



SERTIFIKAT

14.5082.3012015

Diberikan Kepada
MUHLISATUL MAHMUDAH
Universitas Negeri Jember

Alas perlesaiannya sebagai

PEMAKALAH

Dalam Seminar Nasional Matematika dan Pembelajaran
dengan Tema *Peranan Matematika dalam Membentuk dan Membangun Daya Saing dan Karakter Bangsa*
yang diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Malang Tanggal 5 September 2015
Judul Makalah

*On Super Edge-Antimagicness of Generalized Starlike Fan Graph and its Application for a
Cryptography*

Malang, 5 September 2015



Universitas Negeri Malang

[Signature]
Dr. Agus Santoro, M.Si
NIP. 19612211981031031



Ketua Panitia

Dr. Ery Haryanto, M.Si
NIP. 195305081962031004

Super Edge Antimagic Total pada Generalisasi Shackle Graf Kipas dan Aplikasinya dalam Pengembangan Cryptosystem (On super edge-antimagicness of generalized shackle of fan and its application for a cryptosystem)

M. Mahmudah², Dafik^{1,3}, Slamin^{1,4}

¹CGANT - University of Jember

²Department of Mathematics - University of Jember

³Department of Mathematics Education - University of Jember

⁴Department of Information System - University of Jember
maxlisa742@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id, slamin@unej.ac.id

2010 Mathematics Subject Classification: 05C78

Abstract

A graph G of order p and size q is called an (a, d) -edge-antimagic total if there exist a bijection $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ such that the edge-weights, $w(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)$, $uv \in E(G)$, form an arithmetic sequence with first term a and common difference d . Such a graph G is called *super* if the smallest possible labels appear on the vertices. In this paper we will study the existence of super (a, d) -edge antimagic total labeling of fan, denoted by $\text{shack}(F_6, c_4^1, n)$, and the application of developing of polyalphabetic cryptosystem. The result shows that connected shackle of fan admits a super (a, d) -edge antimagic total labeling for $d = 0, 1, 2$, and it can be used to develop a secure polyalphabetic cryptosystem.

Keywords: super (a, d) -edge-antimagic total labeling, shackle, fan graph polyalphabetic cryptosystem.

Introduction

Matematika adalah pemeriksaan aksioma yang menegaskan struktur abstrak menggunakan logika simbolik dan notasi yang ada dalam matematika. Matematika terdiri dari beberapa cabang ilmu, antara lain : matematika aplikasi, matematika analisis, matematika komputerisasi, matematika diskrit, matematika statistik, matematika ekonomi, dan lain sebagainya. Cabang matematika terkini terkait dengan sains komputer yang cukup terkenal adalah Teori Graf. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek dinyatakan sebagai noktah, buletan, atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis. Dua bagian yang penting dalam representasi graf adalah simpul (*vertex*) dan ruas (*edge*). Sehingga graf bisa dikatakan sebagai himpunan dari simpul dan ruas.

Salah satu topik yang menarik dan mendapat banyak perhatian pada teori graf adalah masalah pelabelan graf. Pelabelan graf akhir-akhir ini mulai banyak mendapat perhatian terutama terapannya dalam jaringan komputer.

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedláček (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, radar, penyimpanan data komputer, dan pemancar frekuensi radio. Berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf yang diperkenalkan oleh Simanjutak, Bertault dan Miller pada tahun 2000 [2]. Salah satunya adalah pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic (SEATL), dimana a bobot sisi terkecil dan d nilai beda. Pada graf diskonektif, melibatkan angka pelabelan lebih banyak pada setiap komponen graf konektif terpisahnya dan tidak ada jaminan jika graf G mempunyai pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic kemudian pada gabungan graf diskonektifnya mempunyai pelabelan total super(a', d')-sisi antimagic.

Banyak pelabelan SEATL dilakukan, namun pada saat mencari SEATL $d=1$ baik itu tunggal ataupun gabungan kebanyakan terbatas pada jumlah sisi ganjil. Dalam penelitian ini diberikan untuk mengatasi masalah tersebut.

Teori pelabelan graf ini sangat bermanfaat untuk sektor transportasi, navigasi, sistem komunikasi, pengkodean dan lain-lain. Ilmu pengkodean sangat dibutuhkan untuk merahasiakan suatu pesan. Teknik untuk membuat pesan rahasia ini dikenal dengan kriptosistem. Kriptosistem merupakan suatu teknik menjaga keamanan data dan informasi agar tidak diketahui dan dibaca oleh pihak yang tidak berwenang. Penelitian ini akan membuat suatu ciphertext yang didasari pada pelabelan dekomposisi graf Shackle Kipas atau yang dinotasikan Shackle $CF_6(4', n)$. Penelitian ini menggunakan graf shackle kipas dikarenakan graf ini merupakan graf well known, graf yang mudah dilabeli titik dan sisinya, dan juga dikarenakan peneliti sebelumnya belum ada yang menggunakan graf shackle kipas untuk pelabelannya.

Penggunaan internet yang sangat luas seperti pada bisnis, perdagangan, bank, industri dan pemerintahan yang umumnya mengandung informasi yang bersifat rahasia maka keamanan informasi menjadi faktor utama yang harus dipenuhi. Salah satu cara yang digunakan adalah dengan menyandikan isi informasi menjadi suatu kode-kode yang tidak dimengerti sehingga apabila disadap maka akan kesulitan untuk mengetahui isi informasi yang sebenarnya. Salah satu alat yang digunakan untuk mengamankan data dan informasi adalah *Kriptography*. *Kriptography* merupakan studi tentang teknik-teknik matematika yang berhubungan dengan aspek-aspek pengamanan informasi seperti kerahasiaan (*confidentiality*), keutuhan data (*data integrity*), otentikasi entitas (*entity authentication*) dan otentikasi asal data (*data origin authentication*)[13].

Paper ini akan mengkaji tentang pelabelan total super (a, d) sisi antimagic pada graf shackle kipas konektif dan diskonektif yang disajikan lebih mendalam dengan adanya gabungan ganjil ataupun genap dan sisi ganjil ataupun genap serta keterkaitan antara menciptakan teorema dari pelabelan graf shackle kipas atau yang dinotasikan shackle $CF_6(4', n)$ dengan pengembangan *chipertext* pada suatu kalimat. Oleh karena itu, pada paper ini penulis memilih judul "Analisis Super Edge Antimagic Total pada Shackle Graf Kipas dan Aplikasinya dalam Pengembangan Kriptosistem Polyalphabetic Cipher".

Some Useful Lemmas

Sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, p\}$ disebut pelabelan titik (a, d) -sisi antimagic jika himpunan bobot sisinya $w(uv) = f(u) + f(v)$ pada semua sisi G adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$ keduanya adalah bilangan bulat, sedangkan Pelabelan total (a, d) -sisi antimagic adalah sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ sehingga himpunan bobot sisinya $w(t)(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)$ pada semua sisi G adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$ keduanya bilangan bulat. Sebuah pelabelan total (a, d) -sisi antimagic disebut pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic jika $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ dan $f(E) = \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$ dari sebuah graf G dimana p adalah banyaknya titik dan q adalah banyaknya sisi pada graf G . Himpunan bobot sisi yang terbentuk adalah $W = w(xy) \mid xy \in E(G) = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$ untuk $a \geq 0$ dan $d \geq 0$. $\alpha(u)$ adalah label dari titik u , $\alpha(v)$ adalah label dari titik v dan $\alpha(uv)$ adalah label dari sisi uv . Untuk mencari batas atas nilai beda d pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dapat ditentukan dengan lemma 1 dari Sugeng, dkk [8] dan proposition dari Bača, dkk pada [9] yang menggambarkan hubungan antara EAVL dan SEATL, serta hubungan antara super $(a, 1)$ -EATL graf konektif.

Lemma 1 [8] *Jika sebuah graf (p, q) adalah pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic maka $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$*

Proposition 1 [9] *Jika G memiliki (a, d) -EAT maka G memiliki super $(a + |V| + 1, d + 1)$ -pelabelan total sisi antimagic dan super $(a + |V| + |E|, d - 1)$ -pelabelan total sisi antimagic.*

Results

Graf konektif Shackle graf kipas yang dinotasikan dengan $\text{shack}(F_6, c_4^1, n)$ adalah sebuah graf yang memiliki bentuk menarik yang berasal dari operasi graf yaitu shackle. Shackle graf kipas memiliki himpunan *vertex*, $\text{shack}(F_6, c_4^1, n)$ dimana titik (*vertex*) adalah $V_{\text{shack}}(F_6, c_4^1, n) = \{x_i, y_i, z_i; 1 \leq i \leq n + 1 \text{ dan } 1 \leq j \leq n + 2\}$ dan Sisi (edge) adalah $E_{\text{shack}}(F_6, c_4^1, n) = \{\{x_i y_i; 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{x_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq n + 1\} \cup \{y_j z_j; 1 \leq j \leq n + 1\} \cup \{y_j z_{j-1}; 2 \leq j \leq n + 2\} \cup \{z_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n + 1\}\}$. Dan jumlah $|V_{\text{shack}}(F_6, c_4^1, n)| = p = 3n + 1$ sedangkan jumlah sisi $|E_{\text{shack}}(F_6, c_4^1, n)| = q = 6n - 1$. Setelah mengetahui batas atas nilai d , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan terlebih dahulu menentukan pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi antimagic pada shackle graf kipas sekaligus menentukan fungsi bijektifnya melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika. Teorema 1 adalah teorema yang berkaitan dengan pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi antimagic pada shackle graf kipas $\text{shack}(F_6, c_4^1, n)$.

Theorem 1 *Ada pelabelan titik $(3, 1)$ -sisi antimagic pada shackle graf kipas $\text{shack}(F_6, c_4^1, n)$ jika $n \geq 1$.*

Bukti. Labeli titik shackle graf kipas shack(F_6, c_4^1, n) dengan fungsi bijektif α_1 yang definisikan sebagai pelabelan $\alpha_1 : V(\text{shack}(F_6, c_4^1, n)) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3n + 1\}$ maka pelabelan α_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha_1(x_i) &= \begin{cases} 3i, & \text{untuk } i = \text{ganjil} ; 1 \leq i \leq n + 1 \\ 3i - 1, & \text{untuk } i = \text{genap} ; 1 \leq i \leq n + 1 \end{cases} \\ \alpha_1(y_j) &= \begin{cases} 3j - 2, & ; 1 \leq j \leq n + 2 \end{cases} \\ \alpha_1(z_i) &= \begin{cases} 3i - 1, & \text{untuk } i = \text{ganjil} ; 1 \leq i \leq n + 1 \\ 3i, & \text{untuk } i = \text{genap} ; 1 \leq i \leq n + 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Jika w_{α_1} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan titik α_1 dimana bobot sisi pelabelan titik diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang bersisian, maka fungsi bijektif w_{α_1} dapat ditentukan melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika sebagai berikut:

$$\begin{aligned}w_{\alpha_1}^1(x_i y_i) &= \begin{cases} 6i - 2, & \text{untuk } i = \text{ganjil} ; 1 \leq i \leq n + 1 \\ 6i - 3, & \text{untuk } i = \text{genap} ; 1 \leq i \leq n + 1 \end{cases} \\ w_{\alpha_1}^2(x_i y_{i+1}) &= \begin{cases} 6i - 1, & \text{untuk } i = \text{ganjil} ; 1 \leq i \leq n + 1 \\ 6i, & \text{untuk } i = \text{genap} ; 1 \leq i \leq n + 1 \end{cases} \\ w_{\alpha_1}^3(y_j y_{j+1}) &= \begin{cases} 6j - 1, & ; 1 \leq j \leq n + 1 \end{cases} \\ w_{\alpha_1}^4(y_j z_j) &= \begin{cases} 6j - 3, & \text{untuk } i = \text{ganjil} ; 1 \leq j \leq n + 1 \\ 6j - 2, & \text{untuk } i = \text{genap} ; 1 \leq j \leq n + 1 \end{cases} \\ w_{\alpha_1}^5(y_j z_{j-1}) &= \begin{cases} 6j - 5, & \text{untuk } i = \text{ganjil} ; 3 \leq j \leq n + 2 \\ 6j - 6, & \text{untuk } i = \text{genap} ; 2 \leq j \leq n + 2 \end{cases} \\ w_{\alpha_1}^6(z_i z_{i+1}) &= \begin{cases} 6i - 2, & ; 1 \leq i \leq n \end{cases}\end{aligned}$$

Dari rumus diatas maka didapat sebuah nilai-nilai berurutan yang akan membentuk himpunan $\bigcup_{r=1}^{10} w_{\alpha_1}^r = \{3, 4, 5, \dots, 6n - 1\}$. Dengan demikian α_1 adalah suatu pelabelan titik (3, 1). \square

Dari Proposition 1, maka didapatkan teorema sebagai berikut.

Theorem 2 *Ada pelabelan total super $(9n + 3, 0)$ -sisi antimagic pada shackle graf kipas shack(F_6, c_4^1, n) untuk $n \geq 1$.*

Bukti. Labeli titik shackle graf kipas shack(F_6, c_4^1, n) dengan fungsi bijektif γ_1 yang definisikan sebagai pelabelan $\gamma_1 : V(\text{shack}(F_6, c_4^1, n)) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3n + 1\}$ maka pelabelan γ_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w_{\gamma_1}^1(x_i y_i) &= \begin{cases} 9n - 6i + 5, & \text{untuk } i = \text{ganjil}; 1 \leq i \leq n + 1 \\ 9n - 6i + 6, & \text{untuk } i = \text{genap}; 1 \leq i \leq n + 1 \end{cases} \\
w_{\gamma_1}^2(x_i y_{i+1}) &= \begin{cases} 9n - 6i + 2, & \text{untuk } i = \text{ganjil}; 1 \leq i \leq n + 1 \\ 9n - 6i + 3, & \text{untuk } i = \text{genap}; 1 \leq i \leq n + 1 \end{cases} \\
w_{\gamma_1}^3(y_j y_{j+1}) &= \begin{cases} 9n - 6j + 4, & ; 1 \leq j \leq n + 1 \end{cases} \\
w_{\gamma_1}^4(y_j z_j) &= \begin{cases} 9n - 6j + 6, & \text{untuk } i = \text{ganjil}; 1 \leq j \leq n + 1 \\ 9n - 6j + 5, & \text{untuk } i = \text{genap}; 1 \leq j \leq n + 1 \end{cases} \\
w_{\gamma_1}^5(y_j z_{j-1}) &= \begin{cases} 9n - 6j + 8, & \text{untuk } i = \text{ganjil}; 3 \leq j \leq n + 2 \\ 9n - 6j + 9, & \text{untuk } i = \text{genap}; 2 \leq j \leq n + 2 \end{cases} \\
w_{\gamma_1}^6(z_i z_{i+1}) &= \begin{cases} 9n - 6i + 1, & ; 1 \leq i \leq n \end{cases}
\end{aligned}$$

Jika W_{γ_2} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total shackle graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot sisi dengan label sisinya maka W_{γ_2} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot sisi EAVL w_{α_1} dan rumus label sisi γ_1 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga untuk $(a, 0)$ pada shackle graf kipas shack(F_6, c_4^1, n) dapat diperoleh setiap bobot sisi bernilai $9n + 3$. Sehingga himpunan bobot sisi untuk W_{γ_2} dapat ditulis $W_{\gamma_2} = \{9n + 3, 9n + 3, \dots, 9n + 3\}$. Dapat disimpulkan bahwa shackle graf kipas shack(F_6, c_4^1, n) dengan $n \geq 1$, mempunyai pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic dengan $a = 9n + 3$ dan $d = 0$, dengan kata lain shackle graf kipas shack(F_6, c_4^1, n) mempunyai pelabelan total super $(9n + 3, 0)$ -sisi antimagic.

Theorem 3 *Ada pelabelan total super $(3n + 5, 2)$ -sisi antimagic pada shackle graf kipas shack(F_6, c_4^1, n) untuk $n \geq 1$.*

Bukti. Labeli titik shackle graf kipas shack(F_6, c_4^1, n) dengan fungsi bijektif β_1 yang definisikan sebagai pelabelan $\beta_1 : V(\text{shack}(F_6, c_4^1, n)) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3n + 1\}$ maka pelabelan β_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w_{\beta_1}^1(x_i y_i) &= \begin{cases} 3n + 6i - 3, & \text{untuk } i = \text{ganjil}; 1 \leq i \leq n + 1 \\ 3n + 6i - 4, & \text{untuk } i = \text{genap}; 1 \leq i \leq n + 1 \end{cases} \\
w_{\beta_1}^2(x_i y_{i+1}) &= \begin{cases} 3n + 6i, & \text{untuk } i = \text{ganjil}; 1 \leq i \leq n + 1 \\ 3n + 6i - 1, & \text{untuk } i = \text{genap}; 1 \leq i \leq n + 1 \end{cases} \\
w_{\beta_1}^3(y_j y_{j+1}) &= \begin{cases} 3n + 6j - 2, & ; 1 \leq j \leq n + 1 \end{cases} \\
w_{\beta_1}^4(y_j z_j) &= \begin{cases} 3n + 6j - 4, & \text{untuk } i = \text{ganjil}; 1 \leq j \leq n + 1 \\ 3n + 6j - 3, & \text{untuk } i = \text{genap}; 1 \leq j \leq n + 1 \end{cases} \\
w_{\beta_1}^5(y_j z_{j-1}) &= \begin{cases} 3n + 6j - 6, & \text{untuk } i = \text{ganjil}; 3 \leq j \leq n + 2 \\ 3n + 6j - 7, & \text{untuk } i = \text{genap}; 2 \leq j \leq n + 2 \end{cases} \\
w_{\beta_1}^6(z_i z_{i+1}) &= \begin{cases} 3n + 6i + 1, & ; 1 \leq i \leq n \end{cases}
\end{aligned}$$

Jika W_{β_2} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total berdasarkan pelabelan β_1 maka W_{β_2} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL w_{α_1} dengan β_1 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W_{\beta_2}^1 &= \{w_{\alpha_1}^1(x_i y_i) + \beta_1(x_i y_i)\} \\
&= 3n + 12i - 5 \text{ untuk } i = \text{ganjil}; 1 \leq i \leq n + 1 \\
W_{\beta_2}^2 &= \{w_{\alpha_1}^1(x_i y_i) + \beta_1(x_i y_i)\} \\
&= 3n + 12i - 7 \text{ untuk } i = \text{genap}; 1 \leq i \leq n + 1 \\
W_{\beta_2}^3 &= \{w_{\alpha_1}^2(x_i y_{i+1}) + \beta_1(x_i y_{i+1})\} \\
&= 3n + 12i + 1 \text{ untuk } i = \text{ganjil}; 1 \leq i \leq n + 1 \\
W_{\beta_2}^4 &= \{w_{\alpha_1}^2(x_i y_{i+1}) + \beta_1(x_i y_{i+1})\} \\
&= 3n + 12i - 1 \text{ untuk } i = \text{genap}; 1 \leq i \leq n + 1 \\
W_{\beta_2}^5 &= \{w_{\alpha_1}^3(y_j y_{j+1}) + \beta_1(y_j y_{j+1})\} \\
&= 3n + 12j - 3; 1 \leq j \leq n + 1 \\
W_{\beta_2}^6 &= \{w_{\alpha_1}^4(y_j z_j) + \beta_1(y_j z_j)\} \\
&= 3n + 12j - 7 \text{ untuk } i = \text{ganjil}; 1 \leq j \leq n + 1 \\
W_{\beta_2}^7 &= \{w_{\alpha_1}^4(y_j z_j) + \beta_1(y_j z_j)\} \\
&= 3n + 12j - 5 \text{ untuk } i = \text{genap}; 1 \leq j \leq n + 1 \\
W_{\beta_2}^8 &= \{w_{\alpha_1}^5(y_j z_{j-1}) + \beta_1(y_j z_{j-1})\} \\
&= 4n + 12j - 11 \text{ untuk } i = \text{ganjil}; 3 \leq j \leq n + 2 \\
W_{\beta_2}^9 &= \{w_{\alpha_1}^5(y_j z_{j-1}) + \beta_1(y_j z_{j-1})\} \\
&= 3n + 12j - 13 \text{ untuk } i = \text{genap}; 2 \leq j \leq n + 2 \\
W_{\beta_2}^{10} &= \{w_{\beta_1}^6(z_i z_{i+1}) + \beta_1(z_i z_{i+1})\} \\
&= 3n + 12j + 3; 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

... 4.5

Berdasarkan himpunan bobot sisi W_{β_2} , dapat dilihat bahwa bobot sisi terkecil terdefinisi oleh $\{w_{\alpha_1}^4(y_j z_j) + \beta_1(y_j z_j)\}$ untuk $j = \text{ganjil}$ dengan nilai $3n + 57$ dan bobot sisi terkecil selanjutnya terdefinisi oleh $\{w_{\alpha_1}^1(x_i y_i) + \beta_1(x_i y_i)\}$ untuk $i = \text{ganjil}$ dengan nilai $3n + 7$, sedangkan bobot sisi terbesar terletak pada $\{w_{\alpha_1}^3(x_i y_{i+1}) + \beta_1(x_i y_{i+1})\}$. Dapat dikatakan bahwa W_{β_2} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $3n + 5$ dan beda 2 (dua), sehingga kita dapat menentukan bobot sisi terbesar dengan mensubstitusikan nilai awal $a = 3n + 5$ dan nilai $b = 2$ ke persamaan $U_n = a + (n - 1)b = 3n + 5 + (6n - 1 - 1)2$ dan didapatkan $U_n = 12n + 2$. Sehingga didapat $\{W_{\beta_2}\} = 3n + 5, \{W_{\beta_2}\} = 3n + 7, \dots, \{W_{\beta_2}\} = 12n + 2$ dengan mensubstitusikan nilai $i = n$. Atau dapat dituliskan $\{3n + 5, 3n + 7, \dots, 12n + 2\}$. Dapat disimpulkan bahwa graf (F_6, C_4^1, n) mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan $a = 3n + 5$ dan $d = 2$ atau graf (F_6, C_4^1, n) mempunyai Super $(3n + 5, 2)$ -EAT; $n \geq 1$. \square

Selanjutnya, untuk mengetahui bagaimana pelabelan $(a, 1)$ -sisi antimagic untuk shackle graf kipas (F_6, C_4^1, n) peneliti menggunakan sebuah lema 2 dari [7]. Yang mana lemma tersebut ditemukan peneliti sebagai berikut :

Lemma 2 Misalkan Ψ merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan $\Psi = \{c, c +$

$1, c + 2, \dots, c + k\}$, dengan k genap. Maka terdapat sebuah permutasi $\Pi(\Psi)$ dari anggota-anggota himpunan Ψ sehingga $\Psi + \Pi(\Psi)$ juga merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan yaitu $\Psi + \Pi(\Psi) = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, \dots, 2c + \frac{3k}{2}\}$

Proof Misal Ψ adalah suatu himpunan bilangan berurutan $\Psi = \{v_i | v_i = c + (i - 1), 1 \leq i \leq k + 1\}$ dan k adalah genap. Selanjutnya didefinisikan nilai permutasi $\Pi(\Psi) = \{w_i | 1 \leq i \leq k + 1\}$ dari anggota Ψ adalah sebagai berikut:

$$w_i = \begin{cases} c + k - 2i + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq \frac{k}{2} \\ c + 2k - 2i + 2, & \text{jika } \frac{k}{2} + 1 \leq i \leq k + 1 \end{cases}$$

Dari substitusi diperoleh $\Psi + \Pi(\Psi) = \{v_i + w_i, 1 \leq i \leq k + 1\} = \{c + k - 2i + 1 \text{ jika } 1 \leq i \leq \frac{k}{2}\} \cup \{c + 2k - 2i + 2 \text{ jika } \frac{k}{2} + 1 \leq i \leq k + 1\} = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, \dots, 2c + \frac{3k}{2}\}$ merupakan barisan bilangan dengan pola tiap sukunya sama dengan 1. \square

Dari teorema 1 dan Lema 2 maka didapatkan sebuah teorema sebagai berikut:

Theorem 4 Ada pelabelan total super $(6n + 4, 1)$ -sisi antimagic pada shackle graf kipas $shack(F_6, C_4^1, n)$ untuk $n \geq 1$.

Proof. Dari teorema 1, shackle graf kipas $shack(F_6, C_4^1, n)$ pelabelan titik $(3, 1)$ -sisi antimagic untuk $n \geq 1$, $p=3n+1$ dan $q=6n-1$. Misal $\Upsilon = \{c, c+1, c+2, \dots, c+k\}$ adalah sebuah himpunan dengan label sisi α_1 , untuk $c = 3$ dan $k = q - 1 = 6n - 2$. Dari lema 2, terdapat sebuah permutasi $\Pi(\Psi)$ dari anggota-anggota himpunan Ψ sehingga $\Psi + [\Pi(\Psi) - c + p + 1] = \{c + \frac{k}{2} + p + 1, c + \frac{k}{2} + p + 2, \dots, c + \frac{k}{2} + p + q\}$ adalah barisan aritmetik. Define the vertex labeling $\alpha_2(x_i) = \alpha_1(x_i), \alpha_2(y_j) = \alpha_1(y_j)$ dan $\alpha_2(z_i) = \alpha_1(z_i)$ dan $\alpha_2(e \in shack(F_4, e, n)) = [\Pi(\Upsilon) - c + p + 1]$ as an edge labeling of $gshack(F_4, e, n)$. Then $\Upsilon + [\Pi(\Upsilon) - c + p + 1]$ gives the set of the edge weights of $gshack(F_6, C_4^1, n)$, yang mana $shack(F_6, C_4^1, n)$ adalah pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi- antimagic, dimana $a = c + \frac{k}{2} + p + 1 = 3 + \frac{6n-2}{2} + 3n + 1 + 1 = 6n + 4$. \square

Aplikasi graf dalam kriptosistem Pelabelan yang digunakan untuk mengubah pesan yaitu pelabelan total pada shackle graf kipas yaitu $shack(F_6, c_4^1, 2)$ dengan $d = 2$. Setelah melabeli shackle graf kipas, dilanjutkan dengan mendata huruf yang digunakan dalam pesan dengan mengabaikan spasi dan tanda baca. Huruf yang digunakan adalah "a,d,e,k,m,n,o". Gambar 1 adalah diagram pohon yang berakar di label 1 dengan dilengkapi label sisinya.

Letakkan huruf-huruf yang digunakan dalam pesan sesuai dengan abjad dan urutkan label sisinya. Kemudian pesan rahasia dipecahkan dengan menerapkan teknik kriptosistem modulo 26 terhadap masing-masing hurufnya sehingga menjadi $a = \text{mod}(111214, 26) = 12, d = \text{mod}(112315, 26) = 21, e = \text{mod}(112316520, 26) = 4, k = \text{mod}(112316522, 26) = 6, m = \text{mod}(113417, 26) = 5, n = \text{mod}(113418621, 26) = 17, o = \text{mod}(113419723, 26) = 1$. Kombinasi titik dan sisi tersebut di ubah dalam bentuk modulo 26, sehingga diperoleh ciphertext yaitu $a=1, d=u, e=d, k=f, m=e, n=q, o=a$. Oleh karena itu, dengan menggunakan proses substitusi pesan kedalam ciphertext tanpa spasi dan tanda baca, maka ciphertext dari pesan "qludqlfaudqdea".

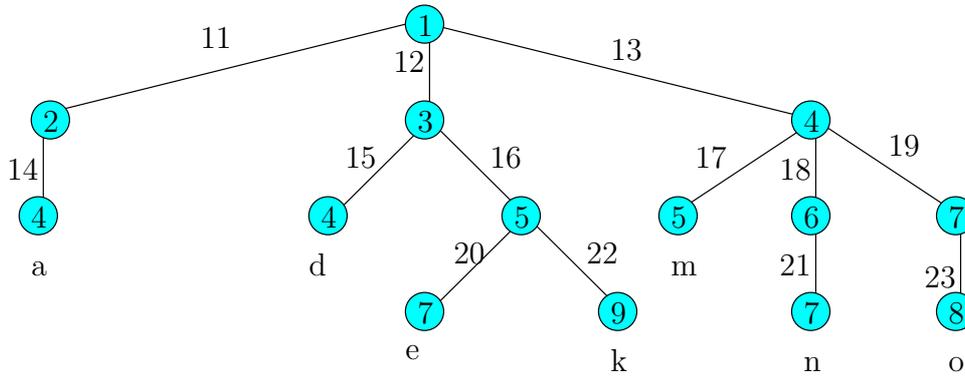


Figure 1: Diagram Tree untuk membangun ciphertext

Concluding Remarks

Kita telah mempelajari mengenai super antimagic dari graf yang konektif *shack* (F_6, C_4^1, n) , untuk $n \geq 1$. Graf *shack* (F_6, C_4^1, n) memiliki pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic untuk semua parameter n dan d .

References

- [1] A. Kotzig and A. Rosa, Magic valuations of finite graphs, *Canad. Math. Bull.* **13** (1970), 451–461.
- [2] Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graph*. Australia : Tidak dipublikasikan (Tesis).
- [3] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Antimagic labeling of the union of stars, *Austral. J. Combin.*, **42** (2008), 35–44.
- [4] H. Enomoto, A.S. Lladó, T. Nakamigawa and G. Ringel, Super edge-magic graphs, *SUT J. Math.* **34** (1998), 105–109.
- [5] J.A. Gallian, A dynamic survey of graph labeling, *Electronic J. of Combin.*, **17** (2014) #DS6.
- [6] J.L. Gross, J. Yellen and P. Zhang, *Handbook of Graph Theory*, Second Edition, CRC Press, Taylor and Francis Group, 2014
- [7] K.A. Sugeng, M. Miller, Slamun and M. Bača , (a, d) -edge-antimagic total labelings of caterpillars, *Lecture Notes in Computer Science*, **3330** (2005) 169–180.
- [8] K.A. Sugeng, M. Miller and M. Bača, Super edge-antimagic total labelings, *Utilitas Math.*, **71** (2006) 131-141.

- [9] M. Bača, Antoni Muntaner-Batle, Andrea Semanečova Feňovčíková, On super $(a, 2)$ -edge-antimagic total labeling of Disconnected Graphs, *Ars Combinatoria*, **113** (2014) 129-137.
- [10] M. Bača, Yuqing Lin, Andrea Semanečova Feňovčíková, 2009, Note on Super Antimagicness of Disconnected Graphs, *AKCE International J. of Graphs and Combinatorics*, **6(1)**, 47-55.
- [11] M. Bača, Dafik, M. Miller and J. Ryan, On super (a, d) -edge antimagic total labeling of caterpillars, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **65** (2008), 61–70.
- [12] M. Bača, Dafik, M. Miller and J. Ryan, Antimagic labeling of disjoint union of s -crowns, *Utilitas Mathematica*, **79** (2009), 193–205.
- [13] Menezes, A., Oorschot, P.V., dan Vanstone. 1996. *Handbook of Applied Cryptography*. CRC Press, Boca Raton.
- [14] R.M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima, F.A. Muntaner-Batle, The place of super edge-magic labelings among other classes of labelings, *Discrete Mathematics*, **231** (2001), 153-168.
- [15] R.M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima and F.A. Muntaner-Batle, On super edge-magic graph, *Ars Combin.* 64 (2002), 81–95.
- [16] Mirka Miller, Oudone Phanalasy, Joe Ryan, and Leanne Raylands, Note on Antimagic Labelings of Trees, *Bulletin of the ICA*, **72** (2014) 94-100.
- [17] R. Simanjuntak, F. Bertault and M. Miller, Two new (a, d) -antimagic graph labelings, *Proc. of Eleventh Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms* (2000), 179–189.