ANALISIS KETERKAITAN SEATL GRAF KONEKTIF DAN DISKONEKTIF SERTA APLIKASI DALAM PENGEMBANGAN KRIPTOSISTEM POLYALPHABETIC CIPHER

THESIS

Oleh

Muhlisatul Mahmudah

NIM 141820101003

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2015

ANALISIS KETERKAITAN SEATL GRAF KONEKTIF DAN DISKONEKTIF SERTA APLIKASI DALAM PENGEMBANGAN KRIPTOSISTEM POLYALPHABETIC CIPHER

THESIS

Oleh

Muhlisatul Mahmudah
NIM 141820101003

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
Dosen Pembimbing 2 : Kosala Dwidja Purnomo, S.Si.
Dosen Penguji 1 : Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D
Dosen Penguji 2 : Kusbudiono, S.Si., M.Si

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2015

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Orang tuaku tercinta dan terkasih :Ayahanda Haryono dan umyku Wardani serta ibuku Elwani dan Kakak serta adikku Diana Zaini, Jenya gilva, yang senantiasa mengalirkan rasa cinta dan kasih sayangnya serta cucuran keringat dan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita;
2. Teman-teman pejuang graf: (mbak Devi, Dicky, Saiful, Risma, Agnes, mbak wicha, mas Ilham, Sol, Risan, Novri, shinta, ifa dan pencinta graf lainnya) yang selalu berbagi suka dan duka untuk menemukan rumus, sama-sama berjuang untuk menyelesaikan penelitian masing-masing, selalu saling membantu dan selalu memberikan dukungan untuk terus semangat;
3. Teman-teman angkatan 2014 Magister Matematika MIPA: (mbak Devi, mbak Wicha, mbak Miftah, mbak Ana, mas Jesy) yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
4. *My beloved*, Ardiansyah Bagos Setianggoro yang telah memberikan dukungan positif bagiku dalam setiap hal yang akan dan telah aku lakukan dan semangat dalam penulisan thesis ini;
5. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

MOTTO

"Kita melihat kebahagiaan itu seperti pelangi, tidak pernah berada di atas kepala kita sendiri, tetapi selalu berada di atas kepala orang lain."
(Thomas Hardy)

"Pendidikan merupakan perlengkapan paling baik untuk hari tua"
(Aristoteles)

"Rahmat sering datang kepada kita dalam bentuk kesakitan, kehilangan dan kekecewaan; tetapi kalau kita sabar, kita segera akan melihat bentuk asliny"
(Joseph Addison)

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Muhlisatul Mahmudah

NIM : 141820101003

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Analisis Keterkaitan SEATL Graf Konektif dan Diskonektif serta Aplikasi dalam Pengembangan Kriptosistem Polyalphabetic Cipher adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Desember 2015
Yang menyatakan,

Muhlisatul Mahmudah
NIM. 141820101003

THESIS

ANALISIS KETERKAITAN SEATL GRAF KONEKTIF DAN DISKONEKTIF SERTA APLIKASI DALAM PENGEMBANGAN KRIPTOSISTEM POLYALPHABETIC CIPHER

Oleh

Muhlisatul Mahmudah
NIM 141820101003

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
Dosen Pembimbing 2 : Kosala Dwidja Purnomo, S.Si.

PERSETUJUAN

ANALISIS KETERKAITAN SEATL GRAF KONEKTIF DAN DISKONEKTIF SERTA APLIKASI DALAM PENGEMBANGAN KRIPTOSISTEM POLYALPHABETIC CIPHERR

TESIS

Diajukan guna memenuhi syarat untuk menyelesaikan pendidikan Program Pascasarjana Satu Jurusan Magister Matematika dengan Program Studi Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Nama Mahasiswa	: Muhlisatul Mahmudah
NIM	: 141820101003
Jurusan	: Magister Matematika
Program Studi	: Matematika
Angkatan Tahun	: 2014
Daerah Asal	: Situbondo
Tempat, Tanggal Lahir	: Situbondo, 23 Februari 1992

Disetujui oleh:

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D	Kosala Dwidja Purnomo, S.Si.
NIP. 19680802 199303 1 004	NIP. 19670420 199201 1 001

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul Analisis Keterkaitan SEATL Graf Konektif dan Diskonektif serta Aplikasi dalam Pengembangan Kriptosistem Polyalphabetic Cipher telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Umum pada:

Hari : Rabu
Tanggal : 30 Januari 2015
Tempat : Gedung MIPA UNEJ

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D NIP.19670420 199201 1 001	Kosala Dwidja Purnomo, S.Si. NIP.19690828 199802 1 001
Anggota I,	Anggota 2,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D NIP.19680802 199303 1 004	Kusbudiono, S.Si., M.Si NIP. 19770430 200501 1 001

Mengetahui,
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Prof. Drs. Kusno DEA., Ph.D
NIP. 19610108 198602 1 001

RINGKASAN

Analisis Keterkaitan SEATL Graf Konektif dan Diskonektif serta Aplikasi dalam Pengembangan Kriptosistem Polyalphabetic Cipher; Muhlisatul Mahmudah, 141820101003; 2015: 76 halaman; Program Studi Magister Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Graf adalah salah salah kajian dalam matematika diskrit. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek diskrit tersebut. Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan cacah yang disebut label. Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total super(a,d)-sisi antimagic (SEATL), dimana a bobot sisi terkecil dan d nilai beda.

Hasil utama dari penelitian yang akan dibahas terkait dengan pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic untuk sisi genap dan sisi ganjil yaitu lemma dan teorema, serta didalam penenilitian ini juga menggunakan teknik calouring dan berhasil mengeneralisasi keberadaan super edge antimagic total labeling pada sembarang tree dan sembarang graf apabila nilai kromatik numbernya maksimal 3 dan juga berhasil menjawab untuk $d = 1$ untuk sisi genap. Terdapat beberapa lemma dan teorema baru yang ditemukan secara eksperimental dalam penelitian ini.

Contoh graf yang digunakan untuk pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic dengan sisi ganjil yaitu shackle graf Kipas dengan notasi shack(F_6, B_2, n). Shackle graf kipas merupakan sebuah graf yang dinotasikan dengan dengan himpunan titik, $V(shack(F_6, B_2, n)) = \{x_i, y_j, z_i; 1 \leq i \leq n+1 \text{ dan } 1 \leq j \leq n+2\}$ dan sisi adalah $E(shack(F_6, B_2, n)) = \{\{x_iy_i; 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{x_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{y_jy_{j+1}; 1 \leq j \leq n+2\} \cup \{y_jz_j; 1 \leq j \leq n+1\} \cup \{y_jz_{j-1}; 2 \leq j \leq n+1\} \cup \{z_iz_{i+1}; 1 \leq i \leq n+1\}\}$. Pada shackle graf kipas dihasilkan $|V| = 3n+1$. Sedangkan Jumlah sisi pada shackle graf kipas $|E| = 6n-1$. Sehingga batas atas

nilai beda yaitu $d \leq 2$.

Untuk graf yang digunakan untuk pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic dengan sisi genap yaitu graf H untuk mendapatkan EAV d=1 dan SEATL d=0,2. Graf H memiliki himpunan titik, $V(H) = \{x_i, y_i, z_i; 1 \leq i \leq n+1\}$ dan sisi adalah $E(H) = \{\{x_i y_i; 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{y_i z_i; 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{y_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i x_{i+1}; 2 \leq i \leq n\} \cup \{z_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}\}$. Sedangkan untuk pelabelan titik (a,1)-sisi antimagic maka digunakan Graf K yaitu graf terhubung dengan himpunan *vertex*, $V(K) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan Sisi (edge) adalah $E(K) = \{\{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i z_i; 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{y_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{x_i x_{i+2}; 2 \leq i \leq n-2\}$ banyak titik $|V| = n$ dan banyaknya sisi $|E| = 2n-2$.

Selain itu, dikaji mengenai hubungan antara *Super Edge Antimagic Total Labeling* untuk graf konektif dan diskonektif. Sebelumnya juga telah dijabarkan mengenai pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic dengan menggunakan teknik pewarnaan. Oleh karena itu, peneliti mengungkapkan bahwa adanya hubungan antara graf konektif dengan graf diskonektif yang memiliki bilangan kromatik sama dengan dua dan tiga, serta aplikasi SEATL dalam kriptografi.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif aksiomatik yaitu dengan menurunkan lema yang telah ada tentang nilai batas d dan lema untuk pelabelan graf saat $d = 1$. Teorema dan lema yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

1. **Teorema 4.1.1** *Ada pelabelan titik* $(3, 1)$*-sisi antimagic pada shackle graf kipas shack*(F_6, B_2, n) *jika* $n \geq 1$.

2. **Teorema 4.1.2** *Ada pelabelan total super* $(9n+3, 0)$*-sisi antimagic dan* $(3n+5, 2)$*-sisi antimagic pada shackle graf kipas shack*(F_6, B_2, n) *untuk* $n \geq 1$.

3. **Teorema 4.1.3** *Ada pelabelan total super* $(6n+4, 1)$*-sisi antimagic pada shackle graf kipas shack*(F_6, B_2, n) *untuk* $n \geq 1$

4. **Teorema 4.1.4** *Ada pelabelan titik* $(4, 1)$*-sisi antimagic pada graf H yang bersisi genap jika* $n \geq 1$.

5. **Teorema 4.1.5** *Ada pelabelan total super* $(9n+9,0)$*-sisi antimagic dan* $(3n+8,2)$*-sisi antimagic pada graf* H *untuk* $n \geq 1$.

6. **Lema 4.1.1** *Misalkan* Ψ *merupakan sebuah himpunan bilangan* $\Psi = \{c, c+1, c+2, \ldots, c+\frac{k+1}{2}, c+\frac{k+1}{2}, c+\frac{k+3}{2}, c+\frac{k+5}{2}, \cdots, c+k\}$*, dengan* k *ganjil. Maka terdapat sebuah permutasi* $\Pi(\Psi)$ *dari anggota-anggota himpunan* Ψ *sehingga* $\Psi + \Pi(\Psi)$ *juga merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan yaitu* $\Psi + \Pi(\Psi) = \{2c+\frac{k-1}{2}, 2c+\frac{k+1}{2}, 2c+\frac{k+3}{2}, \ldots, 2c+\frac{3k-3}{2}, 2c+\frac{3k-1}{2}\}$

7. **Teorema 4.1.6** *Ada pelabelan total super* $(2n+2,1)$*-sisi antimagic pada graf* K *untuk* $n \geq 1$.

8. **Teorema 4.1.6** *Ada pelabelan total super* $(2n+2,1)$*-sisi antimagic pada graf* K *untuk* $n \geq 1$.

9. **Lema 4.1.2** *Misalkan* A *adalah barisan* $A = \{1, 2, 3, \cdots, k, k+1\}$*,* k *genap. Maka terdapat dua permutasi* $B(A)$ *dan* $C(A)$ *dari anggota* A *yaitu* $A + B(A), A+C(A), B(A)+C(A)$ *membentuk barisan aritmatika yang berurutan.*

10. **Lema 4.1.3** *Untuk* $n \geq 3$*, bilangan kromatik dari shackle graf kipas adalah* $\chi shack(F_6, B_2, n) = 3$.

11. **Teorema 4.1.7** *Ada pelabelan titik* $(\frac{3m+3}{2}, 1)$*-sisi antimagic pada gabungan shackle graf kipas* $mshack(F_6, B_2, n)$ *jika* $n \geq 1$.

12. **Teorema 4.1.8** *Ada pelabelan total super* $(\frac{18mn+3m+3}{2}, 0)$*-sisi antimagic dan* $(\frac{6mn+5m+5}{2}, 2)$*-sisi antimagic pada gabungan shackle graf kipas* $mshack(F_6, B_2, n)$ *untuk* $n \geq 1$.

13. **Teorema 4.1.9** *Ada pelabelan total super* $(6mn+2m+2, 1)$*-sisi antimagic pada shackle graf kipas* $mshack(F_6, B_2, n)$ *untuk* $n \geq 1$.

14. **Lema 4.1.4** *Untuk* $n \geq 3$*, bilangan kromatik dari sisi genap graf* H *adalah* 3.

15. **Teorema 4.1.10** *Ada pelabelan titik* $(\frac{5m+3}{2}, 1)$*-sisi antimagic pada gabungan graf* H *jika* $n \geq 1$.

16. **Teorema 4.1.11** *Ada pelabelan total super* $(\frac{18mn+15m+3}{2}, 0)$*-sisi antimagic dan* $(\frac{6mn+11m+5}{2}, 2)$*-sisi antimagic pada gabungan graf* H *untuk* $n \geq 1$.

17. **Teorema 4.1.12** *Ada pelabelan total super* $(2mn+2, 1)$*-sisi antimagic pada gabungan graf* K *untuk* $n \geq 1$.

18. **Teorema 4.1.13** *Misalkan* G *merupakan sebuah graf pohon dan* G *memiliki pelabelan titik* $(a, 1)$*-sisi antimagic maka gabungan saling lepasnya dari* mG *memiliki pelabelan titik* $(b, 1)$*-sisi antimagic.*

19. **Teorema 4.1.14** *Misalkan* G *merupakan sebuah graf yang memiliki bilangan kromatik 3 dan* G *memiliki pelabelan titik* $(a, 1)$*-sisi antimagic maka gabungan saling lepasnya dari* mG *memiliki pelabelan titik* $(b, 1)$*-sisi antimagic.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul Analisis Keterkaitan SEATL Graf Konektif dan Diskonektif serta Aplikasi dalam Pengembangan Kriptosistem Polyalphabetic Cipher. Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Pascasarjana (s2) pada Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Penetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan tesis ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Matematika Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
4. Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I dan Kosala Dwidja Purnomo, S.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan tesis ini;
5. Dosen dan Karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya tesis ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tesis ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tesis ini dapat bermanfaat.

Jember, Desember 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$G(V,E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
v_n	=	Titik ke-n pada suatu graf
e_n	=	Sisi ke-n dari suatu graf
$\|V(G)\|$	=	Banyaknya titik dari graf G yang disebut *order*
$\|E(G)\|$	=	Banyaknya sisi dari graf G yang disebut ukuran (*size*)
U_n	=	Suku ke-n barisan aritmetika
$EAVL$	=	*Edge antimagic vertex labeling* atau pelabelan titik sisi antimagic
$SEATL$	=	*Super edge antimagic total labeling* atau pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic
d	=	Nilai beda barisan bobot sisi pada SEATL
a	=	Bobot sisi terkecil yang merupakan suku pertama barisan bobot sisi pada SEATL
$shack(F_6B_2,n)$	=	Lambang untuk shackle graf kipas
$mshack(F_6B_2,n)$	=	Gabungan shackle graf kipas, dimana m menyatakan jumlah *copy* dari shackle graf kipas
H	=	Lambang graf yang memiliki sisi genap
K	=	Lambang graf yang memiliki sisi genap dengan sisi tengah berulang
i	=	Urutan titik pada dari shackle graf kipas, H, dan K
j	=	Urutan titik terhadap shakle graf kipas
x_i	=	Titik ujung atas ke-i pada badan dari shakle graf kipas, titik pada sebelah kanan pada graf H dan titik pada graf K
y_i	=	Titik tengah pada graf H
y_j	=	Titik tengah pada badan dari shackle graf kipas
z_i	=	Titik bawah pada badan dari shackle graf kipas dan titik paling kanan pada graf H

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam mengikuti perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi saat ini, negara dituntut mempunyai Sumber Daya Manusia yang mampu menguasai Ilmu Pengetahuan dan Teknologi. Dasar dari ilmu pengetahuan yaitu Matematika. Semua ilmu pengetahuan pastilah mengandung perhitungan matematika. Matematika digunakan di seluruh dunia sebagai alat penting di berbagai bidang, termasuk ilmu alam, teknik, kedokteran atau medis, dan ilmu sosial seperti ekonomi, dan psikologi. Matematika adalah pemeriksaan aksioma yang menegaskan struktur abstrak menggunakan logika simbolik dan notasi yang ada dalam matematika. Matematika terdiri dari beberapa cabang ilmu, antara lain : matematika aplikasi, matematika analisis, matematika komputerisasi, matematika diskrit, matematika statistik, matematika ekonomi, dan lain sebagainya.

Cabang matematika terkini terkait dengan sain komputer yang cukup terkenal adalah Teori Graf. Teori graf merupakan topik yang banyak mendapat perhatian saat ini, karena model - model yang ada pada teori graf berguna untuk aplikasi yang luas. Dalam pengaplikasiannya teori graf banyak berhubungan dengan kehidupan sehari-hari, misalnya dikaitkan dengan masalah jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, ilmu kimia, sosiologi, kriptografi dan lain sebagainya. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek dinyatakan sebagai noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis. Penggunaan graf dilakukan pertama kali untuk memecahkan masalah yang terkenal dengan nama Masalah Jembatan Konigsberg, yang dilakukan pada tahun 1736. Orang yang pertama kali mempunyai ide untuk memecahkan masalah jembatan ini adalah L. Euler, matematikawan asal Swiss, ketika mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai

Pregel di Konigsberg, Jerman hanya dalam sekali waktu atau tidak boleh diulang lalu kembali ke tempat semula (tanpa berenang melalui sungai). Dua bagian yang penting dalam representasi graf adalah simpul (*vertex*) dan ruas (*edge*). Sehingga graf bisa dikatakan sebagai himpunan dari simpul dan ruas.

Salah satu topik yang menarik dan mendapat banyak perhatian pada teori graf adalah masalah pelabelan graf. Pelabelan graf akhir-akhir ini mulai banyak mendapat perhatian terutama terapannya dalam jaringan komputer.

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedl*áč*ek (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, radar, penyimpanan data komputer, dan pemancar frekuensi radio. Berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf yang diperkenalkan oleh Simanjutak, Bertault dan Miller pada tahun 2000 (Dafik, 2007:19). Salah satunya adalah pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic (SEATL), dimana a bobot sisi terkecil dan d nilai beda. Pada graf diskonektif, melibatkan angka pelabelan lebih banyak pada setiap komponen graf konektif terpisahnya dan tidak ada jaminan jika graf G mempunyai pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic kemudian pada gabungan graf diskonektifnya mempunyai pelabelan total super(a', d')-sisi antimagic.

Untuk saat ini banyak pelabelan SEATL dilakukan, namun pada saat mencari *super edge antimagic total labeling* untuk d=1 baik itu tunggal ataupun gabungan kebanyakan terbatas pada jumlah sisi ganjil. Selain itu dalam hubungan antara graf tunggal dengann gabungan saling lepasnya juga belum diketahui atau dianalisa sebelumnya, oleh karena itu, dalam penelitian ini diberikan untuk mengatasi masalah tersebut.

Teori pelabelan graf ini sangat bermanfaat untuk sektor transportasi, navigasi, sistem komunikasi, pengkodean dan lain-lain. Ilmu pengkodean sangat dibutuhkan untuk merahasiakan suatu pesan. Teknik untuk membuat pesan rahasia ini dikenal dengan kriptosistem. Kriptosistem merupakan suatu teknik menjaga keamanan data dan informasi agar tidak diketahui dan dibaca oleh pihak yang tidak berwenang. Penelitian ini akan membuat suatu ciphertext yang didasari pada pelabelan graf bersisi genap yang dimisalkan dengan graf H. Dikarenakan graf ini mudah dilabeli titik dan sisinya, dan juga dikarenakan peneliti sebelumnya belum ada yang menggunakan graf bersisi genap untuk pelabelannya.

Penggunaan internet yang sangat luas seperti pada bisnis, perdagangan, bank, industri dan pemerintahan yang umumnya mengandung informasi yang bersifat rahasia maka keamanan informasi menjadi faktor utama yang harus dipenuhi. Salah satu cara yang digunakan adalah dengan menyandikan isi informasi menjadi suatu kode-kode yang tidak dimengerti sehingga apabila disadap maka akan kesulitan untuk mengetahui isi informasi yang sebenarnya. Salah satu alat yang digunakan untuk mengamankan data dan informasi adalah $Kriptografi$.

(Menezes dkk,1996) menyatakan $Kriptografi$ merupakan studi tentang teknik-teknik matematika yang berhubungan dengan aspek-aspek pengamanan informasi seperti kerahasiaan (*confidentiality*), keutuhan data (*data integrity*), otentikasi entitas (*entity authentication*) dan otentikasi asal data (*data origin authentication*).

Penelitian kali ini akan mengkaji tentang pelabelan total super (a, d) sisi antimagic pada graf yang memiliki sisi ganjil maupun genap baik yang tunggal dan gabungannya, penelitian ini juga menganalisis tentang hubungan antara graf konektif dan diskonektif dimana pada gabungan graf tersebut memiliki pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antimagic jika tunggalnya memiliki pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antimagic jika tunggalnya. Selain itu, adanya aplikasi graf pada pengembangan *ciphertext* pada suatu kalimat. Oleh karena itu, pada penelitian ini penulis memilih judul "Analisis Keterkaitan SEATL graf Konektif dan Diskonektif serta Aplikasi dalam Pengembangan Kriptosistem Polyalphabetic Cipher".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic baik yang tunggal maupun gabungan untuk sisi ganjil?
2. Bagaimana pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic baik yang tunggal maupun gabungan untuk sisi genap?

3. Bagaimana aplikasi pengembangan kriptosistem polyalphabetic cipher terhadap pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic pada graf yang memiliki sisi genap?

4. Bagaimana analisis dari pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic untuk konektif dan diskonektif pada graf?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi pada:

1. Graf berhingga sederhana serta bukan graf berarah(*directed graph*);

2. *Ciphertext* yang digunakan hanya terbatas sampai 26 huruf yaitu dari a sampai z;

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic baik yang tunggal maupun gabungan untuk sisi ganjil

2. Untuk mengetahui pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic baik yang tunggal maupun gabungan untuk sisi genap

3. Untuk mengetahui aplikasi pengembangan kriptosistem polyalphabetic cipher terhadap pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic pada graf yang memiliki sisi genap

4. Untuk mengetahui analisis dari pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic untuk konektif dan diskonektif pada graf.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

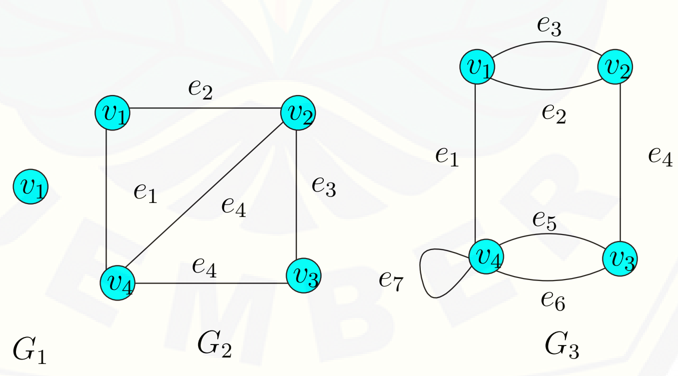
1. Mengembangkan pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pelabelan graf;
2. Mengembangkan aplikasi dari pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic.
3. Dapat menjaga dan mengamanankan informasi seperti kerahasiaan, keutuhan data dan lainnya dengan menggunakan metode yang matematis;
4. Mengembangkan pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup $Kriptografi$ dan pelabelan graf, yaitu mengetahui algoritma pengkodean.
5. Mengembangkan kemampuan berfikir logis dan matematik.
6. untuk meraih pendidikan lebih tinggi diatasnya.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Graf

Sebuah graf didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan (V, E) dimana V adalah sebuah himpunan tidak kosong yang berhingga yang anggota-anggotanya dinamakan simpul (*vertex*). E adalah sebuah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang simpul. Graf dilambangkan dengan $G = (V, E)$ Dimana V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi Vertexnya harus ada minimal satu. Bila (V, E) adalah himpunan berhingga maka graf yang demikian disebut dengan graf berhingga ($finite\ graph$).

Suatu graf dengan p buah vertexs dan q buah sisi ditulis dengan $G(p, q)$. Secara umum graf dapat digambarkan dengan suatu diagram dimana vertexs yang ditunjukkan sebagai titik yang dinotasikan dengan v_i, i= 1,2,3,...dan sisi yang digambarkan dengan sebuah garis lurus atau dengan garis lengkung yang menghubungkan dua vertexs v_i,v_j dan dinotasikan e_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, q$ disebut dengan titik-titik dari e_k



Gambar 2.1 Contoh graf secara umum

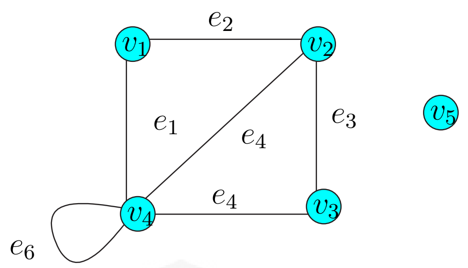
Gambar 2.1. G_2 adalah graf dengan $V(G_2) = v_1, v_2, v_3, v_4$ dan $E(G_2) =$

e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, dengan $e_1 = v_1v_4$, $e_2 = v_1v_2$, $e_3 = v_2v_3$, $e_4 = v_3v_4$, $e_5 = v_2v_4$. Titik v_1 dan v_4 berhubungan langsung, sisi e_1 terkait dengan titik v_1 dan v_4 begitu pula seterusnya. Karena $E(G_1) = \emptyset$, maka G_1 adalah graf kosong. Dua titik dikatakan berhubungan ($adjacent$) jika ada sisi yang menghubungkan keduanya dan sebuah sisi dikatakan menempel untuk titik yang menghubungkan sisi tersebut. Sejumlah sisi yang menempel pada sebuah titik disebut derajat titik (*degree*). Sebagai contoh, graf pada gambar 2.1 untuk graf G_2, v_1 berhubungan dengan v_2 dan v_2 berhubungan dengan v_3, dan sisi e_1 menempel dengan titik v_1 dan v_4. Titik v_4 derajat 3, v_2 memiliki derajat 3. G_3 Merupakan contoh graf yang tidak sederhana karena G_3 mempunyai *loop* yaitu e_7 dan *edge* pararel yaitu graf yang mempunyai titik-titik ujung yang sama atau *multiple edge* atau dengan kata lain bisa dikatakan sisi rangkap yaitu e_2, e_3 dan e_5, e_6. Jumlah titik pada graf G disebut order dari G dinotasikan $|V(G)|$ sedangkan jumlah sisinya disebut size dari G dinotasikan $|E(G)|$. Graf yang mempunyai order $p = |V(G)|$ dan size $q = |E(G)|$ dapat ditulis (p, q)-graf. Jika suatu sisi (*edge*) dikatakan bersisian (berinsiden) dengan suatu titik (*vertex*) maka sisi (*edge*) menghubungkan titik (*vertex*) tersebut dengan titik (*vertex*) lain. Jika sisi (*edge*) misalnya e bersisian dengan titik v_i, maka e menghubungkan titik v_i dengan titik (*vertex*) lain, misalnya titik (*vertex*) itu v_j sehingga kita peroleh e =(v_i ,v_j). Titik v_i dan v_j disebut titik ujung sisi e.

Misal terdapat dua buah titik v_i dan v_j di dalam graf, dimana v_i dan v_j saling berdekatan. Jika sisi e insiden terhadap titik v_i dan v_j , maka titik v_i dan v_j disebut endpoint dari sisi e. Jika terdapat beberapa sisi berbeda pada graf yang menghubungkan pasangan titik yang sama, maka graf yang demikian dapat dikatakan mempunyai sisi ganda (*multiple edge*). Derajat (*degree*) sebuah titik v pada sebuah graf G, dituliskan dengan der(v), adalah banyak sisi yang insiden pada v , dengan kata lain jumlah sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik dengan derajat nol disebut titik terisolasi (*isolated vertex*). Graf G_1 pada Gambar 2.2 memuat $v_i = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ dan $e_j = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$.

- Pada graf G_1, sisi e_3 insiden dengan titik v_2 dan titik v_3, tetapi tidak terdapat sisi yang insiden antara titik v_1 dan titik v_3.

- Pada graf G_1, titik v_2 dan titik v_3 merupakan endpoint dari sisi e_3.



Gambar 2.2 Contoh graf G_1

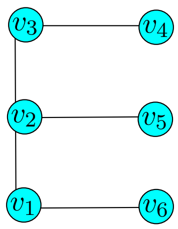
- Pada graf G_1, der(v_1) = 2, der(v_2) = 3, dan der(v_3) = 2, der(v_4) = 5, der(v_5) = 0.

Suatu (*walk*) pada graf G adalah suatu urutan yang terdiri atas titik - titik dan sisi - sisi bergantian, dimana setiap sisi insiden dengan titik terdekat, dengan diawali dan diakhiri pada suatu titik. Sedangkan suatu (*walk*) yang setiap sisinya berbeda maka (*walk*) itu disebut (*trail*), dan suatu (*trail*) yang setiap titiknya berbeda, maka disebut (*path*). Suatu (*walk*) tertutup dalam graf G jika semua sisinya berbeda, maka (*walk*) itu disebut (*trail*) tertutup (*closed trail*). Jika semua titik - titiknya juga berbeda serta diawali dan diakhiri dengan titik yang sama maka (*trail*) itu disebut (*cycle*). Graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda v_i dan v_j di G ada lintasan dari v_i ke v_j. Misalkan $A = (a_{ij})$ adalah matriks $m \times m$ didefinisikan oleh:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ jika } \{v_i, v_j\} \text{ adalah edge, yaitu } v_i \textit{ adjacent} \text{ terhadap } v_j \\ 0 \text{ lainnya} \end{cases}$$

Maka A disebut matriks *adjacency* dari G. Berikut diberikan contoh graf dan matrik adjacency-nya pada gambar 2.3.

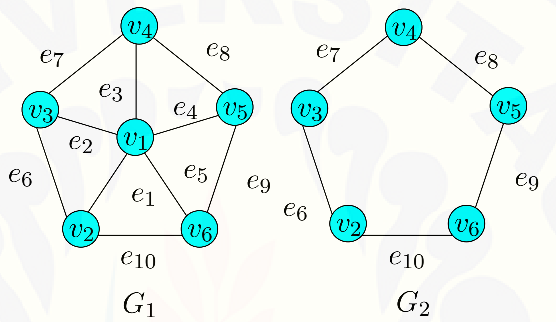
Misalkan $G = (v, e)$, sebuah sub graf dari graf G_1 merupakan graf yang semua titik dan sisinya berada pada graf G_1. Dengan kata lain, sebuah graf G_2 = (v_1, e_1) adalah subgraf dari G_1 jika titik-titik dari G_2 juga titiktitik dari G_1, dan sisisisi dari G_2 juga sisisisi dari G_1. Graf G_1 pada Gambar 2.4 memuat $v_i = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ dan $e_j = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10})$. Graf G_2 memuat



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

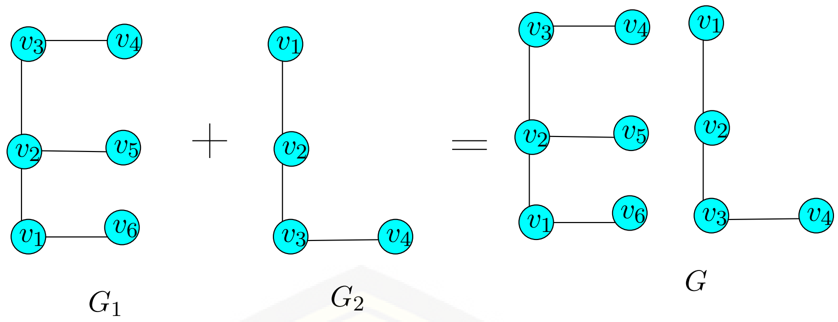
Gambar 2.3 Contoh sebuah graf dan matriks adjency-nya

$v_i = (v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ dan $e_j = (e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10})$ atau bisa dituliskan $(v(G_2) \subseteq v(G_1))$ dan $e(G_2) \subseteq v(G_1)$ maka G_2 merupakan subgraf dari G_1.



Gambar 2.4 Contoh graf dan subgrafnya

Gabungan dari dua graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$, didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titiknya adalah $V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1) \cup E(G_2)$. Pada Gambar 2.5, graf G merupakan gabungan graf G_1 dan G_2, yaitu $G = G_1 \cup G_2$. Graf gabungan mG didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari m buah kopi graf G, atau dapat juga dikatakan sebagai graf dengan m komponen, dimana setiap komponennya adalah graf G. Dengan kata lain $mG = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup ... \cup G_m$. Misal graf G mempunyai p titik dan q sisi, maka graf mG mempunyai mp titik dan mq sisi (Wijaya, 2001:85). Dua buah graf dikatakan isomorfis jika mereka mempunyai struktur yang sama dan kebanyakan, mereka berbeda cara pemberian label titik-titik dan sisi-sisinya, atau cara menggambarkannya. Untuk memperjelasnya akan didefinisikan dua graf G_1 dan G_2 isomorfis jika ada suatu fungsi $\phi : V(G) \longrightarrow V(G)$ sedemikian hingga

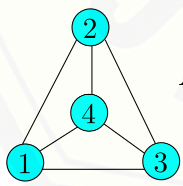


Gambar 2.5 Contoh gabungan graf

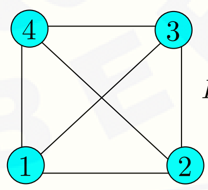
$uv \in E(G_1) \iff \phi(u)\phi(v) \in E(G_2)$. Fungsi ϕ dinamakan sebuah fungsi isomorfis. Jika dua graf G_1 dan G_2 isomorfis, maka dituliskan $G_1 \cong G_2$. Sampai saat ini untuk menentukan apakah dua graf G_1 dan G_2 isomorfis atau tidak belum ada teori yang dapat dipakai . Tetapi, jika graf G_1 dan G_2 isomorfis, maka kedua graf tersebut selalu memenuhi 4 syarat sebagai berikut :

- Jumlah titik dan sisi G_1 sama dengan jumlah titik dan sisi G_2.
- Jumlah Derajat tertentu yang bersesuaian dalam graf G_1 dan G_2 sama.
- Siklus terpendek dari G_1 sama dengan siklus terpendek G_2.

Ketiga syarat tersebut belum cukup menjamin bahwa kedua graf isomorfis. Untuk menunjukkan bahwa kedua graf G_1 dan G_2 isomorfis, maka dapat dilihat dari matriks ketetanggaan kedua graf tersebut sama. Keisomorfisan graf dapat dilihat pada Gambar 2.6. Graf G_1 dan G_2 isomorfis karena memenuhi keempat syarat diatas dan matriks ketetanggaannya juga sama.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

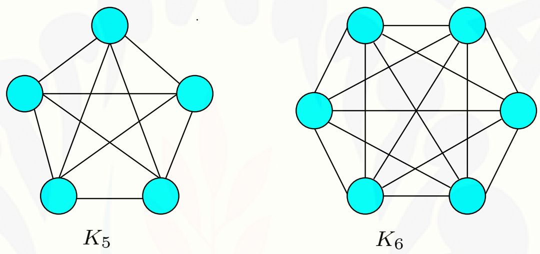
G_1 G_2

Gambar 2.6 Keisomorfisan graf

2.2 Graf Khusus dan Operasi Shackle graf

Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karekteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Berikut ini adalah beberapa contoh graf khusus.

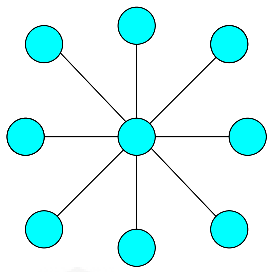
- Graf Lengkap *(Complete Graph)*
  Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n. Berdasarkan Gambar 2.7 , jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $n(n-1)/2$ sisi. Contoh dari graf lengkap bisa dilihat pada Gambar 2.7.



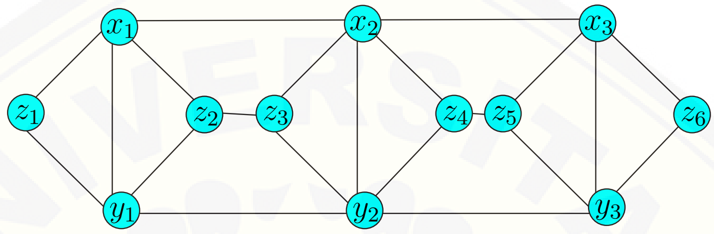
Gambar 2.7 Graf Lengkap K_5 dan K_6

- Graf Bintang (*Star Graph*)
  Graf Bintang adalah graf pohon yang terdiri dari satu titik yang berderajat n dan n titik yang berderajat 1. Jadi, graf bintang S_n terdiri dari $n+1$ titik dan n sisi dengan $n \geqslant 3$. Sebagai ilustrasi perhatikan graf S_8 pada gambar 2.8.

- Graf Tangga Permata (*Diamond Ladder Graph*)
  Graf tangga permata adalah salah satu *family* dari graf tangga. Graf tangga permata dinotasikan dengan Dl_n dimana $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n\}$ dan $E(Dl_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}; 2 \leq j \leq 2n-2 \textit{ genap}\} \cup \{x_i z_{2i-1}, x_i z_{2i}, y_i z_{2i-1}, y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$. Gambar 2.9 adalah contoh graf Dl_3.



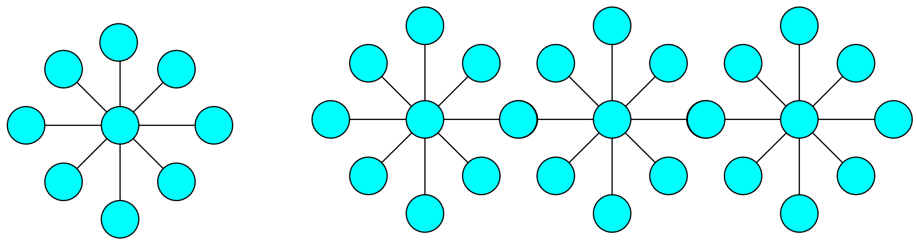
Gambar 2.8 Graf Bintang S_8



Gambar 2.9 Graf Tangga Permata Dl_3

Operasi graf adalah beberapa cara untuk memperoleh graf baru dengan melakukan suatu operasi terhadap dua graf. Salah satu contoh operasi graf yaitu yaitu operasi graf Shackle. Operasi graf shackle digunakan untuk menggabungkan dua buah graf sehingga menjadi graf baru yang unik, atau lebih jelasnya berikut merupakan defnisi dari operasi shackle

Definisi 2.2.1. *Graph Shackle merupakan graf yang dibangun dari graf terhubung nontrivial* $G_1, G_2, \cdots, G_n$ *dimana untuk* G_i *dan* G_j *tidak memiliki titik bersama untuk setiap* $i, j \epsilon$ *[1,n] dengan* $|i-j| \geq 2$, G_i *dan* G_{i+1} *memiliki tepat satu titik bersama yang disebut titik penghubung dan memiliki titik penghubung* $n-1$ *berbeda. Shackle graf dinotasikan shack(G,v,n), sedangkan generalisasi shackle mempunyai penghubung jika titik penghubung bersama antara* G_i *dan* G_{i+1} *diganti dengan suatu subgraf bersama yang akhirnya disebut subgraf penghubung yang dinotasikan dengan shack(G,H,n). Jika kita tidak memiliki semua elemen subgraf H maka disebut* $shack(G, v\epsilon H, n)$, $shack(G, e\epsilon H, n)$ *atau* $shack(G, k\epsilon H, n)$. *Contoh operasi Shackle lihat pada Gambar 2.10.*



S_8 Shack$(S_8, v_1, 3)$

Gambar 2.10 Contoh operasi *Shackle*

2.3 Ciphertext

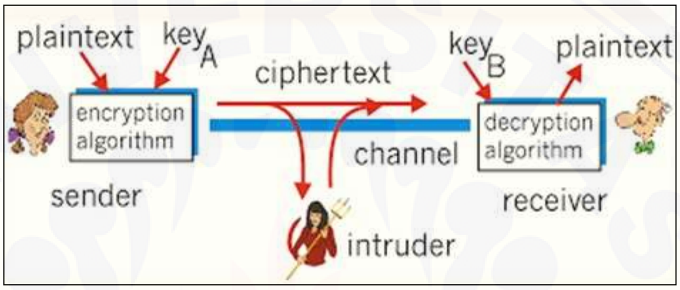
Kemajuan dan perkembangan teknologi informasi dewasa ini telah berpengaruh hampir semua aspek kehidupan manusia, tak terkecuali dalam hal berkomunikasi. Dengan adanya internet, komunikasi jarak jauh dapat dilakukan dengan cepat dan murah. Namun di sisi lain, ternyata internet tidak terlalu aman karena merupakan media komunikasi umum yang dapat digunakan oleh siapapun sehingga sangat rawan terhadap penyadapan informasi oleh pihak-pihak yang tidak berhak mengetahui informasi tersebut. Oleh karena penggunaan internet yang sangat luas seperti pada bisnis, perdagangan, bank, industri dan pemerintahan yang umumnya mengandung informasi yang bersifat rahasia maka keamanan informasi menjadi faktor utama yang harus dipenuhi. Berbagai hal telah dilakukan untuk mendapatkan jaminan keamanan informasi rahasia ini. Oleh karena itu, dibutuhkan penyandian isi informasi menjadi suatu kode-kode yang tidak dimengerti sehingga apabila disadap maka akan kesulitan untuk mengetahui isi informasi yang sebenarnya. Salah satu alat yang digunakan untuk mengamankan data dan informasi adalah Kriptografi. Kriptografi berasal dari kata Yunani kripto (tersembunyi) dan grafia (tulisan).

(Menezes dkk,1996) menyatakan kriptografi merupakan studi tentang teknik-teknik matematika yang berhubungan dengan aspek-aspek pengamanan informasi seperti kerahasiaan (*confidentiality*), keutuhan data (*data integrity*), otentikasi entitas (*enity authentication*) dan otentikasi asal data (*data origin authenricati−on*). Sistem kriptografi (*cryptosystem*) adalah kumpulan yang terdiri dari algoritma kriptografi, semua *plaintext*, *ciphertext*, dan kunci yang mungkin. *Plaintext* atau pesan adalah data yang dapat dibaca dan dimengerti maknanya, sedangkan *ciphertext* adalah bentuk pesan yang tersandi ke bentuk lain yang tidak dapat dipahami. Dalam perkembangannya, kriptografi didefinisikan sebagai ilmu yang berhubungan dengan prinsip-prinsip atau metode-metode mentransformasikan pesan ke dalam bentuk yang tidak dimengerti, kemudian ditransformasikan kembali ke dalam bentuk pesan asli yang dimengerti. Kriptografi adalah ilmu yang mempelajari bagaimana membuat suatu pesan yang dikirim dapat disampaikan kepada penerima dengan aman (Schneier, 1996). Pesan asli yang dimengerti isinya atau maknanya ini dinamakan *plaintext*. Pesan yang tidak dimengerti, yang merupakan hasil transformasi dari *plaintext*, disebut *ciphertext*.

Kriptosistem adalah algoritma kriptografi, yang terdiri dari beberapa komponen, yaitu

- Enkripsi merupakan cara pengamanan data yang dikirimkan sehingga terjaga kerahasiaannya.
- Dekripsi merupakan kebalikan dan enkripsi. Pesan yang telah dienkripsi dikembalikan ke bentuk asalnya.
- Kunci adalah kunci yang dipakai untuk melakukan enkripsi dan deskripsi.
- Ciphertext merupakan suatu pesan yang telah melalui proses enkripsi.
- Plaintext sering disebut dengan cleartext. Teks-asli atau teks-biasa ini merupakan pesan yang ditulis atau diketik yang memiliki makna. Teks-asli inilah yang diproses menggunakan algoritma kriptografi untuk menjadi *ciphertext* (teks-kode).
- Pesan dapat berupa data atau informasi yang dikirim (melalui kurir, saluran komunikasi data dan sebagainya) atau yang disimpan di dalam media perekaman (kertas, storage dan sebagainya).
- Cryptanalysis atau kriptanalisis bisa diartikan sebagai analisis kode atau suatu ilmu untuk mendapatkan teks-asli tanpa harus mengetahui kunci yang sah secara wajar (Ariyus, 2008).

Cryptograhic system atau *Cryptosystem* (Kriptosistem) adalah suatu fasilitas untuk mengkonversikan *plaintext* ke dalam bentuk *ciphertext* dan sebaliknya. Dalam sistem ini, seperangkat parameter yang menentukan transformasi pencipheran tertentu yang biasa disebut dengan set kunci. Maksudnya kunci telah ditentukan sebelumnya dan *ciphertext* mengacu kepada kunci yang telah dibuat. Proses enkripsi dan dekripsi diatur oleh satu atau beberapa kunci kriptografi. Secara umum kunci-kunci yang digunakan untuk proses pengenkripsian dan pendekripsian tidak perlu identik dan tergantung pada sistem yang digunakan (Pearson, 2006.). Gambar 2.11 merupakan alur kerja kriptosistem.



Gambar 2.11 Alur kerja kriptosistem

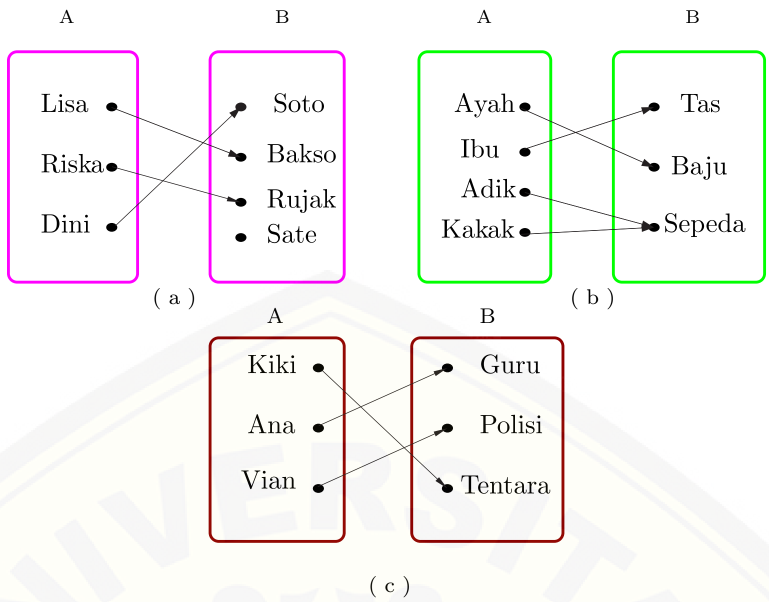
Pengenkripsian data bermula dari *monoalphabetic* cipher. Salah satunya adalah caesar cipher, yaitu mengganti huruf semula dengan huruf ke tiga setelahnya. Teknik ini sangat mudah untuk dipecahkan karena setiap huruf yang sama pada plainteks akan menjadi huruf yang sama pula pada *ciphertext*. Ada teknik yang lebih bagus dalam pengenkripsian huruf alfabet, yaitu polyalphabetic cipher. Kriptografi *polyalphabetic cipher* adalah *cipher* yang dikonstruksi berdasarkan substitusi, secara lebih khusus menggunakan banyak substitusi huruf alfabet. Contohnya adalah V igenere cipher. Huruf yang sama pada *plaintext* akan sangat mungkin berbeda pada *ciphertext*. Hal ini membuat data lebih rahasia (Muktyas dan Sugeng, 2014).

Metode kriptografi Shift Chipper mula-mula digunakan oleh kaisar Romawi, *Julius Caesar* untuk menyandikan pesan yang dikirim kepada para gubernurnya, sehingga metode ini disebut caesar chiper. Dalam kriptografi, shift chiper dikenal dengan beberapa nama seperti: code caesar atau caesar shift. Shift chiper merupakan teknik enkripsi yang paling sederhana dan banyak digunakan. Chiper ini berjenis chiper substitusi, dimana setiap huruf pada *plaintext* digantikan dengan huruf lain yang tetap pada posisi alfabet. Misalnya diketahui bahwa pergeseran = 3, maka huruf A akan digantikan oleh huruf D, huruf B menjadi huruf E, dan seterusnya (Fairuzabadi, 2010). Metode Substitusi merupakan perkembangan lebih lanjut dari Caesar Cipher. Pada metode substitusi, pengirim pesan bisa menentukan kunci berupa sebuah kata dengan syarat tidak ada karakter berulang dalam kata itu. Bila ada, maka karakter yang muncul pertama yang akan disimpan, dan karakter berulang akan ditiadakan. *plaintext* dalam metode substitusi akan dienkripsi berdasarkan kunci yang dimasukkan. Kunci akan menjadi peubah dalam enkripsi, menggan- tikan setiap karakter dengan barisan abjad ya ng telah disusun sesuai kunci. Proses ini hampir sama dengan Caesar Cipher, namun prosesnya terikat pada kunci yang dimasukkan sebelumnya itu (Ongko, 2013).

2.4 Fungsi dan Barisan Aritmatika

Secara umum, fungsi dari himpunan A ke himpunan B didefinisikan sebagai aturan yang memetakan setiap anggota himpunan A(dinamakan sebagai domain) kepada anggota himpunan B(dinamakan sebagai kodomain) yang ditulis dengan notasi $f : A \rightarrow B$. Istilah "fungsi", "pemetaan", "peta", "transformasi", dan "operator" biasanya dipakai secara sinonim. Himpunan A yaitu himpunan yang memuat elemen pertama dari elemen-elemen dalam f, disebut *domain* f dan dapat dinyatakan sebagai D_f. Himpunan B yaitu himpunan yang memuat elemen kedua dari elemen-elemen dalam f, disebut *range* f dan dinyatakan sebagai R_f. Notasi : $f : A \rightarrow B$ menunjukkan bahwa f merupakan fungsi dari A ke B, yang sering juga dibaca "f adalah pemetaan dari A ke B", atau "f memetakan A ke B". Jika (a, b) anggota dari f, maka $b = f(a)$ untuk $(a, b) \in f$

Berikut ini disajikan beberapa macam fungsi-fungsi khusus yang berhubungan dalam penelitian pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic, yaitu: fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif Gambar2.12 menunjukkan fungsi injektif, surjektif dan bijektif.



Gambar 2.12 (a) Fungsi injektif, (b) Fungsi surjektif dan (c) Fungsi bijektif

- Fungsi Injektif
  Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif (fungsi satu-satu) jika dan hanya jika untuk tiap $a_1, a_2 \epsilon A$ dan $a_1 \neq (a_2)$ berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.

- Fungsi Surjektif
  Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif atau fungsi onto atau fungsi kedalam jika dan hanya jika $(R_f = B)$, atau $\forall y \in B, \exists x \in A, \ni f(x) = B$.

- Fungsi Bijektif
  Fungsi $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi bijektif jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif

Suatu barisan yang dibentuk dengan cara menambah atau mengurangi suku sebelumnya dengan suatu bilangan tetap tertentu disebut barisan aritmatika, atau $U_1, U_2, U_3, ..., U_n$ disebut barisan aritmetika jika selisih dua suku yang berurutan adalah tetap. Barisan dalam R adalah suatu fungsi yang menghubungkan setiap bilangan asli $n = 1, 2, 3, ...$ dengan tepat satu bilangan real.

$(a) 25, 30, 35, 40, 45, \ldots$

$(b) 24, 20, 16, 12, 8, \ldots$

Barisan (a) mempunyai beda, $b = 5$. Barisan (a) disebut barisan aritmetika naik karena nilai suku-sukunya makin besar. Barisan (b) mempunyai beda, $b = -4$. Barisan (b) disebut barisan aritmetika turun karena nilai suku-sukunya makin kecil. Suatu barisan $U_1, U_2, U_3, \ldots$ disebut barisan aritmetika jika selisih dua suku yang berurutan adalah tetap. Nilai untuk menentukan suku ke-n dari barisan aritmetika. perhatikan kembali contoh barisan (a). 2, 4, 6, 8, 10, ... Misalkan $U_1, U_2, U_3, \ldots$ adalah barisan aritmetika tersebut maka

$U_1 = 2 = 2 + 2(0)$

$U_2 = 4 = 2 + 2 = 2 + 2(1)$

$U_3 = 6 = 2 + 2 + 2 = 2 + 2(2)$

$\ldots$

$U_n = 2 + 2(n - 1)$

Secara umum, jika suku pertama $(U_1) = a$ dan beda suku yang berurutan adalah b maka dari rumus $U_n = 2 + 2(n - 1)$ diperoleh 2 adalah a dan 2 adalah b. Oleh sebab itu, suku ke-n dapat dirumuskan

$U_n = a + b(n - 1)$

Barisan aritmetika yang mempunyai beda positif disebut barisan aritmetika naik, sedangkan jika bedanya negatif disebut barisan aritmetika turun.

$U_1, U_2, U_3, \ldots, U_{n-1}, U_n$ disebut barisan aritmatika, jika

$U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \ldots = U_n - U_{n-1} =$ konstanta.

$U_n = a + (n - 1)b = bn + (a - b) \rightarrow$ Fungsi linier dalam n.

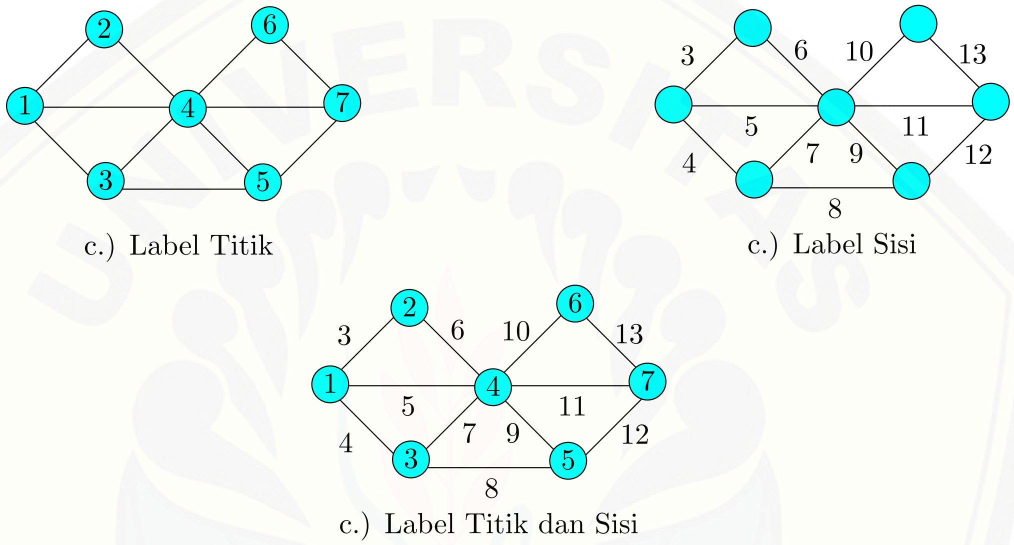
2.5 Aksioma, Teorema, Lema, Akibat, Dugaan dan Masalah Terbuka

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi. Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar. Bentuk khusus dari teorema adalah lema dan akibat. Lema adalah teorema sederhana yang digunakan dalam pembuktian teorema lain. Lema biasanya tidak menarik namun berguna pada pembuktian proposisi yang lebih kompleks, yang dalam hal ini pembuktian tersebut dapat lebih mudah dimengerti bila menggunakan sederetan lema, setiap lema dibuktikan secara individual. Akibat adalah teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan, atau dapat dikatakan akibat adalah teorema yang mengikuti dari teorema lain. Dugaan adalah sebuah proposisi yang dipradugakan sebagai hal yang nyata, benar, atau asli, sebagian besarnya didasarkan pada landasan inkonklusif (tanpa simpulan). Dugaan bertentangan dengan hipotesis (oleh karenanya bertentangan pula dengan teori, aksioma, atau prinsip), yang merupakan pernyataan yang mengandung perjanjian menurut landasan yang dapat diterima. Di dalam matematika, dugaan adalah proposisi yang tidak terbuktikan atau tidak memerlukan bukti atau juga teorema yang dianggap pasti benar adanya. Masalah terbuka *(open problem)* adalah beberapa masalah yang dapat secara akurat dinyatakan, dan belum diselesaikan (tidak ada solusi untuk diketahui). Contoh masalah terbuka *(open problem)* dalam matematika, yang telah diselesaikan dan ditutup oleh peneliti di akhir abad kedua puluh, adalah Teorema Terakhir Fermat dan empat warna teorema peta. Sedangkan masalah terbuka yang belum terselesaikan contohnya adalah permasalahan jembatan Königsberg.

2.6 Pelabelan Graf

2.6.1 Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlck (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan graf adalah suatu pemetaan satu-satu dan onto (fungsi bijektif) yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif. Secara umum, fungsi f yang memetakan himpunan A ke dalam B disebut fungsi satu-satu jika setiap elemen dalam A mempunyai bayangan yang berbeda pada B dan disebut onto jika dan hanya jika range f sama dengan B. Secara lebih singkat, $f : A \to B$ adalah satu-satu jika $f(a) = f(a')$ maka $a = a'$ dan merupakan onto jika $f(A) = B$. Sehingga, fungsi yang memetakan himpunan elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif disebut fungsi bijektif jika tidak ada dua buah elemen yang berbeda pada graf yang mempunyai bayangan yang sama atau dengan kata lain semua elemen pada graf dinomori dengan bilangan bulat positif yang berbeda. Secara matematik, definisi pelabelan graf dapat dituliskan sebagai pelabelan graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan $D \rightarrow N$, dimana D merupakan domain, N merupakan himpunan label dari G. Jika, $D = V$ maka disebut pelabelan titik, $D = E$ maka disebut pelabelan sisi, sedangkan $D = V \cup E$ maka disebut pelabelan total. Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*). Secara matematik, definisi pelabelan graf dapat dituliskan sebagai berikut Gambar 2.13:



Gambar 2.13 Pelabelan Graf

Berdasarkan Gambar 2.13 *a.*) merupakan contoh pelabelan titik yaitu hanya titik saja yang dilabeli, sedangkan gambar *b.*) menunjukkan pelabelan sisi, dimana hanya sisi graf saja yang dilabeli dan pelabelan total dapat dilihat pada Gambar *c.*), semua titik maupun sisi diberi label.

Pada pelabelan titik, jumlah label dua titik yang menempel pada suatu sisi disebut *bobot sisi*. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka disebut pelabelan titik sisi ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama a dan beda d maka pelabelan tersebut disebut pelabelan titik sisi anti ajaib(*edge antimagic vertex labelling* (EAVL). Oleh karena itu pelabelan dalam penelitian ini termasuk fungsi bijektif. Dikarenakan fungsi yang akan dicari merupakan fungsi yang injektif sekaligus surjektif. Domain dalam fungsi ini merupakan label titik dan bobot sisi, sedangkan *range*-nya adalah label sisi yang diperoleh berdasarkan nilai beda d yang berbeda. Pelabelan total super (a,d) dikatakan fungsi injektif karena label sisi untuk tiap sisi pasti berbeda sesuai definisi pelabelan sisi anti ajaib di atas maka label sisinya selalu berbeda dan berurutan. Dikatakan surjektif karena setiap label sisi yang merupakan range dan semuanya adalah kodomain diperoleh dari melabeli setiap sisi pada graf dengan bilangan berurutan setelah label titik terbesar. Sehingga jelas jika pelabelan dalam penelitian ini merupakan fungsi bijektif karena merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif.

Sedangkan dalam pelabelan total, bobot sisi diartikan sebagai jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada suatu sisi. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total-sisi-ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmetika dengan suku pertama a dan beda d maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total sisi anti ajaib (pelabelan total sisi antimagic).

2.6.2 Pelabelan Total Super (a, d)-sisi antimagic

Sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$ disebut pelabelan titik (a, d)-sisi antimagic jika himpunan bobot sisinya $w(uv) = f(u)+f(v)$ pada semua sisi G adalah $\{a, a+d, a+2d, ..., a+(q-1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$ keduanya adalah bilangan bulat, sedangkan pelabelan total (a, d)-sisi antimagic adalah sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $\{1, 2, 3, ...p + q\}$ sehingga himpunan bobot sisinya $w(t)(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)$pada semua sisi G adalah $\{a, a + d, a + 2d, ..., a + (q - 1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$ keduanya bilangan bulat. Sebuah pelabelan total (a, d)- sisi antimagic disebut pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic jika $f(V) = \{1, 2, 3, ...p\}$ dan $f(E) = \{p+1, p+2, ...p+q\}$ dari sebuah graf G dimana p adalah banyaknya titik dan q adalah banyaknya sisi pada graf G. Himpunan bobot sisi yang terbentuk adalah $W = w(xy) \mid xy \in E(G) = \{a, a + d, a + 2d, ..., a + (q - 1)d\}$ untuk $a \geq 0$

dan $d \geq 0$. $\alpha(u)$ adalah label dari titik u, $\alpha(v)$ adalah label dari titik v dan $\alpha(uv)$ adalah label dari sisi uv. Untuk mencari batas atas nilai beda d pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic dapat di tentukan dengan lemma 2.1 (dalam Dafik: 2007):

Teorema 2.6.1. *Jika sebuah graf (p, q) adalah pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic maka* $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$

(Bača dkk:2014) menjelaskan bahwa hubungan antara EAVL dengan SEATL yaitu sebagai berikut:

Proporsisi 1. *Jika sebuah graf G memiliki pelabelan titik (a, d)-sisi antimagic maka graf G memiliki pelabelan total super $(a + |V| + 1, d + 1)$-sisi antimagic dan pelabelan total super $(a + |V| + |E|, d - 1)$-sisi antimagic.*

Didapat dari (Bača dkk:2009) hubungan antara d=1 tunggal dengan d=1 gabungan yaitu seperti berikut:

Teorema 2.6.2. *Misal graf G merupakan pelabelan total super $(a, 1)$-sisi antimagic dengan jumlah titik p dan jumlah sisi q, maka gabungan saling lepas dari $\bigcup_{k=1}^{m} G_k$ juga memiliki pelabelan total super $(b, 1)$-sisi antimagic. Akan tetapi G_k tidak isomorfis terhadap G_1 untuk $k = 1, 2, 3, \ldots, m$ dan $k \neq l$.*

Bukti. Andaikan bahwa setiap G_k memiliki pelabelan total super $(a, 1)$-sisi antimagic untuk α_k dimana $\alpha_k : V(G_k) \to \{1, 2, \ldots, p\}$; $E(G_k) \to \{p + 1, p + 2, \ldots, p+q\}$ dan $\{\alpha_k(u)+\alpha_k(v)+\alpha_k(uv); uv \in E(G_k)\} = \{a, a+1, \ldots, a+q-1\}$. Definisikan bahwa label α untuk semua titik dan sisi dari $\cup_{k=1}^{m} G_k$, yang dapat ditulis sebagai berikut"

$$\beta = \begin{cases} m\alpha_k(x) - 1) + k, & \text{if } x \in V(G_k) \\ m\alpha_k(x) + 1 - k, & \text{if } x \in E(G_k) \end{cases}$$

Hal diatas dapat ditemukan bahwa label β merupakan fungsi bijektif yang mana didapat sebuah himpunan berurutan $\{1, 2, \ldots, mp+mq\}$ untuk semua titik dan sisi dari of $\cup_{k=1}^{m} G_k$. Sehingga bobot sisinya menjadi $\{\beta(u) + \beta(v) + \beta(uv) : uv \in E(\cup_{k=1}^{m} G_k)\} = m(\alpha_k(u)+\alpha_k(v)+\alpha_k(uv)-2)+1+k = \{m(a-2)+2, m(a-2) + 3, \ldots, m(a - 2) + q + 1\}$.

Dimotivasi dari (Sugeng dkk:2005)

Lema 2.6.1. *Misalkan* Υ *adalah barisan* $\Psi = \{c, c+1, c+2, \ldots, c+k\}$*, k genap. Maka ada permutasi* $\Pi(\Upsilon)$ *dari anggota* Ψ *seperti* $\Psi + \pi(\Psi) = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \ldots, 2c + \frac{3k}{2} - 1, 2c + \frac{3k}{2}\}$

Bukti. Misal Ψ adalah sebuah barisan $\Psi = \{t_i | t_i = c+(i-1), 1 \leq i \leq k+1\}$ dan k bilangan genap. Definisikan permutasi $\Pi\Psi = \{u_i | 1 \leq i \leq k+1\}$ dari elemen Ψ didapat:

$$u_i = \begin{cases} c + i + \frac{k}{2}, & \text{jika } 1 \leq i \leq \frac{k}{2} \\ c + i - \frac{k}{2} - 1, & \text{jika } \frac{k}{2} + 1 \leq i \leq k + 1 \end{cases}$$

Sehingga didapat barisan aritmatika $\Psi + \Pi(\Psi) = \{t_i + u_i | 1 \leq i \leq k+1\} = \{2c + \frac{k}{2} + 2i - 1; 1 \leq i \leq \frac{k}{2}\} \cup \{2c - \frac{k}{2} + 2(i-1); \frac{k}{2} \leq i \leq k+1\} = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \cdots, 2c + \frac{3k}{2}\}$.

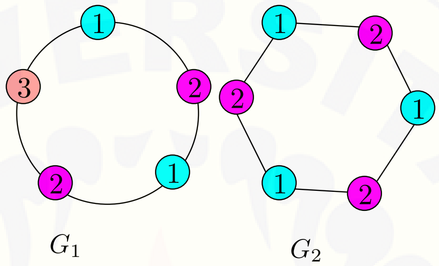
2.6.3 Pewarnaan Titik

Pewarnaan titik dari graf G adalah sebuah pemetaan warna-warna ke titik-titik dari G sedemikian hingga titik yang terhubung langsung mempunyai warna-warna yang berbeda. Graf G berwarna n jika terdapat sebuah pewarnaan dari G yang menggunakan n warna. Dalam pewarnaan titik erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik, yaitu masalah menentukan banyak warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf sehingga dua titik yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda.

Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf G, dinyatakan dengan $\chi(G)$, adalah bilangan k terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan k warna. Biasanya warna-warna yang digunakan untuk mewarnai suatu graf dinyatakan dengan 1, 2, 3,..., k. Jelas bahwa $\chi(G) \leq V(G)$. Beberapa graf tertentu dapat langsung ditentukan bilangan kromatiknya. Graf kosong N_n memiliki $\chi(G) = 1$. Karena semua titik tidak terhubung, jadi untuk mewarnai semua titik cukup dibutuhkan satu warna saja. Graf lengkap K_n memiliki $\chi(G) = n$ sebab semua titik saling terhubung sehingga diperlukan n warna (Harrary, 2007). Untuk mencari batas atas dari bilangan kromatik dapat ditentukan dengan menggunakan teorema seperti berikut:

Teorema 2.6.3. *Jika G adalah sebuah graf khusus dengan p titik dan q sisi dan G mempunyai bilangan kromatik χ maka hubungannya $(\chi - 1)p \leq 2q$ (Ringel, 1994).*

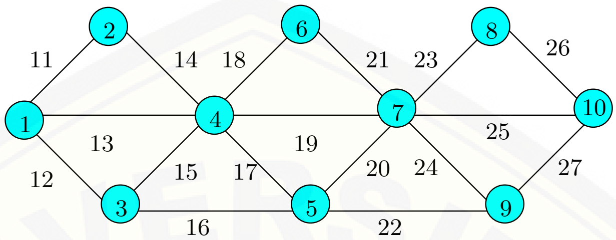
Perhatikan Gambar 2.14, untuk graf G_1, karena p = 5 dan q = 5, maka menurut terorema 2.6.3 didapat $\chi\ (G_1) \leq 3$ atau dapat dituliskan $f(x_1 x_2, \cdots, x_{n-1}) = 1, 2, 1, 2, \cdots, 1, 2, 3$ maka $f(x_n) = 3$. Untuk graf G_2 karena p = 6 dan q = 6 maka menurut terorema 2.6.3 didapat $\chi\ (G_2) \leq 3$ $f(x_1 x_2, \cdots, x_{n-1}) = 1, 2, 1, 2, \cdots, 1, 2$ maka $f(x_n) = 2$,



Gambar 2.14 Pewarnaan titik

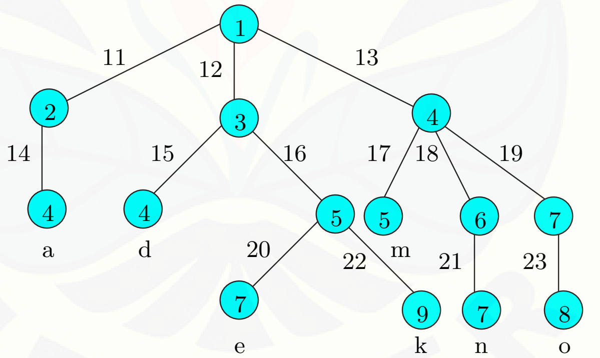
2.7 Aplikasi graf

Dengan keadaan dunia yang semakin rumit, banyak fenomena yang dapat dimodelkan dengan bentuk graf seperti kemajuan teknologi dalam bidang teknik elektro, *computer programming* dan *networking*, administrasi bisnis, sosiologi, ekonomi, komunikasi dan masih banyak cabang lainnya. Teori graf salah satu topik bahasan yang saat ini banyak dikembangkan, seiring dengan perkembangannya tersebut teori graf telah banyak memiliki penerapan bagi masyarakat. Metode pengaplikasiannya pun tidak sesederhana teori. Karena variabel di dunia nyata bukan sekedar jarak saja, ada banyak aspek-aspek lain baik berupa aspek sosial, ekonomi, maupun aspek yang bersifat matematis lainnya yang tidak dapat diabaikan. Salah satu aplikasi graf seperti SEATL dapat digunakan dalam pengembangan kriptosistem polyalpabhetic. Misalnya kalimat rahasia yang akan dikirim adalah "nama dena kode nemo" permasalahan ini adalah termasuk bagian aplikasi SEATL dalam cryptography. Cryptography adalah sebuah teknik merubah dari plaintext (kalimat pesan) ke dalam ciphertext (kalimat rahasia yang akan dikembangkan)(Pearson, 2006). Ciphertext merupakan bentuk pesan yang tersandi ke bentuk lain yang tidak dapat dipahami. Pelabelan yang digunakan untuk mengubah pesan tersebut yaitu pelabelan total pada shackle graf kipas yaitu $shack(F_6, c_4^1, n)$ seperti pada gambar 2.15 dengan d = 2.



Gambar 2.15 SEATL $shack(F_6, c_4^1, 2)$ untuk d=2

Setelah melabeli shacklle graf kipas, dilanjutkan dengan mendata huruf yang digunakan dalam pesan dengan mengabaikan spasi dan tanda baca. Huruf yang digunakan adalah "a,d,e,k,m,n,o". Gambar 2.16 adalah diagram pohon yang berakar di label 1 dengan dilengkapi label sisinya.



Gambar 2.16 Diagram Tree untuk membangun ciphertext

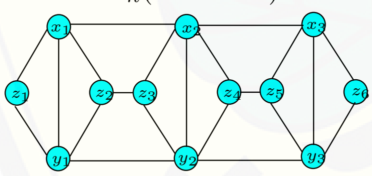
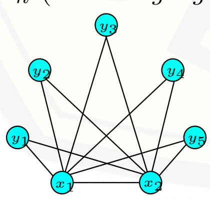
Letakkan huruf-huruf yang digunakan dalam pesan sesuai dengan abjad dan urutkan label sisinya. Kemudian pesan rahasia dipecahkan dengan menerapkan teknik kriptosistem modulo 26 terhadap masing-masing hurufnya sehingga menjadi $a = mod$ (111214,26) = 12, $d = mod$ (112315,26) = 21, $e =$

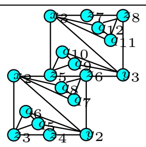
mod (112316520,26) = 4, k = *mod* (112316522,26) = 6,m = *mod* (113417,26)) = 5, n = *mod* (113418621,26) = 17, o = *mod* (113419723,26) = 1. Kombinasi titik dan sisi tersebut di ubah dalam bentuk modulo 26, sehingga diperoleh ciphertext yaitu a=l, d=u, e=d, k=f, m=e, n=q, o=a. Oleh karena itu, dengan menggunakan proses substitusi pesan kedalam ciphertext tanpa spasi dan tanda baca, maka ciphertext dari pesan "qleludqlfaudqdea".

2.8 Hasil-hasil Pelabelan Total Super (a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Diskonektif

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada graf konektif dan diskonektif yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Rangkuman yang tersedia pada bagian ini merupakan hasil penelitian yang diterbitkan sejak tahun 2010. Sedangkan hasil pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada graf konektif dan diskonektif yang ditemukan pada tahun sebelumnya dapat dilihat pada lampiran.

Tabel 2.1: Ringkasan pelabelan total super (a, d)-edge antimagic pada graf konektif.

Graf	d	Hasil	Open Problem
Dl_n(*Diamond*) 	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$; $n \geq 2$ (L.Sya'diyah, 2011)	-
Bt_n (*Buku segitiga*) 	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$ (F.E.Chandra, 2011)	-
St_n(*Graf Tangga*)	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 2$	

Graf	d	Hasil	Open Problem
		(I.Aprilia, 2011)	-

Tabel 2.2: Ringkasan pelabelan total super (a, d)-edge antimagic pada graf diskonektif.

Graf	d	Hasil	Open Problem
mE_n (m *merupakan* *banyaknya graf E*)	$d < 4$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$, ganjil $n \geq 3$ (R.Deviyana , 2011)	• jika $d = 1$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ ganjil • jika $d = 3$ untuk ($m \geq 3$ dan $n \geq 3$) ganjil • jika $d = 3$ untuk ($m \geq 3$ dan $n \geq 3$) genap
$sW_0(3, j, 2)$ (s merupakan *banyaknya graf W*)	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil dan s ganjil (Yeni Anggraeni , 2011)	• jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $1 \leq j \leq m$ genap dan $1 \leq k \leq s$ genap
mDl_n (m merupakan *banyaknya graf Dl*)	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil $d \in \{1\}$ untuk $m \geq 2$ dan m sembarang (L. Syakdiyah, 2011)	• jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $1 \leq j \leq m$ genap
mM_n (m merupakan *banyaknya graf M*)	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil $d \in \{1\}$ untuk $m \geq 2$ dan m sembarang (A. Fajriatin, 2011)	• jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $1 \leq j \leq m$ genap

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan aksioma atau teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada suatu graf baik yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Dalam penelitian ini, terlebih dahulu akan ditentukan nilai beda (d) pada suatu graf, selanjutnya nilai d tersebut diterapkan dalam pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada graf yang diteliti. Jika terdapat pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic, maka akan dirumuskan bagaimana pola pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada graf tersebut dengan menggunakan metode pendeteksian pola *(pattern recognition)* untuk menentukan pola umumnya.

Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai beda (d) pada gabungan saling lepas pada suatu graf, selanjutnya nilai d tersebut diterapkan dalam pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf . Jika terdapat pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic, maka akan dirumuskan bagaimana pola pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada gabungan saling lepas pada graf tersebut dengan menggunakan metode yang sama untuk menentukan pola umumnya. Setelah itu akan dikembangkan penggunaan ciphertext pada pesan rahasia dari pelabelan yang ditemukan.

3.2 Definisi Operasional

Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi operasional variabel yang dimaksud adalah sebagai berikut:

3.2.1 Pelabelan Total Super (a, d)-Sisi Antimagic

Misal $p = |V|$ dan $q = |E|$ maka pelabelan total (a, d)-sisi antimagic adalah sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots, p + q\}$ sehingga himpunan bobot sisinya $w(xy) = w(x) + w(xy) + w(y)$ pada semua sisi G adalah $\{a, a + d, \ldots, a + (q - 1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$ adalah bilangan bulat. Sebuah pelabelan total (a, d)- sisi antimagic disebut pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic jika w(V)= $\{1, 2, 3 \ldots p\}$ dan w(E)$\{= p + 1, p + 2, \ldots, p + q\}$.

3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf yang bersisi ganjil dan genap bik untuk tunggal dan gabungan saling lepasnya, jika pada graf tersebut ditemukan pelabelan total super sisi antimagic maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola *(pattern recognition).* Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

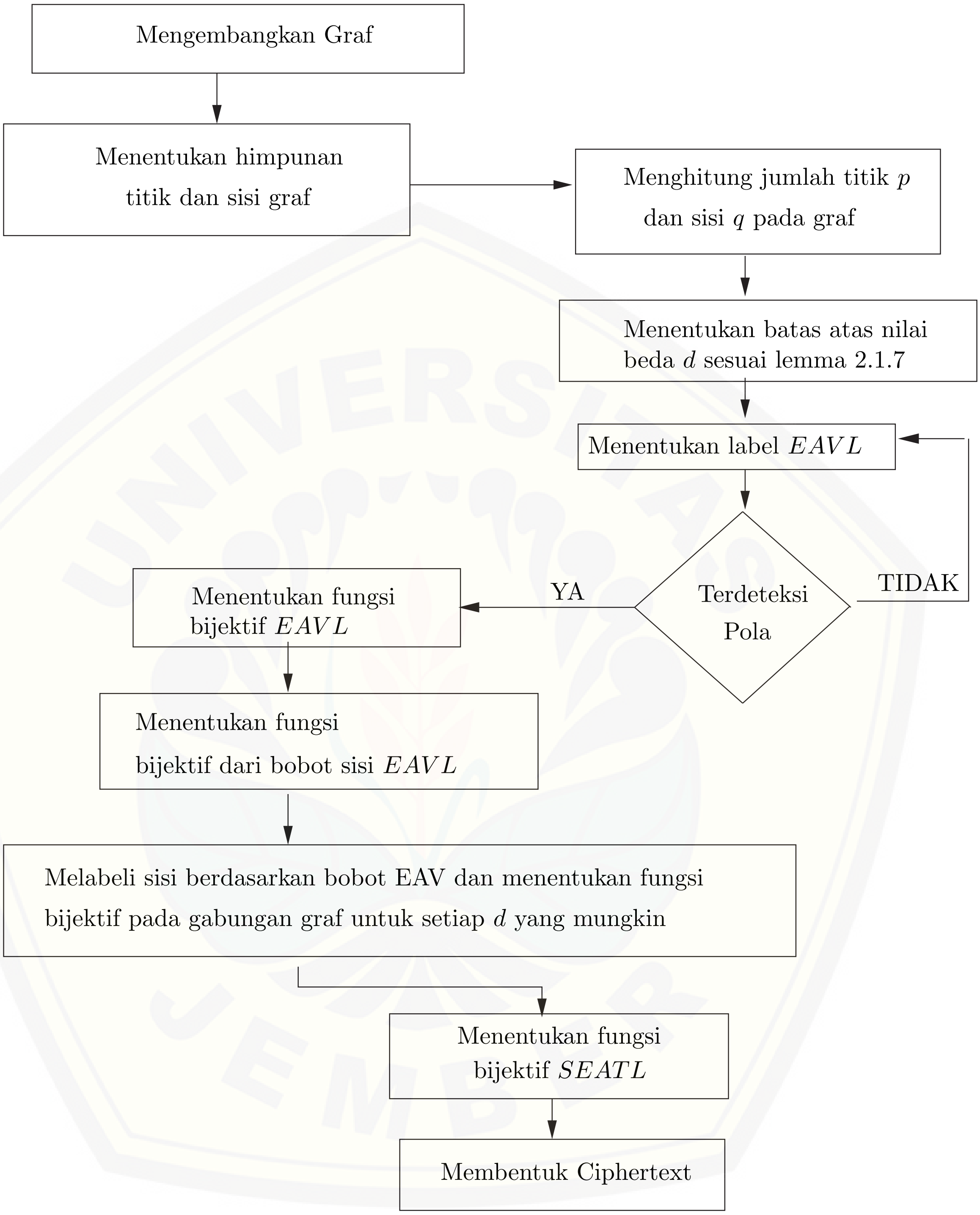
1. menghitung jumlah titik p dan sisi q pada pada graf G,
2. menentukan batas atas nilai beda d pada pada graf G,
3. menentukan label $EAVL$ *(edge-antimagic vertex labeling)* atau pelabelan titik(a,d)-sisi antimagic pada graf G,
4. apabila label $EAVL$ berlaku untuk beberapa graf baik secara *heuristik* maupun *determinatik* maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan menentukan algoritma $EAVL$ pada graf G,
5. menentukan fungsi bijektif $EAVL$ pada shackle graf G,
6. melabeli graf G, dengan $SEATL$ *(super edge antimagic total labeling)* atau pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic dengan nilai beda d yang *feasible*,
7. menentukan fungsi bijektif pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada graf G,
8. membentuk *ciphertext* yang disesuaikan dengan pesan dimana *ciphertext* bergantung pada pelabelan masing-masing graf.

Penelitian ini akan menemukan berbagai pola pelabelan total super sisi antimagic dengan berbagai nilai awal a serta nilai beda d yang ditentukan berdasarkan Lemma 2.6.1. Sehingga penelitian ini juga dapat dinyatakan dalam pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada graf yang bersisi ganjil maupun genap. Langkah-langkah rancangan penelitian tersebut dapat disajikan dalam sebuah bagan diagram alur. Pada diagram alur Gambar 3.1, terdapat tanda panah yang diberi keterangan *expandable* dan *unexpandable*. Yang dimaksud dengan *expandable* adalah graf tersebut dapat dikembangkan dengan syarat-syarat batas yang lebih besar, sedangkan *unexpandable* adalah kebalikannya. Secara umum, untuk gabungan saling pada graf G yang memiliki sisi ganjil maupun genap juga menggunakan teknik penelitian seperti yang telah disebutkan di atas namun diterapkan pada gabungan saling lepas graf G.

3.4 Observasi

Telah dilakukan observasi awal untuk nilai n tertentu sebagai pedoman untuk menduga keberadaan pelabelan super (a, d) sisi *antimagic* serta menentukan pola pelabelannya. Ternyata setelah melakukan observasi awal, peneliti menemukan pola pelabelan titik tunggal pada graf yang bersisi ganjil maupun genap, antara lain dengan tahapan sebagai berikut:

1. menentukan pelabelan titik (a,d)-sisi antimagic pada graf tunggal maupun gabungannya sehingga dari pelabelan ini dapat ditemukan suatu pola pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic yang mana Pelabelan titik pertama dimulai pada titik x_1;
2. menghitung bobot sisi pada pelabelan titik (a,d)-sisi antimagic ;
3. menghitung bobot sisi pada pelabelan titik (a,d)-sisi antimagic ;
4. mendaftar merentang bobot titik secara berurutan ;
5. menjumlahkan secara berurutan dimulai dari bobot sisi terkecil dengan label sisi terbesar dapat diperoleh pelabelan total super (a,0)-sisi antimagic. Nilai dari label sisi adalah dimulai dari $p + 1$ dengan p adalah jumlah titik ;



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

6. Untuk pelabelan gabungan graf yang bersisi ganjil maupun genap juga sama tahapannya, hanya berbeda pengurutan *copy* ganjil atau genap terlebih dahulu pada setiap label titik yang berbeda.

Berdasarkan tahapan pelabelan titik dan sisi tersebut yang dilakukan pada observasi awal sehingga penulis menemukan pelabelan titik dan bobot titik yang berurutan, maka penulis dapat melanjutkan observasinya untuk menemukan pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada graf.