APLIKASI TEOREMA BURNSIDE DAN TEOREMA POLYA PADA ENUMERASI POLA MOLEKUL CINCIN KARBON (C)

SKRIPSI

Diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi syarat-syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh :

NOOR AINI
NIM : 020210101107

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2006

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang serta shawalat dan salam kepada Nabi Besar Muhammad SAW, skripsi ini kupersembahkan kepada :

1. Ayahanda Sutjipto dan ibunda Romlah tercinta, terima kasih atas jerih payah, kasih sayang dan bimbingan serta untaian do'amu yang senantiasa mengiringi perjuangan langkahku;
2. Adikku Umi, mbak Ununk, mas Tamam, ponaanku Adika dan kakekku, terima kasih atas kasih sayang dan segala pengorbananmu yang mampu membangkitkan semangatku;
3. Teman-temanku Wati, Weni, Nita, Lia, Desi, Ica dan Nur Hayanah;
4. Rekan-rekan Matematika khususnya angkatan '02;
5. Guru-guruku sejak TK sampai PT terhormat, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
6. Almamater yang kubanggakan.

MOTTO

Hidup adalah penjumlahan semua pilihan yang ada

(Albert Camus)

Sebuah masalah yang telah jelas digambarkan

berarti telah terselesaikan sebagian

(C.F. Kettlering)

Jika berencana untuk satu tahun, tanamlah padi. Jika berencana untuk sepuluh tahun, tanamlah pohon. Namun jika berencana untuk seratus tahun, didiklah generasi penerus

(Confusius)

Berusaha, berdo'a dan tawakkal adalah kunci kesuksesan

Kita dapat menjadi berpengetahuan dengan pengetahuan orang lain, tetapi kita tidak dapat menjadi bijaksana dengan menggunakan kearifan orang lain

(Micahel de Montaigne)

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Noor Aini

NIM : 020210101107

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul : "Aplikasi Teorema Burnside dan Teorema Polya pada Enumerasi Pola Molekul Cincin Karbon (C)" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika disebutkan sumbernya dan belum pernah diajukan pada institusi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata dikemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Oktober 2006

Yang menyatakan,

Noor Aini

020210101107

PENGAJUAN

APLIKASI TEOREMA BURNSIDE DAN TEOREMA POLYA PADA ENUMERASI POLA MOLEKUL CINCIN KARBON (C)

SKRIPSI

Diajukan untuk dipertahankan di depan Penguji sebagai syarat untuk mendapatkan gelar Sarjana Strata Satu pada Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Disusun Oleh :

Nama	: Noor Aini
NIM	: 020210101107
Angkatan	: 2002
Jurusan/Program	: P. MIPA / Pendidikan Matematika
Tempat/Tanggal Lahir	: Jember / 1 September 1983
Daerah Asal	: Jember

Disetujui

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Drs. Antonius Cahya P, M.App. Sc	Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.
NIP. 131 046 352	NIP. 132 133 931

PENGESAHAN

Skripsi ini telah dipertahankan di depan tim penguji pada :

Hari : Sabtu

Tanggal : 14 Oktober 2006

Jam : 07.30- 08.30

Tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua	Sekretaris
Drs. Suharto, M.Kes	Susi Setiawani, S.Si, M.Sc
NIP. 131 274 730	NIP. 132 133 931

Anggota :

1) Drs. Antonius Cahya P, M.App.Sc (....................)
NIP. 131 046 352

2) Drs. Slamin, M.Comp.Sc, Ph.D (....................)
NIP. 131 975 305

Mengesahkan,
Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Jember

Drs. H. Imam Muchtar, S.H., M. Hum
NIP. 130 810 936

KATA PENGANTAR

Dengan mengucapkan puji syukur kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini dengan baik.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penulisan skripsi ini, terutama kepada :

1. Dosen Pembimbing I
2. Dosen Pembimbing II
3. Semua Dosen FKIP Universitas Jember, terutama Dosen Pendidikan Matematika
4. Seluruh staf karyawan perpustakaan FKIP
5. Seluruh staf karyawan UPT Perpustakaan Universitas Jember
6. Semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan dari-Nya. Akhirnya semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi kita semua.

Jember, Oktober 2006

Penulis

RINGKASAN

Aplikasi Teorema Burnside dan Teorema Polya pada Enumerasi Pola Molekul Cincin Karbon (C).
Noor Aini, 020210101107, 47 halaman.

Masalah penghitungan banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain merupakan salah satu persoalan kombinatorik. Menghitung banyaknya pola molekul berbeda yang terbentuk, akan diperlukan pengerjaan yang cukup panjang. Teorema Burnside dan Teorema Polya merupakan suatu metode yang dapat digunakan untuk menghitung banyaknya pola molekul berbeda yang dapat dibentuk dari sejumlah atom atau molekul yang ada. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang dapat dibentuk dari 6 atom C yang masing-masing hanya diikat dengan atom H atau molekul NO_2, untuk mengetahui banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain dengan menggunakan Teorema Burnside maupun dengan menggunakan Teorema Polya, dan juga untuk mengetahui perbandingan efektivitas antara Teorema Burnside dan Teorema Polya dalam menentukan banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain.

Prosedur penelitian ini yaitu : 1) menentukan keseluruhan pola molekul yang dapat dibentuk dengan menggunakan kaidah perkalian; 2) menentukan pola molekul yang berbeda satu sama lain dengan menggunakan Teorema Burnside maupun Teorema Polya dan; 3) membandingkan efesiensi antara Teorema Burnside dan Teorema Polya dengan metode deskriptif yaitu dengan mengadakan pengamatan apakah teorema tersebut mudah dan cepat diterapkan untuk menjawab permasalahan dalam penelitian ini.

Hasil penelitian menyimpulkan bahwa : 1) Ada 64 pola molekul cincin karbon (C) dengan 6 atom C dari pengikatan masing-masing atom C oleh salah satu dari

atom H atau molekul NO_2; 2) Ada 13 pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain dengan menggunakan Teorema Burnside maupun Teorema Polya; 3) Penentuan banyaknya pola molekul yang berbeda satu sama lain dengan menggunakan Teorema Polya lebih efesien daripada menggunakan Teorema Burnside. Karena dengan Teorema Polya diperoleh banyaknya pola molekul yang berbeda dengan mudah dan cepat tanpa harus mendaftar semua kemungkinan pola molekul yang dapat dibentuk

Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Pengertian
$(G,\cdot)$	Grup G dengan operasi biner " . "
$\forall$	Untuk setiap
$\in$	Elemen
e	Elemen identitas
$\ni$	sedemikian hingga
$\boldsymbol{R}$	Himpunan bilangan real
$\exists$	Terdapat
$\square$	Akhir contoh
$\blacksquare$	Akhir bukti
$\lvert G\rvert$	Order G
Z_5	Himpunan bilangan bulat modulo 5
Z	Himpunan bilangan bulat
$\subseteq$	Himpunan bagian
$\leq$	Subgrup
S_A	Grup simetri dari himpunan A
N	Himpunan bilangan asli
$\circ$	Operasi biner komposisi fungsi
$\cong$	Isomorpik
D_n	Grup Dihedral dari segi n beraturan
Stab (x)	Himpunan semua permutasi di G yang mengakibatkan x sebagai titik tetap
Fix (π)	Himpunan semua titik-titik tetap dari permutasi π
$\eta\,(a)$	Banyaknya unsur didalam kelas ekuivalensi yang mengandung a
x_i	Semua x dalam kelas ekuivalensi
n_k	Banyaknya kelas ekuivalensi yang mempartisi A

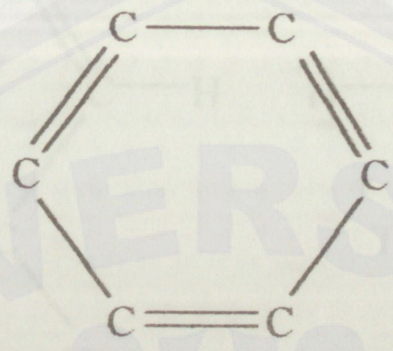
BAB I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

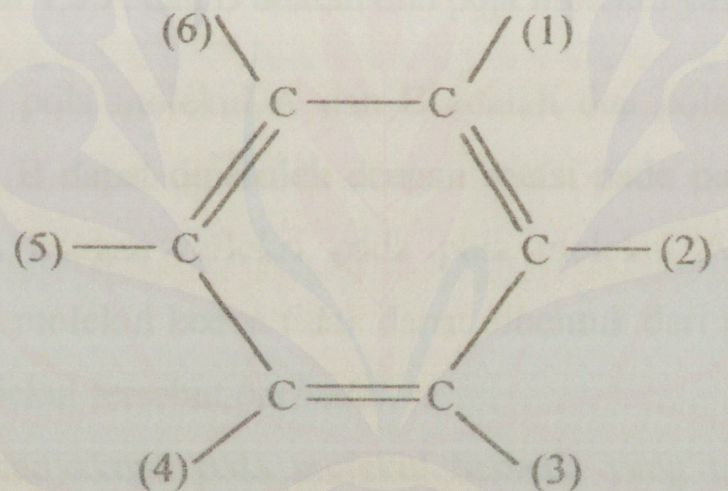
Masalah enumerasi adalah masalah yang berhubungan dengan penghitungan atau pencacahan (Santosa, 2003:2). Enumerasi pola molekul merupakan salah satu persoalan kombinatorik yang tidak mudah untuk diselesaikan. Persoalan kombinatorik berkisar pada persoalan pencacahan atau klasifikasi dari suatu pengaturan (Slamet dan Makaliwe, 1991:2). Persoalan yang sering diselesaikan misal diberikan 5 buah buku yang berbeda, maka dapat dilakukan pengaturan buku-buku sebanyak 5 ! yaitu 120 pola pengaturan yang berbeda.

Persoalan di atas merupakan persoalan kombinatorik yang mudah untuk diselesaikan. Tetapi, para ilmuwan pada berbagai bidang juga kerap menemukan sejumlah persoalan kombinatorik yang tidak mudah untuk diselesaikan. Seorang ahli fisika kerap ingin mengetahui jumlah dari elektron yang dapat disebarkan atau menempati suatu tingkat energi yang berbeda. Sedangkan seorang ahli kimia lebih tertarik pada jumlah dari pola molekul yang dapat dibentuk dari sejumlah atom atau molekul yang ada (Slamet dan Makaliwe, 1991:1).

Sering dua atom atau lebih atom yang sama atau berbeda mampu bergabung kuat-kuat sehingga mereka berperilaku sebagai partikel tunggal yang disebut *molekul* (Retnowati, 1999:5). Dari penggabungan sejumlah atom atau molekul yang ada akan didapatkan sejumlah pola molekul. Pola molekul yang dikaji berupa cincin karbon (C) dengan 6 atom C yang masing-masing hanya diikat dengan salah satu dari atom hidrogen (H) atau molekul nitrogen dioksida (NO_2). Pengikatan 6 atom C dengan atom H atau molekul NO_2 dapat membentuk benzena dan turunan benzena. Benzena dan turunannya digunakan untuk membuat berbagai macam aroma secara sintetik. Cincin karbon (C) dengan 6 atom C yang dimaksudkan berupa ikatan 6 atom C dengan pangkal dan ujungnya saling berikatan dan secara geometri digambarkan sebagai segi-6 beraturan, seperti pada gambar 1.1. Kemudian masing-masing atom C diikat dengan salah satu dari atom H atau molekul NO_2 pada (1) – (6) (pada gambar 1.2).

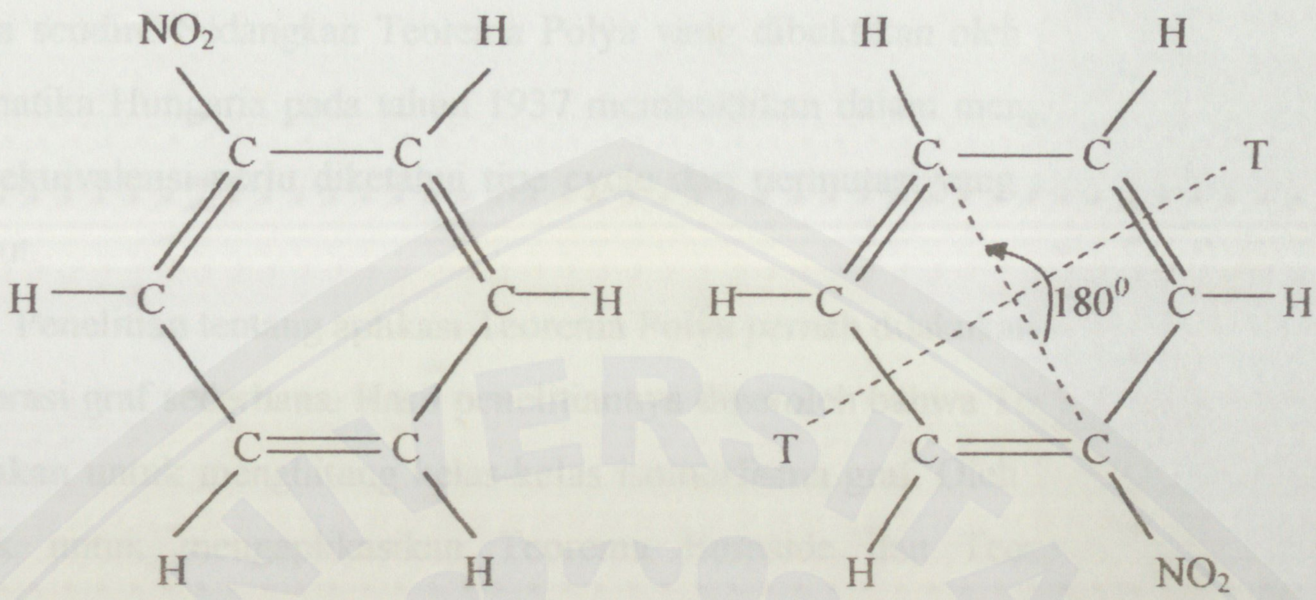


Gambar 1.1 Cincin Karbon (C) dengan 6 atom C



Gambar 1.2 Cincin Karbon (C) dengan 6 atom C yang diikat dengan salah satu dari atom H atau molekul NO_2 pada (1) – (6).

Dari pengikatan 6 atom C dengan salah satu dari atom H atau molekul NO_2 pada masing-masing atom C akan didapatkan sejumlah pola molekul. Dari sejumlah pola molekul yang terbentuk, terdapat pola-pola molekul yang sama. Dua pola molekul dikatakan *sama* jika pola molekul kedua dapat dibentuk dari pola molekul pertama dengan rotasi atau refleksi (Wikipedia, 2006). Misalkan pola molekul yang terbentuk dari pengikatan masing-masing atom C dengan aton H atau molekul NO_2 diberikan pada gambar 1.3 sebagai berikut :



A B

Gambar 1.3 A dan B adalah dua pola molekul yang sama

Dapat dilihat bahwa pola molekul A dan B adalah dua pola molekul yang sama, karena pola molekul B dapat diperoleh dengan rotasi pada pola molekul A sebesar 180^0 atau diperoleh dengan refleksi pada pola molekul A terhadap sumbu T. Sebaliknya, jika pola molekul kedua tidak dapat dibentuk dari pola molekul pertama, maka kedua pola molekul tersebut *berbeda*.

Menghitung banyaknya pola molekul berbeda yang terbentuk dengan cara menguraikan satu per satu pola molekul yang terbentuk, akan diperlukan pengerjaan yang cukup panjang. Terlebih jika atom atau molekul yang dilibatkan dalam jumlah yang cukup besar.

Teorema Burnside dan Teorema Polya yang dipelajari dalam ilmu aljabar (abstrak) dapat digunakan untuk menghitung banyaknya pola molekul berbeda yang dapat dibentuk dari sejumlah atom atau molekul yang ada. Kedua teorema ini menjelaskan tentang banyaknya kelas ekuivalensi akibat partisi himpunan berhingga *A* oleh relasi ekuivalensi yang ditimbulkan oleh suatu grup permutasi pada himpunan *A*. Teorema Burnside memungkinkan untuk ditemukan banyaknya kelas ekuivalensi dengan cara lain, yaitu menghitung banyaknya unsur yang invarian terhadap permutasi-permutasi yang ada di dalam grup tersebut. Suatu unsur dikatakan invarian terhadap suatu permutasi, jika permutasi itu memetakan unsur bersangkutan ke dirinya sendiri. Sedangkan Teorema Polya yang dibuktikan oleh George Polya ahli matematika Hungaria pada tahun 1937 membuktikan dalam menghitung banyaknya kelas ekuivalensi perlu diketahui tipe cycle dari permutasi yang ada di dalam grup tersebut.

Penelitian tentang aplikasi Teorema Polya pernah dilakukan oleh Santosa pada enumerasi graf sederhana. Hasil penelitiannya diperoleh bahwa Teorema Polya dapat digunakan untuk menghitung kelas-kelas isomorfisma graf. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengaplikasikan Teorema Burnside dan Teorema Polya pada enumerasi pola molekul.

Berdasarkan uraian di atas, maka ditetapkan judul "Aplikasi Teorema Burnside dan Teorema Polya pada Enumerasi Pola Molekul Cincin Karbon (C)".

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang yang telah diuraikan, maka dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut :

1. berapa banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang dapat dibentuk dari 6 atom C yang masing-masing hanya diikat dengan salah satu dari atom H atau molekul NO_2 ?
2. berapa banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain dengan menggunakan Teorema Burnside ?
3. berapa banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain dengan menggunakan Teorema Polya ?
4. bagaimana perbandingan efesiensi antara Teorema Burnside dan Teorema Polya untuk menentukan banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain ?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam skripsi ini adalah :

1. himpunan yang dikaji adalah himpunan berhingga (himpunan yang banyak anggotanya berhingga) dan tidak kosong.
2. grup yang dikaji adalah grup simetri (termasuk grup permutasi yang merupakan subgrup dari grup simetri).
3. pola molekul yang dikaji berupa cincin karbon (C) dengan 6 atom C yang masing-masing hanya diikat dengan salah satu dari atom H atau molekul NO_2.
4. masalah enumerasi yang dibahas di sini adalah masalah penghitungan banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain.
5. nama-nama kimia dari pola-pola molekul yang terbentuk tidak dikaji. Di sini hanya akan dihitung banyaknya pola molekul yang berbentuk, terlepas dari pola molekul yang terbentuk sudah ada nama kimianya atau tidak, karena di sini tidak dilakukan kajian kimia untuk mengetahui nama-nama kimia dari pola-pola molekul yang terbentuk.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini adalah :

1. untuk mengetahui banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang dapat dibentuk dari 6 atom C yang masing-masing hanya diikat dengan salah satu dari atom H atau molekul NO_2.
2. untuk mengetahui banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain dengan menggunakan Teorema Burnside.
3. untuk mengetahui banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain dengan menggunakan Teorema Polya.
4. untuk mengetahui perbandingan efesiensi antara Teorema Burnside dan Teorema Polya dalam menentukan banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini adalah :

1. bagi peneliti, merupakan tambahan dan pengalaman terhadap ilmu matematika yang diterapkan dalam ilmu pengetahuan yang lain.
2. bagi peneliti lain, sebagai sumbangan pemikiran dalam melakukan penelitian yang sejenis dengan pengembangan yang berbeda.
3. dalam bidang kimia, dapat digunakan untuk menghitung banyaknya cara mewarnai pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain di dimensi tiga dan dapat digunakan untuk menentukan banyaknya isomer suatu pola molekul.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Pada abad ke sembilan belas, simbol-simbol matematika tidak perlu menyatakan suatu bilangan dan kenyataannya simbol tersebut dapat berupa apa saja. Dari kenyataan tersebut maka muncullah apa yang disebut *Struktur Aljabar*. *Struktur Aljabar* mempunyai dua kegunaan yang mendasar. Kegunaan yang *pertama* adalah untuk menentukan pola-pola atau kesimetrian di dalam kehidupan sehari-hari dan di dalam matematika. Misalnya untuk menentukan perbedaan formasi kristal dari suatu substansi kimia. Kegiatan yang *kedua* dari *Struktur Aljabar* adalah perluasan sistem-sistem bilangan untuk digunakan dalam sistem-sistem yang lainnya.

Menurut Fraleigh (dalam Prihandoko, 2004) *Struktur Aljabar*, sebagai salah satu bidang dalam matematika, merupakan sebuah studi aksiomatik yang memuat rangkaian teorema-teorema valid yang diturunkan oleh bukti-bukti valid terhadap aksioma-aksioma dalam teori himpunan. Salah satu kajian dalam *Struktur Aljabar* adalah sebuah struktur himpunan yang disebut grup. Grup yang beranggotakan permutasi-permutasi yang didefinisikan dalam sebuah himpunan dinamakan grup permutasi. Jika suatu grup permutasi beraksi pada himpunan A maka pada himpunan tersebut dapat didefinisikan relasi ekuivalensi yang ditimbulkan oleh grup tersebut. Selanjutnya oleh sebuah relasi ekuivalensi himpunan A akan dipartisi ke dalam kelas-kelas ekuivalensi. Untuk menentukan banyaknya kelas ekuivalensi akibat partisi himpunan A oleh relasi ekuivalensi yang ditimbulkan oleh suatu grup permutasi pada himpunan tersebut dapat dihitung dengan Teorema Burnside dan Teorema Polya. Oleh sebab itu, akan dibahas beberapa definisi dan beberapa teorema yang mendukung keberadaan kedua teorema tersebut.

2.1 Grup

Suatu *Struktur Aljabar* merupakan suatu sistem yang mengandung dua unsur utama yakni sebuah *himpunan* dan *operasi biner* yang didefinisikan di dalamnya. Sebuah sistem yang terdiri dari sebuah himpunan tak kosong G dan sebuah operasi biner . yang didefinsikan di dalamnya disebut grupoid. Jika operasi biner dalam grupoid tersebut bersifat asosiatif maka sistem tersebut menjadi sebuah semi grup. Selanjutnya semi grup yang memuat elemen identitas yakni sebuah elemen e sedemikian hingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $a.e = e.a = a$ disebut monoid. Dan apabila setiap elemen dalam monoid memiliki invers yakni untuk setiap $a \in G, \exists a^{-1} \in G$ sedemikian hingga $a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$, maka sistem yang baru disebut grup. Berikut ini disajikan definisi formal dari grup.

Definisi 2.1

Suatu *grup* $(G,\cdot)$ adalah suatu himpunan tidak kosong G dengan suatu operasi biner " . " yang memenuhi sifat-sifat berikut :

(i) Himpunan G *tertutup* terhadap " . " ; yaitu $\forall a,b \in G$, $a.b \in G$

(ii) Operasi " . " bersifat *asosiatif* ; yaitu $\forall a,b,c \in G$, $(a \,.\, b) \,.\, c = a \,.\, (b \,.\, c)$

(iii) Ada elemen identitas $e \in G \rightarrow a.e = e.a = a, \forall a \in G$

(iv) setiap $a \in G$ mempunyai elemen invers $a^{-1} \in G, \ni a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$

(Wahyudin, 1989: 66)

Grup $(G,\cdot)$ dalam skripsi ini hanya ditulis G saja pada pembahasan-pembahasan selanjutnya. Jika grup $(G,\cdot)$ memenuhi sifat $a.b = b.a, \forall a,b \in G,$ maka $(G,\cdot)$ disebut *grup komutatif* atau *grup Abelian.* Pemberian nama ini sebagai penghargaan untuk matematikawan Niels Abel.

Untuk memperjelas pengertian grup, akan diberikan contoh dari grup dan bukan grup sebagai berikut :

a. Himpunan semua bilangan real dengan operasi biner penjumlahan "+" membentuk grup Abel (**R**, +). Elemen identitasnya adalah $0 \in \boldsymbol{R}$ dan invers dari $a \in \boldsymbol{R}$ adalah $-a \in \boldsymbol{R}$, dengan $-a$ adalah negatif dari a.

b. Himpunan semua bilangan real dengan operasi biner perkalian " . " bukan merupakan grup. Elemen identitasnya adalah $1 \in \boldsymbol{R}$. Tetapi ada bilangan real yang tidak mempunyai invers terhadap perkalian, yaitu $0 \in \boldsymbol{R}$ karena $\forall a \in \boldsymbol{R}, 0.a = a.0 \neq 1$. Jelas bahwa **R** dengan operasi biner perkalian juga bukan merupakan grup abelian meskipun **R** bersifat komutatif terhadap perkalian, karena syarat dari grup Abelian adalah harus grup terlebih dahulu.

Definisi 2.2

Grup G disebut *grup berhingga* jika memiliki anggota yang banyaknya berhingga. Banyaknya anggota dalam grup G disebut *order* G, dan disimbolkan dengan $| G |$. (Santosa,2003: 3)

Untuk memperjelas pengertian grup berhingga, akan diberikan contoh dari grup berhingga dan bukan grup berhingga sebagai berikut :

a. Diberikan $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dan Z_5 dengan operasi biner penjumlahan adalah grup (karena memenuhi semua sifat grup). Order dari Z_5 adalah $|Z_5| = 5$ (berhingga).

b. Diberikan $Z = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ dan Z dengan operasi biner penjumlahan adalah grup (karena memenuhi semua sifat grup). Order dari Z tak berhingga. Maka grup $(Z, +)$ bukan grup berhingga.

2.2 Subgrup

Seringkali dijumpai bahwa himpunan bagian tidak kosong dari suatu grup juga membentuk grup terhadap operasi yang sama. Grup yang seperti itu disebut *subgrup*. Sebagai contoh, ($\mathbf{Z}$, +) adalah subgrup dari grup ($\mathbf{R}$. +). Suatu subgrup adalah juga grup, sehingga harus memenuhi semua sifat grup.

Selanjutnya bila H adalah subgrup dari grup G, maka dituliskan sebagai $H \leq G$.

Teorema 2.1

Diberikan $(G,\cdot)$ *suatu grup dan* $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$. *Jika* $(H, .)$ *mempunyai sifat-sifat :*

(i) *H tertutup terhadap operasi biner " . ", artinya* $\forall a,b \in G$, $a.b \in H$

(ii) *Untuk setiap* $a \in H$ *mempunyai invers* a^{-1} *yang juga berada di H.*

maka $(H , .)$ *adalah subgrup dari* $(G,\cdot)$ *dan dinotasikan sebagai* $H \leq G$.

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa $(H , .)$ adalah subgrup dari $(G,\cdot)$, berarti akan ditunjukkan bahwa $(H , .)$ memenuhi semua sifat grup, yaitu sebagai berikut :

1. Himpunan H tertutup terhadap operasi biner " . " (jelas dari sifat (i))
2. Karena $H \subseteq G$ dan G *bersifat asosiatif terhadap operasi biner " . "* (karena G grup), maka H juga bersifat asosiatif terhadap operasi biner " . ".
3. Untuk setiap a di H mempunyai invers a^{-1} yang juga berada di H (jelas dari sifat (ii)).
4. Untuk $a \in H$, maka $a^{-1} \in H$ (dari sifat (ii)). Dengan menggunakan sifat (i) didapatkan $a . a^{-1} \in H$ demikian juga $a^{-1} . a \in H$. Di sisi lain $a . a^{-1} = e$ demikian juga $a^{-1} . a = e$. Jadi didapatkan $e \in H$.

Sehingga $(H, .)$ memenuhi semua sifat grup, Jadi $(H, .)$ adalah subgrup dari $(G,\cdot)$. ■

Dua sifat pada teorema di atas dapat dikombinasikan dan menghasilkan teorema berikut.

Teorema 2.2

Diberikan $(G,\cdot)$ *suatu grup dan* $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$. Maka H *subgrup dari* G *jika hanya jika* $\forall a,b \in H, ab^{-1} \in H$

Bukti :

Pertama akan dibuktikan jika H subgrup maka $\forall a,b \in H, ab^{-1} \in H$. Karena H grup maka $\forall a,b \in H$ mempunyai invers masing-masing $a^{-1}, b^{-1} \in H$. H tertutup terhadap operasi biner " . " sehingga diperoleh $a.b^{-1} \in H$. Jadi $\forall a,b \in H, ab^{-1} \in H$

Selanjutnya akan dibuktikan $\forall a,b \in H, ab^{-1} \in H$ maka H subgrup. $\forall a,a \in H, aa^{-1} \in H$. Diketahui bahwa $aa^{-1} = e$ demikian juga $a^{-1}a = e$. Jadi $\forall a \in H$, $\exists a^{-1} \in H \ni aa^{-1} = a^{-1}a = e$ yang menunjukkan sifat (ii) pada **Teorema 2.1**. Karena $\forall a,b \in H$ mempunyai invers masing-masing $a^{-1}, b^{-1} \in H$, maka didapatkan $\forall a,b^{-1} \in H, a(b^{-1})^{-1} \in H$. Diketahui bahwa $(b^{-1})^{-1} = b$, sehingga didapatkan $ab \in H$. Jadi $\forall a,b \in H, ab \in H$ yang menunjukkan sifat (i) pada **Teorema 2.1**. Karena $\forall a,b \in H, ab^{-1} \in H$ memenuhi semua sifat pada **Teorema 2.1** maka H merupakan subgrup. ■

Berdasarkan bukti di atas, untuk menunjukkan himpunan H subgrup dari grup G cukup dengan menggunakan **Teorema 2.2.**

2.3 Partisi dan Relasi Ekuivalensi

Definisi 2.3

Suatu partisi dari sebuah himpunan A merupakan sebuah keluarga himpunan yang terdiri dari himpunan-himpunan bagian tak kosong dari A yang saling asing (disjoint) satu sama lain dan gabungan dari semua himpunan bagian tersebut akan kembali membentuk himpunan A (Prihandoko, 2000: 3).

Contoh 2.1

$\{ \{a,b\},\{c\}\}$ merupakan salah satu bentuk partisi terhadap himpunan $S = \{a,b,c\}$ □

Definisi 2.4

Suatu relasi "~" pada sebuah himpunan A disebut relasi ekuivalensi, jika dan hanya jika memenuhi sifat – sifat berikut :

1. refleksif; yakni $\forall x \in A,\ x \sim x$;
2. simetris; yakni jika $x \sim y$ maka $y \sim x$;
3. transitif; yakni jika $x \sim y$ dan $y \sim z$ maka $x \sim z$.

(Prihandoko, 2000: 4)

Contoh 2.2

Relasi "kesamaan" pada himpunan bilangan riil merupakan sebuah relasi ekuivalensi. Untuk sebarang unsur dalam sebarang himpunan:

1. $a = a$
2. $a = b$ maka $b = a$
3. $a = b$ dan $b = c$ maka $a = c$ □

Definisi 2.5

Misalkan "~" merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan A, dan x suatu elemen dalam A. Himpunan semua elemen yang ekuivalensi dengan x disebut kelas ekuivalensi dari x, dan dinotasikan dengan $[x]$. secara simbolik ditulis

$$[x] = \{a \in A \mid a \sim x\}$$

(Prihandoko, 2000: 4)

Contoh 2.3

Jika Z dipartisi menjadi kelas-kelas yang masing-masing kelas mempunyai sifat jika dibagi tiga menghasilkan sisa yang sama, maka relasi "sekelas partisi dengan" merupakan sebuah relasi ekuivalensi pada Z. Partisi yang terjadi adalah $\{0,\ 1,\ 2\ \}$, dengan $0 = \{x \in Z \mid x = k.3 + 0,\ k \in Z\}$; $1 = \{x \in Z \mid x = k.3 + 1,\ k \in Z\}$;

$2 = \{x \in Z \mid x = k.3 + 2,\ k \in Z\}$

Maka :

kelas ekuivalensi dari 0 yaitu $[0]=\{..,-9,-6,-3,0,3,6,9,...\}$

kelas ekuivalensi dari 1 yaitu $[1]=\{..,-8,-5,-2,1,4,7,10,...\}$

kelas ekuivalensi dari 2 yaitu $[2]=\{..,-7,-4,-1,2,5,8,11,...\}$ □

2.4 Permutasi dan Grup Simetri

Permutasi dari himpunan A adalah fungsi bijektif (injektif dan surjektif) dari A ke A sendiri. Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi *injektif* atau satu-satu jika $f(a_1)=f(a_2)$ maka $a_1=a_2$. Dengan kata lain, suatu fungsi injektif tidak pernah memetakan dua titik yang berbeda ke satu titik yang sama. Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut *surjektif* atau *onto* jika untuk setiap $y \in B$ ada $a \in A$ dengan $f(a)=y$ Suatu fungsi *bijektif* adalah fungsi yang injektif dan surjektif.

Sebuah permutasi π pada himpunan A akan mempartisi A kedalam kelas-kelas partisi. Jika himpunan A dipartisi, maka akan ada relasi ekuivalensi yang dapat ditemukan pada himpunan tersebut. Oleh relasi ekuivalensi,dalam himpunan A didapatkan kelas-kelas ekuivalensi. Kelas-kelas ekuivalensi dari suatu permutasi dapat membentuk suatu orbit pada permutasi tersebut. Orbit dari permutasi π adalah kelas-kelas ekuivalensi pada permutasi π yang ditentukan oleh suatu relasi ekuivalensi. Orbit-orbit dari π dapat membentuk permutasi baru yang hanya memiliki paling banyak 1 orbit yang beranggotakan lebih dari 1 elemen. Permutasi yang demikian disebut cycle.

Setiap permutasi dapat berupa fungsi identitas, atau merupakan satu cycle (suatu untai yang masing-masing anggotanya ekuivalen), atau produk dari cycle-cycle disjoint. Dua cycle dikatakan disjoint jika cycle-cycle tersebut tidak mempunyai elemen yang sama, misalnya cycle (1, 3, 5) dan cycle (2, 4). Jika dua cycle disjoint, maka komposisi atau perkalian dua cycle tersebut komutatif. Cycle dengan panjang 2 (cycle yang terdiri dari dua elemen) disebut transpose. Cycle dengan panjang 1 sering tidak ditulis.

Contoh 2.3

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ adalah permutasi yang berupa fungsi identitas

b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,3,4,5,6)$ adalah permutasi yang berupa satu cycle.

c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (1,2)\ (3,4,5)\ (6)$ adalah permutasi yang berupa produk dari cycle-cycle disjoint. Karena cycle dengan panjang 1 sering tidak ditulis, maka permutasi tersebut dapat ditulis = (1,2) (3,4,5). □

Teorema 2.3

Jika A himpunan tak kosong dan S_A adalah himpunan semua permutasi pada A, maka S_A adalah grup terhadap operasi perkalian permutasi.

Bukti :

1. Operasi biner $\circ$ adalah operasi yang tertutup pada S_A. Misalkan π_1 da π_2 keduanya adalah permutasi unsur-unsur himpunan $A = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$. Untuk menunjukkan bahwa $\pi_1 \circ \pi_2$ adalah juga suatu permutasi himpunan A, cukup ditunjukkan bahwa tidak ada dua unsur di dalam A yang dipetakan ke unsur yang sama oleh $\pi_1 \circ \pi_2$. Misalkan π_2 memetakan unsur a ke b, sedangkan π_1 memetakan unsur b ke c. Dengan demikian $\pi_1 \circ \pi_2$ akan memetakan unsur a ke c. Misalkan x adalah suatu unsur sembarang yang bukan a. Karena π_2 adalah suatu permutasi himpunan A, berarti π_2 memetakan x ke suatu unsur yang bukan b, katakanlah y. Begitu pula π_1 memetakan y ke suatu unsur yang bukan c, katakanlah z. Jadi $\pi_1 \circ \pi_2$ memetakan x ke z. Jadi disimpulkan, bahwa $\pi_1 \circ \pi_2$

selalu memetakan dua unsur yang berbeda (misalnya, a dan x) kedua unsur yang berbeda pula (misalnya, c dan z), dan oleh karena itu merupakan suatu permutasi himpunan A.

2. Operasi biner $\circ$ adalah asosiatif. Artinya untuk sembarang permutasi π_1, π_2, dan π_3 unsur-unsur suatu himpunan, berlaku $(\pi_1 \circ \pi_2) \circ \pi_3 = \pi_1 \circ (\pi_2 \circ \pi_3)$. Untuk mengetahui ini, misalkan π_3 memetakan a ke b, π_2 memetakan b ke c dan π_1 memetakan c ke d. Karena $\pi_1 \circ \pi_2$ memetakan b ke d, $(\pi_1 \circ \pi_2) \circ \pi_3$ memetakan a ke d. Begitu pula, karena $\pi_2 \circ \pi_3$ memetakan a ke c, $\pi_1 \circ (\pi_2 \circ \pi_3)$memetakan a ke d.
3. Identitas. Permutasi yang memetakan setiap unsur di dalam A kedirinya sendiri bertindak sebagai unsur keidentikan yaitu $\forall x \in A,\ i(x) = x$. Sehingga $\forall \pi \in S_A \ni i \times \pi = \pi \times i = \pi$
4. invers. $\forall \pi \in S_A$, π merupakan fungsi bijektif, sehingga π memiliki fungsi invers. Maka invers dari π merupakan permutasi yang memetakan kembali π (x) ke x untuk semua x didalam A. Jadi invers dari $\pi \in S_A$.

Karena memenuhi sifat grup, maka S_A merupakan grup terhadap operasi perkalian permutasi. ■

Definisi 2.6

Misalkan $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Grup dari semua permutasi pada A disebut grup simetri n dan dinotasikan sebagai S_n.

(Prihandoko, 2000:30)

Diberikan contoh dari grup simetri sebagai berikut :

Diberikan $A = \{1, 2\}$ dan fungsi bijektif $f : A \longrightarrow A$

Maka $|A| = 2$ dan $|S_A| = S_2 = 2! = 2\ .\ 1\ = 2$

Didapatkan permutasi-permutasi dari A yaitu fungsi-fungsi bijektif dari A ke A sendiri, yaitu sebagi berikut :

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

maka $S_A = \{f : A \longrightarrow A \mid f \text{ bijektif } \} = \{f_1, f_2\}$

Definisi 2.7

Diberikan untai-untai (cycle-cycle) dari f (permutasi suatu himpunan dengan banyak anggotanya n) yang memuat sebanyak a_i untai dengan panjang i, dan $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ maka tipe untai f disimbolkan dengan vector $[a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n]$ (Santosa, 2003:3).

Contoh 2.4

Diberikan $A = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ dan $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$. Maka f adalah permutasi yang berupa produk dari cycle-cycle disjoint yaitu (1, 3, 5, 4)(2)(6, 8, 7). Diperoleh sebanyak 1 cycle dengan panjang 1 yaitu cycle (2), sebanyak 1 cycle dengan panjang 3 yaitu cycle (6, 8, 7), sebanyak 1 cycle dengan panjang 4 yaitu cycle (1, 3, 5, 4). Sedangkan pada permutasi f, cycle dengan panjang 2, 5, 6, 7 dan 8 tidak ada sehingga banyaknya cycle tersebut nol. Sehingga didapatkan $a_1 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$, $a_2 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0$. Jadi tipe cycle f adalah [10110000]. □

Definisi 2.8

Diberikan G yang merupakan grup permutasi dengan order m dari suatu himpunan yang banyak anggotanya n , $G \leq S_A$ dan $\pi \in G$ bertipe untai $[a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n]$. Indeks siklik π didefinisikan sebagai : $Z\ (\pi; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \ldots x_n^{a_n}$ dan indeks siklik grup G didefinisikan sebagai :

$$Z\ (G; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \frac{1}{m} \sum_{\pi \in G} Z\ (\pi; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \qquad (2.1)$$

(Santosa, 2003:4)

Contoh 2.5

Diberikan $A = \{ 1, 2, 3 \}$ didapatkan permutasi – permutasi dari A sebagai berikut:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

maka $S_A = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6\}$

Diambil $G = \{ \pi_1, \pi_4 \} \leq S_A$

Maka didapatkan:

Tipe untai dari π_1 adalah [300] sehingga indeks siklik π_1, yaitu

$$\begin{aligned} Z(\pi_1; x_1, x_2, x_3) &= x_1^{\,3} x_2^{\,0} x_3^{\,0} \\ &= x_1^{\,3} \end{aligned}$$

Tipe untai dari π_4 adalah [110] sehingga indeks siklik π_4, yaitu

$$\begin{aligned} Z(\pi_4; x_1, x_2, x_3) &= x_1^{\,1} x_2^{\,1} x_3^{\,0} \\ &= x_1 x_2 \end{aligned}$$

Dan Indeks siklik grup G yaitu:

$$\begin{aligned} Z(G; x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{m} \sum_{\pi \in G} Z(\pi; x_1, x_2, x_3) \\ &= \frac{1}{m}\left(Z(\pi_1; x_1, x_2, x_3) + Z(\pi_4; x_1, x_2, x_3)\right) \\ &= \frac{1}{2}(x_1^3 + x_1 x_2) \end{aligned}$$

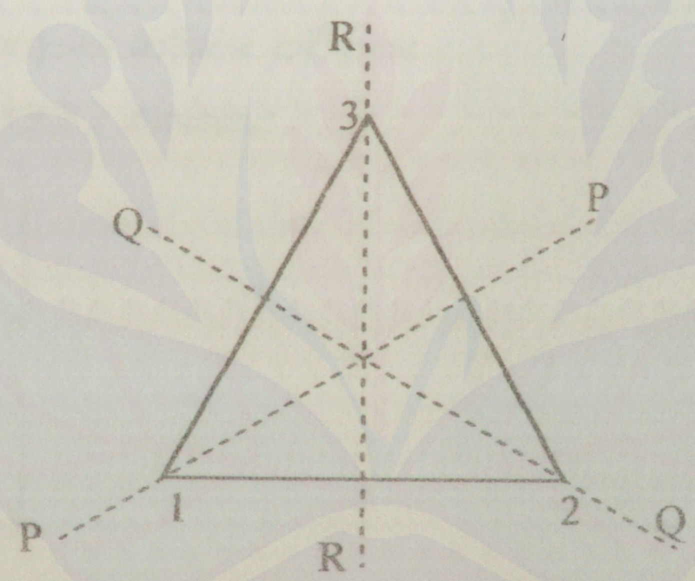
□

Definisi 2.9

Diberikan himpunan semua rotasi dan refleksi dari segi-n beraturan D_n yang terdiri dari n rotasi, yaitu e (elemen identitas), a : = rotasi $\frac{360^0}{n}$, $a \circ a := a^2$ = rotasi $2\ \frac{360^0}{n}$,...a^{n-1} dan n refleksi pada n sumbu simetri. Jika b adalah salah satu dari refleksi-refleksi tersebut, maka $D_n = \{e, a, a^2, ..., a^{n-1}, b, a \circ b := ab, a^2b, ..., a^{n-1}b\}(D_n, \circ)$ adalah grup dengan order $2n$ dan disebut grup dihedral berderajat n (Wahyudin,1989:80).

Contoh 2.6

Diberikan segitiga sama sisi sebagai berikut



Gambar 2.4 Segitiga sama sisi

Transformasi yang mungkin pada segitiga sama sisi tersebut, yaitu:

$\pi_1 = (1)(2)(3)$ [rotasi sebesar 360°]

$\pi_2 = (1, 2, 3)$[rotasi sebesar 120°]

$\pi_3 = (1, 3, 2)$[rotasi sebesar 240°]

$\pi_4 = (1)(2, 3)$[refleksi terhadap sumbu P]

$\pi_5 = (1, 3)(2)$[refleksi terhadap sumbu Q]

$\pi_6 = (1, 2)(3)$[refleksi terhadap sumbu R]

Maka $D_3 = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6\}$ merupakan grup dihedral dengan $|D_3| = 6$ □

Definisi 2.10

Jika $G \leq S_A$ dan $x \in A$, maka :

a. $\text{Stab}(x) := \{\pi \in G | \pi(x) = x\}$, yaitu himpunan semua permutasi di G yang mengakibatkan x sebagai titik tetap. Himpunan Stab(x) disebut *penstabil* x di G.

b. $\text{Fix}(\pi) := \{x \in A | \pi(x) = x\}$, yaitu himpunan semua titik-titik tetap dari permutasi $\pi \in G$. Himpunan Fix (π) disebut *karakter permutasi* π di A.

(Santosa, 2003:3).

Untuk memperjelas definisi ini, lihat kembali **Contoh 2.5**. Dari **Contoh 2.5** diketahui $G = \{\pi_1, \pi_4\} \leq S_A$. dimana :

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

diperoleh :

$\text{Stab}(1) = \{\pi_1, \pi_4\}$

$\text{Stab}(2) = \{\pi_1\}$

$\text{Stab}(3) = \{\pi_1\}$

$\text{Fix}(\pi_1) = \{1, 2, 3\}$

$\text{Fix}(\pi_4) = \{1\}$

2.5 Teorema Cayley

Pada awal abad ke-19, grup hanya muncul dalam bentuk sangat kongkrit, seperti grup-grup simetri atau grup permutasi. Arthur Cayley (1821-1895) adalah ahli matamatika pertama yang menunjukkan bahwa grup abstrak dapat dipandang sebagai suatu subgrup dari suatu grup simetri.

Teorema 2.4

Setiap grup $(G,\cdot)$ *isomorpik dengan subgrup dari grup simetri* $(S_G,\circ)$

Bukti:

Diberikan grup $(G,\cdot)$. Akan ditunjukkan terdapat subgrup dari grup simetri $(S_G,\circ)$, misal $(H,\circ)$, $\ni G \cong H$.

Pertama akan dikonstruksi suatu grup simetri $S_G = \{\pi_a \mid a \in G$ dan $\pi_a : G \to G\}$ dengan $\pi_a(x) = a \,.\, x,\ \forall x \in G$. Dalam hal ini harus ditunjukkan bahwa π_a adalah suatu fungsi bijektif.

1. Terlebih dahulu ditunjukkan bahwa π_a adalah suatu fungsi.

   Untuk sebarang tetap $a \in G$ ambil sebarang $x_1, x_2 \in G$ (tetap) $a \in G$, maka

   $x_1 = x_2$

   $e \,.\, x_1 = e \,.\, x_2$

   $(a^{-1} \,.\, a) \,.\, x_1 = (a^{-1} \,.\, a) \,.\, x_2$ (keberadaan elemen invers $a^{-1} \in G$, karena G grup)

   $a^{-1} \,.\, (a \,.\, x_1) = a^{-1} \,.\, (a \,.\, x_2)$ (sifat asosiatif, karena G grup)

   $a \,.\, x_1 = a \,.\, x_2$ (hukum kanselasi)

   $\pi_a(x_1) = \pi_a(x_2)$

   Jadi π_a well defined.

2. Akan ditunjukkan bahwa π_a suatu fungsi injektif.

   Untuk sebarang tetap $a \in G$ ambil sebarang $x_1, x_2 \in G$ (tetap) $a \in G$, maka

   $\pi_a(x_1) = \pi_a(x_2)$

   $a \,.\, x_1 = a \,.\, x_2$

   $a^{-1} \,.\, (a \,.\, x_1) = a^{-1} \,.\, (a \,.\, x_2)$ (keberadaan elemen invers $a^{-1} \in G$, karena G grup)

$(a^{-1}. a) . x_1 = (a^{-1} . a) . x_2$ (sifat asosiatif, karena G grup)

$e . x_1 = e . x_2$

$x_1 = x_2$

Karena berlaku $\pi_a (x_1) = \pi_a (x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, maka π_a adalah suatu fungsi injektif.

3. Akan ditunjukkan bahwa π_a suatu fungsi surjektif.

   Untuk sebarang tetap $a \in G$, ambil sebarang $y \in G$, maka

   $\pi_a (a^{-1} . y) = a . (a^{-1} . y)$ (keberadaan elemen invers $a^{-1} \in G$, karena G grup)

   $= (a . a^{-1}).y$ (sifat asosiatif karena G grup)

   $= e . y$

   $= y$

   Karena untuk setiap $y \in G$, terdapat $x = a^{-1} . y \in G \ni \pi_a (x) = y$, maka π_a adalah suatu fungsi surjektif.

Karena π_a adalah suatu fungsi injektif dan surjektif, maka π_a adalah suatu fungsi bijektif.

Misalkan $H = \{\pi_a \in S_G | a \in G\}$. Akan ditunjukkan bahwa $(H,\circ)$ adalah subgrup dari $(S_G,\circ)$. Menurut Teorema 2.1 cukup ditunjukkan bahwa H tertutup terhadap operasi $\circ$ dan setiap elemen dari H mempunyai invers yang juga berada di dalam H.

1. Akan ditunjukkan bahwa H tertutup terhadap operasi $\circ$.

   Ambil π_a , $\pi_b \in$ H dengan $a, b \in G$. *maka*

   $$\pi_a(x)\circ\pi_b(x) = (\pi_a \circ \pi_b)(x) = \pi_a(\pi_b(x)) = \pi_a(b.x) = a.(b.x) = (a.b)(x)$$
   $$= \pi_{ab}(x)$$

   Didapatkan $\pi_a \circ \pi_b = \pi_{ab}$

   Karena G grup, maka $\forall a,b \in G, a..b \in G$. Sehingga, $\pi_{ab} = \pi_a \circ \pi_b \in S_G$, sekaligus elemen H.

   Jadi H tertutup terhadap operasi $\circ$.

2. Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen dari H mempunyai invers yang juga berada di H. Berarti $\forall\ \pi_a \in H$ akan ditunjukkan $\exists\ (\pi_a)^{-1} \in H \ni \pi_a \circ (\pi_a)^{-1} = \pi_e$,

π_e adalah elemen identitas di H.

Ambil $\pi_a \in H$ dengan $a \in G$. *maka*

$\pi_a \circ \pi_{a^{-1}} = \pi_{a.a^{-1}} = \pi_e$ (karena G grup, maka $\forall\, \pi_a \in G\ \exists\, a^{-1} \in G$ $\ni a\ .\ a^{-1} = a^{-1}\ .\ a = e$. Hasil $\pi_a \circ \pi_{a^{-1}} = \pi_{a.a^{-1}}$ ini berdasarkan pembahasan sebelumnya, yaitu pada saat menunjukkan H tertutup terhadap operasi $\circ$).

Sehingga didapatkan $\pi_a \circ \pi_{a^{-1}} = \pi_e$. Karena a^{-1} , $e \in G$, maka $\pi_{a^{-1}}$, $\pi_e \in H$ sehingga $\forall\, \pi_a \in H\ \exists\, (\pi_a)^{-1} = \pi_{a^{-1}} \in H \ni \pi_a \circ (\pi_a)^{-1} = \pi_e$

Jadi H subgrup dari simetri S_G.

Sekarang akan ditunjukkan $G \cong H$, yaitu jika terdapat fungsi bijektif ψ dari G ke H, sedemikian hingga berlaku $\psi(a\ .\ b) = \psi(a) \circ \psi(b)$, $\forall\, a, b \in G$ (atau dikenal dengan homomorfisma grup).

Untuk setiap $a \in G$, didefinisikan $\psi : G \to H$ dengan $\psi(a) = \pi_a$. Akan ditunjukkan bahwa ψ adalah fungsi bijektif dan suatu homomorfisma grup.

1. Terlebih dahulu ditunjukkan bahwa ψ adalah suatu fungsi (ψ well defined)

   Ambil sebarang $a, b, \in G$, maka

   $$a = b$$

   $$a\ .\ e = b\ .\ e \text{ (Karena } G \text{ grup, maka terdapat elemen identitas } e)$$

   $$\pi_a(e) = \pi_b(e)$$

   $$\pi_a = \pi_b$$

   $$\psi(a) = \psi(b)$$

   Jadi ψ well defined.

2. Akan ditunjukkan bahwa ψ adalah fungsi injektif.

   Ambil sebarang $a, b \in G$, maka

   $$\psi(a) = \psi(b)$$

   $$\pi_a = \pi_b$$

   $$\pi_a(e) = \pi_b(e) \text{ (karena } G \text{ grup maka terdapat elemen identitas } e)$$

$$a \,.\, e = b \,.\, e$$

$$a = b$$

Jadi ψ adalah fungsi injektif.

3. Akan ditunjukkan bahwa ψ adalah fungsi surjektif.

   Ambil sebarang $y \in H$, maka

   $$\begin{aligned} y &= \pi_a \\ &= \psi(a) \\ &= \psi(x) \end{aligned}$$

   Sehingga $\forall y \in H, \exists x = a \in G \ni \psi(x) = y$.

   Jadi ψ adalah fungsi surjektif.

4. Akan ditunjukkan bahwa ψ adalah homomorfisma grup.

   Ambil sebarang $a, b \in G$, maka

   $\psi(a \,.\, b)(e) = \pi_{a.b}(e)$ (Karena G grup maka terdapat elemen identitas e)

   $= (\pi_a \circ \pi_b)(e)$ (ingat $\pi_{a.b} = \pi_a \circ \pi_b$)

   $= (\psi(a) \circ \psi(b))(e)$

   Sehingga didapatkan $\psi(a \,.\, b) = \psi(a) \circ \psi(b)$

   Jadi ψ adalah homomorfisma grup.

Karena ψ adalah fungsi bijektif (injektif dan surjekfif) dan suatu homomorfisma grup, maka $G \cong H$. ■

Teorema 2.4 di atas menunjukkan bahwa setiap grup isomorpik dengan subgrup dari grup simetri.

2.6 Teorema Burnside dan Teorema Polya

Beberapa definisi dan teorema yang telah dibahas di atas dapat digunakan untuk pembuktian Teorema Burnside dan Teorema Polya. Teorema Burnside dan Teorema Polya menjelaskan tentang banyaknya kelas ekuivalensi akibat partisi himpunan berhingga A oleh relasi ekuivalensi yang ditimbulkan oleh grup permutasi pada himpunan A.

Teorema 2.5 (Teorema Burnside)

Banyaknya kelas ekuivalensi akibat partisi A oleh relasi ekuivalensi yang ditimbulkan oleh suatu grup permutasi $(G,\circ)$ pada A adalah:

$$n_k = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|\mathrm{Fix}(\pi)| \quad \text{atau} \tag{2.2}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in A}|\mathrm{Stab}(x)|$$

Bukti :

Untuk sebarang unsur x di dalam A, diberikan $|\mathrm{Stab}(x)|$ adalah banyaknya permutasi yang x invarian terhadapnya. Maka

$$\sum_{\pi\in G}|\mathrm{Fix}(\pi)| = \sum_{x\in A}|\mathrm{Stab}(x)|$$

sebab keduanya mencacah banyaknya unsur yang invarian terhadap semua permutasi yang ada di dalam G. Salah satu cara mencacah unsur-unsur yang invarian adalah melalui semua permutasi satu per satu dan mencacah banyaknya unsur yang invarian terhadap setiap permutasi. Cara ini menghasilkan $\sum_{\pi\in G}|\mathrm{Fix}(\pi)|$ sebagai hasilnya. Suatu cara lain adalah melalui unsur-unsur tersebut satu per satu dan mencacah banyaknya permutasi yang terhadapnya suatu unsur bersifat invarian. Cara ini menghasilkan $\sum_{x\in A}|\mathrm{Stab}(x)|$ sebagai hasilnya.

Misalkan a dan b adalah dua unsur di dalam A yang berada di dalam satu kelas ekuivalensi yang sama. Akan ditunjukkan bahwa tepat ada $|\mathrm{Stab}(a)|$ permutasi yang memetakan a dan b. Karena a dan b ada di dalam kelas ekuivalensi yang sama, sedikitnya ada satu permutasi demikian ini yang akan dilambangkan dengan π_x. Misalkan $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3, ...\}$ adalah himpunan $|\mathrm{Stab}(a)|$ buah permutasi yang a invarian terhadapnya. Dengan demikian, $|\mathrm{Stab}(a)|$ buah permutasi di dalam himpunan $\{\pi_x \circ \pi_1, \pi_x \circ \pi_2, \pi_x \circ \pi_3, \ldots\}$ adalah permutasi yang memetakan a ke b. Pertama-tama dicatat bahwa semua permutasi yang terakhir ini berbeda sebab, jika $\pi_x \circ \pi_1 = \pi_x \circ \pi_2$ diperoleh

$$\pi_x^{-1} \circ (\pi_x \circ \pi_1) = \pi_x^{-1} \circ (\pi_x \circ \pi_2)$$

yang menghasilkan $\pi_1 = \pi_2$, yang tentu saja tidak mungkin. Kedua, dilihat bahwa tidak ada permutasi lain di dalam G yang memetakan a ke b. Seandainya ada sebuah permutasi π_y yang juga memetakan a ke b, maka $\pi_x^{-1} \circ \pi_y$ adalah suatu permutasi yang memetakan a ke a sendiri, sebab π_x^{-1} memetakan b ke a. Karena $\pi_x^{-1} \circ \pi_y$ adalah sebuah permutasi yang ada di dalam himpunan $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots\}$, berarti $\pi_x \circ (\pi_x^{-1} \circ \pi_y) = \pi_y$ adalah sebuah permutasi yang ada di dalam himpunan $\{\pi_x \circ \pi_1, \pi_x \circ \pi_2, \pi_x \circ \pi_3, \ldots\}$. Oleh karena itu disimpulkan bahwa tepat ada $|\mathrm{Stab}(a)|$ permutasi di dalam G yang memetakan a ke b.

Misalkan $a, b, c, \ldots, h$ adalah unsur-unsur di dalam A yang berada di dalam satu kelas ekuivalensi yang sama. Semua permutasi di dalam G dapat digolongkan sebagai yang memetakan a ke a, yang memetakan a ke b, yang memetakan a ke c, ... , yang memetakan a ke h. Karena telah ditunjukkan bahwa tepat ada $|\mathrm{Stab}(a)|$ permutasi di dalam setiap golongan itu, maka diperoleh

$$|\mathrm{Stab}(a)| = \frac{|G|}{\eta(a)}$$

dimana $\eta(a)$ merupakan banyaknya unsur di dalam kelas ekuivalensi yang mengandung a.

menggunakan penalaran yang sama, diperoleh

$$|\mathrm{Stab}(b)| = |Stab(c)| = \ldots = |\mathrm{Stab}(h)|$$

$$= \frac{|G|}{\eta(a)}$$

Sehingga

$$|\mathrm{Stab}(a)| + |\mathrm{Stab}(b)| + |\mathrm{Stab}(c)| + \ldots + |\mathrm{Stab}(h)| = |G|$$

dengan demikian, untuk sembarang kelas ekuivalensi unsur-unsur didalam A dan jika x_i merupakan semua x dalam kelas ekuivalensi maka

$$\sum_{x_i} |\mathrm{Stab}(x_i)| = |G|$$

dan jika n_k adalah banyaknya kelas ekuivalensi yang mempartisi A

$$\sum_{x \in A} |\mathrm{Stab}(x)| \; = \; n_k \times |G|$$

Oleh karena itu diperoleh

$$n_k = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in A} |\mathrm{Stab}(x)|$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi)| \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.6 (Teorema Polya)

Diberikan $C = \{f \mid f : A \rightarrow B\}$ *dengan* $|A| = n \geq 2$ *dan* $|B| = r$, *jika* G *merupakan grup permutasi yang diberlakukan pada* A *dengan indek siklik* $Z(G, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ *maka banyaknya kelas ekuivalensi dalam himpunan C terhadap G adalah* $(G; r, r, r, \ldots, r)$

Bukti :

Diturunkan dari isomorfisma grup, akan dihasilkan kelas-kelas ekuivalensi di C terhadap G' (grup permutasi pada C). Sedangkan banyaknya kelas-kelas ekuivalensi yang terjadi di C terhadap G' diberikan oleh teorema Burnside, yaitu :

$$n = \frac{1}{|G'|} \sum_{\pi' \in G'} |\mathrm{Fix}(\pi')| \tag{2.3}$$

dengan $\mathrm{Fix}(\pi') = \{f \in C | \pi'(f) = f\}$

karena $\pi'(f) = f$ jika dan hanya jika $f(\pi(x)) = f(x)$ untuk $\forall x \in A$ dan karena $|G| = |G'|$ sebagai akibat teorema cayley maka persamaan 2.3 yang memuat himpunan C dan grup G' dapat dibawa kepada bentuk himpunan A dan grup G yang beraksi padanya, yaitu :

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |f \in C : f(\pi(x)) = f(x), \text{untuk } \forall x \in A| \tag{2.4}$$

Jika $f(\pi(x)) = f(x)$ dan jika $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_j)$ adalah satu cycle suatu permutasi $\pi \in G$, maka $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \ldots = f(x_j)$. Dengan kata lain f mempunyai nilai konstan untuk tiap cycle π. Kebalikannya, jika f mempunyai nilai konstan untuk setiap cycle π dan jika $(x, x_t, \ldots, x_\omega)$ adalah cycle yang memuat sembarang $x \in A$ maka $f(\pi(x)) = f(x_t) = \ldots = f(x_\omega)$

Jadi jumlah sisi kanan dari persamaan 2.4 hanyalah banyaknya cara pewarnaan A dengan $r \geq 2$ warna, sehingga elemen-elemen dalam cycle yang sama dari permutasi π akan diberi warna yang sama. Jika π bertipe $[a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n]$, maka banyaknya cara pewarnaannya adalah : $r^{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ldots + a_n}$ sehingga persamaan 2.4 menjadi :

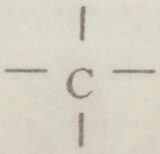
$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} r^{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ldots + a_n} = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} r^{a_1} r^{a_2} r^{a_3} \ldots r^{a_n}$$

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} Z(\pi; r, r, r, \ldots, r) = Z(G; r, r, r, \ldots, r)$$ ∎

2.7 Atom Karbon, Atom Hidrogen dan Molekul Nitrogen Dioksida

Saat kita mulai mengenal tentang unsur-unsur yang ada di alam ini, kita mengenal tentang unsur karbon (C). Unsur karbon merupakan salah satu dari sekian banyak unsur yang sering kita jumpai dan kita gunakan di alam ini. Karbon merupakan unsur non logam yang tidak mengkilap dan tidak dapat menghantarkan panas dan listrik.

Unsur karbon terletak pada golongan keempat. Oleh karena karbon mempunyai elektron terluar sebanyak empat, untuk membentuk ikatan diperlukan empat elektron dari atom lain untuk digunakan bersama-sama.
Dengan kata lain atom karbon mempunyai ikatan sebanyak empat.



Gambar 2.5 Ikatan Atom C

Ciri khas karbon yang membedakannya dengan unsur-unsur yang lain adalah kemampuan karbon untuk berikatan dengan sesama atom karbon dan membentuk suatu rantai karbon yang terbuka atau tertutup (membentuk cincin) (Wikipedia,2006)

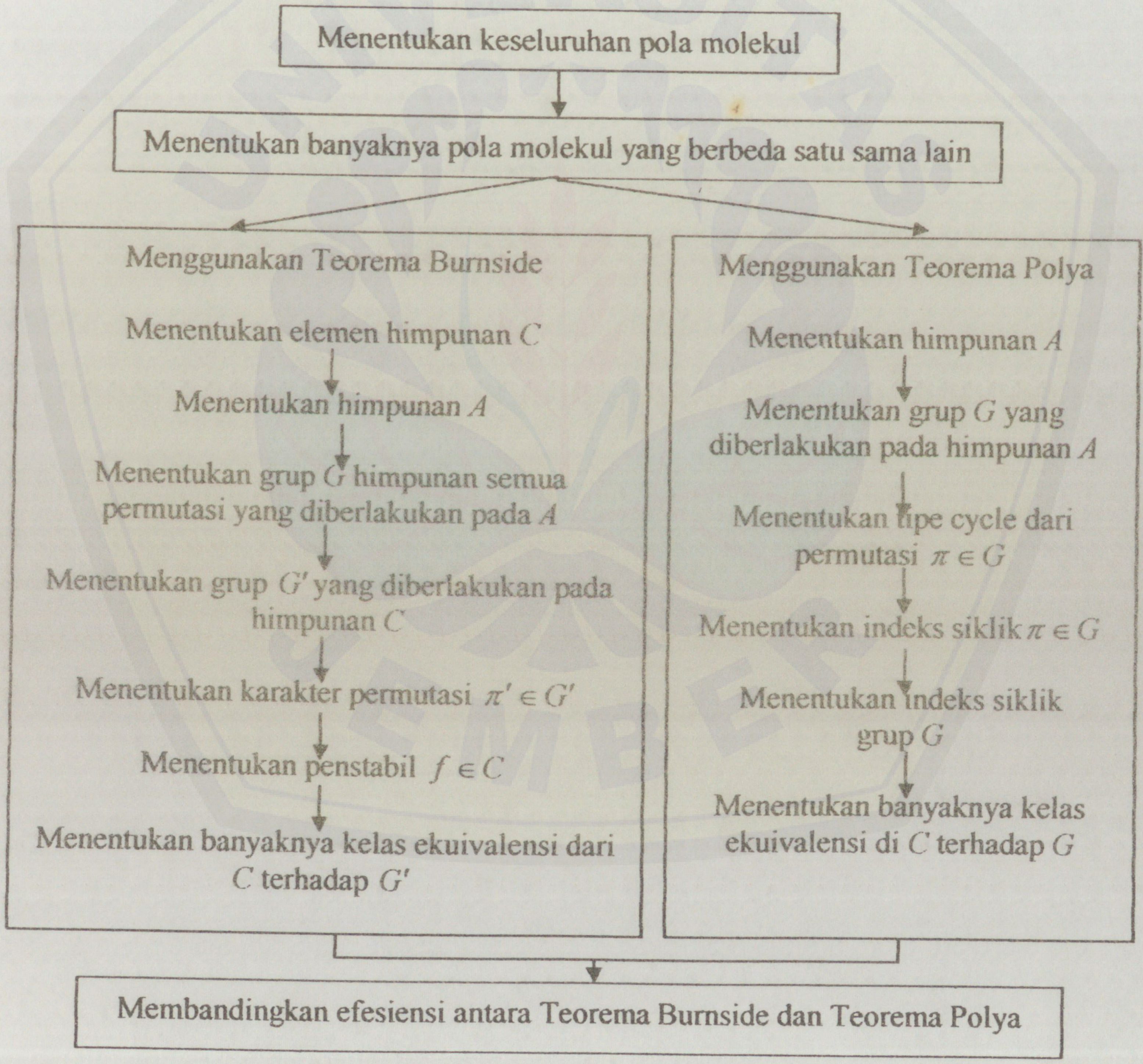
Cincin karbon dengan 6 atom C adalah ikatan 6 atom C dengan pangkal dan ujungnya saling berikatan dan secara geometri digambarkan sebagai segi-6 beraturan. Kemudian masing-masing atom C diikat dengan atom atau molekul lain. Dalam skripsi ini masing-masing atom C diikat dengan salah satu dari atom Hidrogen (H) atau molekul nitrogen dioksida (NO_2).

Hidrogen adalah unsur alam yang paling ringan dan paling sederhana. Hidrogen berwujud gas, sangat mudah terbakar dan tidak dapat melarutkan zat. Sedangkan molekul NO_2 merupakan gas kuning dan coklat, tidak berbau, bersifat iritasi dan beracun. Secara alamiah molekul ini terbentuk di atmosfer terutama di lapisan ozon (Sudarmo, 2004:98).

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Prosedur Penelitian

Penelitian yang dilakukan ini berkaitan dengan masalah analitik, sehingga dibutuhkan prosedur penelitian untuk memperoleh pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain. Adapun prosedur penelitian ini adalah sebagai berikut :



Gambar 3.6 Diagram Alir Penelitian

3.1.1 Penentuan Keseluruhan Pola Molekul

Keseluruhan pola molekul cincin karbon (C) yang dapat dibentuk dari pengikatan masing-masing 6 atom C dengan salah satu dari atom H atau molekul NO_2 merupakan persoalan kombinatorik sehingga digunakan kaidah perkalian untuk menghitungnya.

3.1.2 Penggunaan Teorema Burnside

Teorema Burnside digunakan untuk menentukan banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain. Langkah-langkahnya sebagai berikut :

a. Menentukan elemen-elemen himpunan C

Himpunan C adalah himpunan semua pola-pola molekul cincin karbon (C) yang terbentuk dari pengikatan masing-masing atom C dengan salah satu dari atom H atau molekul NO_2. Penentuan elemen himpunan C berfungsi untuk mengetahui banyaknya elemen himpunan C yang invarian terhadap setiap permutasi dalam grup yang diberlakukan pada himpunan C. Untuk memperoleh grup permutasi tersebut terlebih dahulu menentukan grup yang merupakan himpunan semua rotasi dan refleksi pada segienam beraturan(bentuk cincin karbon dengan 6 atom C secara geometri). Sedangkan untuk memperoleh grup himpunan semua rotasi dan refleksi pada segienam terlebih dahulu ditentukan himpunan semua titik pada puncak-puncak segienam tersebut.

b. Menentukan himpunan A

Elemen-elemen himpunan A merupakan titik-titik yang ditandai pada puncak-puncak segienam beraturan, dimana segienam tersebut merupakan bentuk cincin karbon dengan 6 atom C secara geometri. Himpunan A berfungsi untuk menentukan grup permutasi yang diberlakukan pada himpunan tersebut.

c. Menentukan grup G himpunan semua permutasi yang diberlakukan pada A

Diketahui bahwa dua pola molekul dikatakan sama jika pola molekul kedua diperoleh dari pola molekul pertama dengan rotasi atau refleksi. Berdasarkan hal tersebut, maka ditentukan sebuah grup G yang merupakan himpunan semua rotasi dan refleksi dari segienam beraturan tersebut dan grup yang diperoleh adalah grup permutasi pada A. Grup G digunakan untuk membuat suatu pemetaan pada himpunan C ke dirinya sendiri.

d. Menentukan grup G' himpunan semua permutasi yang diberlakukan pada C.

Berdasarkan teorema Cayley, setiap grup abstrak dapat dipandang sebagai subgrup dari grup simetri. Maka dibuat grup G' isomorpik dengan grup G (yang diberlakukan pada himpunan A) dimana untuk setiap $\pi \in G$ didefinisikan pemetaan π' dari C ke C dengan sifat :

$$\pi'(f(x)) = f(\pi(x)) \text{ untuk } \forall x \in A \text{ dan } \forall f \in C \text{ (Santosa, 2003:4)}$$

Grup G ini berfungsi untuk menentukan karakter permutasi dan penstabil di himpunan C

e. Menentukan karakter permutasi $\pi' \in G'$ di himpunan C

Setelah diperoleh permutasi-permutasi $\pi' \in G'$ di C, maka dapat ditentukan karakter $\pi' \in G'$. Karakter permutasi $\pi' \in G'$ adalah himpunan semua titik-titik tetap dari permutasi $\pi' \in G'$ didefinisikan sebagai

$$\text{Fix}\,(\pi') := \{f \in C \mid \pi'(f) = f\}$$

f. Menentukan penstabil $f \in C$ di G'

Penstabil $f \in C$ di G' adalah himpunan semua permutasi $\pi' \in G'$ yang mengakibatkan f sebagai titik tetap. Penstabil $f \in C$ didefinisikan sebagai

$$\text{Stab}(f) := \{\pi' \in G' \mid \pi'(f) = f\}$$

g. Menentukan banyaknya kelas ekuivalensi dari C terhadap G'

Untuk menghitung banyaknya kelas ekuivalensi dari C terhadap G' terlebih dahulu dihitung $\sum_{\pi' \in G'} |\text{Fix}(\pi')|$ atau $\sum_{f \in C} |\text{Stab}(f)|$ kemudian dihitung banyaknya kelas ekuivalensi dari C terhadap G' yaitu :

$$n = \frac{1}{|G'|} \sum_{\pi' \in G'} |\mathrm{Fix}(\pi')| \text{ atau}$$

$$n = \frac{1}{|G'|} \sum_{f \in C} |\mathrm{Stab}(f)|$$

3.1.3 Penggunaan Teorema Polya

Teorema Polya digunakan untuk menentukan banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain. Langkah-langkahnya sebagai berikut :

a. Menentukan himpunan A

Untuk menentukan himpunan A prosedurnya sama dengan menentukan himpunan A pada Teorema Burnside.

b. Menetukan grup G himpunan semua permutasi yang diberlakukan A

Untuk menentukan grup G pada himpunan A prosedurnya sama dengan menentukan grup G pada teorema Burnside. Setelah diperoleh grup G maka dapat ditentukan tipe cycle masing-masing permutasi dalam G

c. Menentukan tipe cycle dari permutasi $\pi \in G$

Setelah diperoleh permutasi-permutasi $\pi \in G$, dimana G adalah grup yang beraksi pada himpunan A maka didapatkan tipe cycle dari permutasi $\pi \in G$ berdasarkan **Definisi 2.7**. Penentuan tipe cycle tersebut berfungsi untuk menentukan indeks siklik dari masing-masing permutasi dalam G

d. Menentukan indeks siklik $\pi \in G$

Setelah diperoleh tipe cycle untuk $\forall \pi \in G$ maka dapat ditentukan indeks siklik π yang didefinisikan sebagai :

$Z(\pi; x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} ... x_n^{a_n}$ dimana $[a_1, a_2, a_3, ..., a_n]$ adalah tipe cycle dari π. Penentuan indeks siklik masing-masing permutasi dalam G bertujuan untuk menentukan indeks siklik grup G

e. Menentukan indeks siklik grup G

Indeks siklik grup G ditentukan oleh persamaan 2.1 yaitu :

$$Z(G;x_1,x_2,x_3,...,x_n)=\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}Z(\pi;x_1,x_2,x_3,...x_n)$$

Indeks siklik grup G digunakan untuk menentukan banyaknya kelas ekuivalensi di C terhadap G dengan mengganti $x_1=x_2=...=x_n=r$

f. Menentukan banyaknya kelas ekuivalensi di C terhadap G

Menurut Teorema Polya banyaknya kelas ekuivalensi di C terhadap G ditentukan dengan rumus :

$$\begin{aligned} n &= Z(G;r,r,r,...r) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}Z(\pi;r,r,r,...r) \end{aligned}$$

Dimana $r=|B|$ dan B adalah himpunan semua atom atau molekul yang berikatan dengan atom C. Penentuan banyaknya kelas ekuivalensi di C terhadap G berfungsi untuk menentukan banyaknya pola molekul cincin karbon yang berbeda satu sama lain dari pengikatan 6 atom C dengan salah satu dari atom H atau molekul NO_2.

3.1.4 Perbandingan Efesiensi Antara Teorema Burnside dan Teorema Polya

Mengukur efesiensi antara Teorema Burnside dan Teorema Polya untuk menentukan banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain menggunakan metode deskriptif. Dimana untuk mengetahui efesiensi teorema yaitu dengan mengadakan pengamatan apakah teorema tersebut mudah dan cepat diterapkan untuk menjawab permasalahan dalam penelitian ini

3.2 Definisi Operasional

Definisi operasional berikut ini diberikan untuk menghindari terjadinya kekurangjelasan makna operasional variabel yang digunakan dalam penelitian ini. Definisi operasional yang dimaksud adalah sebagai berikut :

a. Teorema Burnside dan Teorema Polya

Teorema Burnside dan Teorema Polya merupakan suatu metode untuk menghitung banyaknya kelas ekuivalensi akibat partisi suatu himpunan berhingga. Kedua teorema tersebut dalam penelitian ini akan digunakan untuk menghitung banyaknya pola molekul cincin karbon yang berbeda satu sama lain. Penggunaan Teorema Burnside untuk menghitung banyaknya kelas ekuivalensi dengan menghitung banyaknya unsur yang invarian terhadap permutasi dalam grup yang diberlakukan pada himpunan tersebut. Sedangkan Teorema Polya dalam menghitung banyaknya kelas ekuivalensi yaitu dengan menentukan tipe cycle dari permutasi yang ada dalam grup.

b. Enumerasi

Masalah enumerasi yang dibahas dalam penelitian ini adalah masalah penghitungan banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain.

c. Pola Molekul Cincin Karbon (C)

Cincin Karbon (C) dengan 6 atom C yang dimaksudkan pada penelitian ini, berupa ikatan 6 atom C dengan pangkal dan ujungnya saling berikatan dan secara geometri digambarkan sebagai segienam beraturan.

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Keseluruhan Pola Molekul Cincin Karbon (C)

Pola molekul cincin karbon (C) yang masing-masing atom C-nya diikat oleh salah satu dari atom H atau molekul NO_2 akan didapatkan sejumlah pola molekul. Menghitung keseluruhan pola molekul yang dapat dibentuk menggunakan kaidah perkalian dimana pengikatan masing-masing 6 atom C dengan salah satu dari atom H atau molekul NO_2 dianggap sebagai 6 percobaan yang dilakukan secara bersamaan dan setiap percobaan memiliki dua kemungkinan pengikatan atom C yaitu dengan atom H atau molekul NO_2. Sehingga secara keseluruhan terdapat $2^6 = 64$ pola molekul yang dapat dibentuk. Keseluruhan pola molekul cincin karbon (C) yang terbentuk dapat dilihat pada Lampiran A.

64 pola molekul yang terbentuk tersebut, terdapat pola-pola molekul yang sama. Dua pola molekul dikatakan sama jika pola molekul kedua dapat diperoleh dari pola molekul pertama dengan rotasi atau refleksi. Sebaliknya jika pola molekul kedua tidak dapat diperoleh dari pola molekul pertama dengan rotasi atau refleksi maka dua pola molekul tersebut berbeda. Dalam hal ini, yang mengalami rotasi atau refleksi adalah atom atau molekul yang berikatan dengan atom C sedangkan secara geometri bentuk dari pola molekul tersebut tetap

Pola-pola molekul yang sama akan dikelompokkan dalam satu kelompok dan dihitung sebagai satu pola molekul sehingga kelompok satu dengan kelompok yang lain adalah pola-pola molekul yang berbeda. Dengan mengamati satu per satu pola molekul pada Lampiran A, maka didapatkan 13 kelompok pola molekul, yang berarti terdapat 13 pola molekul yang berbeda satu dengan yang lainnya, yaitu sebagai berikut :

Kelompok 1 : f_1

Kelompok 2 : $f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$

Kelompok 3 : $f_8, f_{12}, f_{13}, f_{17}, f_{20}, f_{22}$

Kelompok 4 : $f_9, f_{11}, f_{14}, f_{16}, f_{18}, f_{21}$

Kelompok 5 : f_{10}, f_{15}, f_{19}

Kelompok 6 : $f_{23}, f_{26}, f_{32}, f_{33}, f_{39}, f_{42}$

Kelompok 7 : $f_{24}, f_{25}, f_{27}, f_{29}, f_{30}, f_{31}, f_{34}, f_{35}, f_{36}, f_{38}, f_{40}, f_{41}$

Kelompok 8 : f_{28}, f_{37}

Kelompok 9 : $f_{43}, f_{45}, f_{48}, f_{52}, f_{53}, f_{57}$

Kelompok 10 : $f_{44}, f_{47}, f_{49}, f_{51}, f_{54}, f_{56}$

Kelompok 11 : f_{46}, f_{50}, f_{55}

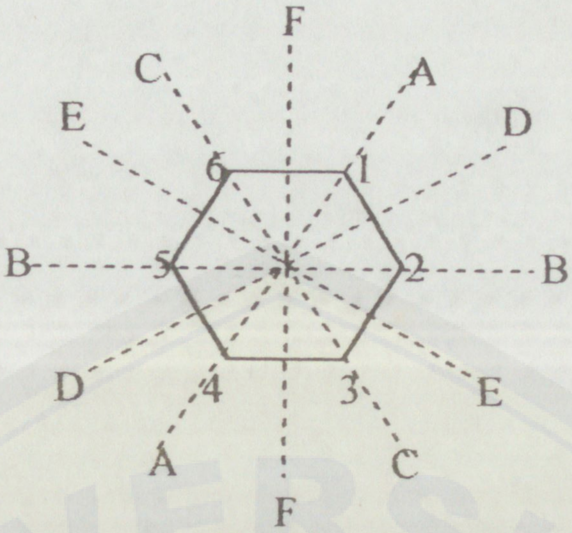
Kelompok 12 : $f_{58}, f_{59}, f_{60}, f_{61}, f_{62}, f_{63}$

Kelompok 13 : f_{64}

4.2 Aplikasi Teorema Burnside

Diketahui bahwa terdapat 64 pola molekul yang terbentuk dari pengikatan cincin karbon dengan atom H atau molekul NO_2. Keseluruhan pola molekul tersebut merupakan elemen-elemen himpunan C. Sehingga himpunan $C=\{f_1,\ldots,f_{64}\}$. Keseluruhan elemen-elemen himpunan C dapat dilihat pada Lampiran B.

Diberikan $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dimana elemen himpunan A diperoleh dengan menandai puncak-puncak sudut segienam beraturan (bentuk cincin karbon dengan 6 atom C secara geometri) dengan nomor 1, 2, 3, 4, 5 dan 6. Diperoleh grup G yang diberlakukan pada himpunan A, dimana grup tersebut merupakan himpunan semua rotasi dan refleksi dari segienam beraturan (Gambar 4.7). Sedangkan untuk segienam yang tidak beraturan tidak dapat dibuat himpunan semua rotasi dan refleksi dari segienam tersebut.



Gambar 4.7 Segienam Beraturan

Maka $G=\{\pi_1,\ldots,\pi_{12}\}$, dimana :

$\pi_1=(1)(2)(3)(4)(5)(6)$ (identitas atau rotasi sebesar $0^\circ/360^\circ$)

$\pi_2=(1,2,3,4,5,6)$ (rotasi sebesar 60°)

$\pi_3=(1,3,5)(2,4,6)$ (rotasi sebesar 120°)

$\pi_4=(1,4)(2,5)(3,6)$ (rotasi sebesar 180°)

$\pi_5=(1,5,3)(2,6,4)$ (rotasi sebesar 240°)

$\pi_6=(1,6,5,4,3,2)$ (rotasi sebesar 300°)

$\pi_7=(1)(2,6)(3,5)(4)$ (refleksi terhadap sumbu A)

$\pi_8=(1,3)(2)(4,6)(5)$ (refleksi terhadap sumbu B)

$\pi_9=(1,5)(2,4)(3)(6)$ (refleksi terhadap sumbu C)

$\pi_{10}=(1,6)(2,5)(3,4)$ (refleksi terhadap sumbu D)

$\pi_{11}=(1,2)(3,6)(4,5)$ (refleksi terhadap sumbu E)

$\pi_{12}=(1,4)(2,3)(5,6)$ (refleksi terhadap sumbu F)

Kemudian dibuat grup G' yaitu grup permutasi yang didefinisikan pada himpunan C. Dimana untuk setiap $\pi\in G$ didefinisikan pemetaan π' dari C ke C dengan sifat :

$$\pi'(f(x))=f(\pi(x)) \text{ untuk } \forall\, x\in A \text{ dan } \forall f\in C$$

Diberikan

$\pi_2' \in G', \pi_2 \in G$ dan $f_2 = (CNO_2, CH, CH, CH, CH, CH) \in C$ maka π_2' memetakan f_2 ke $f_7 = (CH, CH, CH, CH, CH, CNO_2)$ yang diperoleh dengan cara yaitu :

$$f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ CNO_2 & CH & CH & CH & CH & CH \end{bmatrix}$$

$$\pi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi_2'(f_2(1)) = f_2(\pi_2(1)) = f_2(2) = CH$$

$$\pi_2'(f_2(2)) = f_2(\pi_2(2)) = f_2(3) = CH$$

$$\pi_2'(f_2(3)) = f_2(\pi_2(3)) = f_2(4) = CH$$

$$\pi_2'(f_2(4)) = f_2(\pi_2(4)) = f_2(5) = CH$$

$$\pi_2'(f_2(5)) = f_2(\pi_2(5)) = f_2(6) = CH$$

$$\pi_2'(f_2(6)) = f_2(\pi_2(6)) = f_2(1) = CNO_2$$

Jadi $\pi_2'(f_2) = (CH, CH, CH, CH, CH, CNO_2) = f_7$

Dengan cara yang sama maka diperoleh permutasi-permutasi $\pi' \in G'$ dihimpunan C. Keseluruhan permutasi $\pi' \in G'$ dapat dilihat pada Lampiran C. Menurut **Definisi 2.10**, dari permutasi-permutasi $\pi' \in G'$ dapat diperoleh karakter permutasi $\pi' \in G'$ maupun penstabil $f \in C$.

Karakter permutasi $\pi' \in G'$ adalah himpunan semua titik-titik tetap dari permutasi $\pi' \in G'$. Dari Lampiran C, dapat diperoleh titik-titik tetap dari permutasi $\pi' \in G'$ pada masing-masing kolom yang ditandai dengan tanda *. Sehingga karakter permutasi $\pi' \in G'$ di himpunan C yaitu sebagai berikut :

1. $\mathrm{Fix}\left(\pi_1'\right)=\{f_1, f_2, f_3 \dots, f_{64}\}$

   dan $\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_1'\right)\right|=64$

2. $\mathrm{Fix}\left(\pi_2'\right)=\{f_1, f_{64}\}$

   dan $\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_2'\right)\right|=2$

3. $\mathrm{Fix}\left(\pi_3'\right)=\{f_1, f_{28}, f_{37}, f_{64}\}$

   dan $\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_3'\right)\right|=4$

4. $\mathrm{Fix}\left(\pi_4'\right)=\{f_1, f_{10}, f_{15}, f_{19}, f_{46}, f_{50}, f_{55}, f_{64}\}$

   dan $\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_4'\right)\right|=8$

5. $\mathrm{Fix}\left(\pi_5'\right)=\{f_1, f_{28}, f_{37}, f_{64}\}$

   dan $\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_5'\right)\right|=4$

6. $\mathrm{Fix}\left(\pi_6'\right)=\{f_1, f_{64}\}$

   dan $\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_6'\right)\right|=2$

7. $\mathrm{Fix}\left(\pi_7'\right)=\{f_1, f_2, f_5, f_{10}, f_{16}, f_{18}, f_{26}, f_{28}, f_{37}, f_{39}, f_{47}, f_{49}, f_{55}, f_{60}, f_{63}, f_{64}\}$

   dan $\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_7'\right)\right|=16$

8. $\mathrm{Fix}\left(\pi_8'\right)=\{f_1, f_3, f_6, f_9, f_{15}, f_{21}, f_{23}, f_{28}, f_{37}, f_{42}, f_{44}, f_{50}, f_{56}, f_{59}, f_{62}, f_{64}\}$

dan $\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_8'\right)\right|=16$

9. $\mathrm{Fix}\left(\pi_9'\right)=\{f_1,f_4,f_7,f_{11},f_{14},f_{19},f_{28},f_{32},f_{33},f_{37},f_{46},f_{51},f_{54},f_{58},f_{61},f_{64}\}$

dan $\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_9'\right)\right|=16$

10. $\mathrm{Fix}\left(\pi_{10}'\right)=\{f_1,f_{12},f_{15},f_{17},f_{48},f_{50},f_{53},f_{64}\}$

dan $\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_{10}'\right)\right|=8$

11. $\mathrm{Fix}\left(\pi_{11}'\right)=\{f_1,f_8,f_{19},f_{20},f_{45},f_{46},f_{57},f_{64}\}$

dan $\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_{11}'\right)\right|=8$

12. $\mathrm{Fix}\left(\pi_{12}'\right)=\{f_1,f_{10},f_{13},f_{22},f_{43},f_{52},f_{55},f_{64}\}$

dan $\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_{12}'\right)\right|=8$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}\sum_{\pi'\in G'}\left|\mathrm{Fix}(\pi')\right| &= \left|\mathrm{Fix}\left(\pi_1'\right)\right|+\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_2'\right)\right|+\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_3'\right)\right|+\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_4'\right)\right|+\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_5'\right)\right|+\\ &\quad \left|\mathrm{Fix}\left(\pi_6'\right)\right|+\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_7'\right)\right|+\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_8'\right)\right|+\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_9'\right)\right|+\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_{10}'\right)\right|+\\ &\quad \left|\mathrm{Fix}\left(\pi_{11}'\right)\right|+\left|\mathrm{Fix}\left(\pi_{12}'\right)\right|\\ &= 64+2+4+8+4+2+16+16+16+8+8+8\\ &= 156\end{aligned}$$

Setelah dihitung $\sum_{\pi'\in G'}\left|\mathrm{Fix}(\pi')\right|$, sekarang akan dihitung $\sum_{f\in C}\left|\mathrm{Stab}(f)\right|$. Sebenarnya untuk menghitung kelas ekuivalensi dari C terhadap G' dapat dihitung salah satunya saja, karena hasil keduanya sama, tetapi disini akan dihitung keduaduanya. Penstabil f di G' adalah himpunan semua permutasi di G' yang mengakibatkan f sebagai titik tetap. Penstabil $f \in C$ di G' yaitu Stab (f), dapat dilihat pada Lampiran D, sehingga didapatkan

$$\sum_{f \in C} |\text{Stab}(f)| = |\text{Stab}(f_1)| + ... + |\text{Stab}(f_{64})|$$

$$= 12 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 6 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 6 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 12$$

$$= 156$$

Jadi benar bahwa $\sum_{\pi' \in G'} |\text{Fix}(\pi')| = \sum_{f \in C} |\text{Stab}(f)|$

Sehingga banyaknya kelas ekuivalensi dari C terhadap G' berdasarkan persamaan 2.2 yaitu :

$$n = \frac{1}{|G'|} \sum_{\pi' \in G'} |\text{Fix}(\pi')| = \frac{1}{|G'|} \sum_{f \in C} |\text{Stab}(f)|$$

$$= \frac{1}{12}.156$$

$$= 13$$

Diperoleh sebanyak 13 kelas ekuivalensi dari C terhadap G', dimana untuk menentukan kelas-kelas ekuivalensi pada Teorema Burnside dapat diperoleh dengan melihat tabel permutasi $\pi' \in G'$ di himpunan C (Lampiran C). Misal untuk $f_1 \in C$, bayangan f_1 oleh setiap permutasi G' adalah f_1 sendiri, sehingga hanya f_1 berada dalam kelompok 1. Untuk $f_2 \in C$, oleh permutasi $\pi' \in G'$, f_2 dipetakan sebagai berikut:

f_2 bayangan dari f_2 oleh permutasi π_1'

f_7 bayangan dari f_2 oleh permutasi π_2'

f_6 bayangan dari f_2 oleh permutasi $\pi_3^{'}$

f_5 bayangan dari f_2 oleh permutasi $\pi_4^{'}$

f_4 bayangan dari f_2 oleh permutasi $\pi_5^{'}$

f_3 bayangan dari f_2 oleh permutasi $\pi_6^{'}$

f_2 bayangan dari f_2 oleh permutasi $\pi_7^{'}$

f_4 bayangan dari f_2 oleh permutasi $\pi_8^{'}$

f_6 bayangan dari f_2 oleh permutasi $\pi_9^{'}$

f_7 bayangan dari f_2 oleh permutasi $\pi_{10}^{'}$

f_3 bayangan dari f_2 oleh permutasi $\pi_{11}^{'}$

f_5 bayangan dari f_2 oleh permutasi $\pi_{12}^{'}$

Jadi f_2 oleh permutasi $\pi^{'} \in G^{'}$ dipetakan ke f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 dan f_2 sendiri, sehingga $f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ berada dalam satu kelas ekuivalensi. Dengan cara yang sama diperoleh kelas-kelas ekuivalensi yang berbeda satu sama lain yaitu :

Kelas ekuivalensi ke satu : f_1

Kelas ekuivalensi ke dua : $f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$

Kelas ekuivalensi ke tiga : $f_8, f_{12}, f_{13}, f_{17}, f_{20}, f_{22}$

Kelas ekuivalensi ke empat : $f_9, f_{11}, f_{14}, f_{16}, f_{18}, f_{21}$

Kelas ekuivalensi ke lima : f_{10}, f_{15}, f_{19}

Kelas ekuivalensi ke enam : $f_{23}, f_{26}, f_{32}, f_{33}, f_{39}, f_{42}$

Kelas ekuivalensi ke tujuh : $f_{24}, f_{25}, f_{27}, f_{29}, f_{30}, f_{31}, f_{34}, f_{35}, f_{36}, f_{38}, f_{40}, f_{41}$

Kelas ekuivalensi ke delapan : f_{28}, f_{37}

Kelas ekuivalensi ke sembilan: $f_{43}, f_{45}, f_{48}, f_{52}, f_{53}, f_{57}$

Kelas ekuivalensi ke sepuluh : $f_{44}, f_{47}, f_{49}, f_{51}, f_{54}, f_{56}$

Kelas ekuivalensi ke sebelas : f_{46}, f_{50}, f_{55}

Kelas ekuivalensi ke duabelas: $f_{58}, f_{59}, f_{60}, f_{61}, f_{62}, f_{63}$

Kelas ekuivalensi ke tigabelas: f_{64}

Sehingga terdapat 13 pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain.

4.3 Aplikasi Teorema Polya

Dengan menandai puncak-puncak segienam beraturan (bentuk cincin karbon dengan 6 atom C secara geometri) maka diperoleh himpunan $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Pada himpunan A didefinisikan suatu grup G yang merupakan himpunan semua rotasi dan refleksi dari segienam beraturan tersebut, dimana grup yang diperoleh merupakan grup permutasi pada himpunan A. Berdasarkan **Definisi 2.7**, dapat diperoleh tipe cycle dari permutasi-permutasi $\pi \in G$. Bentuk permutasi dan tipe cycle dari masing-masing permutasi di G yaitu :

$\pi_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$, dengan tipe cycle [600000] yang diperoleh dengan cara, sebanyak 6 cycle dengan panjang 1 yaitu cycle (1), (2), (3), (4), (5), dan (6), sedangkan untuk cycle dengan panjang 2, 3, 4, 5 dan 6 tidak ada sehingga banyaknya cycle tersebut nol. Didapatkan $a_1 = 6, a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$. Jadi tipe cycle $\pi_1 = [600000]$. Dengan cara yang sama diperoleh tipe cycle dari masing – masing permutasi dalam grup G yaitu:

$\pi_2 = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, dengan tipe cycle [000001]

$\pi_3 = (1, 3, 5)(2, 4, 6)$, dengan tipe cycle [002000]

$\pi_4 = (1, 4)(2, 5)(3, 6)$, dengan tipe cycle [030000]

$\pi_5 = (1, 5, 3)(2, 6, 4)$, dengan tipe cycle [002000]

$\pi_6 = (1, 6, 5, 4, 3, 2)$, dengan tipe cycle [000001]

$\pi_7 = (1)(2, 6)(3, 5)(4)$, dengan tipe cycle [220000]

$\pi_8 = (1, 3)(2)(4, 6)(5)$, dengan tipe cycle [220000]

$\pi_9 \;= (1, 5)\,(2, 4)\,(3)\,(6)$, dengan tipe cycle [220000]

$\pi_{10} = (1, 6)\,(2, 5)\,(3, 4)$, dengan tipe cycle [030000]

$\pi_{11} = (1, 2)\,(3, 6)\,(4, 5)$, dengan tipe cycle [030000]

$\pi_{12} = (1, 4)\,(2, 3)\,(5, 6)$, dengan tipe cycle [030000]

Dari tipe cycle permutas-permutasi di G, diperoleh indeks siklik $\forall \pi \in G$ yaitu :

$$Z(\pi_1 ; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^{\,6}\, x_2^{\,0}\, x_3^{\,0}\, x_4^{\,0}\, x_5^{\,0}\, x_6^{\,0}$$
$$= x_1^{\,6}$$

$$Z(\pi_2 ; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^{\,0}\, x_2^{\,0}\, x_3^{\,0}\, x_4^{\,0}\, x_5^{\,0}\, x_6^{\,1}$$
$$= x_6^{\,1}$$

$$Z(\pi_3 ; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^{\,0}\, x_2^{\,0}\, x_3^{\,2}\, x_4^{\,0}\, x_5^{\,0}\, x_6^{\,0}$$
$$= x_3^{\,2}$$

$$Z(\pi_4 ; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^{\,0}\, x_2^{\,3}\, x_3^{\,0}\, x_4^{\,0}\, x_5^{\,0}\, x_6^{\,0}$$
$$= x_2^{\,3}$$

$$Z(\pi_5 ; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^{\,0}\, x_2^{\,0}\, x_3^{\,2}\, x_4^{\,0}\, x_5^{\,0}\, x_6^{\,0}$$
$$= x_3^{\,2}$$

$$Z(\pi_6 ; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^{\,0}\, x_2^{\,0}\, x_3^{\,0}\, x_4^{\,0}\, x_5^{\,0}\, x_6^{\,1}$$
$$= x_6^{\,1}$$

$$Z(\pi_7 ; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^{\,2}\, x_2^{\,2}\, x_3^{\,0}\, x_4^{\,0}\, x_5^{\,0}\, x_6^{\,0}$$
$$= x_1^{\,2}\, x_2^{\,2}$$

$$Z(\pi_8 ; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^{\,2}\, x_2^{\,2}\, x_3^{\,0}\, x_4^{\,0}\, x_5^{\,0}\, x_6^{\,0}$$
$$= x_1^{\,2}\, x_2^{\,2}$$

$$Z(\pi_9 ; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^{\,2}\, x_2^{\,2}\, x_3^{\,0}\, x_4^{\,0}\, x_5^{\,0}\, x_6^{\,0}$$

$$= x_1^{\,2} x_2^{\,2}$$

$$Z(\pi_{10}; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^{\,0} x_2^{\,3} x_3^{\,0} x_4^{\,0} x_5^{\,0} x_6^{\,0}$$

$$= x_2^{\,3}$$

$$Z(\pi_{11}; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^{\,0} x_2^{\,3} x_3^{\,0} x_4^{\,0} x_5^{\,0} x_6^{\,0}$$

$$= x_2^{\,3}$$

$$Z(\pi_{12}; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^{\,0} x_2^{\,3} x_3^{\,0} x_4^{\,0} x_5^{\,0} x_6^{\,0}$$

$$= x_2^{\,3}$$

Selanjutnya, diperoleh indeks siklik grup G yaitu

$$Z(G; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} (\pi; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$= \frac{1}{12}\left(x_1^{\,6} + x_6^{\,1} + x_3^{\,2} + x_2^{\,3} + x_3^{\,2} + x_6^{\,1} + x_1^{\,2} x_2^{\,2} + x_1^{\,2} x_2^{\,2} + x_1^{\,2} x_2^{\,2} + x_2^{\,3} + x_2^{\,3} + x_2^{\,3}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(x_1^{\,6} + 3x_1^{\,2} x_2^{\,2} + 4x_2^{\,3} + 2x_3^{\,2} + 2x_6^{\,1}\right)$$

Diketahui $Y = \{H, NO_2\}$, sehingga $r = 2$. Dengan $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = r = 2$, maka banyaknya kelas ekuivalensi di C terhadap G yaitu :

$$n = Z(G; 2,2,2,2,2,2) = \frac{1}{12}\left(2^6 + 3.2^2.2^2 + 4.2^3 + 2.2^2 + 2.2^1\right)$$

$$= \frac{1}{12}(156)$$

$$= 13$$

Dengan kata lain, terdapat 13 pola molekul cincin karbon yang berbeda satu sama lain.

4.4 Pembahasan

Pola molekul cincin karbon (C) yang masing-masing atom C-nya diikat dengan salah satu dari atom H atau molekul NO_2 didapatkan 64 pola molekul yang terbentuk tanpa melihat segi kesamaan antar pola molekul. Dengan mendaftar atau mencacah satu persatu pola molekul yang terbentuk dan mengelompokkan dalam satu kelompok pola molekul yang sama, didapatkan 13 pola molekul cincin karbon yang berbeda satu sama lain. Menghitung secara langsung pola molekul yang berbeda satu sama lain, diperlukan ketelitian terutama pada saat mengelompokkan pola molekul yang sama dalam satu kelompok.

Dengan mengaplikasikan Teorema Burnside dan Teorema Polya juga didapatkan 13 pola molekul cincin karbon yang berbeda satu sama lain. Hal ini menunjukkan bahwa kedua teorema tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan enumerasi pola molekul dengan tepat atau valid karena keduanya dalam penghitungan menggunakan langkah-langkah yang kebenarannya telah dibuktikan.

Karena kedua teorema memberikan hasil yang sama maka untuk membandingkan efesiensi aplikasi kedua teorema dengan mengadakan pengamatan apakah teorema tersebut mudah diterapkan untuk menjawab permasalahandalam penelitian ini dengan tepat.

Hasil yang diperoleh dengan Teorema Burnside selain didapatkan sebanyak 13 pola molekul cincin karbon yang berbeda satu sama lain dari pengikatan masing-masing 6 atom C dengan salah satu dari atom H atau molekul NO_2 juga dapat diketahui apa saja 13 pola molekul yang terbentuk tersebut. Hal ini dikarenakan langkah pertama (menentukan himpunan C) pada Teorema Burnside harus menentukan keseluruhan pola molekul yang mungkin dapat dibentuk kemudian dari pola molekul yang terbentuk, oleh permutasi yang didefinisikan pada himpunan C dikelompokkan dalam kelas-kelas ekuivalensi. Sehingga dengan melihat Lampiran C (tabel permutasi di himpunan C) dapat diketahui apa saja pola molekul yang berada dalam kelas ekuivalensi yang sama . Sedangkan untuk Teorema Polya hanya diperoleh banyaknya pola molekul cincin karbon yang berbeda satu sama lain, tanpa diketahui apa saja pola molekul yang terbentuk tersebut. Hal ini dikerenakan Teorema Polya dalam menentukan banyaknya pola molekul yang berbeda satu sama lain tanpa harus menentukan satu per satu pola molekul yang mungkin dapat dibentuk.

Permasalahan pada penelitian ini, yaitu hanya menentukan banyaknya pola molekul cincin karbon yang berbeda satu sama lain tanpa perlu diketahui apa saja pola molekul cincin karbon yang berbeda tersebut. Sehingga penentuan banyaknya pola molekul yang berbeda satu sama lain dengan menggunakan Teorema Polya lebih efisien daripada dengan menggunakan Teorema Burnside. Karena dengan Teorema Polya dapat dengan mudah dan cepat untuk menentukan banyaknya pola molekul cincin karbon yang berbeda satu sama lain tanpa harus mendaftar semua kemungkinan pola molekul yang dapat dibentuk.

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Beberapa kesimpulan yang dapat diambil dalam penelitian ini adalah :

1. Diperoleh secara keseluruhan sebanyak 2^6 pola molekul cincin karbon (C) dari pengikatan cincin karbon (C) dengan 6 atom C oleh atom H atau molekul NO_2.
2. Dengan mengaplikasikan Teorema Burnside, dari pengikatan cincin karbon (C) dengan 6 atom C oleh atom H atau molekul NO_2 didapatkan 13 pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain.
3. Dengan mengaplikasikan Teorema Polya, dari pengikatan cincin karbon (C) dengan 6 atom C oleh atom H atau molekul NO_2 didapatkan 13 pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain.
4. Penentuan banyaknya pola molekul cincin karbon (C) yang berbeda satu sama lain dengan menerapkan Teorema Polya lebih efesien dibandingkan dengan menggunakan Teorema Burnside, karena dengan Teorema Polya diperoleh banyaknya pola molekul berbeda dengan mudah dan cepat tanpa harus mendaftar semua kemungkinan pola molekul yang dapat dibentuk.

5.2 Saran

Saran yang dapat dikemukakan dari hasil penelitian ini yaitu :

1. Pada penelitian berikutnya dapat ditemukan penerapan Teorema Burnside dan Teorema Polya untuk jumlah atom atau molekul yang berikatan dengan atom C dalam jumlah besar.
2. Dapat ditemukan cara penentuan banyaknya pola molekul cincin karbon yang berbeda satu sama lain dengan metode yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Fessenden, R.J dan Fessenden, J.S. 1997. *Dasar-dasar Kimia Organik*. Jakarta : Binarupa Aksara.

Prihandoko, A.C. 2004. "Pendekatan Identifikasi Logik Dalam Perkuliahan Struktur Aljabar", *Pancaran Pendidikan*. 59(2004), hal . 1 – 12.

__________. 2000. *Struktur Aljabar (Diktat Kuliah)*. Jember : FKIP Universitas Jember.

Retnowati, Priscilla.1999. *Seribu Pena Kimia SMU Kelas* I. Jakarta : Erlangga.

Santosa, R.G. 2003. "Aplikasi Teorema Polya Pada Enumerasi Graf Sederhana", *Integral Majalah Ilmiah Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*. 8(2003), hal. 1-10.

Slamet, S. dan Makaliwe, H. 1991. *Matematika Kombinatorik*. Edisi Pertama. Jakarta: PT Elex Media Komputindo.

Sudarmo, Unggul. 2004. *Kimia SMA* 3. Jakarta : Erlangga.

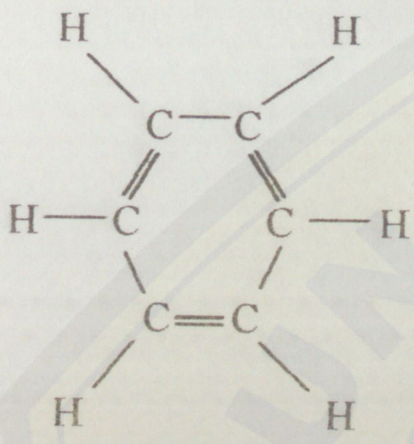
Wahyudin. 1989. *Aljabar Modern*. Edisi Pertama. Bandung: Tarsito.

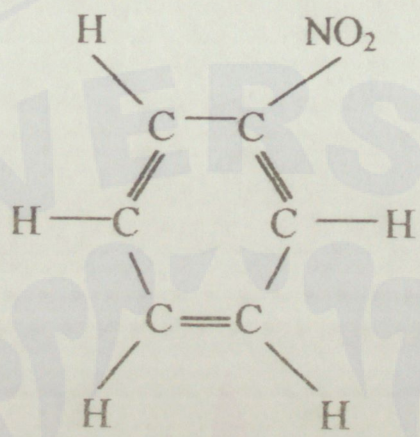
Wikipedia. *Isomer Struktural*.(http://www.chem-is-try.org).Diakses tanggal 12 mei 2006

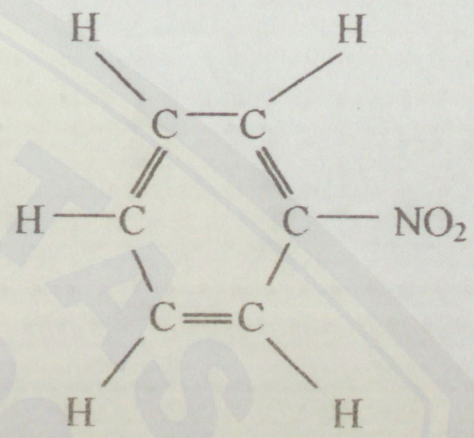
LAMPIRAN

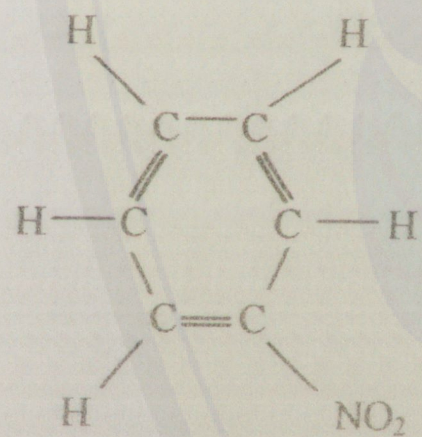
Lampiran A.

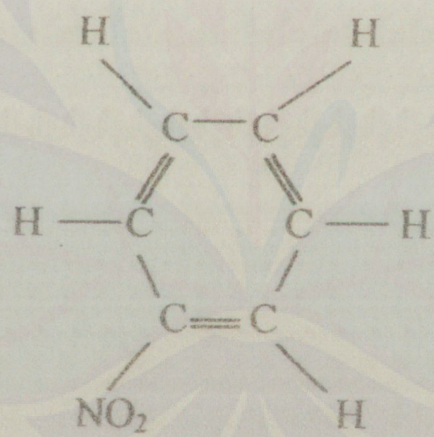
Pola-pola Molekul Cincin Karbon (C)

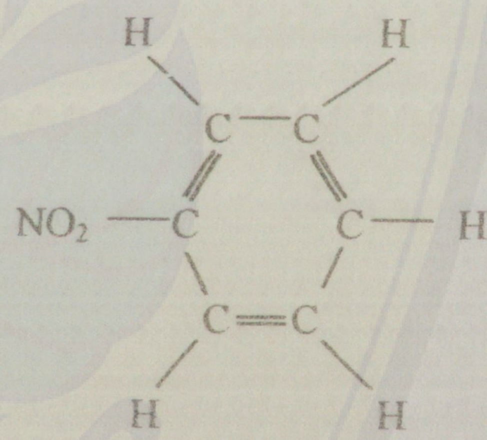

(f_1)

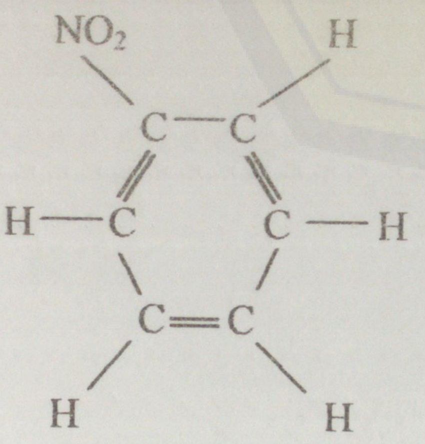

(f_2)

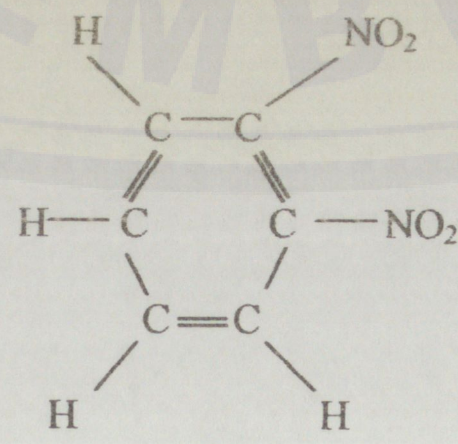

(f_3)

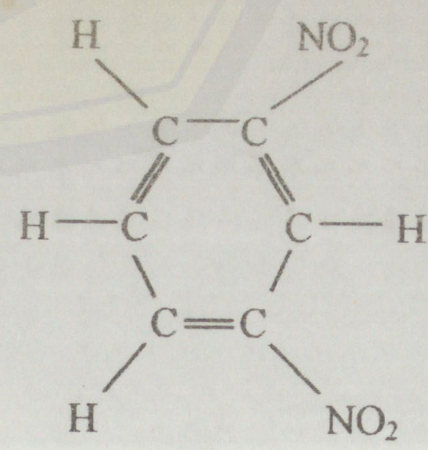

(f_4)

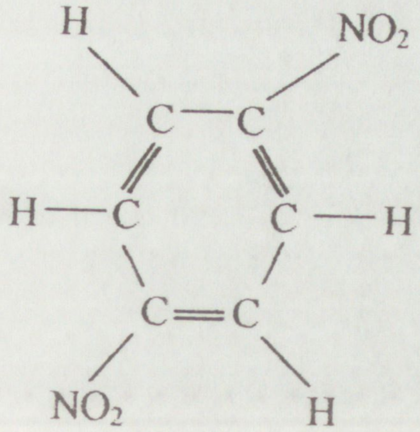

(f_5)


(f_6)

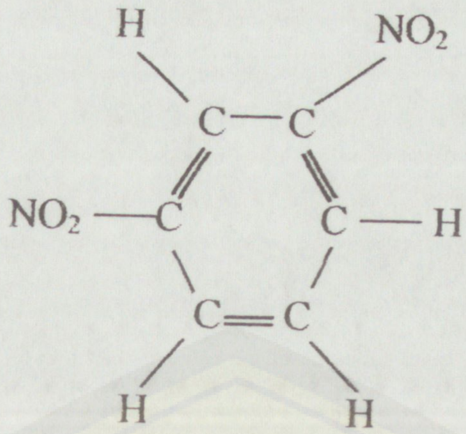

(f_7)


(f_8)

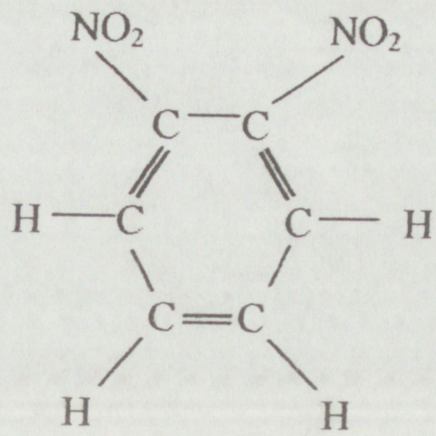

(f_9)



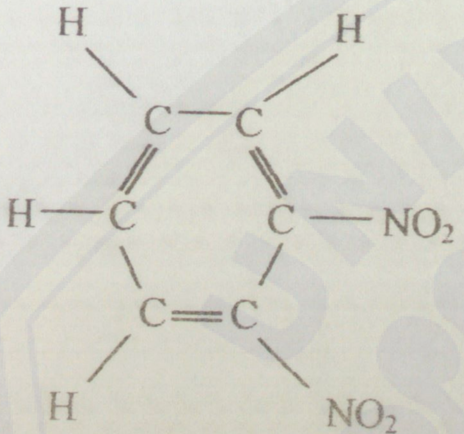
(f_{10})



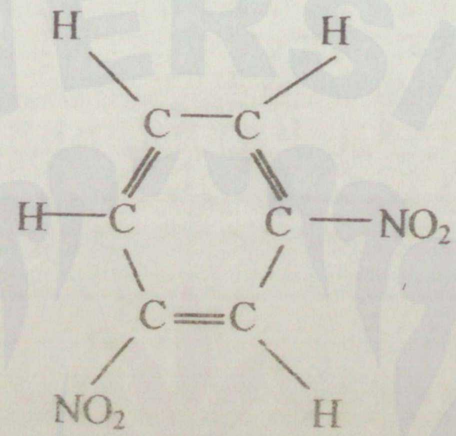
(f_{11})



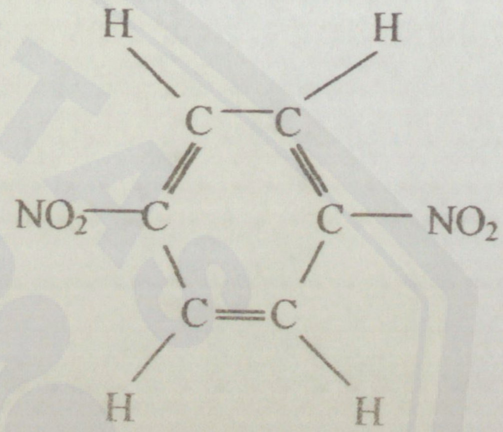
(f_{12})



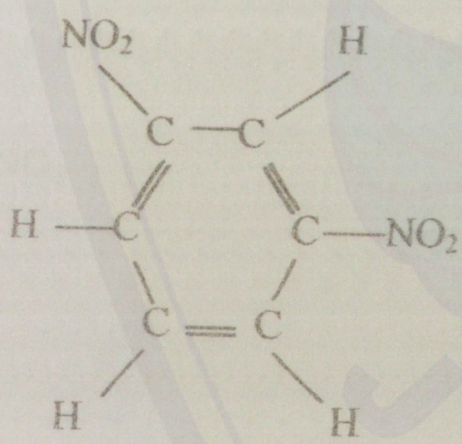
(f_{13})



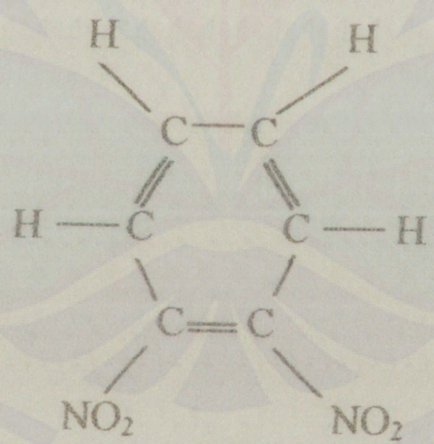
(f_{14})



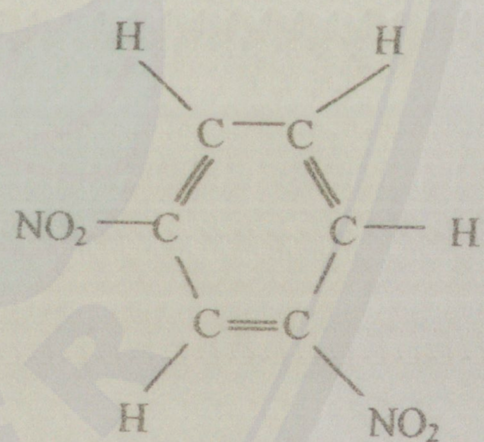
(f_{15})



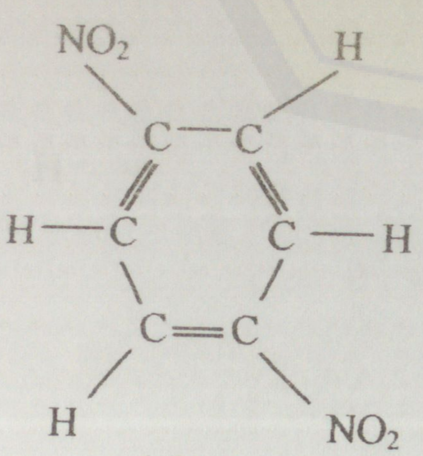
(f_{16})



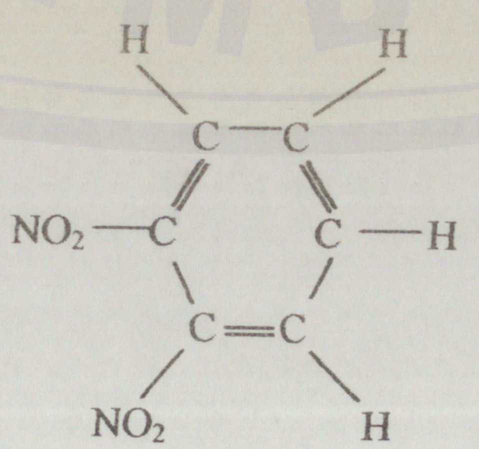
(f_{17})



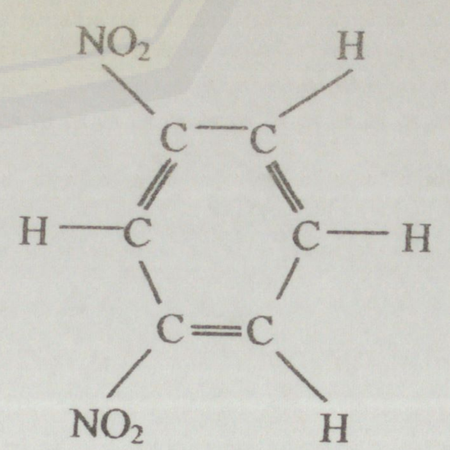
(f_{18})



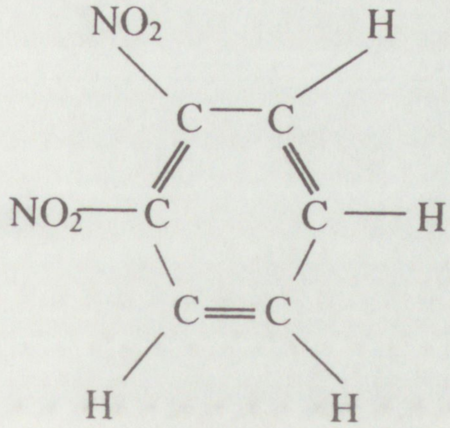
(f_{19})

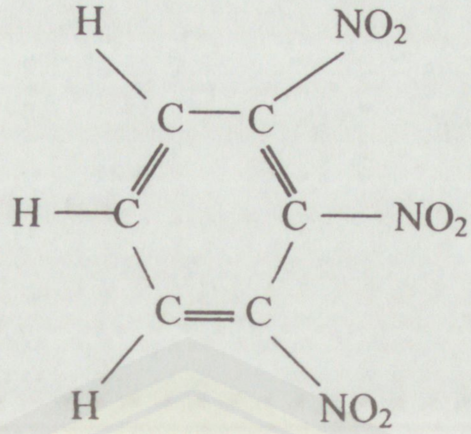


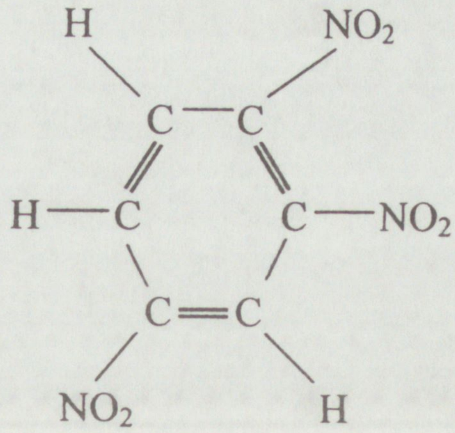
(f_{20})

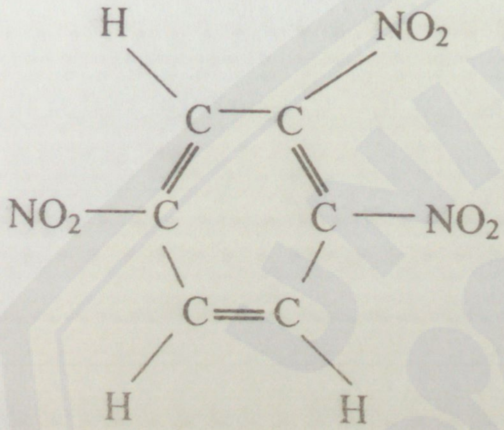


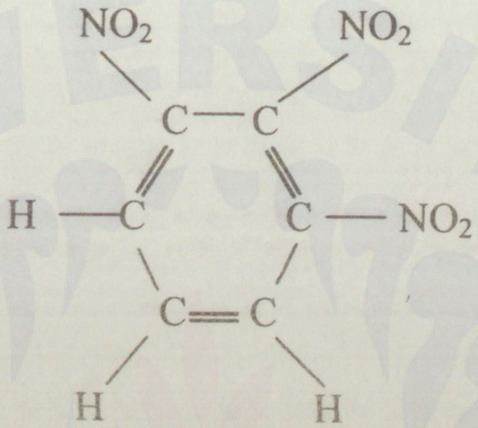
(f_{21})

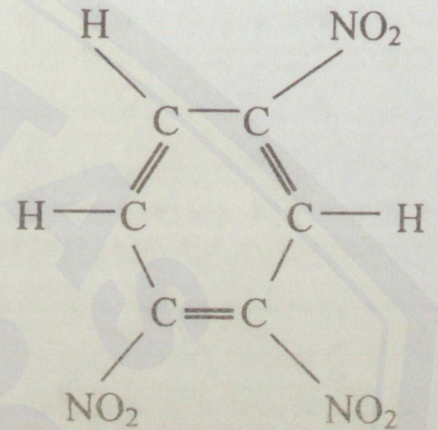

(f_{22})

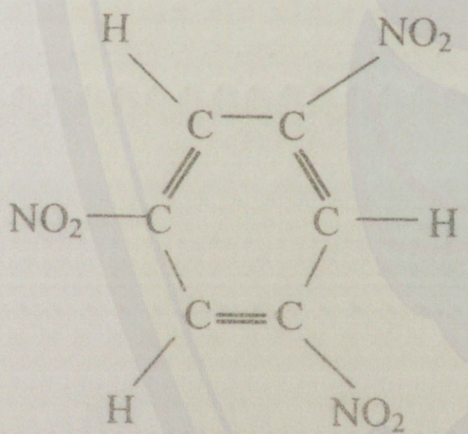

(f_{23})

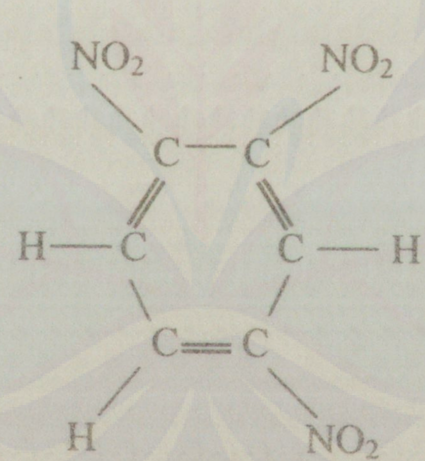

(f_{24})

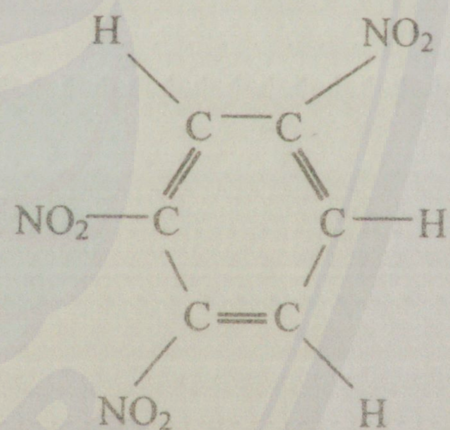

(f_{25})

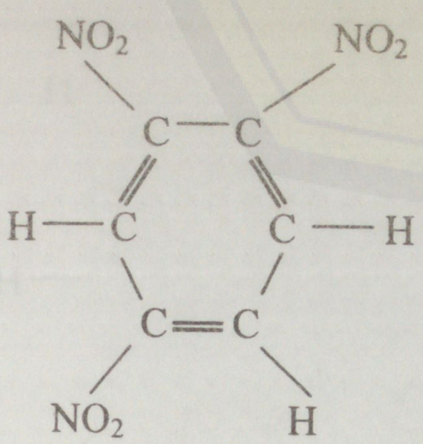

(f_{26})

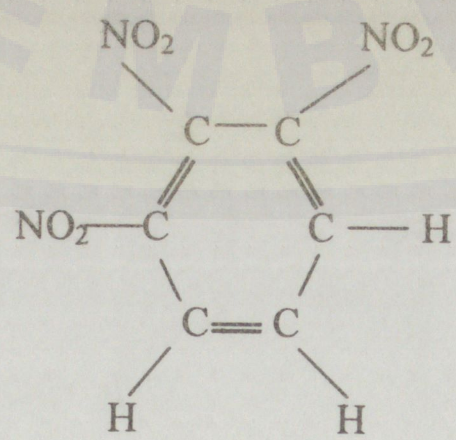

(f_{27})

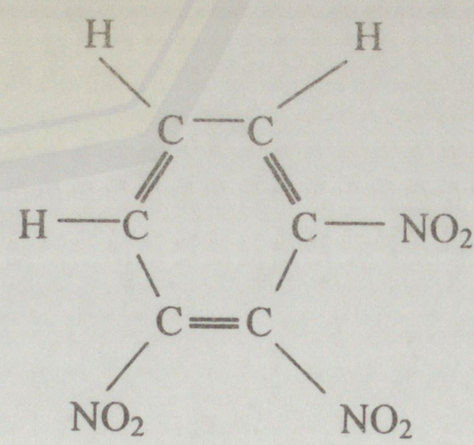

(f_{28})

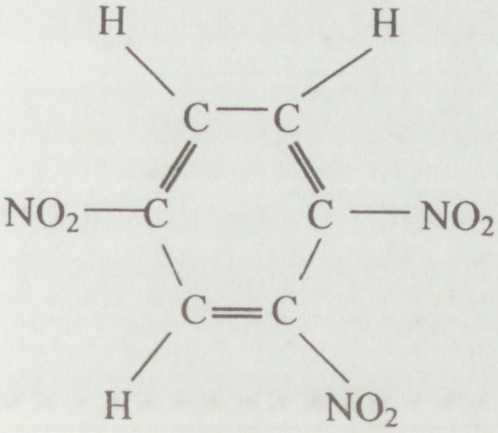

(f_{29})


(f_{30})

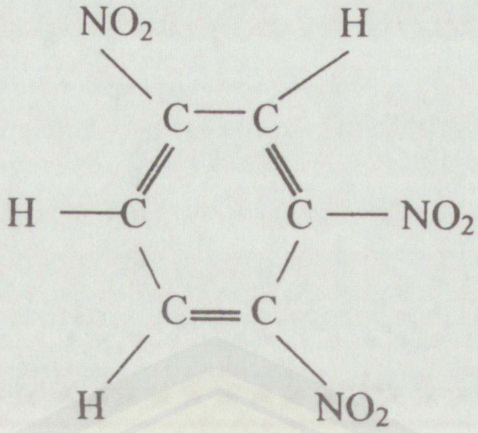

(f_{31})


(f_{32})

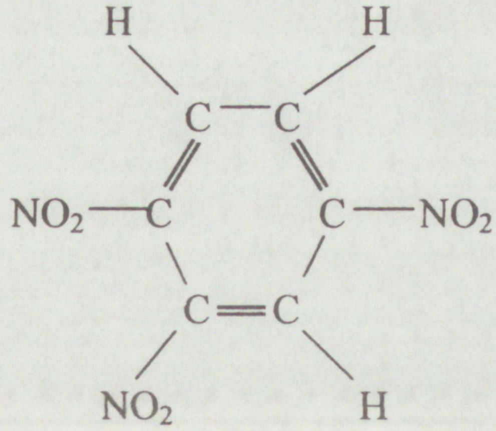

(f_{33})



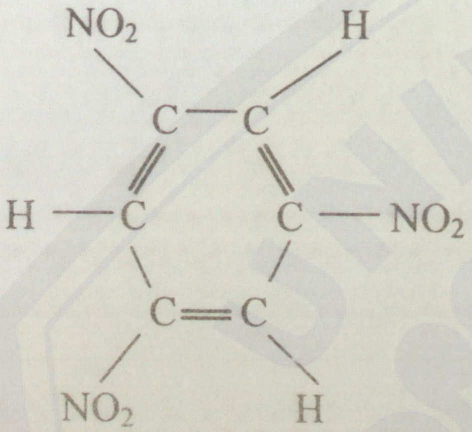
(f_{34})



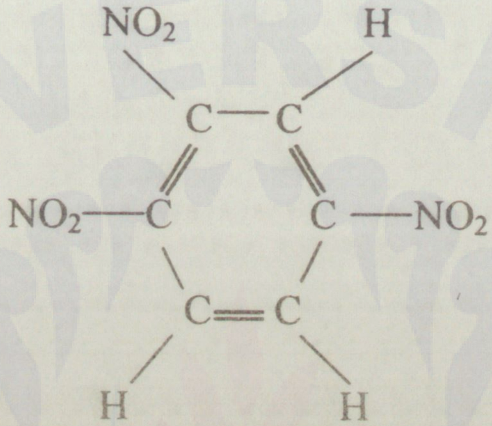
(f_{35})



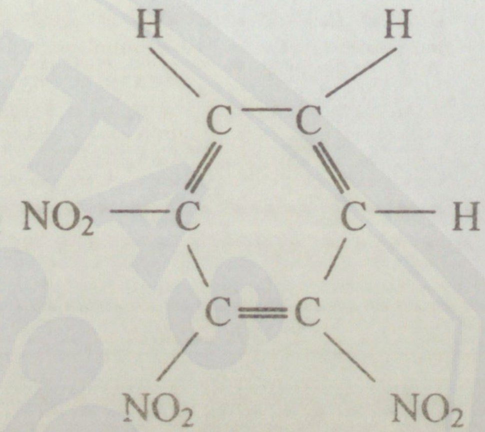
(f_{36})



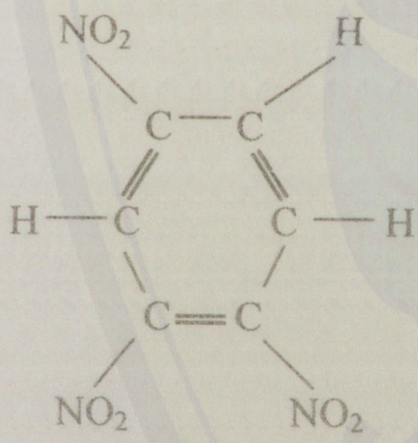
(f_{37})



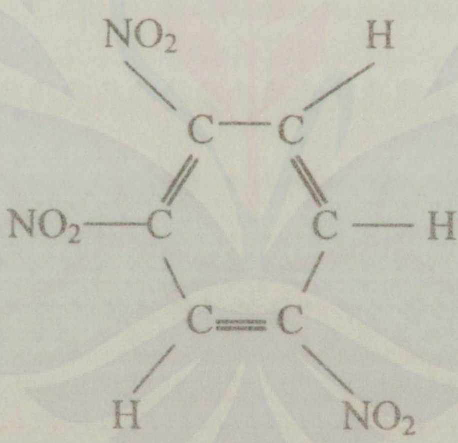
(f_{38})



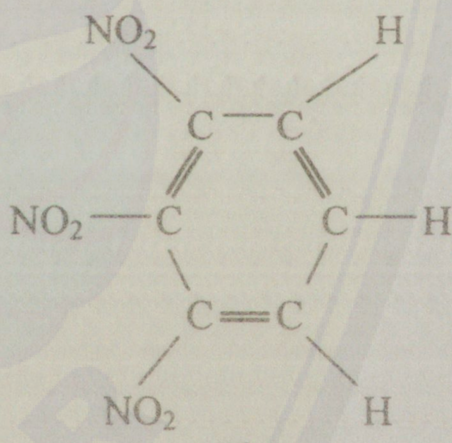
(f_{39})



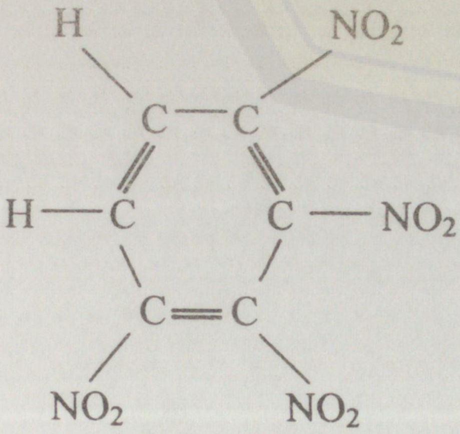
(f_{40})



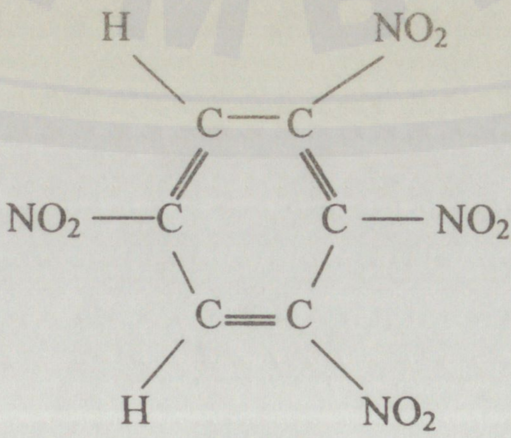
(f_{41})



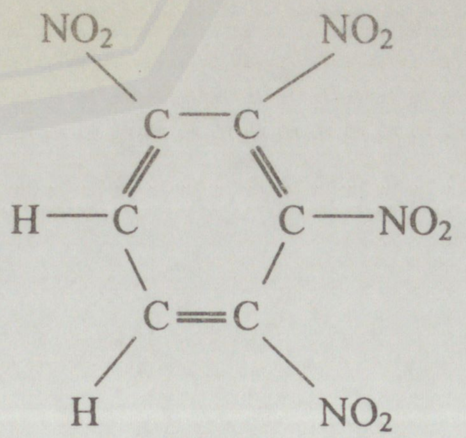
(f_{42})



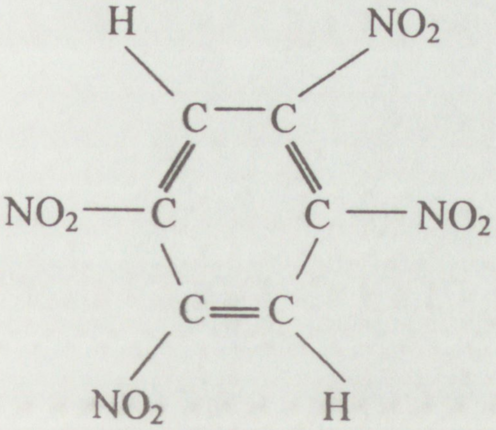
(f_{43})



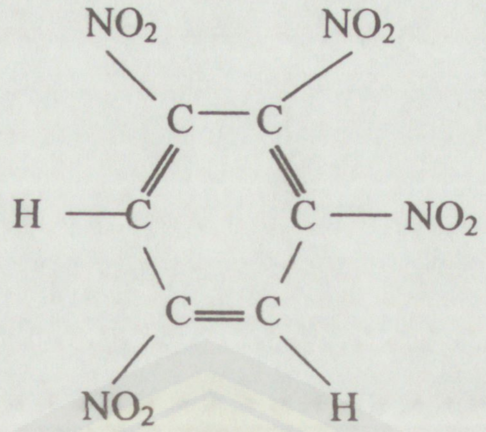
(f_{44})



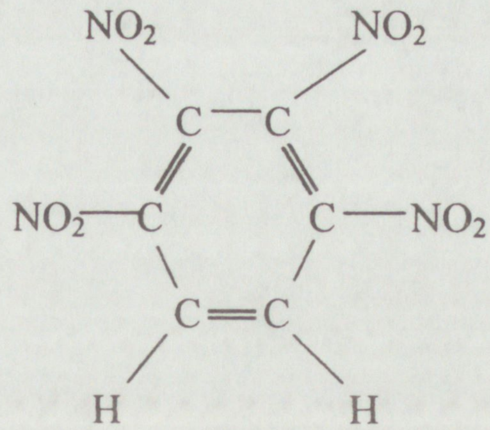
(f_{45})



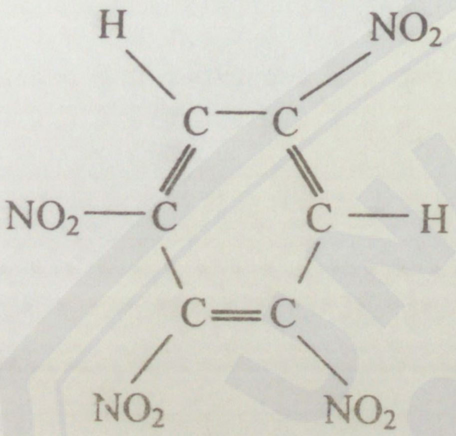
(f_{46})



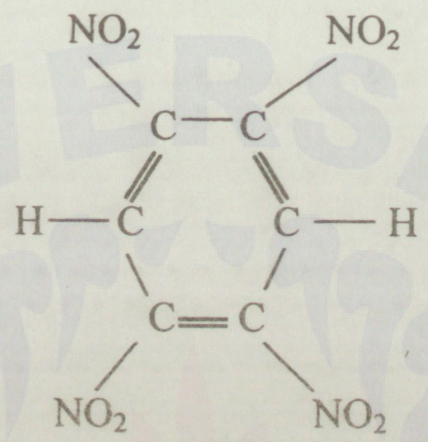
(f_{47})



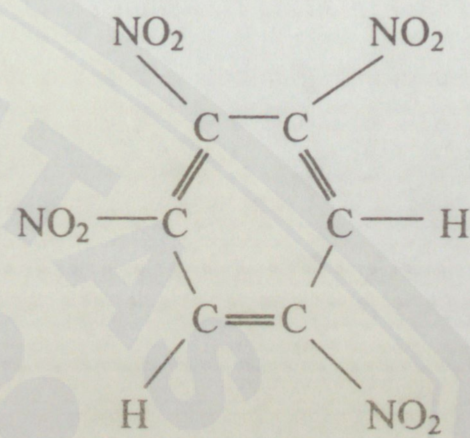
(f_{48})



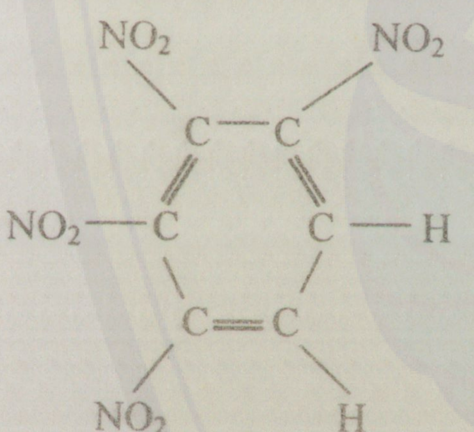
(f_{49})



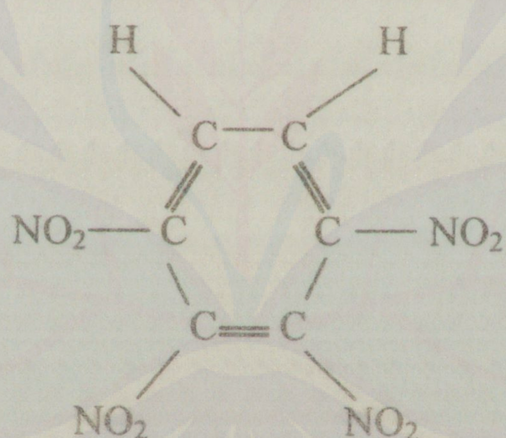
(f_{50})



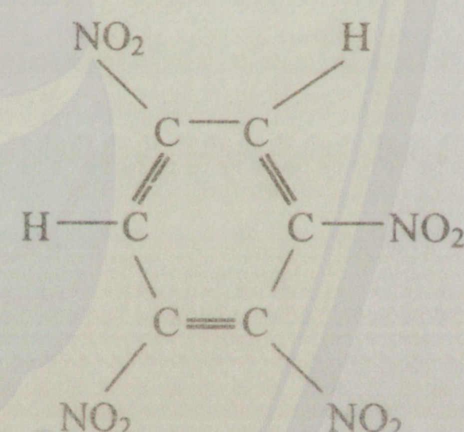
(f_{51})



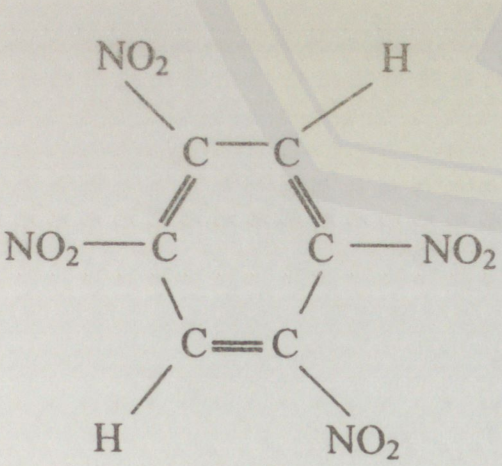
(f_{52})



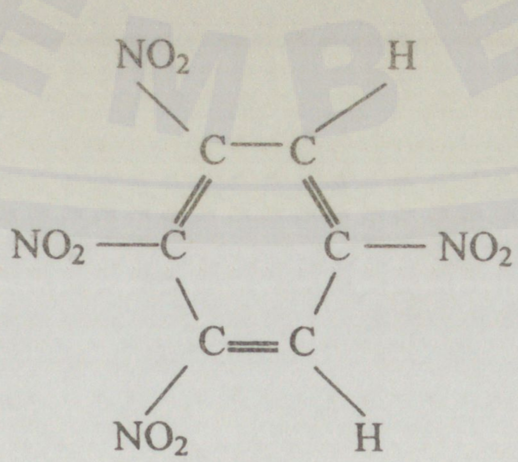
(f_{53})



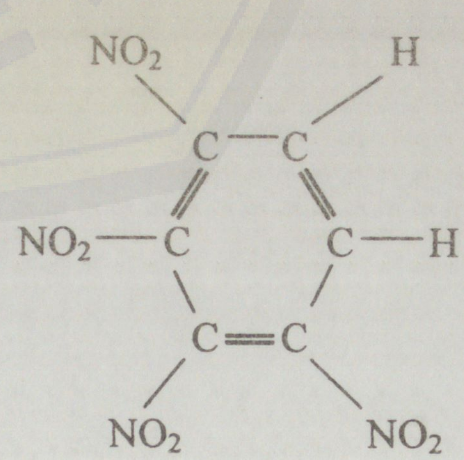
(f_{54})



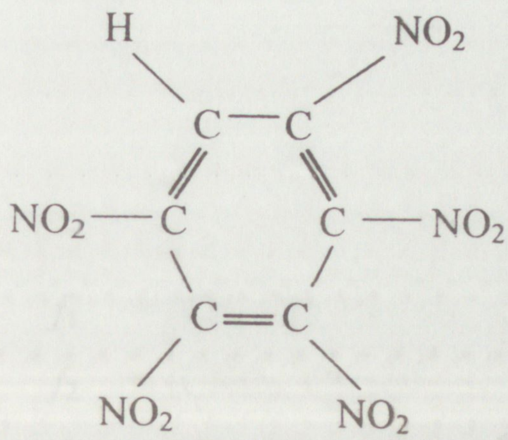
(f_{55})



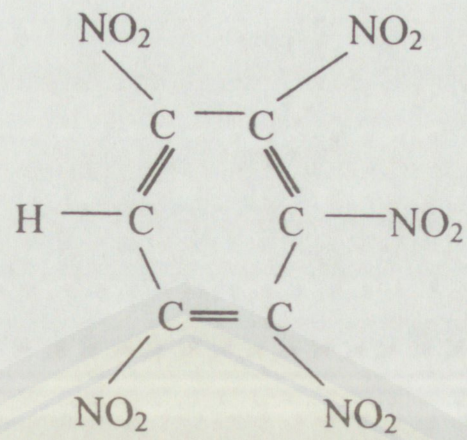
(f_{56})



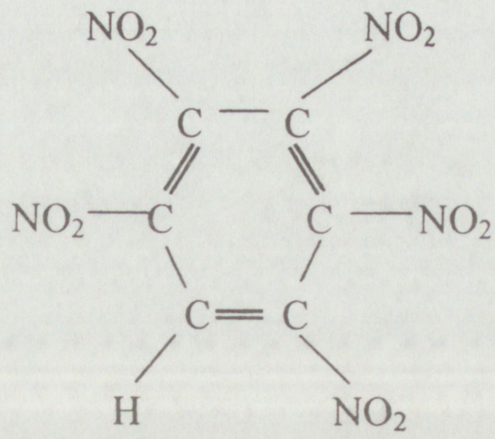
(f_{57})



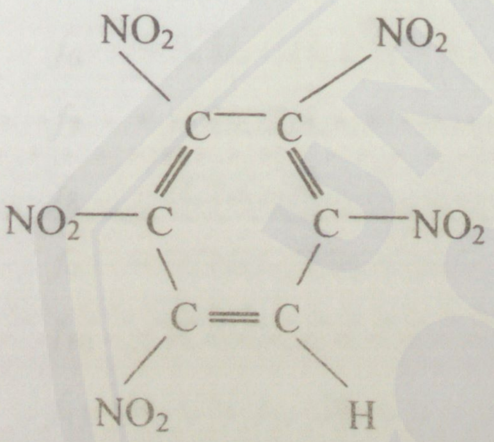
(f_{58})



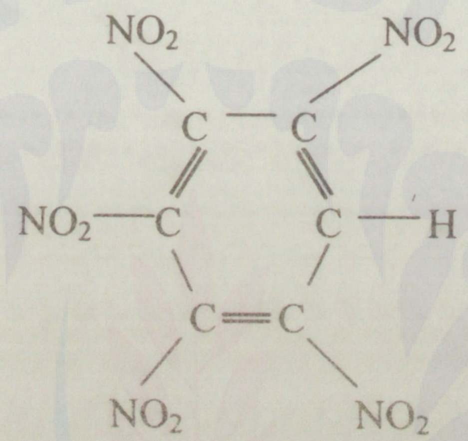
(f_{59})



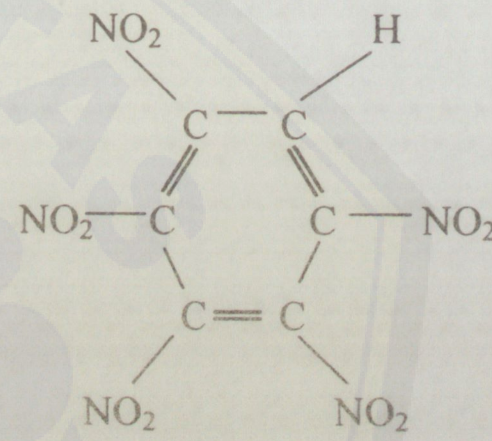
(f_{60})



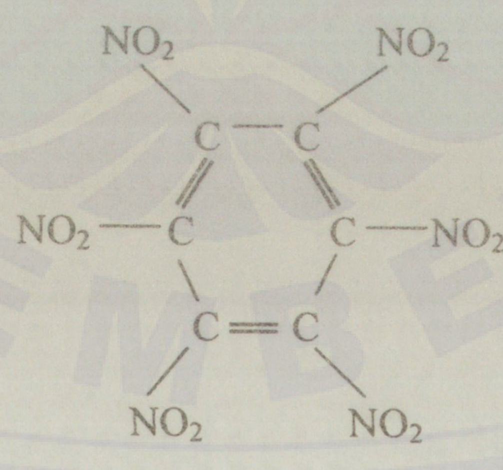
(f_{61})



(f_{62})



(f_{63})



(f_{64})

Lampiran B.

Elemen-elemen Himpunan C

C = $\{f_1, f_2, \ldots, f_{64}\}$ dengan

f_1 = (CH, CH, CH, CH, CH, CH)

f_2 = (CNO_2, CH, CH, CH, CH, CH)

f_3 = (CH, CNO_2, CH, CH, CH, CH)

f_4 = (CH, CH, CNO_2, CH, CH, CH)

f_5 = (CH, CH, CH, CNO_2, CH, CH)

f_6 = (CH, CH, CH, CH, CNO_2, CH)

f_7 = (CH, CH, CH, CH, CH, CNO_2)

f_8 = (CNO_2, CNO_2, CH, CH, CH, CH)

f_9 = (CNO_2, CH, CNO_2, CH, CH, CH)

f_{10} = (CNO_2, CH, CH, CNO_2, CH, CH)

f_{11} = (CNO_2, CH, CH, CH, CNO_2, CH)

f_{12} = (CNO_2, CH, CH, CH, CH, CNO_2)

f_{13} = (CH, CNO_2, CNO_2, CH, CH, CH)

f_{14} = (CH, CNO_2, CH, CNO_2, CH, CH)

f_{15} = (CH, CNO_2, CH, CH, CNO_2, CH)

f_{16} = (CH, CNO_2, CH, CH, CH, CNO_2)

f_{17} = (CH, CH, CNO_2, CNO_2, CH, CH)

f_{18} = (CH, CH, CNO_2, CH, CNO_2, CH)

f_{19} = (CH, CH, CNO_2, CH, CH, CNO_2)

f_{20} = (CH, CH, CH, CNO_2, CNO_2, CH)

f_{21} = (CH, CH, CH, CNO_2, CH, CNO_2)

f_{22} = (CH, CH, CH, CH, CNO_2, CNO_2)

f_{23} = (CNO_2, CNO_2, CNO_2, CH, CH, CH)

f_{24} = (CNO_2, CNO_2, CH, CNO_2, CH, CH)

f_{25} = (CNO_2, CNO_2, CH, CH, CNO_2, CH)

f_{26} = (CNO_2, CNO_2, CH, CH, CH, CNO_2)
f_{27} = (CNO_2, CH, CNO_2, CNO_2, CH, CH)
f_{28} = (CNO_2, CH, CNO_2, CH, CNO_2, CH)
f_{29} = (CNO_2, CH, CNO_2, CH, CH, CNO_2)
f_{30} = (CNO_2, CH, CH, CNO_2, CNO_2, CH)
f_{31} = (CNO_2, CH, CH, CNO_2, CH, CNO_2)
f_{32} = (CNO_2, CH, CH, CH, CNO_2, CNO_2)
f_{33} = (CH, CNO_2, CNO_2, CNO_2, CH, CH)
f_{34} = (CH, CNO_2, CNO_2, CH, CNO_2, CH)
f_{35} = (CH, CNO_2, CNO_2, CH, CH, CNO_2)
f_{36} = (CH, CNO_2, CH, CNO_2, CNO_2, CH)
f_{37} = (CH, CNO_2, CH, CNO_2, CH, CNO_2)
f_{38} = (CH, CNO_2, CH, CH, CNO_2, CNO_2)
f_{39} = (CH, CH, CNO_2, CNO_2, CNO_2, CH)
f_{40} = (CH, CH, CNO_2, CNO_2, CH, CNO_2)
f_{41} = (CH, CH, CNO_2, CH, CNO_2, CNO_2)
f_{42} = (CH, CH, CH, CNO_2, CNO_2, CNO_2)
f_{43} = (CNO_2, CNO_2, CNO_2, CNO_2, CH, CH)
f_{44} = (CNO_2, CNO_2, CNO_2, CH, CNO_2, CH)
f_{45} = (CNO_2, CNO_2, CNO_2, CH, CH, CNO_2)
f_{46} = (CNO_2, CNO_2, CH, CNO_2, CNO_2, CH)
f_{47} = (CNO_2, CNO_2, CH, CNO_2, CH, CNO_2)
f_{48} = (CNO_2, CNO_2, CH, CH, CNO_2, CNO_2)
f_{49} = (CNO_2, CH, CNO_2, CNO_2, CNO_2, CH)
f_{50} = (CNO_2, CH, CNO_2, CNO_2, CH, CNO_2)
f_{51} = (CNO_2, CH, CNO_2, CH, CNO_2, CNO_2)
f_{52} = (CNO_2, CH, CH, CNO_2, CNO_2, CNO_2)
f_{53} = (CH, CNO_2, CNO_2, CNO_2, CNO_2, CH)
f_{54} = (CH, CNO_2, CNO_2, CNO_2, CH, CNO_2)
f_{55} = (CH, CNO_2, CNO_2, CH, CNO_2, CNO_2)

f_{56} = (CH, CNO_2, CH, CNO_2, CNO_2, CNO_2)

f_{57} = (CH, CH, CNO_2, CNO_2, CNO_2, CNO_2)

f_{58} = (CNO_2, CNO_2, CNO_2, CNO_2, CNO_2, CH)

f_{59} = (CNO_2, CNO_2, CNO_2, CNO_2, CH, CNO_2)

f_{60} = (CNO_2, CNO_2, CNO_2, CH, CNO_2, CNO_2)

f_{61} = (CNO_2, CNO_2, CH, CNO_2, CNO_2, CNO_2)

f_{62} = (CNO_2, CH, CNO_2, CNO_2, CNO_2, CNO_2)

f_{63} = (CH, CNO_2, CNO_2, CNO_2, CNO_2, CNO_2)

f_{64} = (CNO_2, CNO_2, CNO_2, CNO_2, CNO_2, CNO_2)

Lampiran C.

Tabel Permutasi-permutasi $\pi' \in G'$ Di Himpunan C

$f \in C$	π_1'	π_2'	π_3'	π_4'	π_5'	π_6'	π_7'	π_8'	π_9'	π_{10}'	π_{11}'	π_{12}'
f_1	1*	1*	1*	1*	1*	1*	1*	1*	1*	1*	1*	1*
f_2	2*	7	6	5	4	3	2*	4	6	7	3	5
f_3	3*	2	7	6	5	4	7	3*	5	6	2	4
f_4	4*	3	2	7	6	5	6	2	4*	5	7	3
f_5	5*	4	3	2	7	6	5*	7	3	4	6	2
f_6	6*	5	4	3	2	7	4	6*	2	3	5	7
f_7	7*	6	5	4	3	2	3	5	7*	2	4	6
f_8	8*	12	22	20	17	13	12	13	20	22	8*	17
f_9	9*	16	11	21	18	14	11	9*	18	21	16	14
f_{10}	10*	19	15	10*	19	15	10*	19	15	19	15	10*
f_{11}	11*	21	18	14	9	16	9	18	11*	16	14	21
f_{12}	12*	22	20	17	13	8	8	17	22	12*	13	20
f_{13}	13*	8	12	22	20	17	22	8	17	20	12	13*
f_{14}	14*	9	16	11	21	18	21	16	14*	18	11	9
f_{15}	15*	10	19	15*	10	19	19	15*	10	15*	10	19
f_{16}	16*	11	21	18	14	9	16*	14	21	11	9	18
f_{17}	17*	13	8	12	22	20	20	12	13	17*	22	8
f_{18}	18*	14	9	16	11	21	18*	11	9	14	21	16
f_{19}	19*	15	10	19*	15	10	15	10	19*	10	19*	15
f_{20}	20*	17	13	8	12	22	17	22	8	13	20*	12
f_{21}	21*	18	14	9	16	11	14	21*	16	9	18	11
f_{22}	22*	20	17	13	8	12	13	20	12	8	17	22*
f_{23}	23*	26	32	42	39	33	32	23*	39	42	36	33
f_{24}	24*	29	38	30	40	34	31	35	36	41	25	27
f_{25}	25*	31	41	36	27	35	29	34	30	38	24	40
f_{26}	26*	32	42	39	33	23	26*	33	42	32	23	39
f_{27}	27*	35	25	31	41	36	30	29	34	40	38	24
f_{28}	28*	37	28*	37	28*	37	28*	28*	28*	37	37	37
f_{29}	29*	38	30	40	34	24	25	27	41	31	35	36
f_{30}	30*	40	34	24	29	38	27	41	25	35	36	31
f_{31}	31*	41	36	27	35	25	24	40	38	29	34	30
f_{32}	32*	42	39	33	23	26	23	39	32*	26	33	42
f_{33}	33*	23	26	32	42	39	42	26	33*	39	32	23
f_{34}	34*	24	29	38	30	40	41	25	27	36	31	35
f_{35}	35*	25	31	41	36	27	38	24	40	30	29	34
f_{36}	36*	27	35	25	31	41	40	38	24	34	30	29
f_{37}	37*	28	37*	28	37*	28	37*	37*	37*	28	28	28

f_{38}	38*	30	40	34	24	29	35	36	31	25	27	41
f_{39}	39*	33	23	26	32	42	39*	32	23	33	42	26
f_{40}	40*	34	24	29	38	30	36	31	35	27	41	25
f_{41}	41*	36	27	35	25	31	34	30	29	24	40	38
f_{42}	42*	39	33	23	26	32	33	42*	26	23	39	32
f_{43}	43*	45	48	52	57	53	52	45	53	57	48	43*
f_{44}	44*	47	51	56	49	54	51	44*	49	56	47	54
f_{45}	45*	48	52	57	53	43	48	43	57	52	45*	53
f_{46}	46*	50	55	46*	50	55	50	55	46*	55	46*	50
f_{47}	47*	51	56	49	54	44	47*	54	56	51	44	49
f_{48}	48*	52	57	53	43	45	45	53	52	48*	43	57
f_{49}	49*	54	44	47	51	56	49*	51	44	54	56	47
f_{50}	50*	55	46	50*	55	46	46	50*	55	50*	55	46
f_{51}	51*	56	49	54	44	47	44	49	51*	47	54	56
f_{52}	52*	57	53	43	45	48	43	57	48	45	53	52*
f_{53}	53*	43	45	48	52	57	57	48	43	53*	52	45
f_{54}	54*	44	47	51	56	49	56	47	54*	49	51	44
f_{55}	55*	46	50	55*	46	50	55*	46	50	46	50	55
f_{56}	56*	49	54	44	47	51	54	56*	47	44	49	51
f_{57}	57*	53	43	45	48	52	53	52	45	43	57*	48
f_{58}	58*	59	60	61	62	63	62	60	58*	63	61	59
f_{59}	59*	60	61	62	63	58	61	59*	63	62	60	58
f_{60}	60*	61	62	63	58	59	60*	58	62	61	59	63
f_{61}	61*	62	63	58	59	60	59	63	61*	60	58	62
f_{62}	62*	63	58	59	60	61	58	62*	60	59	63	61
f_{63}	63*	58	59	60	61	62	63*	61	59	58	62	60
f_{64}	64*	64*	64*	64*	64*	64*	64*	64*	64*	64*	64*	64*

Keterangan :

a. Angka 1, 2, 3, … , 64 menyatakan $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{64}$.

b. Tanda * menyatakan bahwa $f \in C$ yang bersangkutan adalah titik tetap dari permutasi $\pi' \in G'$ yang bersesuaian.

(Lihat Kolom π_1')

1*, 2*, 3*, …, 64* menyatakan bahwa $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{64} \in C$ adalah titik-titik tetap dari permutasi $\pi' \in G'$.

c. Masing-masing kolom $\pi' \in G'$ menyatakan bayangan dari $f \in C$ oleh permutasi $\pi' \in G'$

Contoh :

(Lihat kolom π_2')

Kolom π_2' menyatakan bahwa f_1 bayangan dari f_1 oleh permutasi π_2' , f_7 bayangan dari f_2 oleh permutasi π_2' , f_2 bayangan dari f_3 oleh permutasi π_2' , … , f_{64} bayangan dari f_{64} oleh permutasi π_2' , sehingga dapat dituliskan

$$\pi_2' = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_{64} \\ f_1 & f_7 & f_2 & \cdots & f_{64} \end{pmatrix}$$

Lampiran D.

Penstabil $f \in C$ di Grup Permutasi G'

Penstabil $f \in C$ di grup permutasi G' adalah himpunan semua permutasi $\pi' \in G'$ yang mengakibatkan f sebagai titik tetap.

Diketahui $C = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_{64}\}$ dan $G' = \{\pi_1', \dots, \pi_{12}'\}$

Dengan melihat **Lampiran C** didapatkan :

f_i	$\text{Stab}(f_i)$	$\lvert \text{Stab}(f_i) \rvert$
1	$\{\pi_1', \pi_2', \dots, \pi_{12}'\}$	12
2	$\{\pi_1', \pi_7'\}$	2
3	$\{\pi_1', \pi_8'\}$	2
4	$\{\pi_1', \pi_9'\}$	2
5	$\{\pi_1', \pi_7'\}$	2
6	$\{\pi_1', \pi_8'\}$	2
7	$\{\pi_1', \pi_9'\}$	2
8	$\{\pi_1', \pi_{11}'\}$	2
9	$\{\pi_1', \pi_8'\}$	2
10	$\{\pi_1', \pi_4', \pi_7', \pi_{12}'\}$	4
11	$\{\pi_1', \pi_9'\}$	2
12	$\{\pi_1', \pi_{10}'\}$	2
13	$\{\pi_1', \pi_{12}'\}$	2
14	$\{\pi_1', \pi_9'\}$	2
15	$\{\pi_1', \pi_4', \pi_8', \pi_{10}'\}$	4
16	$\{\pi_1', \pi_7'\}$	2
17	$\{\pi_1', \pi_{10}'\}$	2

18	$\{\pi_1', \pi_7'\}$	2
19	$\{\pi_1', \pi_4', \pi_9, \pi_{11}'\}$	4
20	$\{\pi_1', \pi_{11}'\}$	2
21	$\{\pi_1', \pi_8'\}$	2
22	$\{\pi_1', \pi_{12}'\}$	2
23	$\{\pi_1', \pi_8'\}$	2
24	$\{\pi_1'\}$	1
25	$\{\pi_1'\}$	1
26	$\{\pi_1', \pi_7'\}$	2
27	$\{\pi_1'\}$	1
28	$\{\pi_1', \pi_3', \pi_5', \pi_7', \pi_8', \pi_9'\}$	6
29	$\{\pi_1'\}$	1
30	$\{\pi_1'\}$	1
31	$\{\pi_1'\}$	1
32	$\{\pi_1', \pi_9'\}$	2
33	$\{\pi_1', \pi_9'\}$	2
34	$\{\pi_1'\}$	1
35	$\{\pi_1'\}$	1
36	$\{\pi_1'\}$	1
37	$\{\pi_1', \pi_3', \pi_5', \pi_7', \pi_8', \pi_9'\}$	6
38	$\{\pi_1'\}$	1
39	$\{\pi_1', \pi_7'\}$	2
40	$\{\pi_1'\}$	1
41	$\{\pi_1'\}$	1

42	$\{\pi_1', \pi_8'\}$	2
43	$\{\pi_1', \pi_{12}'\}$	2
44	$\{\pi_1', \pi_8'\}$	2
45	$\{\pi_1', \pi_{11}'\}$	2
46	$\{\pi_1', \pi_4', \pi_9', \pi_{11}'\}$	4
47	$\{\pi_1', \pi_7'\}$	2
48	$\{\pi_1', \pi_{10}'\}$	2
49	$\{\pi_1', \pi_7'\}$	2
50	$\{\pi_1', \pi_4', \pi_8', \pi_{10}'\}$	4
51	$\{\pi_1', \pi_9'\}$	2
52	$\{\pi_1', \pi_{12}'\}$	2
53	$\{\pi_1', \pi_{10}'\}$	2
54	$\{\pi_1', \pi_9'\}$	2
55	$\{\pi_1', \pi_4', \pi_7', \pi_{12}'\}$	4
56	$\{\pi_1', \pi_8'\}$	2
57	$\{\pi_1', \pi_{11}'\}$	2
58	$\{\pi_1', \pi_9'\}$	2
59	$\{\pi_1', \pi_8'\}$	2
60	$\{\pi_1', \pi_7'\}$	2
61	$\{\pi_1', \pi_9'\}$	2
62	$\{\pi_1', \pi_8'\}$	2
63	$\{\pi_1', \pi_7'\}$	2
64	$\{\pi_1', \pi_2', \ldots, \pi_{12}'\}$	12

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
UNIVERSITAS JEMBER
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
Alamat: Jl. Kalimantan III/3 Kampus Tegalboto Kotak Pos 162 Telp./Fax (0331) 334988 Jember 68121

LEMBAR KONSULTASI PENYUSUNAN SKRIPSI

Pembimbing I

N a m a	: Noor Aini
Nim / Angkatan	: 020210101107/ 2002
Jurusan	: P. MIPA
Program Studi	: P. Matematika
Judul Skripsi	: Aplikasi Teorema Burnside dan Teorema Polya Pada Enumerasi Pola Molekul Cincin Karbon (C)
Pembimbing I	: Drs. Antonius CP., M.App.Sc
Pembimbing II	: Susi Setiawani, S.Si, M.Si

Kegiatan Konsultasi:

No.	Hari/Tanggal	Materi Konsultasi	T.T. Pembimbing
1.	Sabtu/ 10 Juni 2006	Bab I, II, III	
2.	Jumat/ 11 Agustus 2006	Revisi Bab I, II, III	
3.	Jumat/ 1 September 2006	Revisi Bab I, II, III	
4.	Sabtu/ 9 September 2006	Seminar Proposal	
5.	Jumat/ 6 Oktober 2006	Bab I, II, III, IV, V	
6.	Sabtu/ 7 Oktober 2006	Revisi Bab IV, V	

Catatan:

1. Lembar ini harus dibawa dan di isi setiap konsultasi
2. Lembar ini harus dibawa dan diisi sewaktu seminar proposal dan ujian skripsi

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
UNIVERSITAS JEMBER
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
Alamat: Jl. Kalimantan III/3 Kampus Tegalboto Kotak Pos 162 Telp./Fax (0331) 334988 Jember 68121

LEMBAR KONSULTASI PENYUSUNAN SKRIPSI

Pembimbing II

N a m a	: Noor Aini
Nim / Angkatan	: 020210101107/ 2002
Jurusan	: P. MIPA
Program Studi	: P. Matematika
Judul Skripsi	: Aplikasi Teorema Burnside dan Teorema Polya Pada Enumerasi Pola Molekul Cincin Karbon (C)
Pembimbing I	: Drs. Antonius CP., M.App.Sc
Pembimbing II	: Susi Setiawani, S.Si, M.Si

Kegiatan Konsultasi:

No.	Hari/Tanggal	Materi Konsultasi	T.T. Pembimbing
1.	Sabtu/ 10 Juni 2006	Bab I, II, III	
2.	Jumat/ 11 Agustus 2006	Revisi Bab I, II, III	
3.	Sabtu/ 9 September 2006	Seminar proposal	
4.	Jumat/ 6 Oktober 2006	Bab I, II, III, IV, V	

Catatan:

1. Lembar ini harus dibawa dan di isi setiap konsultasi
2. Lembar ini harus dibawa dan diisi sewaktu seminar proposal dan ujian skripsi

UNIVERSITAS JEMBER
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
Jl. Kalimantan III/3 Gd.3 Kampus Tegalboto, Kotak Pos 162 Telp/Fax 0331 334988 Jember 68121

FORMULIR PENGAJUAN JUDUL DAN PEMBIMBINGAN SKRIPSI

Kepada Yth.: Ketua Jurusan PMIPA
FKIP Universitas Jember
di Jember

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : NOOR AINI
N I M : 020210101107
Program Studi : Pendidikan Matematika

Sampai dengan semester Genap tahun akademik 2006/2007, saya sudah mengumpulkan sebanyak 143 SKS dengan Indeks Prestasi Kumulatif sebesar 3.5 (..............*)

Bersama ini saya mengajukan usulan judul dan pembimbing skripsi sebagai berikut:

Judul : APLIKASI TEOREMA BURNSIDE DAN TEOREMA POLYA PADA ENUMERASI POLA MOLEKUL CINCIN KARBON (C)

Dosen Pembimbing I : Drs. Antonius Cahya Prihandoko, MAppSc (.............. **)
Dosen Pembimbing II: Susi Setiawani, S.Si., M.Sc (.............. **)

Demikian permohonan pengajuan usulan judul dan pembimbing skripsi ini saya buat dengan harapan mendapat persetujuan Bapak/Ibu. Atas persetujuannya disampaikan terima kasih.

Jember, 12-3-2006

Mengetahui:
Ketua Program Studi,

Drs. Antonius Cahya Prihandoko, MAppSc
NIP: 132046352

Yang mengusulkan,

NOOR AINI
NIM: 020210101107

Menyetujui:
Ketua Jurusan PMIPA,

Drs. Singgih Bektiarso, M.Pd
NIP: 131577294

Catatan:

*) Diparaf oleh Dosen Pembimbing Akademik sebagai tanda persetujuan.
**) Diparaf oleh kedua calon Dosen Pembimbing sebagai tanda persetujuan setelah diketahui oleh Ketua Program Studi.
- Dibuat rangkap tiga (satu lembar untuk Program Studi, satu lembar untuk Jurusan dan satu lembar untuk Mahasiswa).
- Judul skripsi yang diusulkan bisa direvisi/diubah sesuai dengan kesepakatan diantara Dosen Pembimbing dengan Mahasiswanya.