



**SUPER $(a, d) - \mathcal{H}$ -ANTIMAGIC TOTAL COVERING
PADA GRAF SEMI WINDMILL**

SKRIPSI

Oleh

Sherly Citra Wuni

NIM 101810101048

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2014



**SUPER $(a, d) - \mathcal{H}$ -ANTIMAGIC TOTAL COVERING
PADA GRAF SEMI WINDMILL**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Sherly Citra Wuni
NIM 101810101048

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER

2014

Dengan menyebut nama Allah yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Orang tuaku tercinta dan terkasih : Alm. Papa Soli Muhsin dan kedua Mamaku, Mia Agustin dan Almh. Ika Meike Burwati, Kakakku Farid Darmawan yang paling menakutkan tapi kusayangi yang selalu memberikan apa yang aku butuhkan dan merelakan apa yang mas inginkan, Mbak Cy yang selalu mengusahakan apa yang aku butuhkan, Mas Willy yang berjuang sampai ke Qatar, Mas Rully yang berjuang di Bali, Mas Fery yang selalu memberiku pulsa, Mas imam, Mas Rudi dan Mbak Hegi yang di Jakarta yang membantuku dalam bentuk moril, Mas Yudi dan Mbak Novi di Bali, ponakanku tersayang Zhakistina dan Dedek Andi yang selalu jadi tempat jahilku.
2. Rio Vilda Bayu Anggara yang selalu sabar menghadapiku saat emosi serta memberikan dukungan support dan moril dalam pengerjaan skripsi ini.
3. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si selaku DPU dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D selaku DPA, Pak Ahmad Kamsyakawuni, S.Si., M.Kom selaku Dosen Penguji utama dan Pak Kusbudiono, S.Si., M.Si selaku dosen penguji pendamping yang telah memberikan bimbingan, motivasi, bantuan dan kesabaran dalam mengerjakan skripsi ini.
4. Teman-teman angkatan 20010 (Mathgic) FMIPA Matematika: Amanda Faerozmala, Amaliya Zakiyah dan semuanya yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan.
5. Teman-teman pejuang graf: Agustina, Iil, Fian, Nika, Khusnul, Misi, Putri Rizky H.P dan pencinta graf lainnya yang selalu berbagi suka dan duka untuk menemukan rumus dan selalu memberikan dukungan untuk terus semangat dalam mengerjakan skripsi ini.

Digital Repository Universitas Jember

6. Teman-teman UKM BRIDGE: Adek Kevin, Lukman, Priyyo Dwi, Wiwis, Mer, Temon, Edwin, Iif, Ari "Centil", Mz Ade, Ilham, Didin, Kekek dan semua pecinta Bridge untuk waktu yang menyenangkan selama ini serta pertandingan yang menyenangkan dan memuaskan di semua daerah.
7. Almamater Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.



MOTTO

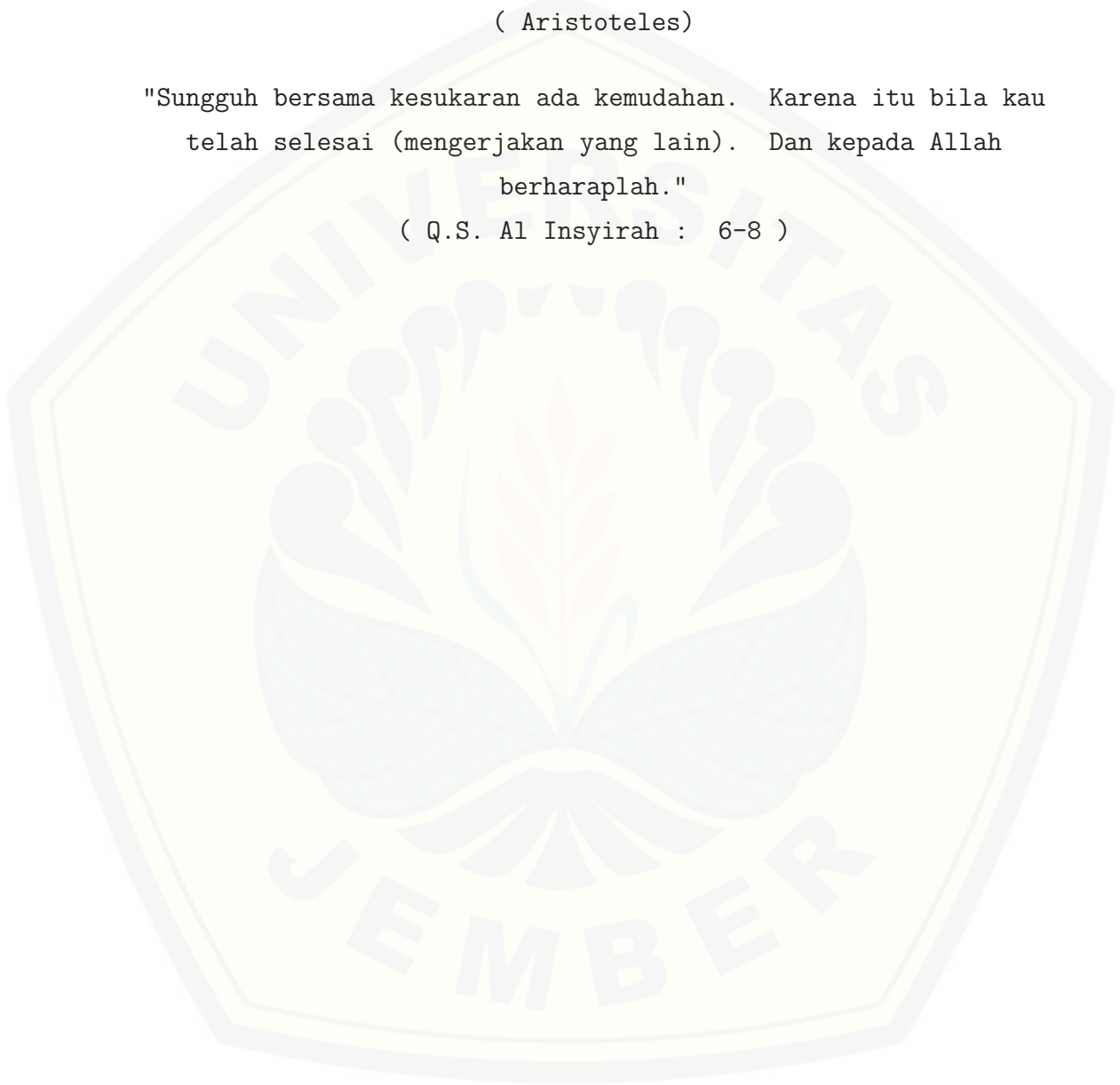
" Think big and act now "

"Pendidikan merupakan perlengkapan paling baik untuk hari tua."

(Aristoteles)

"Sungguh bersama kesukaran ada kemudahan. Karena itu bila kau telah selesai (mengerjakan yang lain). Dan kepada Allah berharaplah."

(Q.S. Al Insyirah : 6-8)



Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Sherly Citra Wuni

NIM : 101810101048

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic total covering pada Graf semi Windmill adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Desember 2014

Yang menyatakan,

Sherly Citra Wuni

NIM. 101810101048

PERSETUJUAN

SUPER (a, d) – \mathcal{H} -ANTIMAGIC COVERING PADA GRAF
WINDMILL

SKRIPSI

diajukan guna memenuhi syarat untuk menyelesaikan pendidikan Program
Sarjana Strata Satu Program Studi Matematika pada Fakultas Matematika dan
Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Nama Mahasiswa : Sherly Citra Wuni
NIM : 101810101048
Jurusan : Matematika
Angkatan Tahun : 2010
Daerah Asal : Jember
Tempat, Tanggal Lahir : Jember, 14 Maret 1991

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.
NIP. 198408012008012006

Penguji I,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D.
NIP. 19680802 199303 1 004

Penguji II,

Ahmad Kamsyakawuni, S.Si., M.Kom.
NIP. 197211291998021001

Kusbudiono, S.Si., M.Si.
NIP. 1967704302005011001

Skripsi berjudul Super $(a, d) - \mathcal{H}$ -Antimagic Pada Graf Windmill telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

Hari : Senin

Tanggal : Desember 2014

Tempat : Gedung Matematika FMIPA

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

NIP.198408012008012006

Anggota I,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D.

NIP.19680802 199303 1 004

Anggota 2,

Ahmad Kamsyakawuni, S.Si., M.Kom

NIP.197211291998021001

Kusbudiono, S.Si., M.Si

NIP. 197704302005011001

Mengetahui,

Dekan Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember

Prof. Drs. Kusno DEA., Ph.D

NIP. 196101081986021001

Super $(a, d) - \mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering pada Graf Semi Windmill; Sherly Citra Wuni, 101810101048; 2014: 65 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedláček (1963) sebagai perumusan ide bujur sangkar magic. Sedláček (1963) mendefinisikan bahwa suatu graf dikatakan magic, jika sisi-sisinya dapat dilabeli dengan bilangan bulat positif sehingga jumlah label sisi yang terkait pada setiap titik selalu sama. Pelabelan antimagic adalah pengembangan dari pelabelan ajaib (magic) yang dilakukan oleh Hartsfield dan Ringel (1990). Mereka mendefinisikan bahwa suatu graf G disebut antimagic, jika sisi-sisinya dapat dilabeli dengan $\{1, 2, \dots, e_G\}$ sehingga setiap titik mempunyai bobot titik yang berbeda. Pelabelan antimagic mempunyai bobot sisi yang berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan a sebagai suku pertama dan d sebagai nilai bedanya. Sedangkan pelabelan super adalah pelabelan titik dan sisi dimana label titik kurang dari label sisi ($|V(G)| < |E(G)|$).

Salah satu jenis graf yang belum diketahui pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic covering pada graf semi Windmill. graf semi Windmill adalah graf kincir angin yang di definisikan sebagai graf $G = Amal(C_3 + e, v, n)$ yang selanjutnya dinotasikan sebagai W_n untuk graf tunggal (konektif) dan gabungannya dinotasika sebagai mW_n .

Graf semi Windmill memiliki himpunan $V = \{Ax_iy_j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n\}$ $E = \{Ax_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iy_{2i-1}, 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{x_iy_{2i}, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2i-1}y_{2i}, 1 \leq i \leq n\}$ $|V| = 3n + 1$ $|E| = 4n$ Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik dan metode pendektesian pola. Metode deduktif aksiomatik yaitu dengan menetapkan pengertian dasar selimut- \mathcal{H} -antimagic, kemudian dikenalkan beberapa teorema mengenai pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic pada selimut graf semi Windmill. Hasil penelitian ini berupa lema dan teorema baru mengenai pelabelan total $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic covering pada graf semi Windmill W_n dan mW_n . Teorema dan lema yang dihasilkan adalah

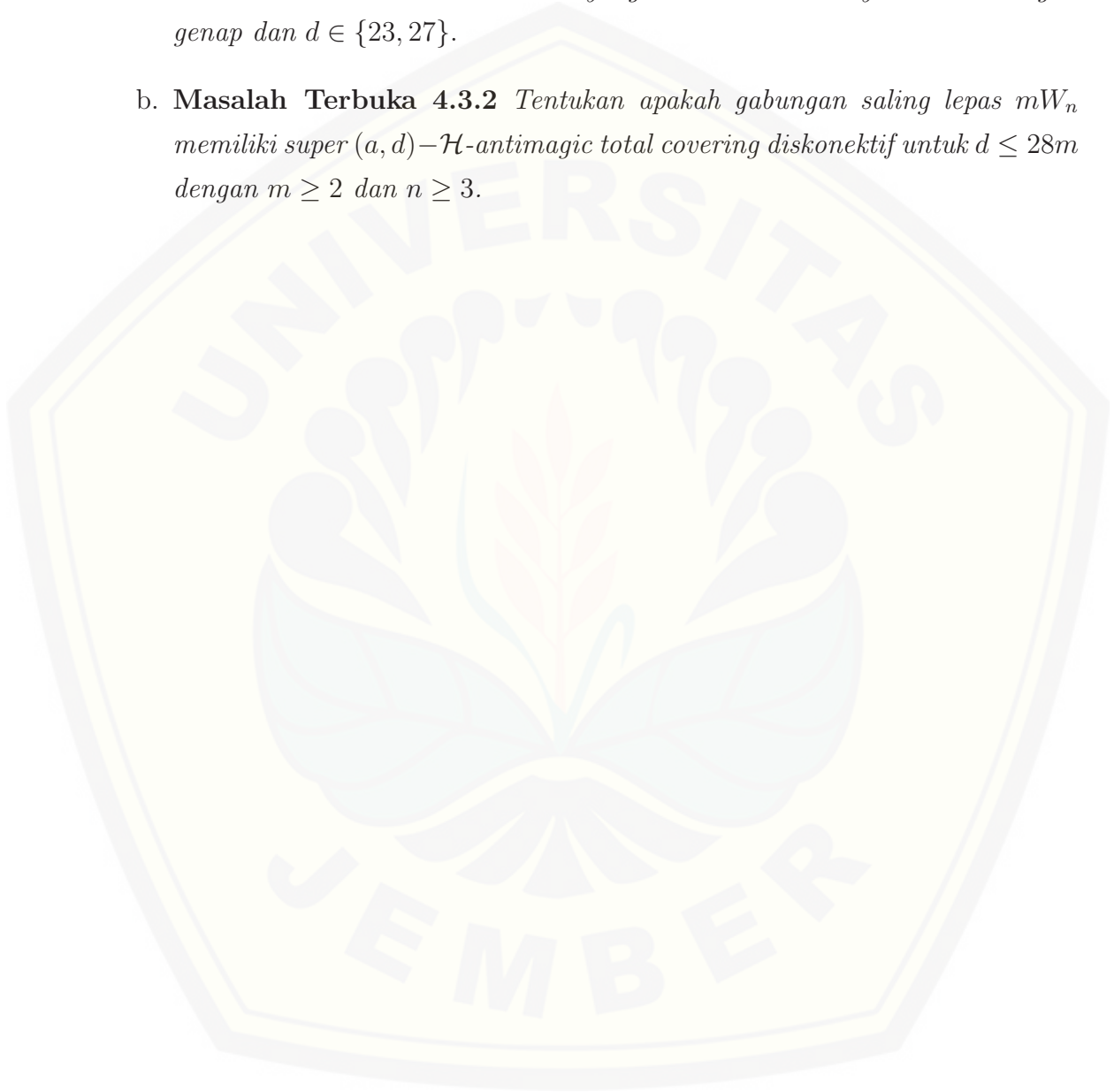
sebagai berikut:

1. **Teorema 4.2.1** *Graf semi Windmill W_n memiliki super $(22n + 20, 1)$ - $(C_3 + e)$ -antimagic total covering untuk $n \geq 2$.*
2. **Teorema 4.2.2** *Graf semi Windmill W_n memiliki super super $(23n + 13, 3)$ - $(C_3 + e)$ -antimagic total covering untuk $n \geq 2$.*
3. **Teorema 4.2.3** *Graf semi Windmill W_n memiliki super $(25n + 17, 5)$ - $(C_3 + e)$ -antimagic total covering untuk $n \geq 2$.*
4. **Teorema 4.2.4** *Graf semi Windmill W_n memiliki super $(18n + 27, 7)$ - $(C_3 + e)$ -antimagic total covering untuk $n \geq 2$.*
5. **Teorema 4.2.5** *Graf Semi Windmill W_n memiliki super $(21n + 12, 9)$ - $(C_3 + e)$ -antimagic total covering untuk $n \geq 2$.*
6. **Teorema 4.2.6** *Graf Semi Windmill W_n memiliki super $(24n - 3, 11)$ - $(C_3 + e)$ -antimagic total covering untuk $n \geq 2$.*
7. **Teorema 4.2.7** *Graf Semi Windmill W_n memiliki super $(18n + 18, 13)$ - $(C_3 + e)$ -antimagic total covering untuk $n \geq 2$.*
8. **Teorema 4.2.8** *Graf Semi Windmill W_n memiliki super $(23n - 5, 15)$ - $(C_3 + e)$ -antimagic total covering untuk $n \geq 2$.*
9. **Teorema 4.2.9** *Graf Semi Windmill W_n memiliki super $(36n - 51, 17)$ - $(C_3 + e)$ -antimagic total covering untuk $n \geq 2$.*
10. **Teorema 4.2.10** *Graf Semi Windmill W_n super $(30n - 39, 19)$ - $(C_3 + e)$ -antimagic total covering untuk $n \geq 2$.*
11. **Teorema 4.2.11** *Graf Semi Windmill W_n memiliki super $(36n - 66, 21)$ - $(C_3 + e)$ -antimagic total covering untuk $n \geq 2$.*
12. **Teorema 4.2.12** *Graf Semi Windmill W_n memiliki super $(36n - 52, 25)$ - $(C_3 + e)$ -antimagic total covering untuk $n \geq 2$.*

13. **Teorema 4.3.1** *Graf semi Windmill mW_n memiliki super $(\frac{55m+1}{2} + 12mn + 6, 5)$ - $(C_3 + e)$ -antimagic total covering untuk $n = 2$ $m \geq 7$.*

Dari kajian diatas ada beberapa batasan d , m dan n yang belum ditemukan sehingga dalam penelitian ini diajukan open problem.

- a. **Masalah Terbuka 4.3.1** *Nilai d yang belum ditemukan yaitu $d \in$ bilangan genap dan $d \in \{23, 27\}$.*
- b. **Masalah Terbuka 4.3.2** *Tentukan apakah gabungan saling lepas mW_n memiliki super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total covering diskonektif untuk $d \leq 28m$ dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 3$.*



Puji syukur ke hadirat Allah S.W.T atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Super $(a, d) - \mathcal{H}$ -Atimagic Total Covering Pada Graf Semi Windmill. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada jurusan Matematika Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ketua Laboratorium Komputer Jurusan Matematika;
4. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si selaku DPU dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D selaku DPA yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
5. Dosen dan Karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Desember 2014

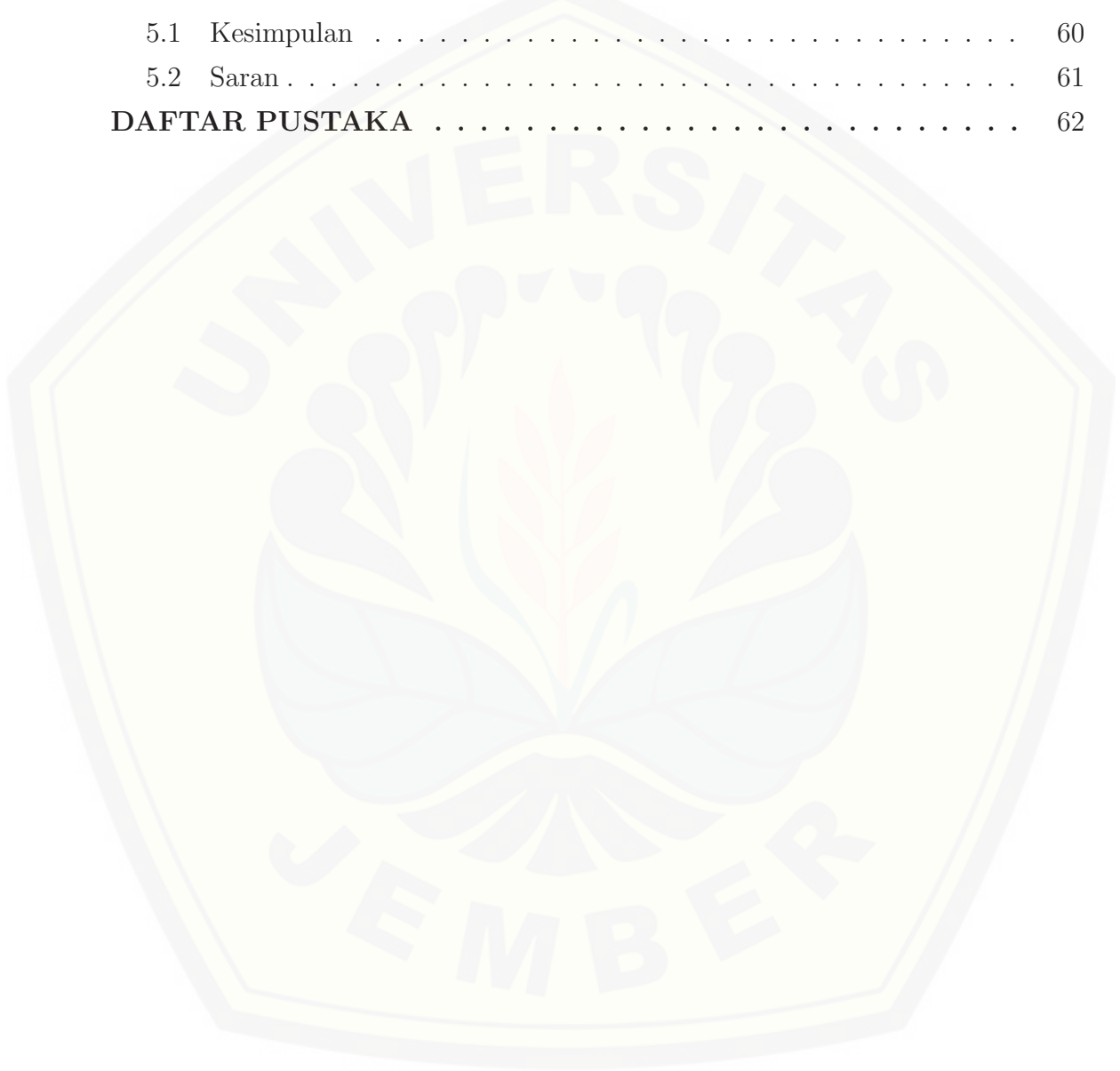
Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iv
HALAMAN PERNYATAAN	v
HALAMAN PERSETUJUAN	vi
HALAMAN PENGESAHAN	vii
RINGKASAN	viii
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvi
DAFTAR LAMBANG	xvii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
2 TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Terminologi Dasar Graf	4
2.2 Graf Khusus	9
2.3 Covering	15
2.4 Aplikasi Covering	16
2.5 Fungsi Bijektif	18
2.6 Hasil penemuan sebelumnya pada Covering Graf $(a, d) - \mathcal{H}$	20
3 METODE PENELITIAN	22
3.1 Metode Penelitian	22
3.2 Rancangan Penelitian	22
4 HASIL DAN PEMBAHASAN	25

Digital Repository Universitas Jember

4.1	Batas Atas d graf semi Windmill W_n	25
4.2	Hasil dari Super $(a, d) - \mathcal{H}$ -Antimagic Covering pada graf semi Windmill W_n konektif	28
4.3	Hasil dari Super $(a, d) - \mathcal{H}$ -Antimagic Covering pada graf semi Windmill mW_n diskonektif	53
4.4	Pembahasan	58
5	KESIMPULAN DAN SARAN	60
5.1	Kesimpulan	60
5.2	Saran	61
	DAFTAR PUSTAKA	62



DAFTAR GAMBAR

2.1	Jembatan Könisberg	4
2.2	Graf yang mempresentasikan jembatan Könisberg	5
2.3	Graf sederhana	6
2.4	Graf tidak sederhana	7
2.5	Graf tidak berarah	7
2.6	Graf tak berhingga	7
2.7	Graf G_4	9
2.8	Graf Lingkaran (Roosen, 2003)	9
2.9	Graf Roda (Roosen, 2003)	10
2.10	Graf Teratur	10
2.11	Graf Planar(Munir,2005)	11
2.12	Graf Bipartit	11
2.13	Graf Berbobot	12
2.14	Graf Buku Segitiga Bt_n	12
2.15	Graf Roket $R_{m,n}$	13
2.16	Graf Tangga St_3	14
2.17	Graf Gunung M_{2n} dengan $n = 2, M_4$	14
2.18	Graf Tangga Permata Dl_3	15
2.19	Graf Semi Windmill	15
2.20	Representasi dalam graf	17
2.21	Total covering	18
2.22	(a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif	19
3.1	Bagan Penelitian	24
4.1	Pelabelan super $(108, 1)-(C_3 + e)$ -antimagic total selimut	30
4.2	Pelabelan super $(105, 3)-(C_3 + e)$ -antimagic total selimut	32
4.3	Pelabelan super $(117, 5)-(C_3 + e)$ -antimagic total selimut	34
4.4	Pelabelan super $(99, 7)-(C_3 + e)$ -antimagic total selimut	36
4.5	Pelabelan super $(96, 9)-(C_3 + e)$ -antimagic total selimut	38

4.6	Pelabelan super $(93, 11)-(C_3 + e)$ -antimagic total selimut	40
4.7	Pelabelan super $(90, 13)-(C_3 + e)$ -antimagic total selimut	42
4.8	Pelabelan super $(87, 15)-(C_3 + e)$ -antimagic total selimut	44
4.9	Pelabelan super $(93, 17)-(C_3 + e)$ -antimagic total selimut	46
4.10	Pelabelan super $(81, 19)-(C_3 + e)$ -antimagic total selimut	48
4.11	Pelabelan super $(78, 21)-(C_3 + e)$ -antimagic total selimut	50
4.12	Pelabelan super $(72, 25)-(C_3 + e)$ -antimagic total selimut	52
4.13	Pelabelan super $(367, 5)-(C_3 + e)$ -antimagic total selimut	57



DAFTAR TABEL

2.1 Ringkasan pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic. 21



G	=	Graf G
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
v_n	=	Titik ke- n pada suatu graf
e_n	=	Sisi ke- n dari suatu graf
$ V(G) $	=	Banyaknya titik dari graf G yang disebut <i>order</i>
$ E(G) $	=	Banyaknya sisi dari graf G yang disebut ukuran (<i>size</i>)
$SEATL$	=	<i>Super edge antimagic total labeling</i> atau pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic
d	=	Nilai beda barisan bobot sisi pada SEATL
a	=	Bobot sisi terkecil yang merupakan suku pertama barisan bobot sisi pada SEATL
W_n	=	Graf semi Windmill konektif
mW_n	=	Gabungan graf semi Windmill dimana m menyatakan jumlah <i>copy</i> dari graf semi Windmill
x_i	=	Titik ke- i pada bagian badan graf semi Windmill
y_i	=	Titik ke- i pada bagian badan graf semi Windmill
y_j	=	Titik ke- j pada bagian badan graf semi Windmill
w_α	=	Bobot sisi dari pelabelan titik α
W_α	=	Bobot total dari pelabelan total α

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedláček (1963) sebagai perumusan ide bujur sangkar magic. Pelabelan graf merupakan suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif, elemen-elemen graf itu sendiri meliputi himpunan titik, himpunan sisi, himpunan titik dan sisi. Pelabelan titik pada graf adalah pelabelan dengan daerah asalnya berupa himpunan titik yang memenuhi sifat tertentu. Pelabelan sisi pada Graf adalah pelabelan dengan daerah asalnya berupa himpunan yang memenuhi sifat tertentu. Sedangkan pelabelan total pada graf adalah pelabelan dengan daerah asalnya berupa himpunan titik dan sisi yang memenuhi sifat tertentu. Sedláček (1963) mendefinisikan bahwa suatu graf dikatakan magic, sisi-sisinya dapat dilabeli dengan bilangan bulat positif sehingga jumlah label sisi yang terkait pada setiap titik selalu sama.

Pelabelan suatu graf dikatakan antimagic jika sisinya dapat dilabeli dengan bilangan bulat positif dan jumlah label sisi yang terkait pada setiap titik berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan a sebagai suku pertama dan d sebagai nilai bedanya. Pelabelan antimagic adalah pengembangan dari pelabelan magic yang dilakukan oleh Hartsfield dan Ringel (1990). Mereka mendefinisikan bahwa suatu graf G yang memiliki verteks sebanyak $v_G = |V| = |V(G)|$ dan *edge* sebanyak $e_G = |E| = |E(G)|$ disebut antimagic jika masing-masing *edge* dilabeli dengan $\{1, 2, \dots, e_G\}$ sehingga bobot verteksnya saling berbeda *pairwise distinct*, dengan sebuah bobot verteks dari verteks v .

Pengembangan dari pelabelan total super (a, d) sisi antimagic adalah pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic total covering. Pada tahun 2009, Inayah dkk. mengembangkan suatu pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat barisan aritmatika $\{a, a+d, a+2d, \dots, +$

$a + (t - 1)d$ }. Pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering merupakan fungsi bijektif karena label selimutnya selalu berbeda dan berurutan. Pelabelan super adalah pelabelan titik dan sisi dimana bobot label titik lebih kecil dari label sisinya. Dapat disimpulkan bahwa pelabelan antimagic mempunyai bobot sisi yang berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan a sebagai suku pertama dan d sebagai nilai bedanya. Sedangkan pelabelan super adalah pelabelan titik dan sisi dimana label titik kurang dari label sisi ($|V(G)| < |E(G)|$).

Setiap pelabelan graf mempunyai nilai batas atas d berbeda yang merupakan nilai terbesar untuk d . Nilai $d \leq s$ dengan s adalah bilangan bulat non negatif yang merupakan nilai terbesar untuk d . Penelitian tentang *covering* pernah dilakukan oleh Inayah (2013). Inayah membahas tentang pelabelan selimut $(a, d) - C_h$ -antimagic super pada graf kipas dan graf roda. Inayah mengembangkan suatu pelabelan selimut \mathcal{H} -antimagic, dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlah yang merupakan deret aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d\}$. Inayah dkk., meneliti tentang pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic pada graf fan F_n dengan $d \in \{3, 2h - 5, 2h - 1, 6h - 3; 3 \leq h \leq n + 1\}$. Pada penelitian ini membahas tentang pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic covering pada graf semi Windmill konektif dan diskonektif yang dinotasikan dengan W_n dan mW_n , untuk $n \geq 2$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

- Berapa batas atas super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic covering pada graf semi Windmill konektif dan diskonektif?
- Bagaimana fungsi bijektif super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic covering pada graf semi Windmill konektif dan diskonektif?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi pada :

- a. Graf sederhana, yaitu graf yang tidak mempunyai loop dan sisi ganda (paralel);
- b. Super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic covering pada graf semi Windmill disimbolkan dengan W_n dan mW_n , dengan $m \geq 7$ dan $n = 2$.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Menentukan batas atas super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic covering pada graf semi Windmill konektif dan diskonektif;
- b. Menentukan fungsi bijektif super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic covering pada graf semi Windmill konektif dan diskonektif.

1.5 Manfaat Penelitian

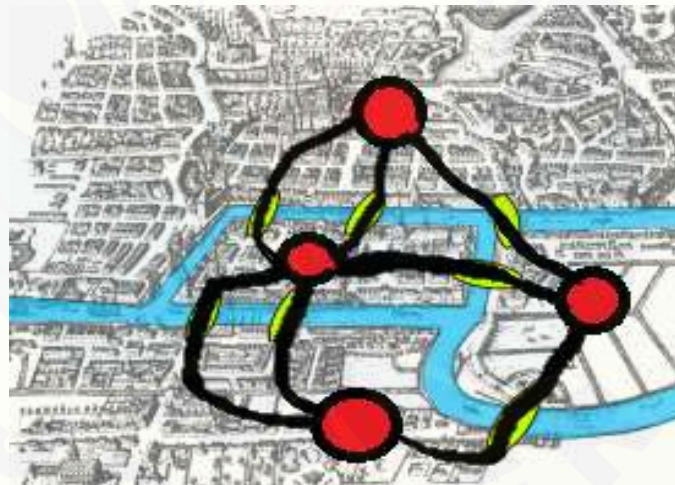
Manfaat yang didapatkan dari penelitian ini adalah :

- a. Menambah pengetahuan baru tentang covering graf semi Windmill;
- b. Memberi motivasi untuk meneliti tentang covering super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic pada graf jenis lain.
- c. Hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic covering.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

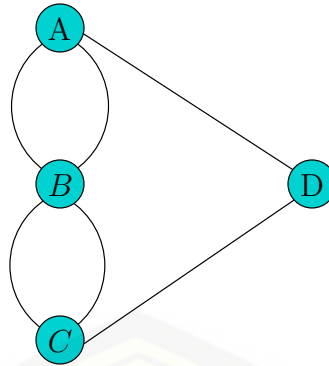
2.1 Terminologi Dasar Graf

Lahirnya teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler seorang matematikawan berkebangsaan Swiss pada tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Königsberg yang sangat terkenal di Eropa. Masalah jembatan Königsberg adalah mungkin tidaknya melewati ketujuh jembatan yang ada di kota Königsberg masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ditempat semula. Untuk memecahkan masalah itu, Euler memisalkan daratan yang dihubungkan dengan titik (verteks) dan jembatan dinyatakan dengan garis atau sisi (*edge*). Euler berkesimpulan bahwa tidak mungkin seseorang dapat melalui ketujuh jembatan itu, masing-masing satu kali dan kembali lagi ketempat semula. Sehingga kisah Jembatan Könisberg ini menjadi sejarah lahirnya teori graf.



Gambar 2.1 Jembatan Könisberg

Nama graf diberikan karena graf dapat disajikan dalam secara grafik atau gambar, dan justru dengan bentuk gambar inilah sifat-sifat graf dapat dikenali



Gambar 2.2 Graf yang mempresentasikan jembatan Königsberg

secara detail. Titik disajikan dalam bentuk noktah atau lingkaran kecil dan sisi disajikan dalam bentuk garis atau kurva yang memasangkan dua titik. Penyajian graf secara gambar tidak harus tunggal, penempatan posisi titik atau sisi tidak menjadi perhatian serius (Abdussakir,dkk., 2009).

Graf adalah kumpulan verteks dan edge yang terbatas dimana setiap *edge* menghubungkan dua vertek dan E adalah kumpulan dari *edge*. Setiap *edge* menghubungkan satu verteks ke verteks lain, dan setiap verteks dapat mempunyai banyak *edge* yang menghubungkannya ke verteks lain. Sebuah segmen garis yang menghubungkan dua verteks disebut dengan *edge*.

Graf G merupakan pasangan himpunan (V, E) , dengan V =himpunan tidak kosong dari (*vertex*) dan E =himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik atau dapat ditulis dengan notasi $G = (V, E)$.

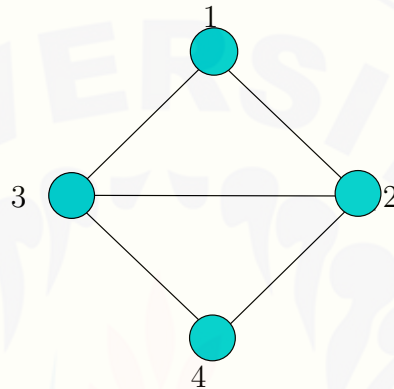
Titik digunakan untuk melambangkan objek, sedangkan sisi bisa digunakan untuk melambangkan jalan penghubung antara dua objek. Definisi graf menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satupun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf dengan satu titik dan tidak mempunyai sisi disebut graf trivial.

Titik pada graf dapat dinomori dengan huruf seperti $\{a, b, c, \dots, \}$ dengan bilangan asli $\{1, 2, 3, \dots, \}$ atau gabungan keduanya. Sedangkan e adalah sisi yang menghubungkan titik v_i dengan titik v_j , maka e dapat ditulis sebagai $e = (v_i, v_j)$ atau $(v_i v_j)$. Secara geometri graf dapat digambarkan sebagai sekumpulan titik di

dalam bidang dua dimensi yang dihubungkan dengan sekumpulan sisi.

Graf memiliki banyak jenis, namun yang sering digunakan ada dua jenis. Jenis-jenis graf dibagi berdasarkan ada atau tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf dan berdasarkan sisi pada graf yang mempunyai orientasi arah.

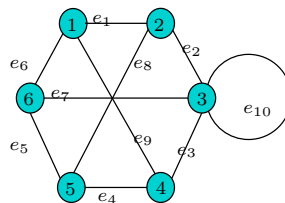
Berdasarkan ada atau tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis yaitu graf sederhana dan graf tidak sederhana. Graf sederhana (*Simple Graph*) adalah graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda. Contoh graf sederhana ditunjukkan pada Gambar 2.3.



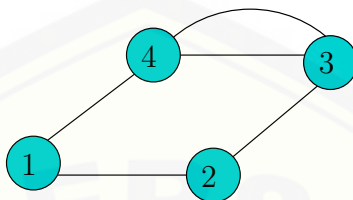
Gambar 2.3 Graf sederhana

Graf tidak sederhana (*Unsimple Graph*) adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Ada dua macam graf tidak sederhana, yaitu graf ganda (*Multi-graph*) dan graf semu (*Pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Graf semu adalah graf yang mengandung gelang (*loop*). Contoh graf tidak sederhana ditunjukkan pada Gambar 2.4.

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka graf dibedakan menjadi dua jenis yaitu graf tidak berarah dan graf berarah. Graf tidak berarah (*Undirect Graph*) adalah graf yang tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $(u, v) = (v, u)$ adalah sisi yang sama. Contoh graf tidak berarah ditunjukkan pada gambar 2.5



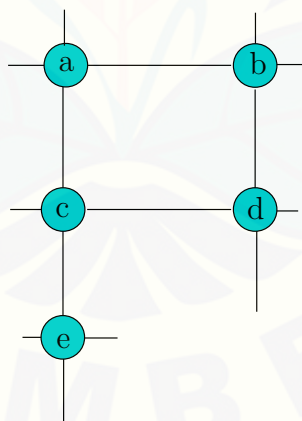
Gambar 2.4 Graf tidak sederhana



Gambar 2.5 Graf tidak berarah

Berdasarkan jumlah verteks pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis yaitu graf berhingga dan graf tidak berhingga.

Graf Berhingga (*Limited Graph*) adalah graf yang jumlah verteksnya n , berhingga. Pada Gambar 2.5 adalah contoh graf berhingga. Graf tak berhingga (*Unlimited Graph*) adalah graf yang jumlah verteksnya, n tidak berhingga. Pada Gambar 2.6 adalah gambar graf tak berhingga.

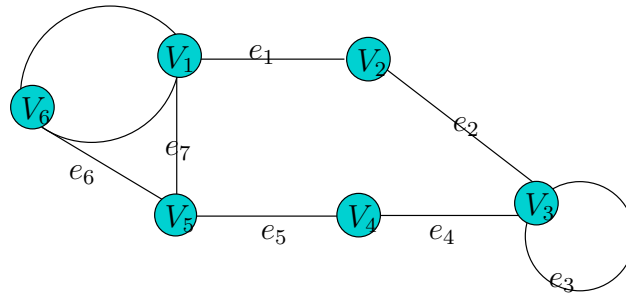


Gambar 2.6 Graf tak berhingga

Beberapa istilah yang sering digunakan dalam Graf adalah bertetangga (*Adjacent*), bersisian (*incident*), loop, *endpoint*, sisi ganda (*multiple edge*), *walk*, *path*, sikel (*cycle*), dan derajat (*Degree*). Misal pada graf G terdapat dua titik v_j dan v_k , dua buah titik pada graf G dikaitkan berdekatan (*adjacent*) bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Untuk sembarang sisi $e = (v_j, v_k)$, sisi e dikatakan bersisian (*incident*) dengan titik v_j dan titik v_k . Misal terdapat dua buah titik u dan v di dalam graf, dimana u dan v saling berdekatan. Jika sisi e *incident* terhadap titik u dan v , maka titik u dan v disebut *endpoint* dari sisi e . Sisi (v_i, v_i) yang memiliki *vertex* awal dan akhir yang sama disebut *loop*. Sedangkan sisi (*edge*) paralel atau *multiple edge* adalah dua atau lebih *edge* dengan *vertex* yang sama, dalam artian *vertex* awal dan akhirnya sama. Derajat (*degree*) adalah sebuah titik v pada sebuah graf G , dituliskan dengan $\text{der}(v)$ adalah banyak sisi yang *incident* pada v , dengan kata lain jumlah sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Misalkan $G = (V, E)$ sebuah subgraf dari graf G merupakan graf yang semua titik dan sisinya berada di graf G . Dengan kata lain, sebuah graf $\mathcal{H} = (V_1, E_1)$ adalah subgraf dari G jika $V(\mathcal{H}) \subseteq V(G)$, yaitu jika titik-titik dari \mathcal{H} juga titik-titik dari G , dan $E(\mathcal{H}) \subseteq E(G)$, yaitu jika sisi-sisi dari \mathcal{H} juga sisi-sisi dari G .

Suatu *walk* pada graf G adalah suatu urutan yang terdiri atas titik-titik dan sisi-sisi bergantian, dimana setiap sisi *incident* dengan titik terdekat, diawali dan diakhiri pada suatu titik. Sedangkan lintasan adalah barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $\{v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n\}$. Untuk graf sederhana, biasanya lintasan ditulis sebagai barisan simpul-simpulnya saja, yaitu $\{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$. Suatu *walk* tertutup dalam graf G jika semua sisinya berbeda, maka *walk* itu disebut trail tertutup (*closed trail*). Jika semua titik-titiknya juga berbeda serta diawali dan diakhiri dengan titik yang sama maka trail itu disebut sikel (*cycle*).

Dari Gambar 2.7 dapat dituliskan bahwa: $Walk = \{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_3, e_4, v_4\}$, $Trail = \{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_3, e_4, v_4\}$, $Path = \{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_4, v_4\}$, $Trail\ tertutup = \{v_1, e_7, v_5, e_6, v_6, e_8, v_1\}$, $Sikel = \{v_1, e_7, v_5, e_6, v_6, e_8, v_1\}$.

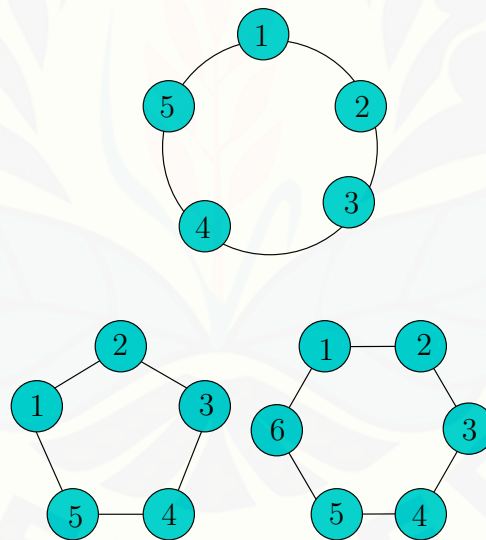


Gambar 2.7 Graf G4

2.2 Graf Khusus

Terdapat beberapa jenis graf sederhana khusus yang sering ditemui yaitu graf lengkap, graf lingkaran, graf roda, graf teratur, graf planar, graf bipartit, dan graf berbobot.

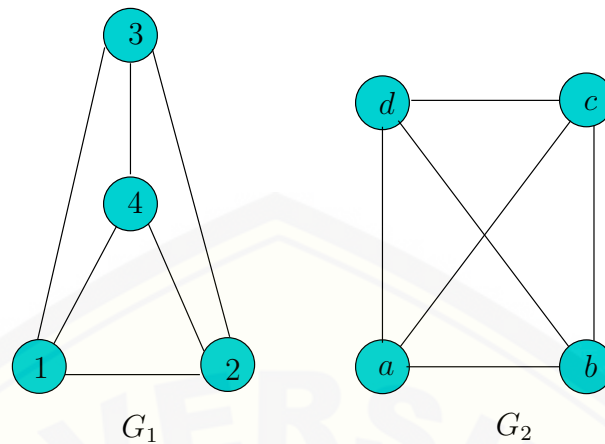
Graf Lingkaran (*Cycle Graph*) adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n . Pada Gambar 2.8 adalah contoh graf lingkaran.



Gambar 2.8 Graf Lingkaran (Roosen, 2003)

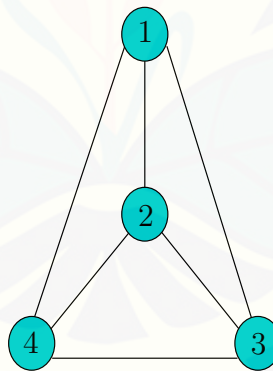
Graf Roda (*Wheels Graph*) adalah graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu simpul pada graf lingkaran C_n , dan menghubungkan simpul baru

tersebut dengan semua simpul pada graf lingkaran tersebut. Pada Gambar 2.9 adalah graf roda.



Gambar 2.9 Graf Roda (Roosen, 2003)

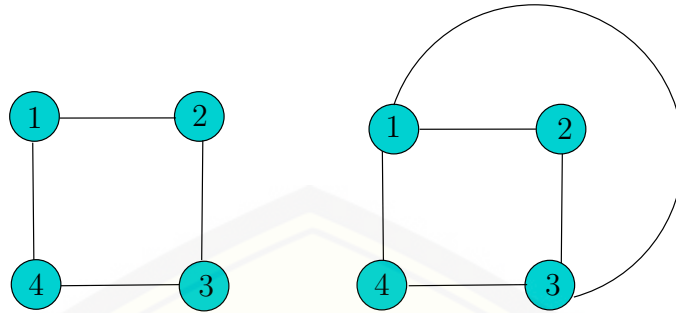
Graf Teratur (*Regular Graph*) adalah graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap simpul pada graf teratur adalah r , maka graf tersebut dinamakan graf teratur berderajat r . Jumlah sisi pada graf teratur dengan n simpul adalah $\frac{nr}{2}$ sisi. Pada Gambar 2.10 adalah gambar graf teratur.



Gambar 2.10 Graf Teratur

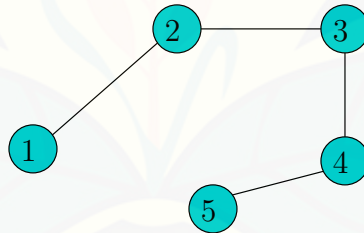
Graf Planar (*Planar Graph*) dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi yang tidak saling berpotongan dinamakan graf planar. Semua graf lingkaran

adalah planar. Tetapi, graf lengkap K_n untuk $n \geq 5$ merupakan graf tak planar. Pada gambar 2.11 adalah gambar graf planar. .



Gambar 2.11 Graf Planar(Munir,2005)

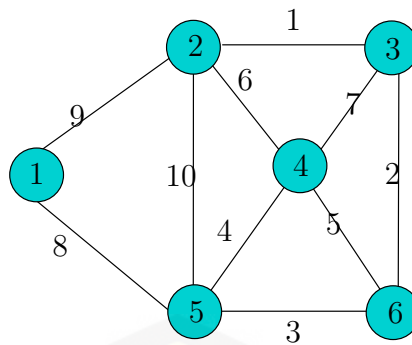
Graf Bipartit (*Bipartite Graph*) adalah Graf sederhana G jika himpunan simpul pada Graf tersebut dapat dipisah menjadi dua himpunan tak kosong yang *disjoint*, misalkan V_1 dan V_2 , sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul pada V_1 dan sebuah simpul pada V_2 . Dengan demikian, pada graf bipartit tidak ada sisi yang menghubungkan dua simpul pada V_1 atau pada V_2 . Graf bipartit tersebut dinotasikan oleh $G(V_1, V_2)$. Graf bipartit ditunjukkan pada Gambar 2.12.



Gambar 2.12 Graf Bipartit

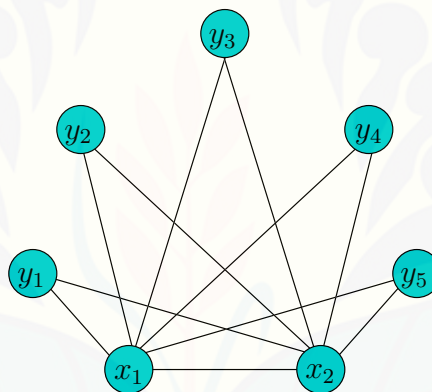
Graf Berbobot (*Weighted Graph*) adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot). Pada Gambar 2.13 adalah graf berbobot.

Graf Buku Segitiga dinotasikan dengan Bt_n adalah suatu graf yang merupakan famili dari graf Komplete tripartite $K_{m,n,l}$ dengan jumlah titik pada m dan n adalah satu dan jumlah titik pada l sebanyak n . Graf Buku Segitiga Bt_n

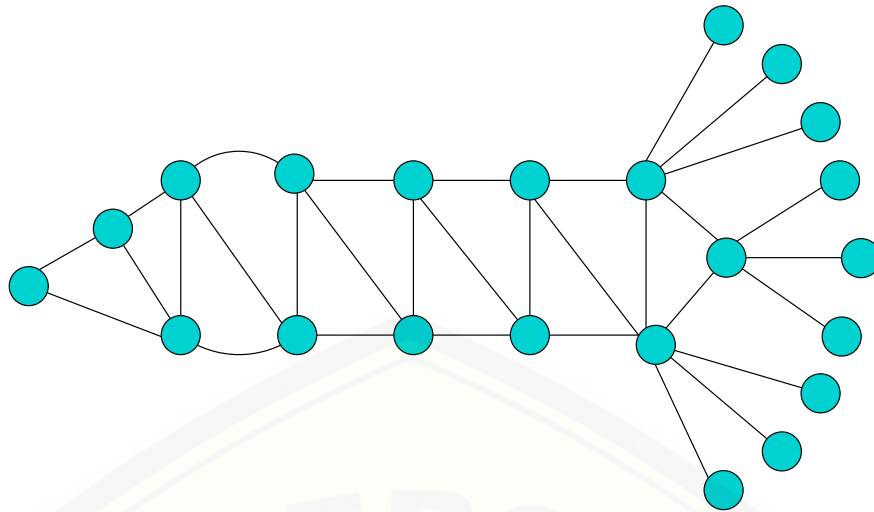


Gambar 2.13 Graf Berbobot

merupakan graf yang terdiri dari n buah segitiga ($n \geq 1$) dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain setiap segitiga memiliki 2 titik yang sama. Sebagai ilustrasi perhatikan graf Bt_5 pada Gambar 2.14 Graf tersebut tersusun dari 5 buah segitiga.

Gambar 2.14 Graf Buku Segitiga Bt_n

Graf Roket merupakan sebuah graf yang dinotasikan dengan $R_{m,n}$ dimana n banyaknya percikan api yang keluar dari ekor Roket dan m adalah jumlah titik pada badan dari graf Roket. Graf Roket mempunyai $2m + 3n + 3$ titik dan $4m + 3n + 3$ sisi. Graf Roket mempunyai himpunan titik $R_{m,n}$ dimana $V(R_{m,n}) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_{mj}, y_{mj}, z_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{v, w, z\}$ $ER_{m,n} = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}, x_i y_i, x_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq m\} \cup \{w x_1, v y_1, w y_1, v w\} \cup \{x_m z, y_m z, x_m x_{mj}, z z_j, y_m y_{mj}; 1 \leq j \leq n\}$. Gambar 2.15 yang merupakan graf Roket $R_{m,n}$.

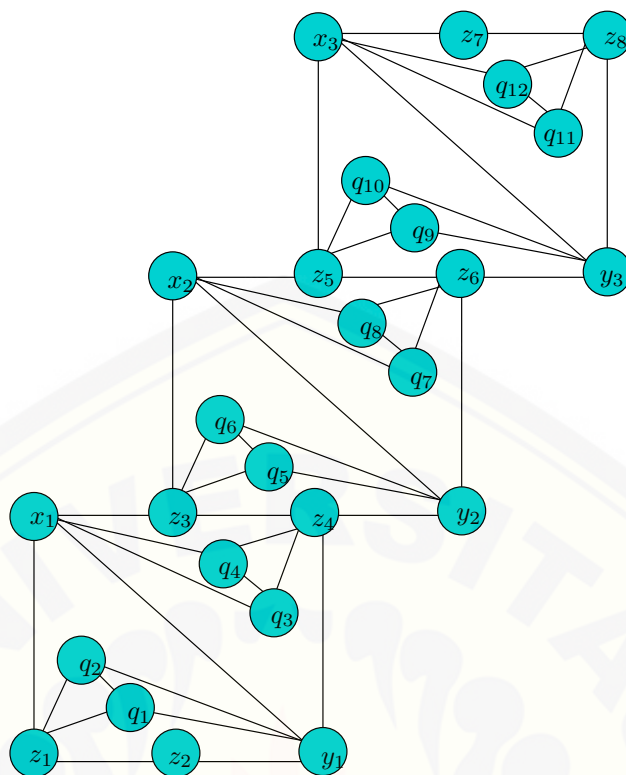
Gambar 2.15 Graf Roket $R_{m,n}$

Graf Tangga merupakan sebuah graf yang dinotasikan dengan St_n dimana n adalah banyaknya anak tangga. Graf Tangga menyerupai bentuk tangga pada suatu bangunan dengan penambahan sebuah diagonal pada setiap anak tangga yang sejajar dengan diagonal lain pada tangga berikutnya, sehingga terbentuk dua segitiga pada setiap anak tangga, dan memberikan penambahan titik-titik di dalam segitiga tersebut sehingga terbentuk segitiga-segitiga baru. Graf Tangga mempunyai $8n + 2$ titik dan $16n + 1$ sisi. Gambar 2.16 adalah contoh graf Tangga dengan $n = 3$.

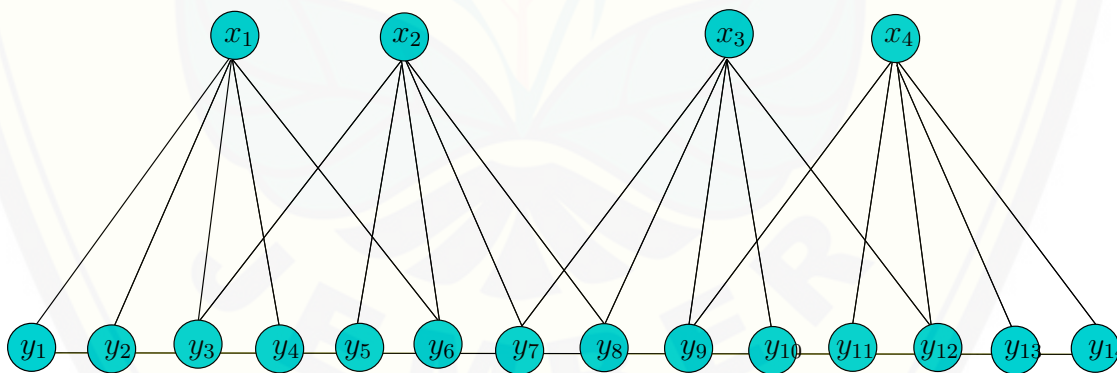
Graf Gunung dinotasikan M_{2n} adalah sebuah graf dengan himpunan *vertex*, $|V| = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq 2n \text{ dan } 1 \leq j \leq 6n + 2, n \in \mathbb{N}\}$ dan himpunan *edge*, $|E| = \{x_i y_{3i-2}, x_i y_{3i+3} \text{ untuk } i \text{ ganjil}, x_i y_{3i-3}, x_i y_{3i+2} \text{ untuk } i \text{ genap}, x_i y_{3i-1}, x_i y_{3i}, x_i y_{3i+1} \text{ untuk } i \text{ sebarang}, 1 \leq i \leq 2n \text{ dan } y_j y_{j+1}, 1 \leq j \leq 6n + 1\}$. Gambar 2.17 merupakan contoh graf Gunung (M_{2n}).

Graf Tangga Permata (dafik, 2013) adalah salah satu family dari graf tangga. Graf tangga permata adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan Dl_n dimana $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n\}$ dan $E(Dl_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}; 2 \leq j \leq 2n-2 \text{ genap}\} \cup \{x_i z_{2i-1}, x_i z_{2i}, y_i z_{2i-1}, y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$. Contoh graf Dl_3 ditunjukkan pada Gambar 2.18

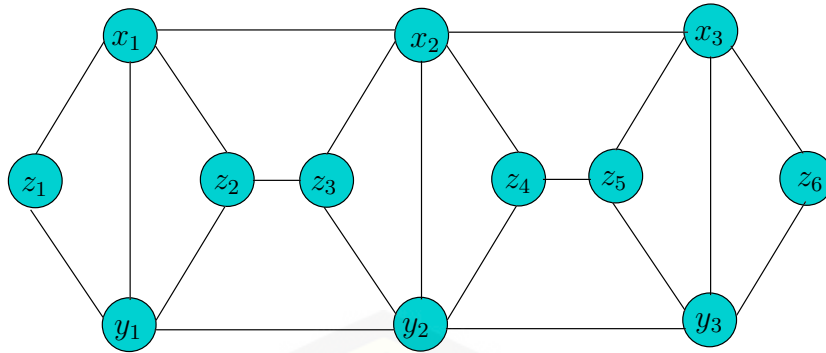
Graf semi Windmill adalah graf kincir angin yang di definisikan sebagai graf



Gambar 2.16 Graf Tangga St_3

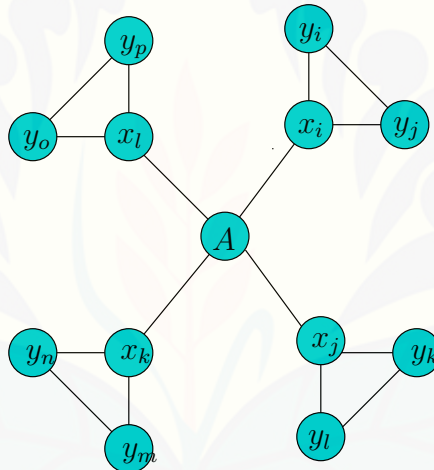


Gambar 2.17 Graf Gunung M_{2n} dengan $n = 2, M_4$



Gambar 2.18 Graf Tangga Permata Dl_3

$G = Amal(C_3 + e, v, n)$ yang selanjutnya dinotasikan sebagai W_n , dimana v adalah titik yang berada di pusat sebanyak satu titik. Contoh graf semi Windmill W_n pada Gambar 2.19



Gambar 2.19 Graf Semi Windmill

2.3 Covering

Suatu covering dari graf G adalah $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, H_3, \dots, H_k\}$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf H_i untuk $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, H_i isomorfik dengan suatu subgraf H , maka H dikatakan suatu selimut- H dari G . Selan-

jutnya dikatakan bahwa G memuat selimut- H . Misalkan H adalah selimut- \mathcal{H} yang memuat semua subgraf dari G yang isomorfik dengan H . Gutiérrez dan Lladó (2005) memperkenalkan pelabelan total H -magic dengan menggunakan konsep selimut- \mathcal{H} . Misalkan $\beta : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v_G + e_g\}$ adalah suatu fungsi injektif. Didefinisikan bobot- H_i , $\beta(H_i)$, sebagai $\beta(H_i) = \sum_{v \in V(H_i)} \beta(v) \neq \sum_{e \in E(H_i)} \beta(e)$.

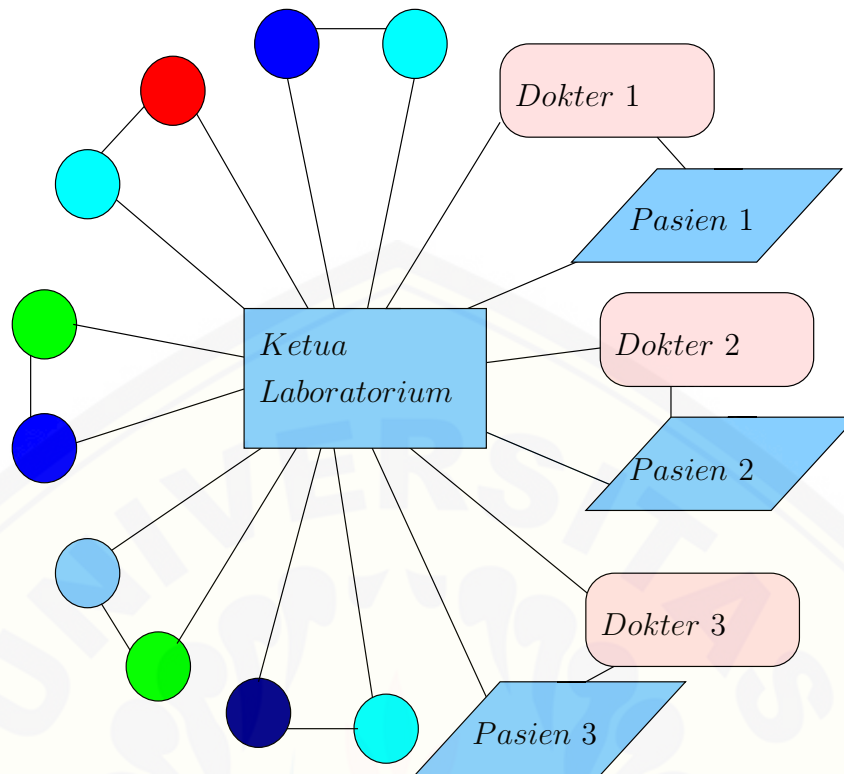
Fungsi β disebut pelabelan \mathcal{H} -magic super, jika $\beta(V(G)) = \{1, 2, \dots, v_G\}$. Selanjutnya, pelabelan total \mathcal{H} -magic yang terkait dengan selimut- \mathcal{H} dinamakan selimut \mathcal{H} -magic. Pelabelan selimut- \mathcal{H} antimagic graf G adalah pelabelan total λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, |V(G) \cup E(G)|\}$, untuk setiap subgraf H dari G yang isomorfik dengan \mathcal{H} dimana $\sum H = \sum_{v \in V(H)} \lambda(v) + \sum_{e \in E(H)} \lambda(e)$ merupakan barisan aritmatika. Graf G dikatakan memiliki pelabelan \mathcal{H} antimagic super jika $\{\lambda(v)\}_{v \in V} = \{1, \dots, |V|\}$.

2.4 Aplikasi Covering

Aplikasi pada Graf tidak hanya dapat dilakukan untuk membuat jembatan. Beberapa contoh aplikasi graf yang telah dilakukan pada kehidupan nyata adalah pengaturan lampu lalu lintas, sistem transportasi darat bus patas, menyusun jadwal kuliah dan lain-lain. Pada bidang kimia graf digunakan untuk pemodelan senyawa dan pemodelan reaksi kimia dalam bentuk graf. Dalam pemodelan senyawa, unsur (atom) dianggap sebagai simpul atau verteks dan ikatan kimia sebagai *edge*. Sedangkan dalam pemodelan reaksi kimia senyawa dianggap sebagai simpul atau verteks dan reaksi kimianya disebut *edge*.

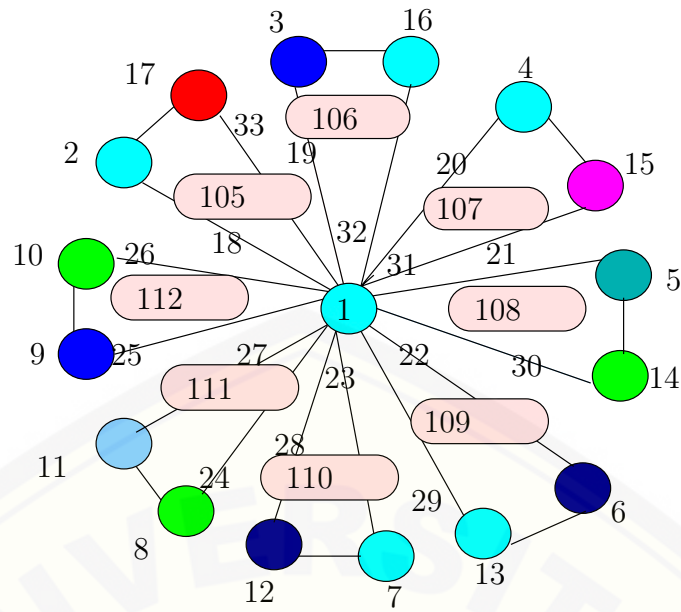
Salah satu contoh aplikasi graf yang digunakan pada kehidupan nyata yaitu aplikasi total covering graf *friendship* pada kode pengambilan hasil tes DNA di sebuah laboratorium. Terdapat beberapa dokter yang menangani masalah kecocokan hasil tes DNA di sebuah laboratorium. Hasil dari tes tersebut harus bersifat rahasia karena menyangkut *privasi* seseorang. Hasil dari DNA tersebut hanya dapat diketahui oleh ketua laboratorium, dokter dan pasien yang bersangkutan. Oleh karena itu, diperlukan password yang kompleks agar kerahasiaan dokumen hasil tersebut dapat digunakan sebagaimana seharusnya. Permasalahan yang diambil adalah mengembangkan password tersebut. Representatif dalam graf di

tunjukkan pada Gambar 2.20.



Gambar 2.20 Representasi dalam graf

Dari total covering pada Gambar 2.21 maka didapatkan password yang dapat dibangun adalah : Hasil test 1 untuk ketua laboratorium = $\{1 - 20 - 4 - 36 - 15 - 31\}$, Dokter 1 = $\{4 - 36 - 15 - 31 - 1 - 20\}$, pasien 1 = $\{15 - 31 - 1 - 20 - 4 - 36\}$, hasil test 2 ketua laboratorium = $\{1 - 21 - 5 - 37 - 14 - 30\}$, Dokter 2 = $\{5 - 37 - 14 - 30 - 1 - 21\}$, pasien 2 = $\{14 - 30 - 1 - 21 - 5 - 37\}$, hasil test 3 ketua laboratorium = $\{1 - 22 - 6 - 38 - 13 - 29\}$, Dokter 3 = $\{6 - 38 - 13 - 29 - 1 - 22\}$, pasien 3 = $\{13 - 29 - 1 - 22 - 6 - 38\}$, hasil test 4 ketua laboratorium = $\{1 - 23 - 7 - 39 - 12 - 28\}$, Dokter 4 = $\{7 - 39 - 12 - 28 - 1 - 23\}$, pasien 4 = $\{12 - 28 - 1 - 23 - 7 - 39\}$, hasil test 5 ketua laboratorium = $\{1 - 24 - 8 - 40 - 11 - 27\}$, Dokter 5 = $\{8 - 40 - 11 - 27 - 1 - 24\}$, pasien 5 = $\{11 - 27 - 1 - 24 - 8 - 40\}$, hasil test 6 ketua laboratorium = $\{1 - 25 - 9 - 41 - 10 - 26\}$, Dokter 6 = $\{9 - 41 - 10 - 26 - 1 - 25\}$, pasien 6 = $\{10 - 26 - 1 - 25 - 9 - 41\}$ hasil test 7 ketua



Gambar 2.21 Total covering

laboratorium = {1 – 18 – 2 – 34 – 17 – 33}, Dokter 7 = {2 – 34 – 17 – 33 – 1 – 18},
 pasien 7 = {17 – 33 – 1 – 18 – 2 – 34}, hasil test 8 ketua laboratorium =
 {1 – 19 – 3 – 35 – 16 – 32}, Dokter 8 = {3 – 35 – 16 – 32 – 1 – 19}, pasien 8 =
 {16 – 32 – 1 – 19 – 3 – 35}.

2.5 Fungsi Bijektif

Pemetaan satu-satu (Injektif) adalah pemetaan dimana setiap elemen di daerah kodomain yang berpasangan mempunyai pasangan elemen tepat satu di daerah kodomain, secara matematika dituliskan sebagai berikut :

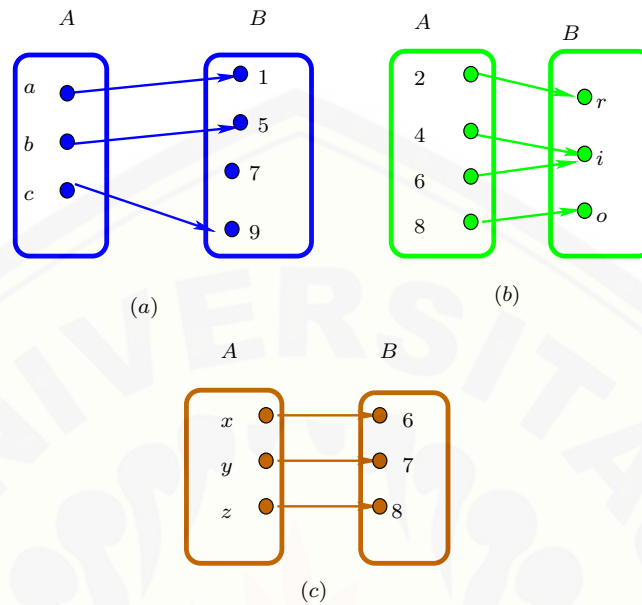
$$\text{Pemetaan } \lambda : A \rightarrow B, \text{ injektif} \leftrightarrow \forall x, y \in A, \lambda(y) \rightarrow x = y$$

Pemetaan pada (Surjektif) adalah pemetaan dimana semua elemen di daerah kodomain mempunyai pasangan elemen di daerah domain, secara matematika dituliskan sebagai berikut :

$$\text{Pemetaan } \lambda : A \rightarrow B, \text{ surjektif} \leftrightarrow \forall x \in A, \exists y \in B, \in \lambda(x) = y$$

Pemetaan Korespondensi satu-satu (Bijektif) yaitu pemetaan yang memenuhi pemetaan injektif dan surjektif. Istilah ini berasal dari kenyataan bahwa setiap

elemen domain akan berkorespondensi secara unik ke elemen kodomain dan sebaliknya. Pada gambar 2.22 adalah fungsi injektif, fungsi surjektif dan fungsi bijektif. Fungsi bijektif ini diperlukan karena dalam melabeli titik maupun sisi pada graf akan selalu berbeda dan berurutan dan tidak mungkin berulang.

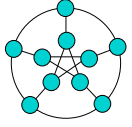
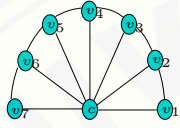
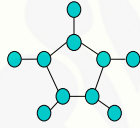
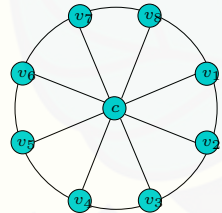


Gambar 2.22 (a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif

2.6 Hasil penemuan sebelumnya pada Covering Graf $(a, d) - \mathcal{H}$

Suatu selimut dari G adalah $\mathcal{H} = H_1, H_2, H_3, \dots, H_k$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf H_i , untuk suatu $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, H_i isomorfik dengan suatu subgraf H , maka \mathcal{H} dikatakan suatu selimut- \mathcal{H} dari G . Selanjutnya dikatakan bahwa G memuat selimut- \mathcal{H} . Diberikan $G = (V(G), E(G))$ graf sederhana dan berhingga yang memuat selimut- H dengan $|V(G)| = v_G$, $|E(G)| = e_G$, dan banyak subgraf H_i dari G yang isomorfik dengan H adalah k . Graf G adalah $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic jika ada suatu pelabelan total $\xi : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v_G + e_G\}$ yang memenuhi $\xi(H_i)|_{H_i} \cong H = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (k - 1)d\}$ untuk dua bilangan bulat positif a dan d tertentu. Dalam hal ini, $\xi(H_i)$ dikatakan bobot dari H_i (*bobot - H_i*) dan didefinisikan $\xi(H_i) = \{\sum_{v \in V(H_i)} \xi(v) + \sum_{e \in E(H_i)} \xi(e)\}$. Kemudian, ξ dikatakan *pelabelan total $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic super*, jika $\xi(V(G)) = \{1, 2, \dots, v_G\}$. Suatu graf yang mempunyai pelabelan total $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic super disebut $(a, d) - H$ -antimagic super. Jika G memuat suatu selimut- \mathcal{H} , maka pelabelan total $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic super dikatakan *pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic (super)* (Inayah, 2013).

Tabel 2.1: Ringkasan pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic.

Graf	a	d	Hasil
$GP_{n,k}$ (<i>Generalized Petersen</i>)  (Karyanti, 2012)	$3 + 14n - 3\lfloor n/2 \rfloor$	$d = 2$	$\mathcal{H} = K_{1,3}$
F_n (<i>Fan</i>)  (Karyanti, 2012)	$12 + 4n + \lfloor n/2 \rfloor$ $8 + 6n + \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 4$ $d = 2$	$\mathcal{H} = C_3$
S_n (<i>Matahari</i>)  (Karyanti, 2012)	$13n + 4$ $12n + 5 + \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 1$ $d = 2$	$\mathcal{H} = K_{1,3}$
W_n (<i>Graf Roda</i>)  (Inayah, 2009)	$3hn + 5$ $2hn + 3h + n$	$d = 3$ $d = 1$	$\mathcal{H} = C_3$

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik dan metode pendektesian pola. Metode deduktif aksiomatik yaitu dengan menetapkan pengertian dasar selimut- \mathcal{H} -antimagic, kemudian dikenalkan beberapa teorema mengenai pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic pada selimut graf semi Windmill. Selanjutnya menurunkan teorema tersebut untuk memperoleh pelabelan titik dan pelabelan sisi pada graf semi Windmill. Setelah ditemukan pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic pada selimut graf semi Windmill, maka dilanjutkan ke metode pendektesian pola. Metode ini digunakan untuk merumuskan pola pelabelan titik dan pelabelan sisi apabila graf semi Windmill diperumum, sehingga nantinya di dapatkan perumusan pelabelan super $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic total pada selimut graf semi Windmill.

3.2 Rancangan Penelitian

Adapun rancangan penelitian ini digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Rancangan penelitian yang dimaksud adalah sebagai berikut:

a. Penotasian Titik dan Sisi

Graf semi Windmill dinotasikan W_n dengan titik $V = \{A, x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n\}$ dan sisi $E = \{Ax_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_{2i-1}, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_{2i}, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2i-1} y_{2i}, 1 \leq i \leq n\}$.

b. Indikator Pelabelan

Indikator pelabelan selimut- \mathcal{H} antimagic super pada graf semi Windmill dalam penelitian ini adalah:

1. Label titik berbeda semua

Label titik pada pelabelan W_{13} -antimagic super pada semi Windmill merupakan fungsi bijektif dari himpunan titik pada graf semi Windmill ke bilangan bulat dari satu sampai sejumlah titik;

2. Label sisi berbeda semua

Label sisi untuk pelabelan W_{13} -antimagic super pada graf semi Windmill merupakan fungsi bijektif dari himpunan sisi pada graf semi Windmill ke bilangan bulat dari banyaknya titik ditambah satu sampai sejumlah titik dan sisi.

3. Total label selimut W_{13} sebagai subgraf pada graf semi Windmill mempunyai nilai konstan untuk subgrafnya.

- c. Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf semi Windmill W_n . Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

1. Menghitung jumlah titik p dan sisi q pada graf semi Windmill W_n ;
2. Menentukan batas atas nilai beda d pada graf semi Windmill W_n .
3. Menentukan label $\mathcal{H}AVC$ (\mathcal{H} Antimagic Vertex Covering) atau pelabelan titik(a, d)-selimut antimagic pada graf semi Windmill W_n .
4. Apabila label $\mathcal{H}AVC$ berlaku untuk beberapa graf baik secara *heuristik* maupun *deterministik* maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan menentukan algoritma $\mathcal{H}AVC$ pada graf semi Windmill W_n .
5. Menentukan fungsi bijektif $\mathcal{H}AVC$ pada graf semi Windmill W_n .
6. Melabeli graf semi Windmill W_n dengan \mathcal{SHATC} (*Super \mathcal{H} Antimagic Total Covering*) atau pelabelan total super (a, d)-selimut antimagic dengan nilai beda d yang *feasible*.
7. Menentukan fungsi bijektif pelabelan total super (a, d)-selimut antimagic pada graf semi Windmill W_n .