengandung *loop*, yaitu sisi yang berbentuk uu, dan/atau sisi ganda, yaitu sisi yang menghubungkan sepasang titik yang sama lebih dari satu. Contoh graf dengan *loop* dan sisi ganda dapat dilihat pada Gambar 2.1. Pada Gambar 2.1, sisi u_4u_4 merupakan *loop* dan sisi u_3u_6 mengandung sisi ganda.



Gambar 2.1 Contoh graf dengan *loop* dan sisi ganda

Jika u dan v adalah titik-titik pada graf G, maka u dikatakan bertetangga/ berdekatan/berdampingan (*adjacent*) dengan v jika terdapat sebuah sisi e yang menghubungkan antara u dan v, yaitu $e = uv$. Selanjutnya, v disebut sebagai tetangga dari u. Himpunan semua tetangga dari u disebut ketetanggaan dari u dan dinotasikan dengan $N(u)$. Adapun sebuah sisi e disebut bersisian/bertemu (*incident*) dengan titik u atau v jika sisi e merupakan penghubung titik u dan v, dan sebaliknya.

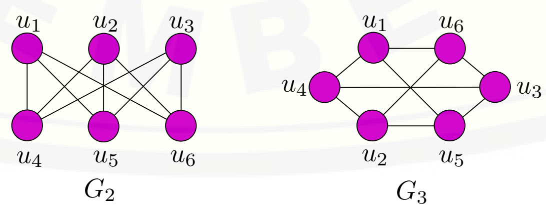
Derajat dari titik v pada G adalah banyaknya titik-titik yang bertetangga dengan v, yaitu jumlah semua tetangga dari v (Slamin, 2009: 13). Jika sebuah titik v mempunyai derajat 0, dengan kata lain v tidak bertetangga dengan sembarang titik yang lain, maka v disebut sebagai titik terasing. Pada Gambar 2.1, titik u_1 pada graf G_1 merupakan titik terasing. Sebuah titik berderajat 1 disebut sebagai titik ujung atau daun. Jika setiap titik dari graf G mempunyai derajat yang sama maka G disebut sebagai graf reguler atau teratur.

Jalan (*walk*) $v_0 - v_l$ pada graf G adalah sebuah barisan $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_l, v_l$ bergantian titik dan sisi sedemikian hingga $e_i = v_{i-1}v_i$ untuk setiap $i, 1 \leq i \leq l$.Panjang jalan adalah banyaknya sisi pada jalan tersebut. Jalan $v_0 v_l$ dikatakan tertutup jika $v_0 = v_l$. Jika semua titik dari jalan $v_0 - v_l$ berbeda maka jalan tersebut dinamakan lintasan. Sikel adalah lintasan yang tertutup.

Jarak dari titik u ke titik v, dinotasikan dengan $\delta(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v. Diameter dari graf G adalah jarak terpanjang diantara sembarang dua titik pada G. Girth dari graf G adalah panjang sikel terpendek pada G.

Misalkan terdapat dua buah graf, yaitu $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$. G_1 dan G_2 disebut isomorfis jika terdapat fungsi bijektif $f : V_1 \to V_2$ sedemikian hingga $\{v_1, v_2\} \in E_1$ jika dan hanya jika $\{f(v_1), f(v_2)\} \in E_2$. f disebut isomorfisme. Jika G_1 dan G_2 isomorfis maka dinotasikan dengan $G_1 \cong G_2$ (Guichard, 2015: 66).

Secara umum, pada kasus graf yang berukuran besar (jumlah titik dan sisinya), akan sulit untuk menentukan keisomorfisan dua buah graf. Oleh karena itu, untuk mengetahui keisomorfisan dua buah graf, hal pertama yang harus dilakukan adalah memastikan bahwa kedua graf memiliki urutan derajat yang sama. Setelah itu, dilakukan analisis lebih lanjut untuk memastikan apakah kedua graf tersebut isomorfis atau tidak (Hartsfield, 1990: 14).



Gambar 2.2 Contoh dua buah graf isomorfis

Sebuah graf H disebut subgraf dari G jika setiap titik dari H merupakan titik dari G dan setiap sisi dari H merupakan sisi dari G. Dengan kata lain, $V(H) \subset V(G)$ dan $E(H) \subset E(G)$ (Slamin, 2009: 15). Jika H merupakan subgraf dari G maka G disebut sebagai supergraf dari H. Dalam bentuk notasi ditulis $G \supset H$. Gabungan dari dua subgraf pada G, yaitu G_1 dan G_2, adalah subgraf $G_1 \cup G_2$ dimana himpunan titik-titiknya $V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi-sisinya $E(G_1) \cup E(G_2)$. Sebaliknya, irisan dari dua subgraf pada G, yaitu G_1 dan G_2, adalah subgraf $G_1 \cap G_2$ dimana himpunan titik-titiknya $V(G_1) \cap V(G_2)$ dan himpunan sisi-sisinya $E(G_1) \cap E(G_2)$ (Graham, 1995: 7). Perhatikan graf G_3 pada Gambar 2.2, sikel C_4, dimana $V(C_4) = \{u_1, u_2, u_4, u_6\}$, dan C_6, dimana $V(C_6) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$, merupakan dua contoh subgraf dari G_3.

2.1.2 Klasifikasi Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Salah satunya yaitu graf dapat dikelompokkan berdasarkan ada tidaknya sisi ganda dan *loop*, jumlah titik, orientasi arah pada sisi atau berdasarkan keterhubungan titik.

Berdasarkan ada tidaknya *l*oop atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

a. Graf sederhana (*simple graph*)

   Graf sederhana merupakan graf yang tidak mengandung *loop* maupun sisi ganda. Pada Gambar 2.3, graf G_4 merupakan graf sederhana.

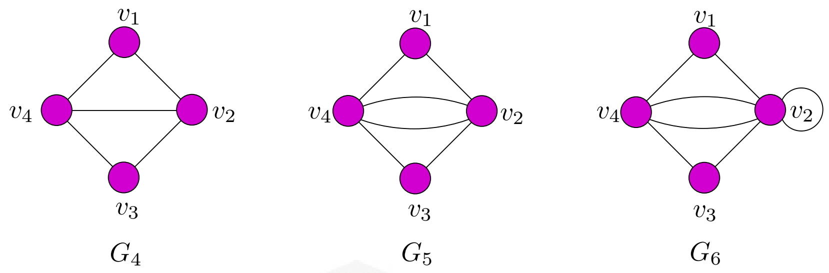
b. Graf tak sederhana (*unsimple graph*)

   Graf tak sederhana adalah graf yang mengandung *loop* atau sisi ganda. Ada dua macam graf tak sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda, baik sisi ganda yang menghubungkan sepasang titik maupun sisi ganda yang menghubungkan lebih dari dua *loop*. Graf semu adalah graf yang mengandung *loop*. Pada Gambar 2.3, graf G_5 merupakan graf ganda dan graf G_6 merupakan graf semu.

Berdasarkan jumlah titik pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

a. Graf berhingga (*limited graph*)

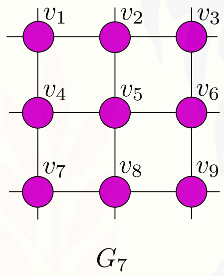
   Graf berhingga adalah graf yang jumlah titiknya,n, berhingga. Graf-graf pada Gambar 2.3 merupakan contoh graf berhingga.



Gambar 2.3 Contoh graf sederhana dan tak sederhana

b. Graf tak berhingga (*unlimited graph*)

Graf tak berhingga adalah graf yang jumlah titiknya,n, tidak berhingga banyaknya. Pada Gambar 2.4, graf G_7 merupakan graf tak berhingga.



Gambar 2.4 Contoh graf tak berhingga

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka graf dapat dibedakan menjadi dua jenis:

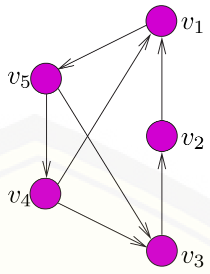
a. Graf tak berarah (*undirected graph*)

Graf tak berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $(u, v) = (v, u)$. Gambar 2.3 dan Gambar 2.4 merupakan contoh-contoh graf tak berarah.

b. Graf berarah (*directed graph*)

Graf berarah, disebut juga digraf, adalah graf yang pada setiap sisinya diberika orientasi arah. Pada graf berarah, (u, v) dan (v, u) menyatakan dua buah sisi berarah yang berbeda. Dengan kata lain, pada graf berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan dengan sisi diperhatikan atau $(u, v) \neq (v, u)$. Untuk sisi berarah (u, v), titik u dinamakan titik asal (*ini-*

tial vertex) dan titik v dinamakan titik terminal (*terminal vertex*). Pada Gambar 2.5, G_8 merupakan contoh graf berarah.



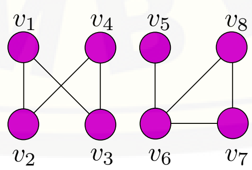
G_8

Gambar 2.5 Contoh graf berarah

Berdasarkan keterhubungan titik pada suatu graf, maka graf dapat dibedakan menjadi dua jenis:

a. Graf terhubung (*connected graph*)
   Suatu graf dikatakan terhubung jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j didalam himpunan V terdapat lintasan dari v_i ke v_j. Graf yang hanya terdiri dari satu titik tetap disebut graf terhubung karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri. Gambar 2.3 merupakan contoh graf-graf terhubung.

b. Graf tidak terhubung (*disconnected graph*)
   Suatu graf dikatakan tidak tehubung jika ada titik v_i dan v_j didalam himpunan V yang tidak membentuk lintasan dari v_i ke v_j. Contoh graf tidak terhubung dapat dilihat pada Gambar 2.6.



G_9

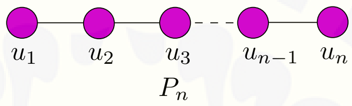
Gambar 2.6 Contoh graf tidak terhubung

2.1.3 Graf-graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karekteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Berikut ini adalah beberapa contoh graf khusus.

a. Graf Lintasan (*Path*)

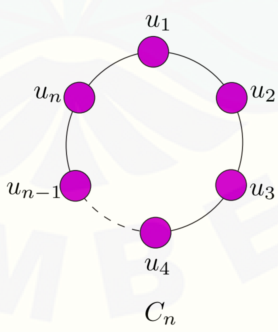
Graf lintasan, dinotasikan dengan P_n, merupakan suatu graf dengan himpunan titik $V(P_n) = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ dan himpunan sisi $E(P_n) = \{u_1u_2, u_2u_3, \ldots, u_{n-1}u_n\}$ (Acharya dan Mehta, 2014: 140). Contoh dari graf lintasan bisa dilihat pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Graf lintasan

b. Graf Sikel (*Cycle*)

Graf sikel, dinotasikan dengan C_n dimana $n \geq 3$, merupakan graf yang memiliki himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{u_nu_1\}$ (Acharya dan Mehta, 2014: 140). Gambar 2.8 merupakan contoh graf sikel.

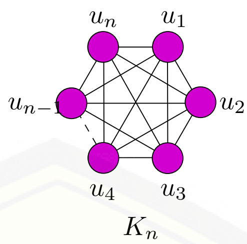


Gambar 2.8 Graf sikel

c. Graf Lengkap *(Complete Graph)*

Graf lengkap adalah graf yang setiap titiknya terhubung dengan semua titik yang lain dengan hanya satu sisi (Wibisono, 2008:128). Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n. Dengan demikian, himpunan titik $V(K_n) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dan himpunan sisinya $E(K_n) = \{u_nu_1\}$. Pada

K_n, $|V(K_n)| = n$ dan $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$. Gambar 2.9 menunjukkan contoh gambar graf lengkap.



Gambar 2.9 Graf lengkap

d. Graf Bipartit Lengkap *(Complete Bipartite Graph)*

Graf bipartit lengkap, adalah sebuah graf yang memenuhi 3 (tiga) kondisi berikut:

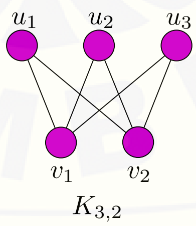
(a) memiliki himpunan titik $V(G) = A \cup B$, dimana A dan B merupakan gabungan himpunan tidak kosong,

(b) A dan B adalah himpunan yang independen,

(c) Setiap titik pada A bertetangga dengan setiap titik pada B.

(Destacamento, dkk., 2014: 2)

Graf bipartit lengkap dinotasikan dengan $K_{m,n}$, dimana m dan n merupakan banyaknya titik di kedua partisi. Pada $K_{m,n}$, $|V(K_{m,n})| = m + n$ dan $|E(K_{m,n})| = m \times n$. Contoh graf bipartit lengkap dapat dilihat pada Gambar 2.10.

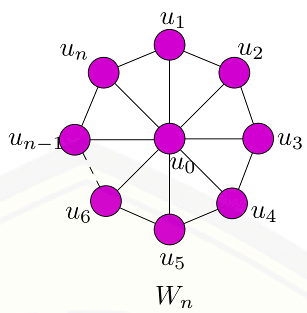


Gambar 2.10 Contoh graf bipartit lengkap, $K_{3,2}$

e. Graf Roda (*Wheel Graph*)

Graf roda, dinotasikan dengan W_n, didefiniskan sebagai graf yang mempunyai himpunan titik $V(W_n) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ sedemikian hingga $u_1, u_2, \ldots,$ u_n membentuk sikel dan titik u_0 yang bertetangga dengan $u_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

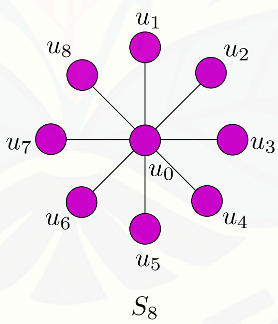
Dari definisi, dapat dilihat bahwa $|V(W_n)| = n + 1$ dan $|E(W_n) = 2n|$. Gambar 2.11 merupakan gambar graf roda.



Gambar 2.11 Graf roda

f. Graf Bintang (*Star Graph*)

Graf bintang, dinotasikan dengan S_n, merupakan graf berorder $n + 1$ yang mempunyai himpunan titik $V(S_n) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{u_0\}$ dan himpunan sisi $E(S_n) = \{u_0u_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Titik u_0 biasanya disebut dengan titik pusat yang bertetangga dengan setiap titik yang lain. Derajat titik u_0 adalah n, sedangkan derajat $u_i, i = 1, 2, \ldots, n$ adalah 1. Contoh gambar graf bintang dapat dilihat pada Gambar 2.12.



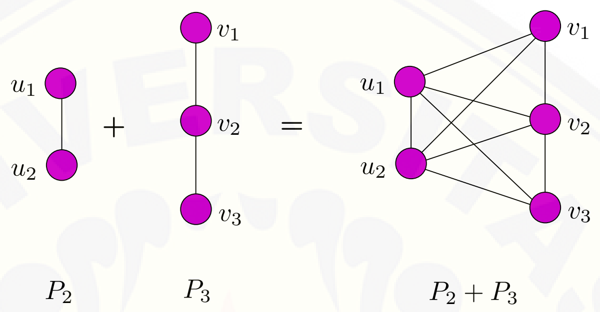
Gambar 2.12 Graf bintang

2.1.4 Operasi Graf

Operasi graf merupakan salah satu teknik mendapatkan suatu jenis graf baru dengan cara melakukan operasi terhadap dua atau lebih graf. Ada beberapa macam operasi graf yang telah dikembangkan oleh peneliti. Berikut ini adalah penjelasan beberapa macam operasi graf yang dilengkapi dengan contoh.

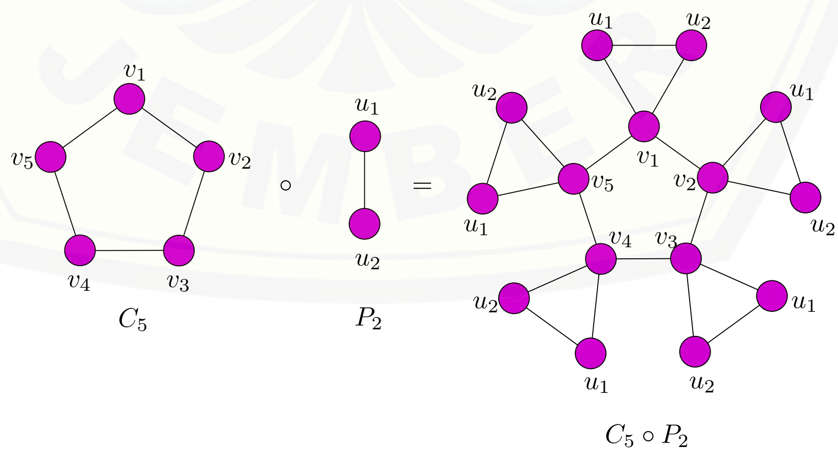
Definisi 2.1.1. *Join dari graf G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$, merupakan graf yang terdiri dari gabungan graf $G_1 \cup G_2$ dan semua sisi yang menghubungkan antara V_1 dan V_2 (Harary, 1969:21).*

Himpunan titik pada *join* $G_1 + G_2$ adalah $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$, sedangkan himpunan sisi pada *join* G_1+G_2 adalah $E(G_1+G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv|u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$. Contoh operasi *join* graf dapat dilihat pada Gambar 2.1.4.



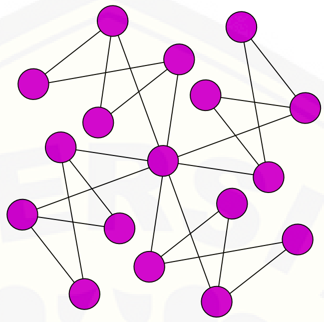
Gambar 2.13 Operasi *Join* graf $P_2 + P_3$

Definisi 2.1.2. *Crown / Corona dari graf G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $G_1 \circ G_2$, diperoleh dengan cara mengambil sebuah duplikat dari G_1 dan sebanyak $|V(G_1)|$ duplikat dari G_2, kemudian menghubungkan setiap titik pada duplikat ke-i dari G_2 menuju titik ke-i graf G_1, dimana $i = 1, 2, 3, \ldots, |V(G_1)|$ (Yeh dan Gutman, 1994: 360).*



Gambar 2.14 Contoh operasi *corona* graf C_5 dan P_2

Definisi 2.1.3. *Misalkan* $\{G_i\}$ *merupakan kumpulan graf berhingga dan masing-masing* G_i *mempunyai titik tertentu yang sama, yakni* v_{oi}*, yang disebut sebagai titik terminal. Amalgamasi pada* G_i*, dinotasikan dengan* $amal\{G_i, v_{oi}\}$*, diperoleh dengan cara menyatukan seluruh graf* G_i *pada titik terminalnya (Carlson, dalam Maryati, dkk., 2010: 339).*



$amal(K_{2,3}, 4)$

Gambar 2.15 Contoh operasi amalgamasi pada graf

2.2 Pewarnaan Graf

Pewarnaan sebuah peta dapat dilakukan dalam 3 (tiga) cara, yaitu:

a. mewarnai titik,

b. mewarnai rusuk/sisi,

c. mewarnai wilayah.

(Wibisono, 2008:147)

Ada beberapa prinsip dalam mewarnai peta, yaitu:

a. Banyak warna yang digunakan harus seminimum mungkin;

b. Dua buah titik yang terhubung oleh satu atau lebih rusuk tidak boleh diberi warna yang sama (pewarnaan titik);

c. Dua buah rusuk atau lebih yang bertemy pada sebuah titik tidak boleh diberi warna yang sama (pewarnaan rusuk/sisi);

d. Dalam mewarnai peta pakailah sebuah warna secara optimum, artinya warna kedua digunakan setelah warna pertama tidak dapat digunakan lagi, demikian seterusnya sampai semua titik/sisi/wilayah terwarnai semua.

Pewarnaan titik pada graf G merupakan pemberian warna pada titik-titik graf G, satu warna untuk setiap titik, sehingga titik-titik yang bertetangga diwarnai dengan warna berbeda (Chartrand dan Zhang, 2009:147). Adapun warna yang digunakan dapat berupa elemen dari sebarang himpunan, warna yang sebenarnya (seperti: merah, biru, kuning, hijau), ataupun bilangan bulat positif $(1, 2, 3, \ldots, k)$. Alasan menggunakan bilangan bulat positif sebagai warna yaitu karena kita sering tertarik pada angka dari warna yang digunakan. Selain itu, juga lebih memudahkan kita jika membutuhkan jenis warna dalam jumlah yang besar. Dengan demikian, pewarnaan titik dapat dianggap sebagai fungsi $c : V(G) \rightarrow N$, dimana N adalah bilangan bulat positif, sedemikian hingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v merupakan dua titik yang bertetangga.

Jika setiap warna yang digunakan merupakan salah satu dari sejumlah k warna yang diberikan, maka pewarnaannya disebut sebagai k-warna. Dalam suatu graf, beberapa titik yang tidak bertetangga dapat dimungkinkan berwarna sama. Bilangan bulat positif k yang paling minimum untuk mewarnai titik pada graf G disebut sebagai bilangan kromatik graf G dan dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Pewarnaan sisi pada graf G merupakan pemberian warna pada sisi-sisi graf G, satu warna untuk setiap sisi pada graf G, dimana sisi-sisi yang bertetangga diberikan warna yang berbeda (Chartrand dan Zhang, 2009:249). Seperti halnya pada pewarnaan titik, pewarnaan sisi dapat digambarkan sebagai fungsi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ sedemikian hingga $c(e) \neq c(f)$ untuk setiap dua sisi e dan f yang bertetangga pada G. Bilangan bulat positif k yang paling minimum untuk mewarnai sisi pada graf G disebut sebagai indeks kromatik (atau disebut juga bilangan kromatik sisi) graf G dan dinotasikan dengan $\chi'(G)$.

Pada perkembangannya, terdapat beberapa variasi mengenai pewarnaan titik dan sisi pada graf. Salah satunya yaitu pewarnaan r-dinamis pada graf yang diperkenalkan oleh Bruce Montgomery pada tahun 2001. Pewarnaan r-dinamis akan menjadi topik utama pada penelitian ini.

2.3 Pewarnaan r-dinamis pada Graf

2.3.1 Pewarnaan Titik r-dinamis pada Graf

Pewarnaan titik adalah pemberian warna pada setiap titik yang berada dalam suatu graf sedemikian hingga tidak ada warna yang sama antardua titik yang bertetangga. Suatu graf G disebut $k - colorable$ jika dibutuhkan k warna untuk memberikan pewarnaan pada graf G, dimana k merupakan bilangan bulat positif. Nilai minimum untuk k yang dibutuhkan pada pewarnaan graf G disebut bilangan kromatik pada graf G yang disimbolkan dengan $\chi(G)$.

Pewarnaan r-dinamis merupakan pengembangan dari pewarnaan k-warna dinamis yang diperkenalkan oleh Montgomery pada tahun 2002. Pewarnaan k-warna dinamis pada graf G merupakan pewarnaan titik pada graf G sebanyak k warna sedemikian hingga setiap titik berderajat minimum dua pada G setidaknya memiliki dua warna berbeda dengan titik-titik ketetanggaannya. Nilai k terkecil dimana graf G memiliki pewarnaan k-warna dinamis disebut sebagai bilangan kromatik dinamis, disimbolkan dengan $\chi_d(G)$.

Ide mengenai pewarnaan k-warna dinamis berasal dari pemikiran bahwa dalam mewarnai suatu graf, kita tidak hanya dapat memberikan satu warna berbeda pada titik-titik bertetangga pada graf (seperti pewarnaan titik graf pada umumnya). Pada kasus khusus, kita dapat mewarnai titik-titik pada graf dengan beberapa warna berbeda yang merepresentasikan situasi dimana suatu individu memiliki keragaman yang lebih besar pada bentuk hubungannya dengan individu lain. Dengan demikian, keseluruhan interaksi tidak begitu terbatas melainkan bersifat lebih dinamis.

Oleh karena itu, pewarnaan dinamis pada graf didefinisikan sebagai pewarnaan titik pada graf dimana setiap titik berderajat minimal dua memiliki lebih dari satu warna terhadap titik-titik ketetanggaannya. Permasalahan-permasalahan yang terdapat pada kasus pewarnaan graf juga dimungkinkan dapat dipertimbangkan pada kasus pewarnaan dinamis, dimana terdapat sifat-sifat tambahan yang diberikan.

Suatu graf G memiliki himpunan titik $V = (G)$, himpunan sisi $E = E(G)$, dan n menyatakan banyaknya titik, yaitu $|V|$. Himpunan ketetanggaan suatu titik v, dinotasikan dengan $N(v)$, merupakan himpunan titik-titik yang bertetangga dengan titik v. Derajat dari suatu titik v dinotasikan dengan $d(v)$, derajat titik yang minimum pada graf G dinotasikan dengan $\delta = \delta(G)$, dan derajat titik yang maksimum pada graf G dinotasikan dengan $\triangle = \triangle\ (G)$.

Pewarnaan k-warna pada graf G merupakan pemberian sejumlah k warna pada titik-titik graf G, yakni $1, 2, 3, \ldots, k$, dan disebut tepat (*proper*) jika tidak ada warna yang sama yang diberikan pada dua titik yang bertetangga. Bilangan kromatik, $\chi = \chi(G)$, merupakan nilai k yang minimal agar graf G memiliki pewarnaan k-warna yang tepat. Pewarnaan yang demikian disebut sebagai pewarnaan

χ-warna pada graf G.

Definisi 2.3.1. *Pewarnaan dinamis didefinisikan sebagai pewarnaan yang tepat (proper) sehingga setiap titik berderajat minimal dua mempunyai lebih dari satu warna yang berbeda pada setiap titik-titik ketetanggaannya. Pewarnaan dinamis merupakan suatu pemetaan c dari V ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:*

a. *jika* $uv \in E(G)$ *maka* $c(u) \neq c(v)$, *dan*

b. $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{2, d(v)\}$.

(Lai dan Montgomery, 2002: 2)

Bilangan kromatik dinamis, dinotasikan dengan $\chi_d = \chi_d(G)$, merupakan nilai k yang minimal yang diperoleh agar graf G memenuhi kondisi pewarnaan k-warna dinamis. Pada tahun 2002 dan 2003, Montgomery dan Lai telah memaparkan hasil-hasil penemuannya mengenai bilangan kromatik dinamis pada graf lengkap, graf bipartit legkap, dan graf sikel. Selain itu, mereka juga menjelaskan mengenai batas atas bilangan kromatik dinamis dan juga perbandingan antara χ dan χ_d. Berikut beberapa teorema yang dihasilkan.

Teorema 2.3.1. *Jika* $\triangle \leq 3$ *maka* $\chi_d(G) \leq 4$, *kecuali untuk* $G = C_5$, $\chi_d(C_5) = 5$ *(Lai, dkk.: 2003:194).*

Teorema 2.3.2. *Jika* $\triangle \geq 4$ *maka* $\chi_d(G) \leq \triangle + 1$ *(Lai, dkk.: 2003:194).*

Teorema 2.3.3. $\chi_d(K_{1,1}) = 2, \chi_d(K_{1,m}) = 3$, *dimana* $m \geq 2$, *dan* $\chi_d(K_{m,n}) = 4$, *dimana* $m, n \geq 2$; $\chi_d(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = k$, *dimana* $k \geq 3$ *(Lai, dkk.: 2003:194).*

Pewarnaan dinamis pada akhirnya berkembang menjadi pewarnaan r-dinamis dengan cara menggeneralisasikan konsep pewarnaan dinamis. Adapun pengertian mengenai pewarnaan r-dinamis dapat dilihat pada Definisi 2.3.2.

Definisi 2.3.2. *Pewarnaan r-dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari V ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:*

a. *jika* $uv \in E(G)$ *maka* $c(u) \neq c(v)$, *dan*

b. $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$.

(Lai dan Montgomery, 2002: 12)

Nilai k yang minimal sehingga graf G memenuhi pewarnaan k-warna r-dinamis disebut sebagai bilangan kromatik r-dinamis, yang dinotasikan dengan $\chi_r(G)$. Bilangan kromatik pada pewarnaan 1-dinamis merupakan bilangan kromatik pada $\chi(G)$. Adapun bilangan kromatik 2-dinamis diperkenalkan oleh Montgomery sebagai bilangan kromatik dinamis. Dia menduga bahwa jika G merupakan graf reguler, maka $\chi_2(G) \leq \chi(G) + 2$.

Berdasarkan kedua kondisi pada Definisi 2.3.2, dapat dilihat bahwa $\chi_r(G) \geq \min\{r, \triangle\} + 1$. Untuk setiap pewarnaan r-dinamis pada graf G juga merupakan pewarnaan t-dinamis pada graf G, dimana $r > t \geq 1$. Dengan demikian, jika $r > t \geq 1$ maka berlaku $\chi_r(G) \geq \chi_t(G)$ untuk setiap graf G (Lai dan Montgomery, 2002: 12).

Pada penelitian yang dilakukan, Montgomery beberapa teorema yang berkaitan dengan pewarnaan r-dinamis. Selain itu, Taherkhani(2014) juga melakukan penelitian mengenai bilangan kromatik r-dinamis pada graf yang menghasilkan beberapa teorema.

Teorema 2.3.4. *Jika $r \geq 2$ maka*

$$\chi_r(C_n) = \begin{cases} 5, & \text{jika } n = 5, \\ 3, & \text{jika } n = 3k, k \geq 1 \\ 4, & n \text{ lainnya} \end{cases}$$

(Lai dan Montgomery, 2002: 12).

Teorema 2.3.5. *Untuk setiap graf pohon G, berlaku $\chi_r(G) = \min\{\triangle, r\} + 1$ (Lai dan Montgomery, 2002: 13).*

Teorema 2.3.6. *Jika $k \geq r + 1$ maka $\chi_r(K_{i_1,\ldots,i_k} = k$ untuk setiap $i_j \geq 1$ (Lai dan Montgomery, 2002: 13).*

Suatu graf G disebut sebagai r-normal jika $\chi_r(G) = \chi(G)$ (Lai dan Montgomery, 2002: 13). Untuk setiap sikel C_n, dimana n ganjil dan kelipatan 3, merupakan r-normal, dimana $r \geq 2$. Graf lengkap juga merupakan r-normal untuk $r \geq 2$. Adapun graf pohon yang termasuk r-normal untuk setidaknya satu nilai r adalah K_1 dan K_2.

Teorema 2.3.7. *Hanya graf lengkap K_n dan graf sikel C_n, dimana panjang sikel merupakan kelipatan 3, yang merupakan graf r-normal untuk setiap $r \geq 2$ (Lai dan Montgomery, 2002: 13).*

Teorema 2.3.8. *Jika pada setiap titik v graf G terdapat K_k, dimana $k \geq \min\{r, d(v)\} + 1$, maka G merupakan r-normal (Lai dan Montgomery, 2002: 14).*

Teorema 2.3.9. *Jika pada setiap titik v graf G terdapat K_k, dimana $k \geq \min\{r, d(v)\} + 1$, maka G merupakan r-normal (Lai dan Montgomery, 2002: 14).*

Teorema 2.3.10. *Jika $\delta \geq \lfloor \frac{(r-1)n}{r} \rfloor + 1$ maka G merupakan graf r-normal. Batas bawah pada δ merupakan kemungkinan terbaik (Lai dan Montgomery, 2002: 14).*

Teorema 2.3.11. $\forall r \geq 2, \chi_r(G) = n$ *jika dan hanya jika setiap dua titik yang tidak bertetangga pada G, bertetangga dengan sebuah titik yang berderajat maksimum r (Lai dan Montgomery, 2002: 14).*

Teorema 2.3.12. *Jika $\chi_r(G) = n$ maka $G = K_n$ atau $n \leq r^2 + 1$. Jika $n = r^2 + 1$ maka G merupakan graf r-reguler (Lai dan Montgomery, 2002: 15).*

Teorema 2.3.13. $\chi_2(G) - \chi(G) \leq \lceil e\frac{\triangle}{\delta} \log(2e(\triangle^2 + 1)) \rceil$ *(Taherkhani, 2014:6).*

Teorema 2.3.14. *Batas atas $\chi_r(G)$ adalah $\chi(G) + (r-1)\lceil e\frac{\triangle}{\delta} \log(2er(\triangle^2 + 1)) \rceil$, dimana $2 \leq r \leq \frac{\delta}{\log(2er(\triangle^2+1))}$ dan e bilangan logaritma natural (Taherkhani, 2014:7).*

Untuk mendapatkan nilai dari bilangan kromatik titik dinamis, Jahanbekam, dkk. merumuskannya dalam suatu persamaan pada Observasi 2.3.1 dan Observasi 2.3.2 sebagai berikut.

Observasi 2.3.1. *Selalu berlaku $\chi(G) = \chi_1(G) \leq \cdots \leq \chi_{\triangle(G)}(G) = \chi(G^2)$. Jika $r \geq \triangle(G)$ maka $\chi_r(G) = \chi_{\triangle(G)}(G)$.*

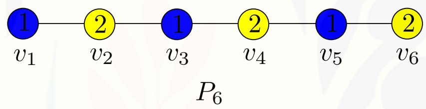
Observasi 2.3.2. $\chi_r(G) \geq \min\{\triangle(G), r\} + 1$ *dan hal ini sudah jelas.*

Bukti. Ketetanggaan dari sebuah titik pada graf G yang mempunyai derajat tertinggi membutuhkan $\min\{\triangle(G), r\} + 1$ warna. Jika G adalah graf Pohon. Misalkan x adalah salah satu titik pada graf G yang disebut sebagai akar. Berikan warna pada titik-titik yang lain secara keseluruhan dengan warna-warna yang berbeda dari titik x, maka warna yang dibutuhkan adalah sebanyak $\min\{\triangle(G), r\} + 1$. $\square$

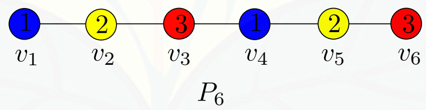
i	$c(v_i)$	$\lvert c(N(v_i))\rvert$	r	$d(v_i)$	$\min\{r, d(v_i)\}$	$\lvert c(N(v_i))\rvert \geq \min\{r, d(v_i)\}$
1	1	1	1	1	1	**YA**
2	2	1	1	2	1	**YA**
3	1	1	1	2	1	**YA**
4	2	1	1	2	1	**YA**
5	1	1	1	2	1	**YA**
6	2	1	1	1	1	**YA**

Tabel 2.1 Pewarnaan titik 1-dinamis pada P_6

Selanjutnya, pewarnaan r-dinamis disebut dengan pewarnaan titik r-dinamis dan bilangan kromatik r-dinamis disebut dengan bilangan kromatik titik r-dinamis. Hal ini untuk membedakan antara pewarnaan titik dan sisi r-dinamis karena pada penelitian ini juga akan diteliti tentang pewarnaan sisi r-dinamis. Contoh pewarnaan titik r-dinamis pada graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.16 dan Gambar 2.17.



Gambar 2.16 Pewarnaan titik 1-dinamis pada P_6



Gambar 2.17 Pewarnaan titik 2-dinamis pada P_6

2.3.2 Pewarnaan Sisi r-dinamis pada Graf

Pewarnaan sisi r-dinamis merupakan perluasan konsep dari perwanaan titik r-dinamis. Definisi pewarnaan sisi r-dinamis dikembangkan dari definisi pada pewarnaan titik r-dinamis yang disesuaikan dengan kondisi/syarat pada pewarnaan sisi graf.

Definisi 2.3.3. *Pewarnaan sisi r-dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari E ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:*

a. jika $e = uv, f = vw \in E(G)$ maka $c(e) \neq c(f)$, dan

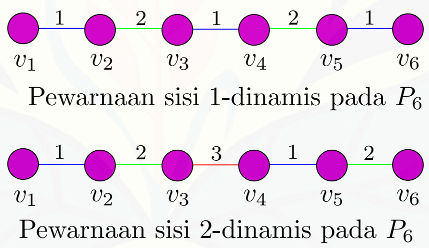
i	$c(v_i)$	$\lvert c(N(v_i))\rvert$	r	$d(v_i)$	$\min\{r, d(v_i)\}$	$\lvert c(N(v_i))\rvert \geq \min\{r, d(v_i)\}$
1	1	1	2	1	1	**YA**
2	2	2	2	2	2	**YA**
3	3	2	2	2	2	**YA**
4	1	2	2	2	2	**YA**
5	2	2	2	2	2	**YA**
6	3	2	2	1	2	**YA**

Tabel 2.2 Pewarnaan titik 2-dinamis pada P_6

b. $\forall e = uv \in E(G), |c(N(e))| \geq \min\{r, d(v) + d(u) - 2\}$.

Nilai k yang minimal sehingga graf G memenuhi pewarnaan k-warna sisi r-dinamis disebut sebagai bilangan kromatik sisi r-dinamis, yang dinotasikan dengan $\lambda_r(G)$. Bilangan kromatik pada pewarnaan 1-dinamis merupakan bilangan kromatik pada $\lambda(G)$. Adapun bilangan kromatik sisi 2-dinamis disebut sebagai bilangan kromatik sisi dinamis, $\lambda_d(G)$.

Gambar 2.18 merupakan contoh pewarnaan sisi 1-dinamis dan 2-dinamis pada graf lintasan P_n.



Gambar 2.18 Pewarnaan sisi r-dinamis pada P_6

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik, yang diawali dengan istilah yang tidak didefinisikan dan istilah yang didefinisikan, kemudian dapat disusun pernyataan pangkal yang biasa disebut aksioma atau postulat. Setelah itu, disusun teorema-teorema ataupun definisi-definisi. Adapun teorema yang disusun harus dibuktikan melalui proses deduktif sehingga kebenarannya berlaku secara umum dalam ruang lingkupnya. Dalam proses deduktif juga mungkin diawali dengan proses induktif yang meliputi penyusunan konjektur, model matematika, analogi dan atau generalisasi melalui pengamatan terhadap suatu data.

Dengan demikian, pada penelitian ini akan didapatkan teorema-teorema ataupun definisi-definisi baru yang diperoleh dari hasil analisis lebih lanjut terhadap teorema-teorema dan definisi-definisi yang telah ada sebelumnya. Penelitian ini pada prosesnya juga menggunakan metode pendeteksian pola *(pattern recognition)*, yaitu dengan merumuskan bagaimana pola pewarnaan r-dinamis sedemikian hingga diperoleh bentuk pola umumnya.

3.2 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian yang akan dilakukan terkait analisis pewarnaan r-dinamis pada graf-graf khusus adalah sebagai berikut:

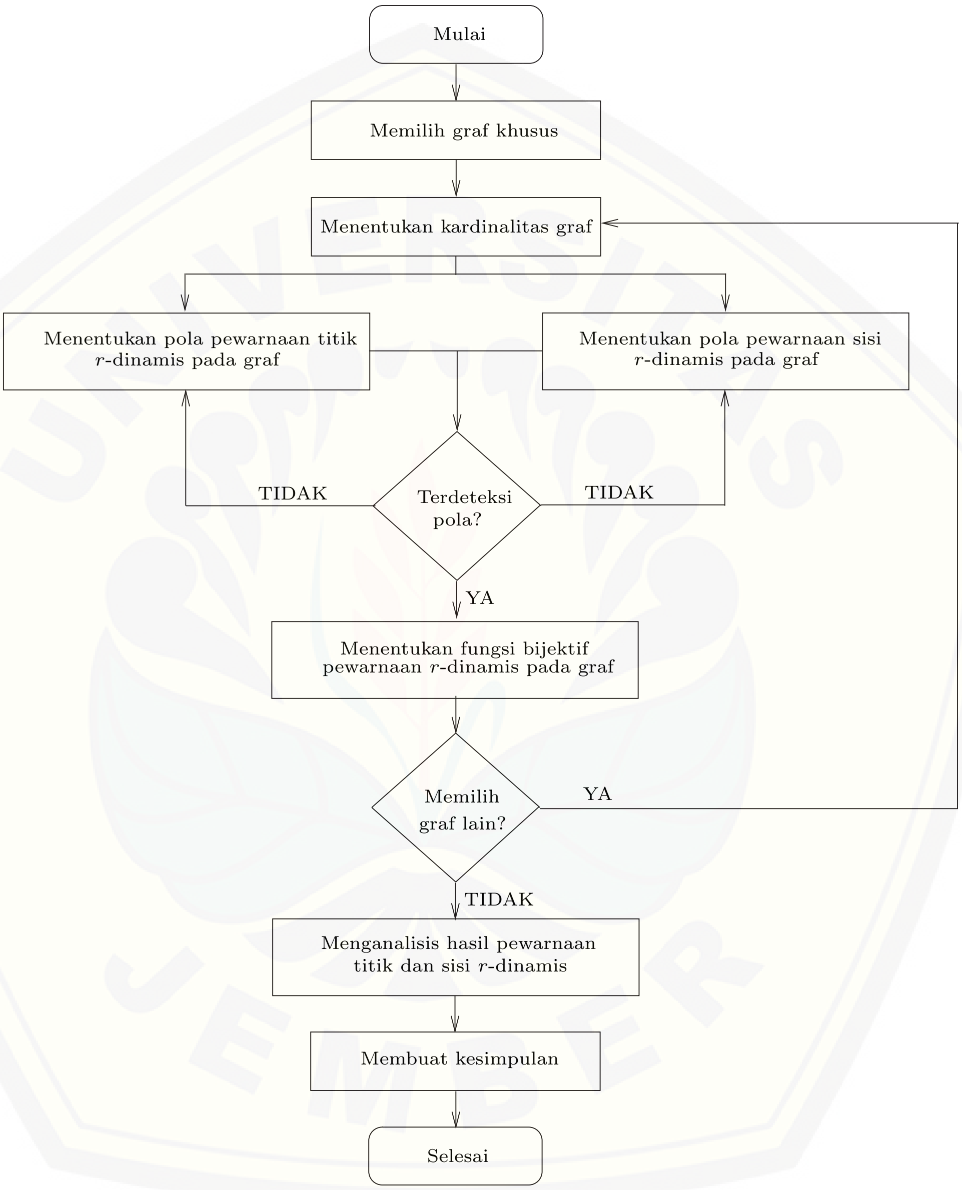
a. memilih graf khusus dan menentukan kardinalitas graf,

b. menentukan pewarnaan titik r-dinamis dan pewarnaan sisi r-dinamis pada masing-masing graf khusus,

c. menentukan fungsi pewarnaan titik r-dinamis dan pewarnaan sisi r-dinamis pada masing-masing graf khusus sehingga diperoleh teorema-teorema,

d. menganalisis hasil pewarnaan titik dan sisi r-dinamis pada graf khusus.

Adapun skema penelitian ini dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Diagram alur penelitian