



**PEMODELAN PERMUKAAN BENDA RUANG  
MELALUI POLA UBIN SEGI ENAM BERATURAN  
DALAM BINGKAI LINGKARAN DAN PERSEGI**

**TESIS**

**Diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan Program Studi Magister Matematika (S2)  
dan mencapai gelar Magister Sains**

**Oleh :**

**Moch.Erfani  
NIM. 091820101017**

**PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2015**

**PERSEMBAHAN**

Tesis ini saya persembahkan untuk:

1. Istriku Rita Ismiati, Moch.Risqi dan Alisavirda anak-anak yang selalu memberi dukungan dan semangat untuk menyelesaikan tesis ini.
2. Almamater Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.
3. Rekan-rekan sealmamater Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

## MOTTO

Barang siapa berjalan untuk menuntut ilmu maka Allah akan memudahkan baginya jalan ke surga.

(HR. Muslim) \*)

Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan

(terjemahan Surat *Alam Nasyrah* ayat 5 dan 6) \*\*)

Barang siapa bertaqwa kepada Allah niscaya Dia akan mengadakan baginya jalan keluar dari kesulitannya.

Dan memberinya rizki dari arah yang tidak disangka-sangkanya

(terjemahan *Ath-Thalaq* ayat 2 dan 3) \*\*\*)

---

\*) Bahreisj, Hussein. 1986. *Hadits Shahih Bukhari Muslim*. Surabaya : Penerbit Karya Utama

\*\*) Departemen Agama Republik Indonesia. 1969. *Al Qur'an dan Terjemahannya Djus 21-Djus 30*. Djakarta : Pertjetakan dan offset Jamunu.

\*\*\*) Departemen Agama Republik Indonesia. 1998. *Al Qur'an dan Terjemahannya*. Semarang : PT Kumudasmoro Grafindo

**PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Moch.Erfani

NIM : 091820101017

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa tesis yang berjudul “Pemodelan Permukaan Benda Ruang Melalui Pola Ubin Segi Enam Beraturan Dalam Bingkai Lingkaran Dan Persegi” adalah benar-benar hasil karya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan tesis ini belum pernah diajukan pada institusi manapun serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2015

Yang menyatakan,

Moch.Erfani

NIM. 091820101017

**TESIS**

**PEMODELAN PERMUKAAN BENDA RUANG MELALUI POLA  
UBIN SEGI ENAM BERATURAN DALAM BINGKAI  
LINGAKARAN DAN PERSEGI**

Oleh

Moch.Erfani  
NIM. 091820101017

Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utama : Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.

Dosen Pembimbing Anggota : Kiswara Agung Santoso, S.Si., M.Kom.

**PENGESAHAN**

Tesis berjudul “Pemodelan Permukaan Benda Ruang Melalui Pola Ubin Segi Enam Beraturan Dalam Bingkai Lingkaran Dan Persegi” telah diuji dan disahkan pada:

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas  
Jember

Tim Penguji:

Ketua,

Sekretaris,

Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.  
NIP 196101081986021001

Kiswara Agung Santoso, S.Si., M.Kom.  
NIP 197209071998031003

Anggota I,

Anggota II,

Prof. Drs. Imade Tirta, M.Sc., Ph.D.  
NIP 195912201985031002

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si.M.Si  
NIP 196908281998021001

Mengesahkan  
Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.  
NIP 196101081986021001



## RINGKASAN

Penataan pola ubin yang disusun secara teratur di bidang dapat membentuk bangun yang menarik. Susunan pola ubin tersebut memiliki beberapa level kurva batas yang berbeda dan bentuknya masing-masing simetris. Berdasarkan kurva batas di bidang dimaksud maka memungkinkan untuk dapat dibangun beberapa permukaan benda ruang berbentuk simetris, sebangun, dan bentuknya beragam. Masalahnya adalah bagaimana membangun pemodelan permukaan benda ruang melalui data pola ubin segi enam beraturan dalam bingkai lingkaran dan persegi.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini diuraikan sebagai berikut: (a) menetapkan data lingkaran dengan pusat  $O(x_0, y_0, z_0)$  berjari-jari  $a$  satuan dan persegi  $ABCD$  bersisi  $a$  satuan berpusat dititik  $O$ ; (b) menetapkan bingkai lingkaran dan persegi dari data langkah (a) ke dalam tiga level dan mengisi poligon segi enam beraturan ke dalam masing-masing level tersebut; (c) poligon yang tersusun hasil perlakuan (b) dideformasikan kebentuk bangun ruang dimensi tiga agar terbangun bentuk permukaan benda ruang.

Hasil penelitian diperoleh bahwa untuk mengkontruksi benda ruang melalui pola ubin segienam beraturan dalam bingkai lingkaran atau persegi dapat dilakukan sebagai berikut, pertama, menetapkan kurva batas masing-masing pola ubin di bidang  $Z=0$  dan kurva ketinggian sebanyak 4 (empat) tingkatan untuk batas komponen benda ke arah vertikal (sumbu  $Z$  positif). Kedua, mentranslasikan dan duplikasi kurva batas pola ubin segienam beraturan ke arah vertikal ataupun dilatasi ke arah horisontal untuk mendefinisikan kurva batas masing-masing komponen benda ke arah vertikal. Ketiga, Interpolasi linier antar dua kurva batas berdekatan dari masing-masing komponen benda tersebut. Terakhir, menginterpolasi linier dua kurva tersisa untuk mendapatkan permukaan alas, tutup, ataupun penampang, dan permukaan yang lain dari benda.

## PRAKATA

Rasa syukur saya haturkan kepada Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul “Pemodelan Permukaan Benda Ruang Melalui Pola Ubin Segi Enam Beraturan Dalam Bingkai Lingkaran Dan Persegi”. Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan strata dua (S2) pada Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan menyampaikan terima kasih atas bantuannya terselesainya tesis ini kepada:

1. Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Kiswara Agung Santoso, S.Si., M.Kom. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan tesis ini;
2. Prof. Drs. I.Made Tirta, M.Sc., Ph.D. dan Kosala Dwidja Purnomo, S.Si.M.Si selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran demi kesempurnaan tesis ini;
3. teman-teman angkatan 2009 Program Studi Magister Matematika, Said Ripin, Dina, Ibnu Soko, Haryono dan Ponadi yang selalu memotivasi dan memberi dukungan dan semangat untuk menyelesaikan tesis ini;
4. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tesis ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tesis ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2015

Penulis



**DAFTAR ISI**

	Halaman
HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN PERSEMBAHAN.....	ii
HALAMAN MOTTO.....	iii
HALAMAN PERNYATAAN.....	iv
HALAMAN PEMBIMBINGAN.....	v
HALAMAN PENGESAHAN.....	vi
RINGKASAN.....	vii
PRAKATA .....	viii
DAFTAR ISI .....	ix
DAFTAR LAMPIRAN .....	x
<b>BAB 1. PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Latar Belakang Masalah .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 Rumusan Masalah .....</b>	<b>2</b>
<b>1.3 Tujuan .....</b>	<b>3</b>
<b>1.4 Manfaat .....</b>	<b>3</b>
<b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA .....</b>	<b>4</b>
<b>2.1 Pengertian Poligon .....</b>	<b>4</b>
<b>2.2 Titik dan Segmen Garis.....</b>	<b>5</b>
<b>2.2.1 Penyajian Titik dan Segmen Garis di Ruang ...</b>	<b>5</b>
<b>2.2.2 Ukuran Sudut .....</b>	<b>5</b>
<b>2.3 Konstruksi Bentuk Persegi.....</b>	<b>7</b>
<b>2.4 Penyajian Beberapa Bentuk Kuadratis Bidang.....</b>	<b>8</b>
<b>2.4.1 Lingkaran.....</b>	<b>8</b>
<b>2.5 Operasi Geometri .....</b>	<b>9</b>
<b>2.5.1 Rotasi.....</b>	<b>9</b>
<b>2.5.2 Translasi (Geseran).....</b>	<b>10</b>
<b>2.5.3 Dilatasi.....</b>	<b>11</b>

<b>2.6 Permukaan Implisit, Parametrik, dan Interpolasi Linier Dua Kurva</b> .....	11
<b>2.7 Konstruksi Obyek pada Program Meple 12.0</b> .....	12
<b>BAB 3. METODE PENELITIAN</b> .....	15
<b>BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	16
<b>4.1 Pembangkitan Data Pola Ubin Segi Enam Beraturan Dalam Bingkai Lingkaran dan Persegi</b> .....	16
<b>4.2 Konstruksi Permukaan Benda Ruang Berdasar Pola Ubin Segi Enam Beraturan</b> .....	19
<b>4.2.1 Metode Translasi Kurva Batas ke Arah Vertikal</b> .....	28
<b>4.2.2 Metode Translasi Kurva Batas ke Arah Vertikal dan Dilatasi Horisontal</b> .....	24
<b>4.2.3 Metode Variasi Kelengkungan Permukaan</b> .....	26
<b>4.3 Pembahasan Hasil Penelitian</b> .....	27
<b>BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN</b> .....	29
<b>5.1 Kesimpulan</b> .....	29
<b>5.2 Saran</b> .....	29
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	30
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	31

**DAFTAR LAMPIRAN**

	Halaman
A. Data kurva batas pola poligon level 1 dan 2 .....	31
B. Tranlasi kearah vertikal dan interpolasi vertikal datar dan interpolasi lengkung.....	32
C. Contoh aplikasi sederhana dari translasi vertikal .....	35
D. Programasi permukaan hasil translasi dilatasi kurva batas .....	38
E. Programasi variasi hasil gambar penelitian .....	42

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Ubin banyak digunakan untuk penutup lantai, dinding asesoris pilar ataupun permukaan benda bangunan lainnya. Penataan ubin yang digunakan untuk lantai, dinding, asesoris pilar bangunan tersebut banyak menggunakan pola berbeda sehingga permukaan lantai dinding ataupun pilar yang dimaksud menjadi lebih menarik dan indah.

Desain pola ubin diterapkan juga untuk pembuatan model permukaan peralatan rumah tangga, misalnya: keset rumah dan mobil, penyangga panci dapur, ataupun permukaan lampu. Pola yang dibentuk ada yang berpermukaan datar maupun berrelief. Namun demikian dari beberapa contoh benda yang telah dihasilkan terdapat beberapa kelemahan yang masih nampak dalam desain pola ubin tersebut. Jelasnya, baik pada permukaan bangunan maupun peralatan rumah tangga tersebut, umumnya motif yang digunakan hanya memiliki keberulangan tunggal, bahan yang digunakan ketinggian homogen, bentuk ukuran selalu sama satu terhadap yang lain (Gambar 1.1).



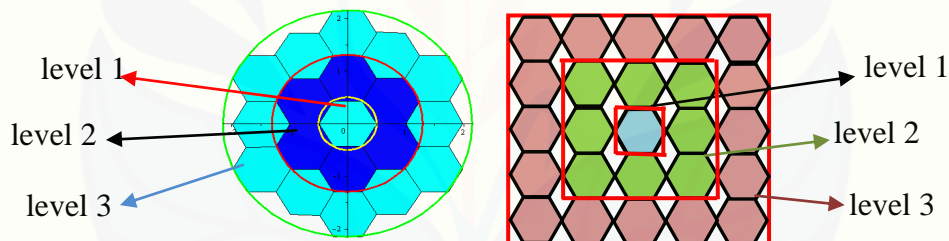
Gambar 1.1 Desain pola ubin pada bangunan

Beberapa hasil penelitian sebelumnya (Muhrihani, 2012) mengenalkan konstruksi model mozaik ubin, tetapi jenis dan macam pola yang didesain masih terfokus pada sebuah persegi. Rosyadi (2012) memperkenalkan pemodelan mozaik pada ubin Penrose. Penelitian ini secara umum hasilnya hanya ditekankan

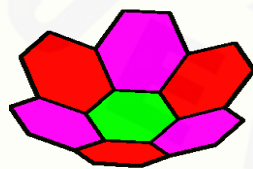
pada pembentukan bangun-bangun simetris yang mengisi seluruh ubin tersebut. Sejalan dengan Rosyadi, Widiastuti (2012) meneliti tentang pengisian poligon kedalam bingkai lingkaran dan persegi, sedangkan penelitian Dina hanya terbatas pada ruang dimensi dua. Oleh sebab itu, untuk dapat memanfaatkan pola ubin untuk memodelisasi permukaan dan bentuk benda ruang yang banyak digunakan sebagai asesoris rumah tangga maupun perkantoran, maka perlu dikembangkan pemodelan permukaan benda ruang dengan bantuan pola ubin dimensi dua.

### 1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang maka dapat dirumuskan permasalahan penelitian ini adalah sebagai berikut. Ditetapkan data bingkai berbentuk lingkaran dan persegi dengan panjang jari-jari lingkaran terdiri atas tiga level terhadap titik pusat  $O(0,0)$  dan masing-masing terisi oleh segi enam beraturan (Gambar 1.2a). Masalahnya adalah bagaimana mendapatkan permukaan benda ruang hasil deformasi (translasi, dilatasi, dan interpolasi) kurva batas luar dari tiap level poligon tersebut sehingga dapat digunakan untuk membentuk vas bunga, tempat gantung pasang lampu, atau model barang pecah belah lainnya agar modelnya bervariasi (contoh Gambar 1.2b).



(a) bentuk dasar lingkaran dan persegi  $ABCD$



(b) Contoh permukaan hasil deformasi pola ubin

Gambar 1.2 Pola ubin berbingkai dasar lingkaran dan persegi



## 1.2 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang dimaksud, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan prosedur mendesain beragam permukaan benda ruang dengan bantuan pola ubin/relief dimensi tiga dengan isian poligon berbingkai dasar lingkaran dan persegi melalui operasi geometri (translasi, dilatasi, dan interpolasi).

## 1.3. Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diperoleh dalam penelitian ini adalah menawarkan alternatif pemodelan permukaan benda ruang bervariasi misalnya: kap lampu/vas bunga asesoris dinding pilar atau tataan peralatan dapur dan rumah tangga. Selain itu diharapkan dapat memberikan sumbangsih untuk pembelajaran matematika guna meningkatkan pemahaman konsep pengubinan.

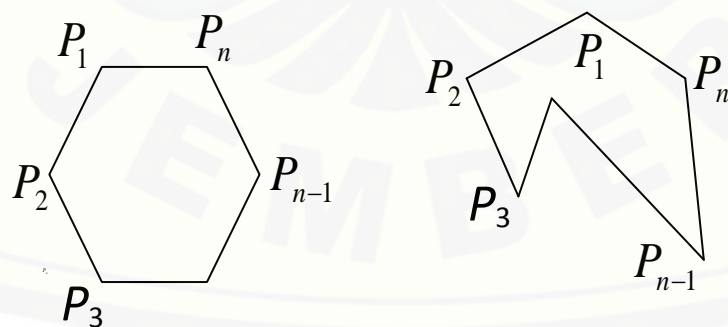


## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Sehubungan dengan masalah penelitian yang telah diuraikan dalam Bab 1, dalam bagian ini dibicarakan tentang obyek-obyek dasar geometri bidang, diantaranya titik, garis, segmen garis, poligon, dan lingkaran. Pembahasan benda-benda geometri tersebut dimaksudkan untuk dapat membangun pola pengubinan yang variatif. Selanjutnya dibahas pula studi transformasi bidang dan ruang yaitu refleksi, translasi, dilatasi, dan rotasi guna melakukan deformasi dari bentuk bidang ke bentuk ruang atas data ubin yang ada di bingkai lingkaran atau persegi. Terakhir disajikan beberapa *syntax* Maple 12 untuk visualisasi benda-benda dimaksud.

### 2.1 Pengertian Poligon

Poligon adalah himpunan titik-titik  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$  dengan ruas-ruas garis  $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_nP_1$ , sedemikian hingga jika dua sebarang ruas garis berpotongan akan mempunyai salah satu titik potong dari titik-titik  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$  dan tidak ada titik lain. Poligon terbagi menjadi dua yaitu poligon konveks dan poligon konkaf. Poligon konveks adalah poligon yang ukuran sudut-sudut dalamnya lebih kecil dari sudut lurus, apabila kebalikannya dinamakan poligon konkaf. Dalam penelitian ini kita batasi poligon konveks.



(a) Poligon konveks

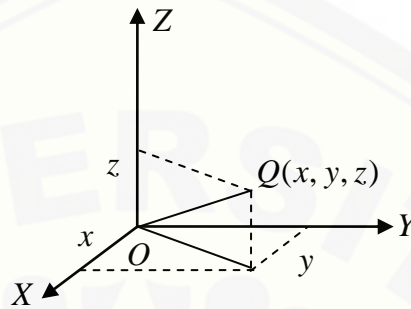
(b) Poligon tidak konveks

Gambar 2.1 Bentuk poligon

## 2.2 Titik dan Segmen Garis

### 2.2.1 Penyajian Titik dan Segmen Garis di Ruang

Misalkan  $Q$  adalah sebarang titik di ruang dinyatakan oleh  $Q(x,y,z)$  dengan  $x$ ,  $y$  dan  $z$  bilangan real. Jika diketahui pasangan bilangan real  $(x,y,z)$  maka dapat ditentukan tepat satu titik  $Q$  dengan sumbu koordinat  $X$ ,  $Y$  dan  $Z$  di ruang (Gambar 2.2).



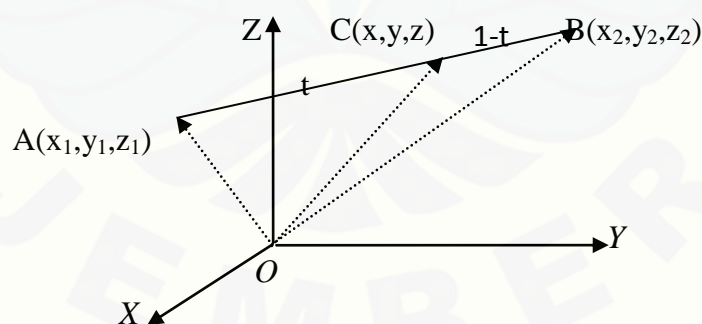
Gambar 2.2 Penyajian titik di ruang

Penyajian segmen garis  $\overline{AB}$  yang dibangun oleh dua titik berbeda  $A(x_1, y_1, z_1)$  dan  $B(x_2, y_2, z_2)$  di ruang, sebagai titik ujung-titik ujung segmen garis, dapat dinyatakan sebagai tempat kedudukan titik-titik  $C(x, y, z)$  jika dan hanya jika

$$\overrightarrow{OC} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \text{ atau}$$

$$\langle x, y, z \rangle = \langle (1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2, (1-t)z_1 + tz_2 \rangle \quad (2.1)$$

dengan  $t \in [0,1]$  seperti ditunjukkan dalam Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Penyajian segmen garis di ruang

### 2.2.2 Ukuran Sudut

Sudut merupakan himpunan titik-titik dari gabungan dua sinar yang kedua titik pangkalnya berserikat, tetapi tidak terletak pada garis yang sama

(Kusno,2003). Untuk menentukan ukuran sudut, dapat digunakan rumus aturan cosinus dan sinus.

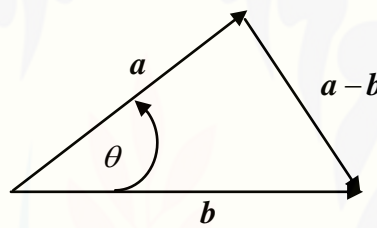
Misal  $\theta$  merupakan sudut yang dibentuk oleh vektor  $\mathbf{a}$  dan vektor  $\mathbf{b}$ , maka berlaku :

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta. \quad (2.2)$$

Dengan sifat dari perkalian skalar vektor, diperoleh hubungan :

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}-\mathbf{b}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

berikut disajikan pada Gambar 2.4



Gambar 2.4 Penyajian sudut

Dari persamaan (2.2) dan (2.3) sehingga dapat disimpulkan bahwa :

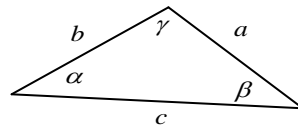
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta.$$

maka

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\right).$$

Apabila suatu segitiga sembarang diketahui beberapa unsurnya, maka pada keadaan tertentu, unsur yang lain dapat dihitung dengan menggunakan aturan sinus (Gambar 2.4). Formulanya adalah sebagai berikut. Andaikan sebuah segitiga ABC dengan masing-masing ukuran sisi  $a, b, c$  dan ukuran sudut  $\alpha, \beta, \gamma$  maka berlaku hubungan (Gambar 2.5):

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \quad (2.4)$$



Gambar 2.5 Aturan sinus

Baik aturan cosinus maupun sinus itu pada dasarnya membicarakan tentang sudut dan sisi. Oleh karenanya sangat membantu dalam membuat segitiga sembarang sehingga digunakan untuk hitung ukuran sudut dan sisi dari pola pengubinan di bidang.

### 2.3 Konstruksi Bentuk Persegi

Persegi merupakan bangun datar dua dimensi yang dibentuk oleh empat buah sisi  $s$  sama panjang dan memiliki empat buah sudut yang semuanya adalah sudut siku-siku (Gambar 2.6). Untuk membangun bentuk persegi dengan menggunakan hitungan vektor, tahapannya sebagai berikut:

- ambil 2 titik berbeda di bidang XOY, misalkan titik A  $(x_A, y_A)$  dan B  $(x_B, y_B)$ ;
- buat segmen garis  $\overline{AB}$  dengan persamaan (2.1);
- hitung koordinat titik C melalui kondisi:  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + k \mathbf{n}_{\overline{AB}}$

dengan  $\mathbf{n}_{\overline{AB}}$  merupakan normal  $\overline{AB}$  dalam bentuk  $\mathbf{n}_{\overline{AB}}$

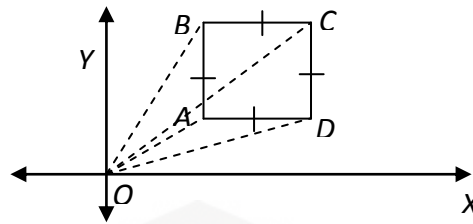
$$= \frac{\langle (y - y_A), -(x - x_A) \rangle}{\sqrt{(x_A - x)^2 + (y - y_A)^2}} \quad \text{dan } k \text{ ditetapkan, sehingga: } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + k \mathbf{n}_{\overline{AB}}$$

$$= \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + k \left( \frac{\langle (y - y_A), -(x - x_A) \rangle}{\sqrt{(x_A - x)^2 + (y - y_A)^2}} \right);$$

- buat segmen garis  $\overline{AC}$  dengan persamaan (2.1);
- hitung koordinat titik D melalui kondisi:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} \\ &= \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_C + x_B - x_A \\ y_C + y_B - y_A \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

f. buat segmen garis  $\overline{BD}$  dan  $\overline{CD}$  dengan persamaan (2.1).



Gambar 2.6 Persegi

## 2.4 Penyajian Beberapa Bentuk Kuadratis Bidang

### 2.4.1 Lingkaran

Suatu lingkaran adalah himpunan titik-titik di bidang yang berjarak sama dari suatu titik tetap. Titik tetap tersebut dinamakan pusat lingkaran dan jarak yang sama dinamakan jari-jari lingkaran. Misal suatu lingkaran berpusat di titik  $O(0,0)$  dan titik  $A(x,y)$  merupakan sebarang titik pada lingkaran (Gambar 2.7.a) maka bentuk persamaan lingkarannya adalah

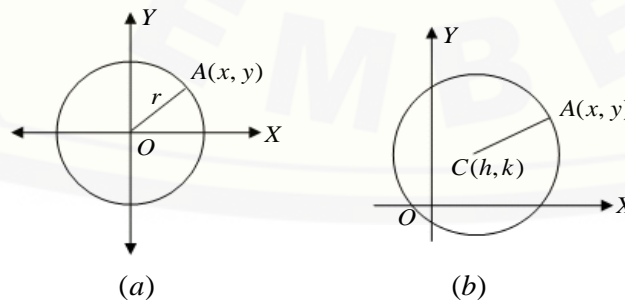
$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \text{ atau } x^2 + y^2 = r^2 \tag{2.5}$$

dengan  $r$  adalah jari-jari lingkaran. Sedangkan lingkaran yang berpusat di  $C(h,k)$  dan berjari-jari  $r$  (Gambar 2.7.b) memiliki persamaan

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r \text{ atau } (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{2.6}$$

jika persamaan (2.3) diuraikan maka diperoleh bentuk

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$



Gambar 2.7 Lingkaran



Jadi persamaan umum lingkaran dapat ditulis sebagai

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.7)$$

dengan

$$D = -2h$$

$$E = -2k$$

$F = h^2 + k^2 - r^2$ . Selain itu persamaan lingkaran berpusat di  $C(h,k)$  dapat juga dinyatakan dalam bentuk penyajian parametrik:

$$L(t) = \langle h + a \cos t, k + a \sin t \rangle \quad (2.8)$$

dengan  $0 \leq t \leq 2\pi$  dan  $a$  sebagai jari-jari lingkaran.

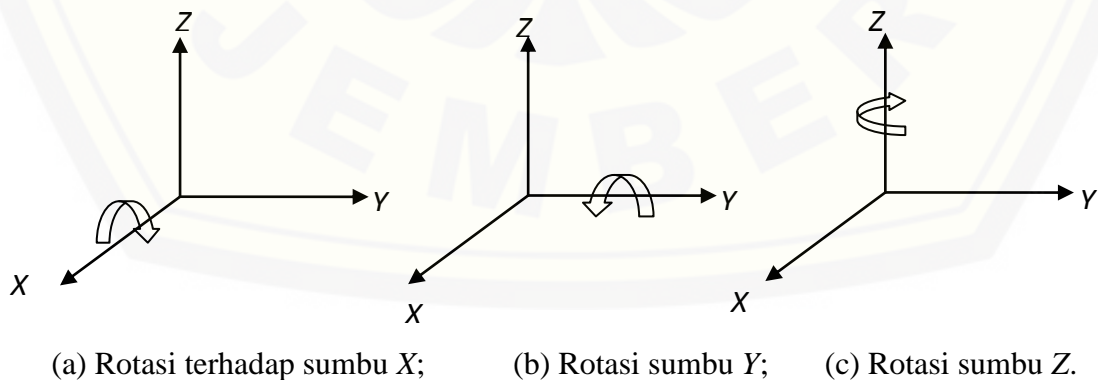
## 2.5 Operasi Geometri

Pada bagian ini dipelajari masalah transformasi titik dari  $R^3$  ke  $R^3$ . Transformasi tersebut terdiri atas rotasi (perputaran), translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), dan dilatasi (penskalaan). Sehubungan dengan keperluan penelitian ini, penulis hanya membahas masalah rotasi, translasi, dan dilatasi.

### 2.5.1 Rotasi

Rotasi di  $R^3$  dapat dilakukan dengan memilih salah satu sumbu koordinat sebagai sumbu putar. Dalam  $R^3$  dikenal 2 sistem koordinat, yaitu sistem koordinat tangan kanan dan sistem koordinat tangan kiri, pada sistem koordinat tangan kanan, rotasi bersudut positif dinyatakan sebagai berlawananannya arah rotasi dengan putaran jarum jam. Model rotasi di sumbu XYZ diperlihatkan pada Gambar 2.8.

Apabila  $\alpha$  menunjukkan besarnya sudut rotasi dengan titik pangkal rotasi  $O(0,0,0)$  maka rotasi terhadap masing-masing sumbu dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut Tabel 2.1.



Gambar 2.8 Ilustrasi rotasi pada sistem koordinat



Tabel 2.1 Matriks Rotasi

No.	Bentuk Rotasi	Matriks Rotasi
1.	Rotasi terhadap sumbu X	$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$
2.	Rotasi terhadap sumbu Y	$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$
3.	Rotasi terhadap sumbu Z	$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$

### 2.5.2 Translasi

Translasi adalah perpindahan kedudukan sebarang titik dengan penambahan besaran pada arah sumbu  $X$ ,  $Y$  dan  $Z$ . Secara umum, translasi dapat dinyatakan oleh persamaan  $Q = P + K$ , dimana  $P$  adalah posisi titik awal,  $Q$  adalah posisi titik setelah ditranslasikan dan  $K$  menunjukkan besarnya pergeseran ke arah sumbu  $X$ ,  $Y$  dan  $Z$ . Persamaan translasi dalam bentuk matriks dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} x_q & y_q & z_q \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

atau dalam bentuk koordinat kartesius dapat dituliskan sebagai

$$(x_q, y_q, z_q) = (x_p + x_k, y_p + y_k, z_p + z_k) \quad (2.9)$$

Translasi bersifat mempertahankan bentuk dan ukuran objek (Kusno, 2002).

### 2.5.3 Dilatasi

Transformasi dilatasi yang memetakan titik  $P(x,y,z)$  ke  $P'(x',y',z')$  didefinisikan dengan bentuk formulasi berikut

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} = (k_1x \quad k_2y \quad k_3z) \quad (2.10a)$$

atau

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1x \\ k_2y \\ k_3z \end{pmatrix}. \quad (2.10b)$$

Dalam hal ini pemilihan harga  $k_1$  menyajikan skala kearah sumbu  $X$ ,  $k_2$  kearah skala sumbu  $Y$  dan  $k_3$  menyajikan skala kearah sumbu  $Z$ . Jika  $k_1 = k_2 = k_3$ , maka peta obyek yang didapat sebangun dengan obyek aslinya (mungkin diperbesar, diperkecil atau tetap).

## 2.6 Permukaan Implisit, Parametrik, dan Interpolasi Linier Dua Kurva

Permukaan bentuk implisit dan parametrik dari bentuk standar dapat diformulasikan sebagai berikut (Kusno, 2009).

a). Persamaan umum bidang  $\tau$  adalah:

$$\tau \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2.11)$$

dengan  $A$ ,  $B$ , dan  $C$  bilangan real.

b). Persamaan bola berpusat di  $P(a,b,c)$  dinyatakan oleh

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2.12)$$

dengan  $A = -2a$ ,  $B = -2b$ ,  $C = -2c$ ,  $D = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$ .

c). Persamaan permukaan hiperboloida:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (2.13)$$

d). Persamaan permukaan paraboloida eliptik:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - cz = 0. \quad (2.14)$$

e). Bola dengan jari-jari  $R$  berpusat di  $(x_1, y_1, z_1)$ :

$$\mathbf{B}(u,v) = \langle R \cdot \sin v \cos u + x_1, R \cdot \sin v \cdot \sin u + y_1, R \cdot \cos v + z_1 \rangle. \quad (2.15)$$

f). Silinder (terbuka) jari-jari  $R$  melalui sumbu  $(x_1, y_1, z_1)$ :

$$\mathbf{S}_T(u, v) = \langle R \cdot \cos u + x_1, R \cdot \sin u + y_1, z = c \cdot v \rangle. \quad (2.16)$$

g). Bidang lingkaran jari-jari  $R$  berpusat di  $(x_1, y_1, z_1)$  dan berketinggian  $z_1$ :

$$\mathbf{B}_L(u, v) = \langle R \cdot u \cdot \cos v + x_1, R \cdot u \cdot \sin v + y_1, z_1 \rangle. \quad (2.17)$$

h). Paraboloida:  $\mathbf{P}(u, v) = \langle R \cdot v \cdot \cos u + x_1, R \cdot v \cdot \sin u + y_1, R_1 \cdot v^2 + z_1 \rangle.$  (2.18)

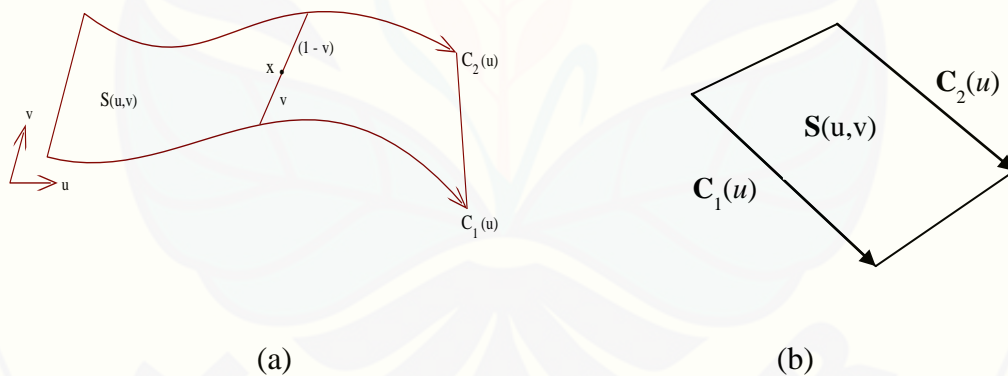
i). Hiperboloida (daun satu) berpusat di  $(x_1, y_1, z_1)$ :

$$\mathbf{H}(u, v) = \langle (\cos u - v \cdot \sin u) + x_1, (\sin u + v \cdot \cos u) + y_1, v + z_1 \rangle. \quad (2.19)$$

Permukaan interpolasi linier dua kurva atau permukaan garis  $\mathbf{S}(u, v)$  dibangkitkan oleh dua kurva parametrik  $\mathbf{C}_1(u)$  dan  $\mathbf{C}_2(u)$  kelas  $C^{n \geq 1}$  dalam bentuk terparametrisasi (Gambar 2. 9a)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(u, v) &= \mathbf{C}_1(u) + v \mathbf{g}(u) \text{ dengan } \mathbf{g}(u) = \mathbf{C}_2(u) - \mathbf{C}_1(u) \\ &\text{atau} \\ \mathbf{S}(u, v) &= (1-v) \mathbf{C}_1(u) + v \mathbf{C}_2(u) \end{aligned} \quad (2.20)$$

dengan  $a \leq u \leq b$  dan  $c \leq v \leq d$ . Jika  $\mathbf{C}_1(u)$  dan  $\mathbf{C}_2(u)$  berupa garis maka hasil interpolasi mendapatkan potongan bidang dengan kurva batas kedua kurva tersebut (Gambar 2.9b).



Gambar 2.9 permukaan interpolasi linier dua kurva atau permukaan garis

## 2.7 Konstruksi Obyek pada Program Maple 12.0

Pada subbab ini dijelaskan beberapa contoh bahasa yang digunakan pada Program Maple 8 untuk mengkonstruksi sebuah objek geometri. Adapun contoh programnya sebagai berikut.

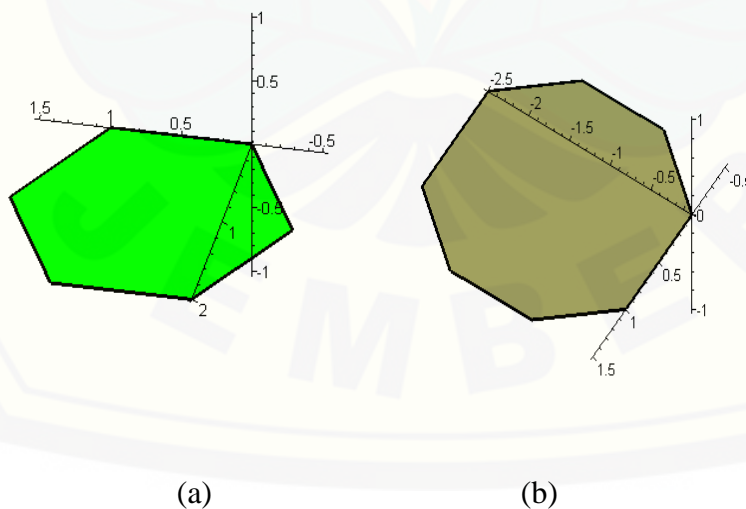
### 1. Kontruksi Poligon

Untuk membangun poligon dengan Maple 12.0, pertama ditetapkan data titik poligon misalnya  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Selanjutnya pada masing-masing segmen garis  $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$  dihubungkan secara berurutan. Sebagai contoh untuk membangun segi enam konveks dengan data titik  $A(0,0,0), B(1,0,0), C(1.5,1,0), D(1,2,0), E(0,2,0)$ , dan  $F(-0.5,1,0)$  kita dapat gunakan perintah sebagai berikut (Gambar 2.10a).

```
> restart;
> with(plottools):
> a:=polygon([[0,0,0],[1,0,0],[1.5,1,0],[1,2,0],[0,2,0],
            [-0.5,1,0]], color=green, thickness=3);
plots[display](a);
```

Selanjutnya untuk data 6 titik yang lain dan mengikuti perintah yang sama, diperoleh hasil seperti dalam Gambar 2.10b.

```
> b:=polygon([[0,0,0],[1,0,0],[1.5,-0.75,0],[1.5,-1.75,0],
            [1,-2.5,0],[0,-2.5,0],[-0.5,-1.75,0],
            [-0.5,-0.75,0]],color=khaki, thickness=3);
plots[display](b);
```



Gambar 2.10 poligon segi enam dan segi delapan

## 2. Konstruksi Permukaan Interpolasi Linier

*Syntax* untuk memvisualisasikan permukaan parametrik didefinisikan sebagai pernyataan berikut.

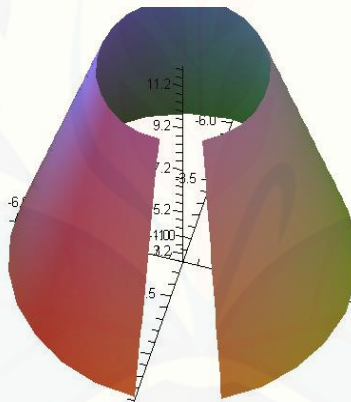
```
plot3d([exprf, exprg, exprh], s=a..b, t=c..d, opts)
```

*exprf,exprg,exprh: expressions in s and t*

Sebagai contoh untuk menggambar permukaan interpolasi linier dibatasi oleh 2 (dua) lingkaran  $\langle 3.\cos(u), 3.\sin(u),12 \rangle$  dan  $\langle 6.\cos(u), 6.\sin(u),3 \rangle$  dinyatakan dalam bentuk:

```
plot3d([v*3.cos(u)+(1-v)*6.cos(u),v*3.sin(u)+  
(1-v)*6.sin(u),v.12+(1-v).3],  
u=0,5..2.π,v=0..1,labels=[X,Y,Z].
```

Hasil dari eksekusi *syntax* tersebut ditunjukkan oleh Gambar 2.11.



Gambar 2.11 Permukaan interpolasi linier

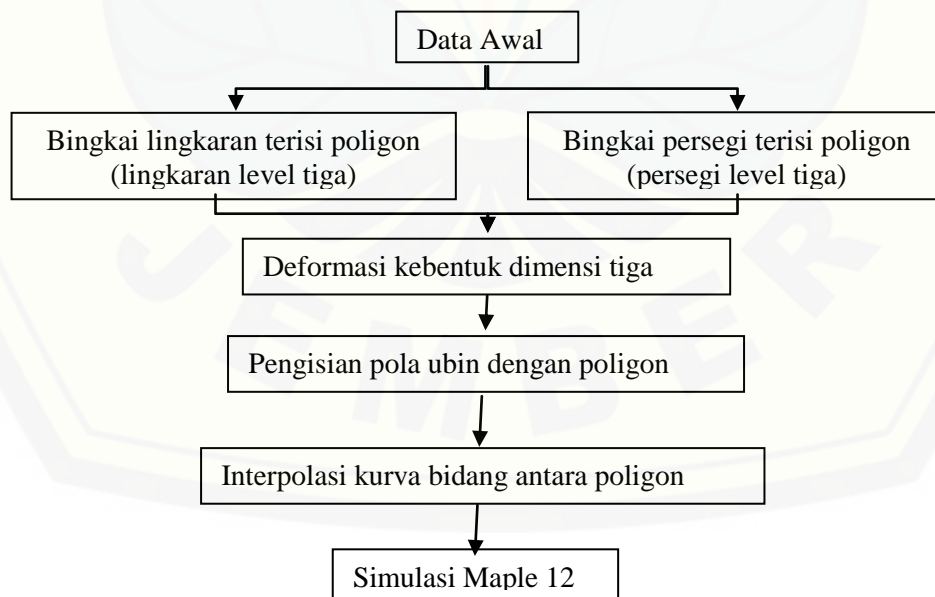


### BAB 3. METODE PENELITIAN

Berdasarkan permasalahan penelitian pada bagian 1.2, penelitian ini dilaksanakan dengan langkah–langkah sebagai berikut.

1. sebagai data awal ditetapkan data lingkaran dengan pusat  $O(x_0, y_0, z_0)$  berjari-jari  $a$  satuan dan persegi  $ABCD$  bersisi  $a$  satuan berpusat dititik  $O$ .
2. menetapkan bingkai lingkaran dan persegi dari data langkah (1) ke dalam tiga level dan mengisi poligon segi enam beraturan ke dalam masing-masing level tersebut;
3. poligon yang tersusun hasil perlakuan (3) dideformasikan kebentuk bangun ruang dimensi tiga. Dalam hal ini data berupa kurva batas pola poligon segi enam tiga level dibidang  $XOY$ . Masing-masing kurva batas dilakukan deformasi bentuk dengan cara mentranslasikannya kearah sumbu  $Z$  berketinggian berbeda. Selanjutnya, dilakukan dilatasi kearah sumbu  $X$  dan  $Y$  berpusat di sumbu  $Z$  dan hasil dari deformasi ini akhirnya diinterpolasikan antar kurva batas untuk mendapatkan bentuk permukaan atau diisi benda ruang dari formula (2.11) sampai dengan (2.19) agar didapatkan benda ruang yang bevariasi.
4. menyusun program simulasi dan visualisasi model dengan menggunakan program maple 12.0

Mekanisme kerja dari keempat langkah tersebut diperlihatkan dalam skema berikut (Gambar 3.1) .



Gambar 3.1 Skema mekanisme kerja penelitian



## BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai solusi masalah rancang bangun permukaan benda ruang melalui pola ubin segi enam beraturan dengan menggunakan bingkai dasar lingkaran dan persegi. Tahapannya sebagai berikut, pertama, membangkitkan data pola ubin segi enam dalam bingkai lingkaran dan persegi. Kedua, konstruksi permukaan benda ruang berdasar pola ubin segi enam beraturan. Ketiga, mendiskusikan hasil penelitian untuk mengetahui beberapa keuntungan ataupun kelemahan atas metode/prosedur yang diperkenalkan tersebut. Adapun uraian detailnya adalah sebagai berikut.

### 4.1 Pembangkitan Data Pola Ubin Segi Enam Beraturan dalam Bingkai Lingkaran dan Persegi

Untuk membangun permukaan benda ruang dalam koordinat  $XOZ$  melalui pola ubin dalam bingkai dasar lingkaran dan persegi bidang  $XOY$  pada dasarnya mengikuti pola ubin yang telah dikembangkan oleh Dina Widiastuti(2014). Dari data pola ubin di bidang  $XOY$  tersebut kemudian dibangun benda ruang dengan ketinggian mengikuti sumbu  $Z$  melalui titik pusat  $O(0,0)$ . Langkah-langkahnya berikut ini.

#### a. Pembagian Daerah Lingkaran dan Persegi

##### • Kasus Lingkaran

Ditetapkan lingkaran berpusat di  $O(x_0, y_0, 0)$  dan kita tetapkan tiga lingkaran sebanyak 3 (tiga) level masing-masing berjari-jari  $r_1$ ,  $r_2$ , dan  $r_3$  dimana  $15 < r_1 < 40$ ,  $15 < r_2 < 40$  dan  $15 < r_3 < 40$  (Gambar 4.1a). Selanjutnya dilakukan pengisian beberapa poligon ke dalam daerah sub-sub lingkaran tersebut sebagai berikut.

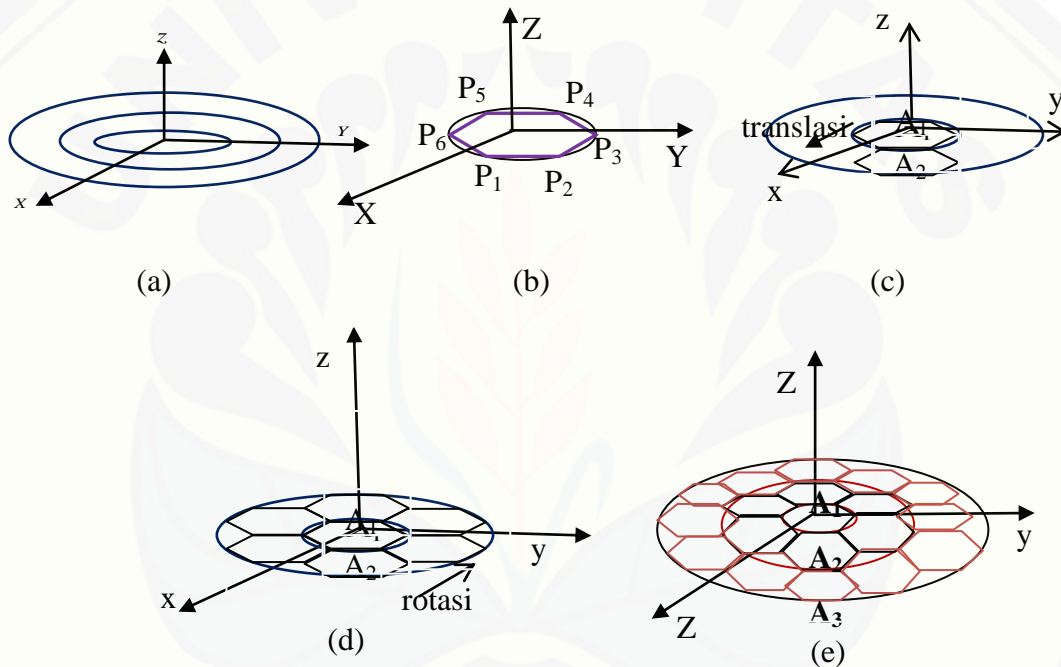
1. Dengan persamaan (2.8) menetapkan titik awal poligon segi-6  $P_1P_2...P_6$  masing-masing berkoordinat/berimpit dengan

$$P_1 \langle r_1 \cos 240, r_1 \sin 240, 0 \rangle, P_2 \langle r_1 \cos 300, r_1 \sin 300, 0 \rangle,$$

$$P_3 \langle r_1 \cos 360, r_1 \sin 360, 0 \rangle, P_4 \langle r_1 \cos 60, r_1 \sin 60, 0 \rangle,$$

$$P_5 \langle r_1 \cos 120, r_1 \sin 120, 0 \rangle, P_6 \langle r_1 \cos 180, r_1 \sin 180, 0 \rangle.$$

2. Translasikan  $P_1P_2...P_6$  level-1 yaitu  $\tilde{A}$  ke arah sumbu  $X$  positif sejauh  $X_A$  seperti terlihat pada Gambar 4.1c.
3. Poligon segi-6 level-2 yaitu  $\tilde{A}_2$  yang berpusat di  $O(x_0, y_0, 0)$  dirotasikan  $100^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 3100^\circ$  dengan arah berlawanan jarum jam terlihat pada Gambar 4.1d.
4. Lakukan transformasi rotasi  $30^\circ, 100^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 3100^\circ$  untuk obyek segi enam level-3 yaitu  $A_3$  seperti terlihat pada Gambar 4.1e.



Gambar 4.1 Langkah-langkah desain pola ubin segi-6 bingkai lingkaran

• **Kasus Persegi**

Ditetapkan persegi  $ABCD$  dengan  $A(x_A, y_B, 0), B(x_B, y_B, 0), C(x_C, y_C, 0), D(x_D, y_D, 0)$  berpusat di  $P(0,0,0)$ . Persegi  $ABCD$  mempunyai bingkai level-3 dengan panjang sisi  $l_1, l_2,$  dan  $l_3$  (Gambar 4.2a).. Selanjutnya seperti pada teknik kasus lingkaran dilakukan pengisian beberapa poligon ke dalam daerah sub-sub persegi tersebut sebagai berikut.

1. Dengan persamaan (2.8) menetapkan titik awal poligon segi-6  $P_1P_2...P_6$  berkoordinat:

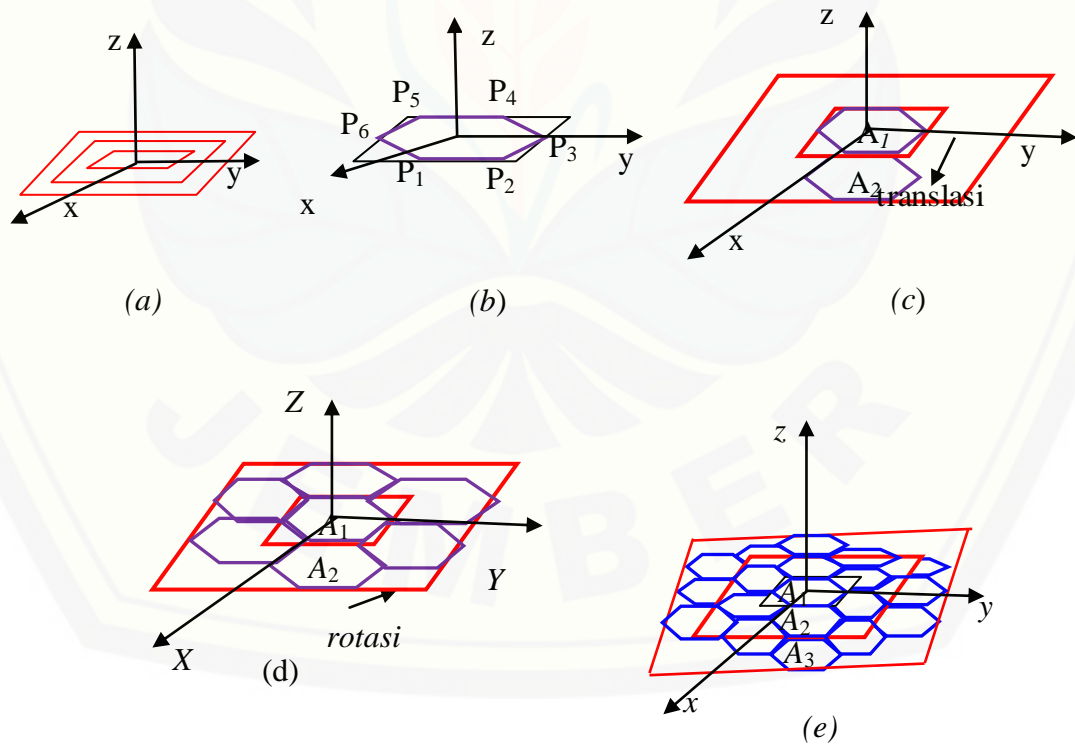
$$P_1 \langle l_1 \cos 240, l_1 \sin 240, 0 \rangle, P_2 \langle l_1 \cos 300, l_1 \sin 300, 0 \rangle,$$

$$P_3 \langle l_1 \cos 360, l_1 \sin 360, 0 \rangle, P_4 \langle l_1 \cos 60, l_1 \sin 60, 0 \rangle,$$

$$P_5 \langle l_1 \cos 120, l_1 \sin 120, 0 \rangle, P_6 \langle l_1 \cos 180, l_1 \sin 180, 0 \rangle$$

seperti terlihat pada Gambar 4.2b dan poligon ini disebut sebagai poligon level  $A_1$ .

2. Translasikan  $P_1P_2...P_6$  level-1 yaitu  $\vec{A}$  ke arah sumbu  $X$  positif sejauh  $X_A = l_1 \sin 240^\circ$  dengan seperti terlihat pada Gambar 4.2c;
3. Poligon segi-6 level-2 yaitu  $\vec{A}_2$  yang berpusat di  $P(0,0,0)$  dirotasikan  $100^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 3100^\circ$  dengan arah berlawanan jarum jam (Gambar 4.2d).
4. Lakukan transformasi rotasi  $30^\circ, 100^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 3100^\circ$  untuk obyek segi enam level-3 yaitu  $A_3$  seperti terlihat pada Gambar 4.2e.



Gambar 4.2 Langkah-langkah desain pola ubin segi-6 bingkai persegi

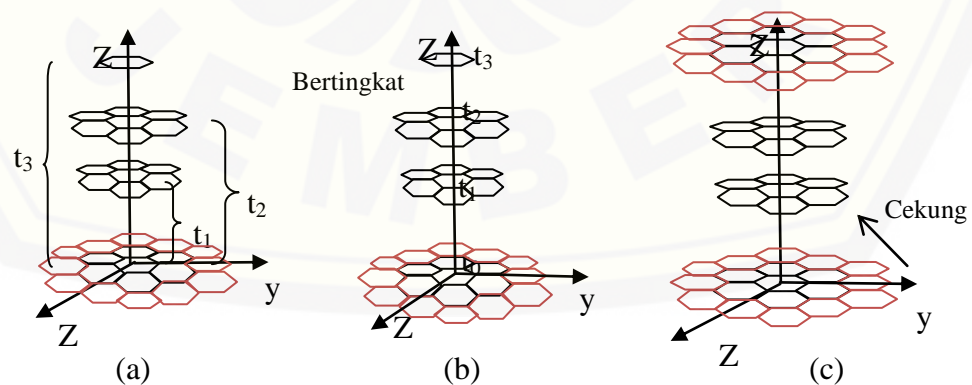
## 4.2 Konstruksi Permukaan Benda Ruang Berdasar Pola Ubin Segi Enam Beraturan

Berdasarkan data pola ubin segi enam dalam bingkai lingkaran ataupun persegi Gambar 4.1e dan Gambar 4.2e, selanjutnya dibangun permukaan benda ruang melalui metode translasi kurva batas pola ubin ke arah vertikal, ke arah vertikal dan horisontal, serta variasi kelengkungan permukaan. Langkah-langkah konstruksi dari masing-masing model tersebut diuraikan sebagai berikut.

### 4.2.1 Metode Translasi Kurva Batas ke Arah Vertikal

Untuk membangun bentuk permukaan benda ruang menggunakan cara translasi kurva batas pola ubin menurut Gambar 4.1e dan Gambar 4.2e ke arah vertikal dapat dilakukan berikut ini.

1. Menetapkan jumlah kurva batas (dipilih maksimal 4 buah) untuk digunakan ketinggian masing-masing komponen benda yang akan dibentuk (Gambar 4.3a). Pada ketinggian  $z = 0 = t_0$  disebut kurva batas  $C_0$ , di  $z = t_1$  disebut kurva batas  $C_1$ , pada  $z = t_2$  disebut kurva batas  $C_2$ , dan di  $z = t_3$  disebut kurva batas  $C_3$ . Dalam hal ini ditetapkan  $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 100$ .
2. Mentranslasikan kurva batas pola poligon  $A_1$ ,  $A_2$ , dan  $A_3$  (bagian luar) dari alas ke arah vertikal (sumbu Z positif) agar diperoleh bentuk benda menjadi simetris dan indah dengan cara antara lain sebagai berikut.
  - a. Kasus pola bertingkat/mengerucut.  
 Dalam pola ini kurva batas poligon  $A_1$ ,  $A_2$ , dan  $A_3$  harus disusun vertikal mengikuti urutan dari ukuran yang terbesar menuju kecil atau sebaliknya (Gambar 4.3b).
  - b. Kasus pola cekung/cembung.  
 Pola cekung/cembung dapat dibangun dengan cara menyusun kurva batas poligon  $A_1$ ,  $A_2$ , dan  $A_3$  secara vertikal dari urutan besar ke kecil, kemudian ke ukuran besar atau sebaliknya (Gambar 4.3c).



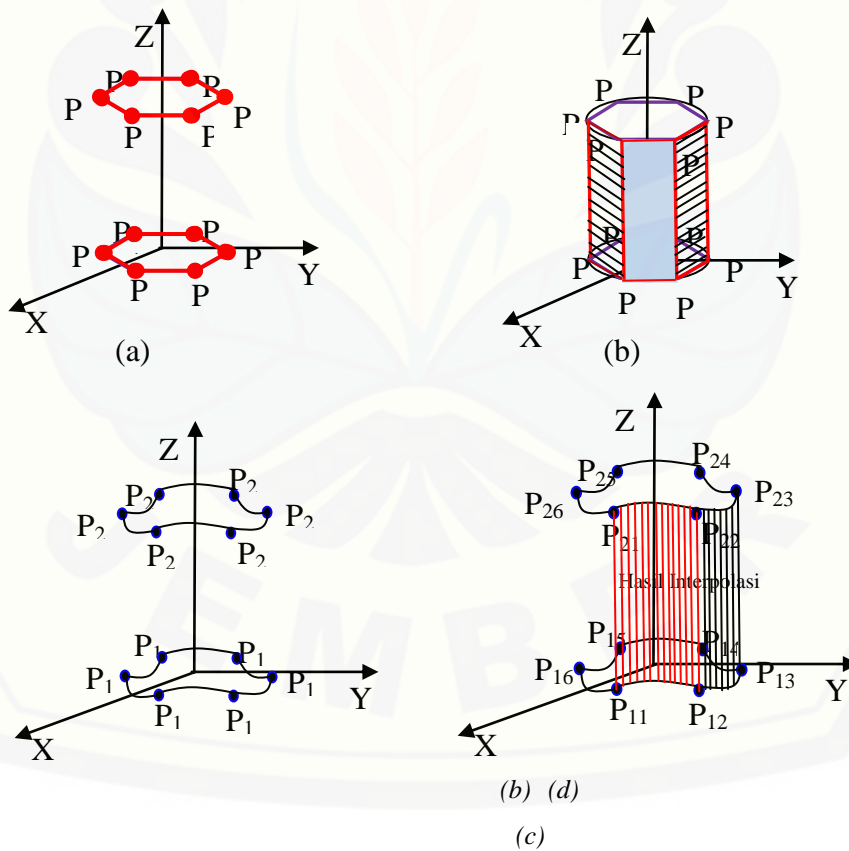
Gambar 4.3 Beberapa contoh pola bertingkat mengerucut dan cekung

3. Membangun permukaan interpolasi antara beberapa dua kurva batas bentuk pola  $A_1$ ,  $A_2$ , dan  $A_3$  berdekatan dengan formula (2.20). Tekniknya antara lain sebagai berikut.

a. Kasus interpolasi antara dua kurva batas bentuk pola  $A_1$  dengan  $A_1$ .

Beberapa pilihan untuk menginterpolasikan dua kurva batas bentuk pola  $A_1$  dengan  $A_1$  dengan label data  $[P_{11}, P_{12}, \dots, P_{16}]$  dan  $[P_{21}, P_{22}, \dots, P_{26}]$  seperti dalam Gambar 4.4a dapat ditetapkan sebagai berikut:

- i). Pasangan segmen  $[P_{11} P_{12}, P_{21} P_{22}]$ ,  $[P_{12} P_{13}, P_{22} P_{23}]$ ,  $[P_{13} P_{14}, P_{23} P_{24}]$ ,  $[P_{14} P_{15}, P_{24} P_{25}]$ ,  $[P_{15} P_{16}, P_{25} P_{26}]$ , dan  $[P_{16} P_{11}, P_{26} P_{21}]$ , diinterpolasikan secara linier (Gambar 4.4b).
- ii). Pasangan segmen  $[P_{11} P_{12}, P_{21} P_{22}]$ ,  $[P_{12} P_{13}, P_{22} P_{23}]$ ,  $[P_{13} P_{14}, P_{23} P_{24}]$ ,  $[P_{14} P_{15}, P_{24} P_{25}]$ ,  $[P_{15} P_{16}, P_{25} P_{26}]$ , dan  $[P_{16} P_{11}, P_{26} P_{21}]$ , masing-masing dibuat busur lingkaran berpusat  $(0,0,0)$  dan  $(0,0,t)$  kemudian diinterpolasikan secara linier (Gambar 4.4c).
- iii). Dari kasus (i) dan (a) interpolasi terhadap pasangan segmen dilakukan secara bergantian (Gambar 4.4d).



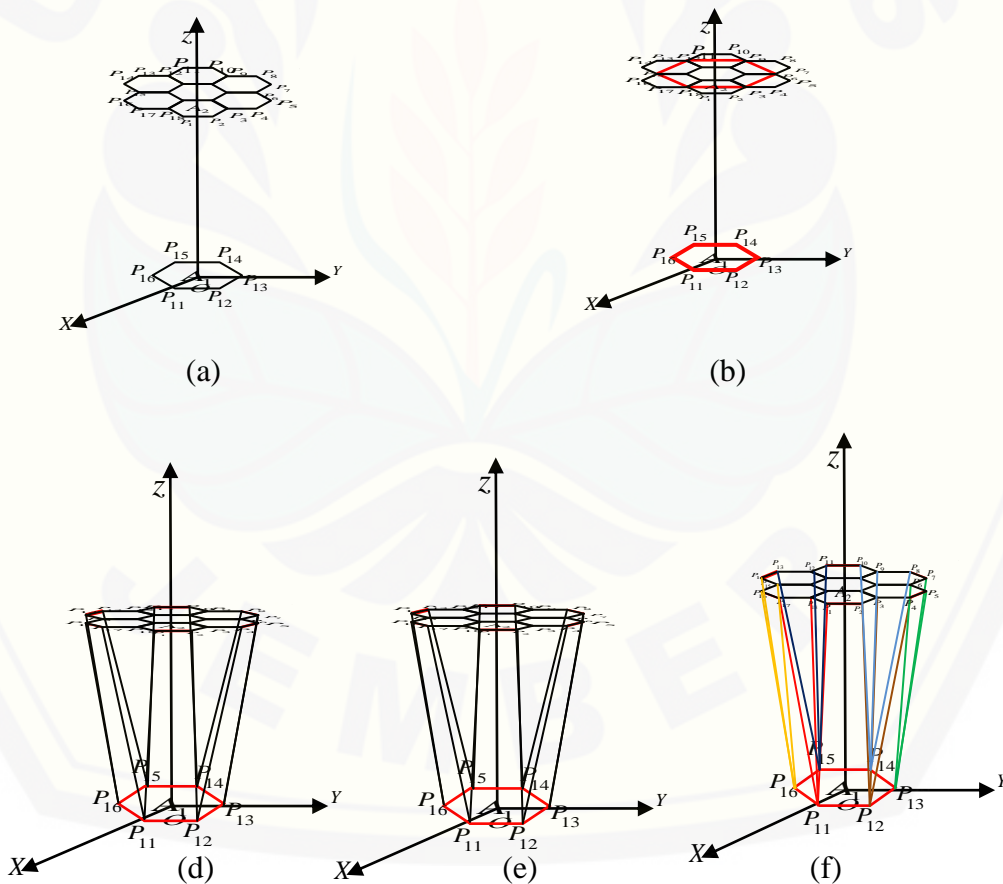
Gambar 4.4 Beberapa contoh interpolasi bentuk Pola  $A_1$  dengan  $A_1$



b. Kasus interpolasi antara dua kurva batas  $A_1$  dengan  $A_2$ .

Beberapa pilihan untuk menginterpolasikan dua kurva batas bentuk pola  $A_1$  dengan  $A_2$  dengan label data  $[P_{11}, P_{12}, \dots, P_{16}]$  dan  $[P_1, P_2, \dots, P_{18}]$  seperti dalam Gambar 4.5a dapat ditetapkan sebagai berikut:

- i). Pasangan segmen  $[P_{11} P_{12}, P_{18} P_3]$ ,  $[P_{12} P_{13}, P_3 P_6]$ ,  $[P_{13} P_{14}, P_6 P_9]$ ,  $[P_{14} P_{15}, P_9 P_{12}]$ ,  $[P_{15} P_{16}, P_{12} P_{15}]$ , dan  $[P_{16} P_{11}, P_{15} P_{18}]$ , diinterpolasikan secara linier (Gambar 4.5b) atau menggunakan teknik busur lingkaran (Gambar 4.5c).
- ii). Pasangan segmen  $[P_{11} P_{12}, P_1 P_2]$ ,  $[P_{12} P_{13}, P_4 P_5]$ ,  $[P_{13} P_{14}, P_7 P_8]$ ,  $[P_{14} P_{15}, P_{10} P_{11}]$ ,  $[P_{15} P_{16}, P_{13} P_{14}]$ , dan  $[P_{16} P_{11}, P_{16} P_{17}]$  dalam Gambar 4.5d, masing-masing diinterpolasikan secara linier (Gambar 4.5e) dan pasangan  $[P_{11}, P_{17} P_{18} P_1]$ ,  $[P_{12}, P_2 P_3 P_4]$ , ...,  $[P_{16}, P_{14} P_{15} P_{16}]$  dalam Gambar 4.5f.



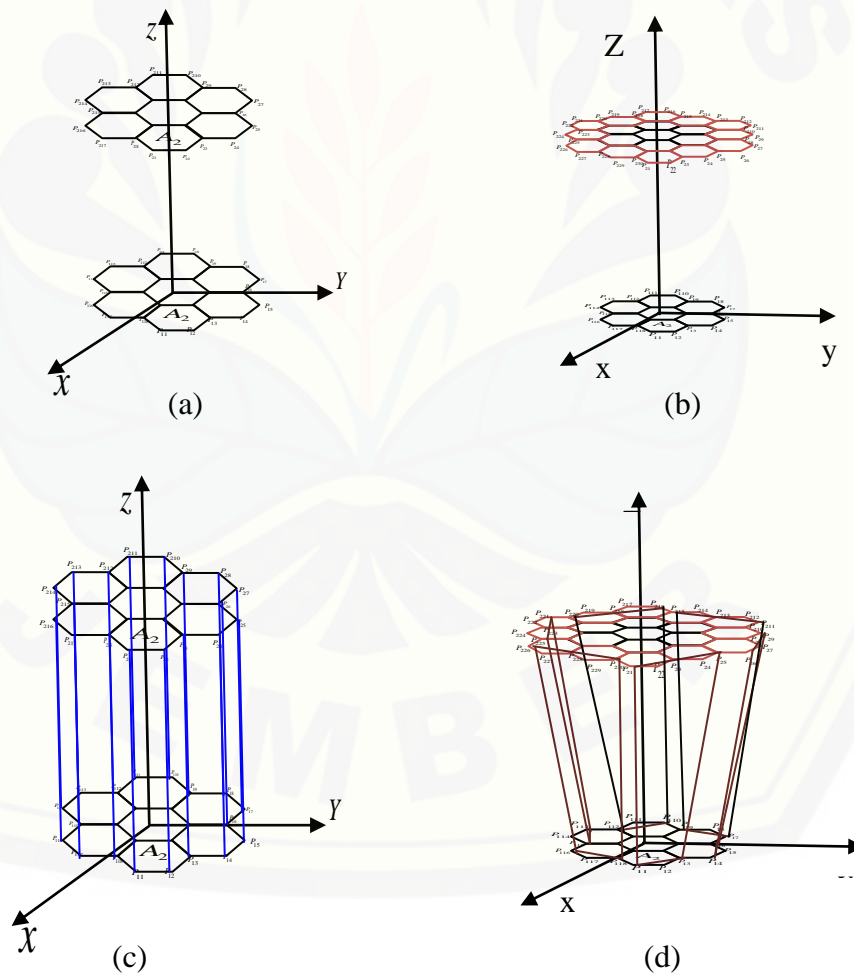
Gambar 4.5 Beberapa contoh interpolasi bentuk Pola  $A_1$  dengan  $A_2$



c. Kasus interpolasi antara dua kurva batas  $[A_2, A_2]$  dan  $[A_2, A_3]$

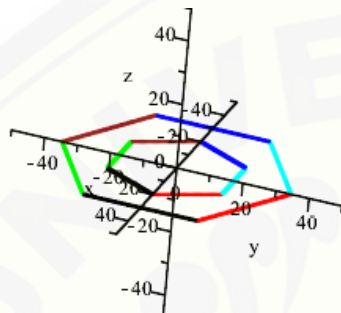
Beberapa pilihan interpolasi dua kurva batas  $A_2$  dengan  $A_2$  dengan label data  $[P_{11}, P_{12}, \dots, P_{118}]$  dan  $[P_{21}, P_{22}, \dots, P_{218}]$  seperti dalam Gambar 4.6a serta dua kurva batas  $A_2$  dengan  $A_3$  dengan label data  $[P_{11}, P_{12}, \dots, P_{118}]$  dan  $[P_{21}, P_{22}, \dots, P_{230}]$  dapat ditetapkan sebagai berikut:

- i). Pasangan segmen  $[P_{11} P_{12}, P_{21} P_{22}]$ ,  $[P_{12} P_{13}, P_{22} P_{23}]$ ,  $[P_{13} P_{14}, P_{23} P_{24}]$ , ..., dan  $[P_{118} P_{11}, P_{218} P_{21}]$ , diinterpolasikan secara linier (Gambar 4.6b) atau menggunakan teknik busur lingkaran.
- ii). Pasangan segmen  $[P_{11} P_{13}, P_{21} P_{25}]$ ,  $[P_{14} P_{16}, P_{26} P_{210}]$ ,  $[P_{17} P_{19}, P_{211} P_{215}]$ ,  $[P_{110} P_{112}, P_{116} P_{220}]$ ,  $[P_{113} P_{115}, P_{221} P_{225}]$ , dan  $[P_{117} P_{111}, P_{226} P_{230}]$  dalam Gambar 4.5d, masing-masing diinterpolasikan secara linier (Gambar 4.6c dan pasangan  $[P_{13}, P_{22} P_{23} P_{24} P_{25} P_{26}]$ ,  $[P_{16}, P_{27} P_{28} P_{29} P_{210} P_{211}]$ , ...,  $[P_{118}, P_{227} P_{228} P_{229} P_{230} P_{21}]$  dalam Gambar 4.6d.

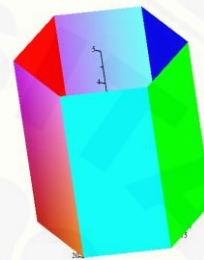


Gambar 4.6 Beberapa contoh interpolasi Pola  $[A_2, A_2]$  dan  $[A_2, A_3]$

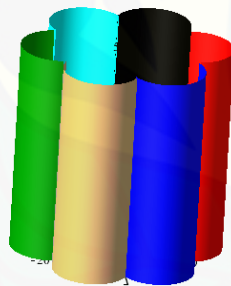
Untuk validasi teknik ini, pertama, dalam Gambar 4.7a diperlihatkan kurva batas data pola poligon level A1 dan A2 (Lampiran 1). Selanjutnya dari data tersebut beberapa kurva batas dilakukan translasi ke arah ketinggian sumbu Z secara berbeda dan diantara kurva batas dilakukan interpolasi linier untuk membangun permukaan benda ruang seperti dalam Gambar 4.7b,c,d (Lampiran 2). Untuk contoh aplikasi sederhana dari penggunaan translasi vertikal, diperlihatkan bentuk model pilar Gambar 4.7e (Lampiran 3).



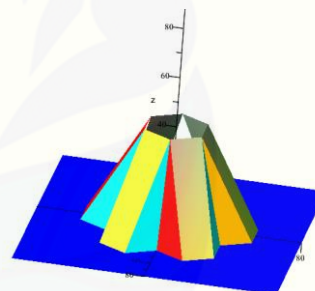
(a) Data



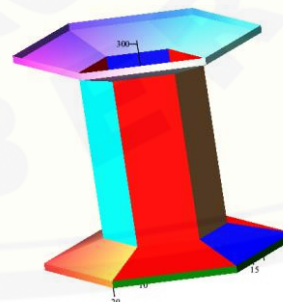
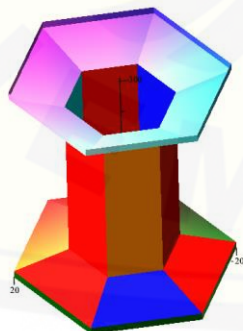
(b) Interpolasi translasi vertikal datar



(c) Interpolasi translasi vertikal lengkung



(d) Interpolasi level A1 dengan A2



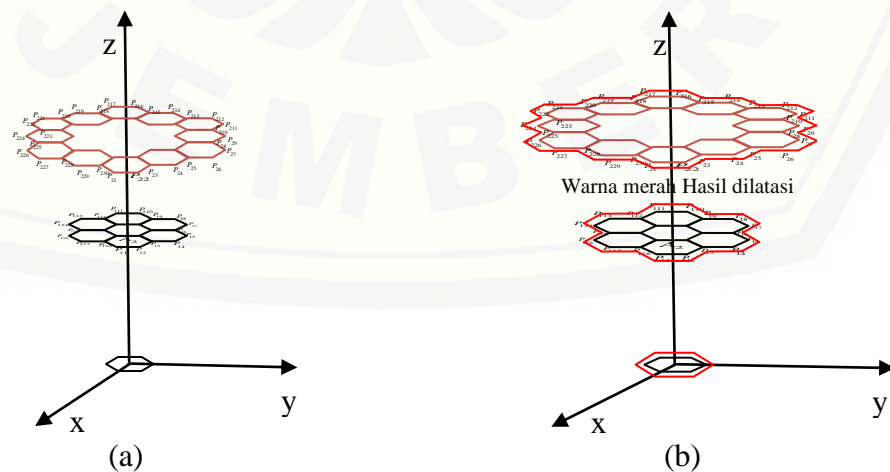
(e)

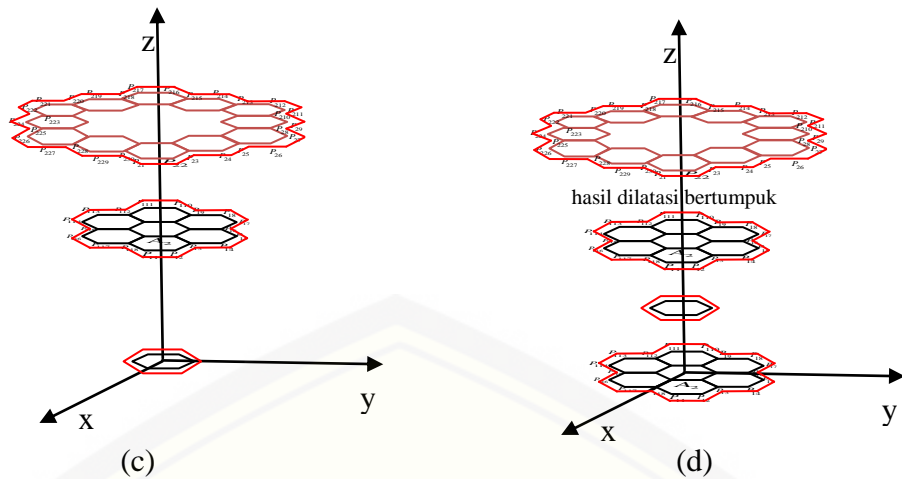
Gambar 4.7 Contoh permukaan benda ruang hasil translasi vertikal

#### 4.2.2 Metode Translasi Kurva Batas ke Arah Vertikal dan Dilatasi Horisontal

Dalam membangun bentuk permukaan benda ruang menggunakan cara translasi kearah vertikal dan dilatasi horisontal kurva batas pola ubin menurut Gambar 4.1e dan Gambar 4.2e dapat dilakukan sebagai berikut.

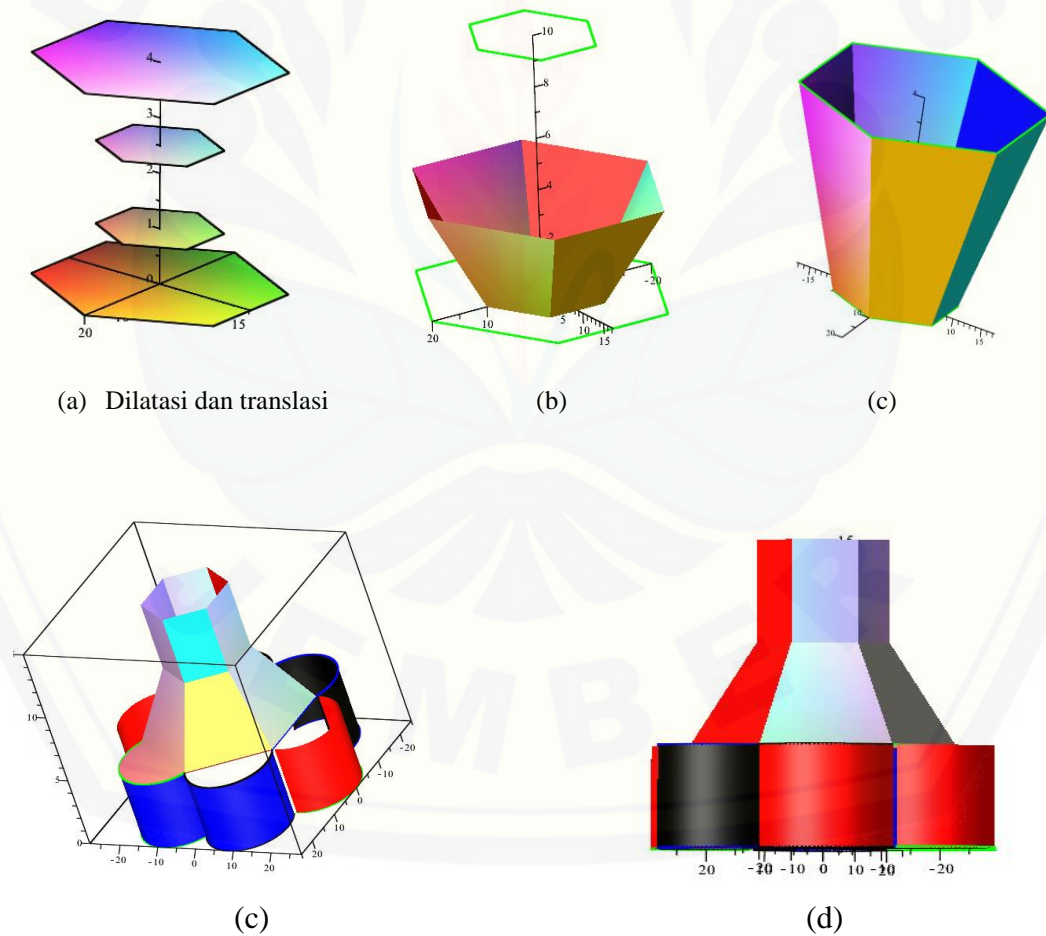
1. Menetapkan jumlah kurva batas (dipilih maksimal 4 buah:  $C_0, C_1, \dots, C_4$ ) untuk digunakan ketinggian  $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 100$  masing-masing komponen benda yang akan di bentuk dan kemudian mentranslasikan kurva batas pola poligon  $A_1, A_2$ , dan  $A_3$  menurut ketinggian yang sudah ditetapkan seperti pada langkah (1) dan (2) pada bagian 4.2.1.
2. Mendilatasi beberapa kurva batas pada ketinggian  $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_3$  dengan cara sebagai berikut.
  - a. Dari masing-masing kurva batas untuk pola poligon  $A_1, A_2$ , dan  $A_3$  , yaitu  $[P_1, P_2, \dots, P_6]$  ,  $[P_1, P_2, \dots, P_{218}]$  dan  $[P_1, P_2, \dots, P_{30}]$  berpusat pada masing-masing ketinggian  $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_3$  didelatasi terhadap titik-titik sudut dari kurva batas tersebut sejauh k satuan sehingga diperoleh kurva batas baru  $A'_1, A'_2$ , dan  $A'_3$  yang lebih besar/kecil ukurannya terhadap yang lama (Gambar 4.8a). Perbedaan ukuran dari masing-masing kurva batas ini berguna untuk mendefinisikan ketebalan permukaan dari masing-masing komponen benda (Gambar 4.8b).
  - b. dengan menggunakan seperti cara (a), tetapi memilih beberapa kurva batas dengan ketinggian berbeda, untuk membentuk struktur benda menjadi berukuran simetri /berimbang ke arah tegak (Gambar 4.8c).
  - c. seperti pada cara (b), menyusun hasil dilatasi untuk membentuk beberapa komponen benda memiliki penampang/bertumpuk (Gambar 4.8d).
3. Membangun permukaan interpolasi antara beberapa dua kurva batas berdekatan hasil perlakuan (2) melalui metode yang telah diperkenalkan pada langkah (3) dalam bagian 4.2.1 atau dengan permukaan formula (2.11) samapi (2.19).





Gambar 4.8 Contoh permukaan hasil translasi-dilatasi kurva batas pola poligon

Validasi contoh hasil konstruksi benda ruang dengan menggunakan metode translasi-dilatasi kurva batas pola poligon ke arah vertikal diperlihatkan dalam Gambar 4.9 (programasi ditunjukkan dalam Lampiran 4).



Gambar 4.9 Visualisasi permukaan hasil translasi-dilatasi kurva batas

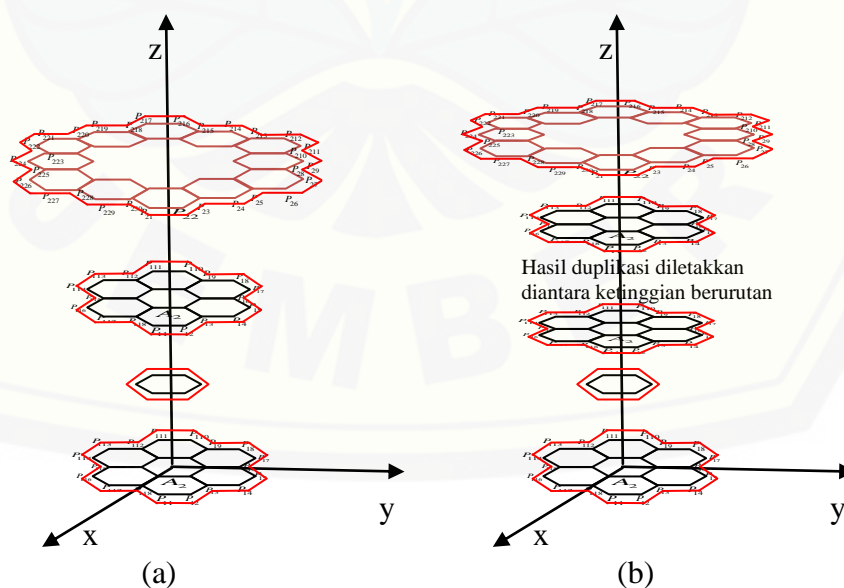


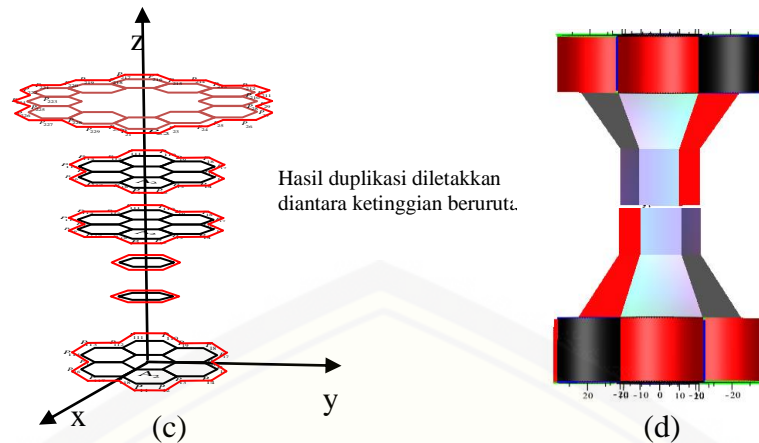
#### 4.2.3 Metode Variasi Kelengkungan Permukaan

Dalam membangun bentuk permukaan benda ruang menggunakan cara variasi kelengkungan permukaan dapat dilakukan sebagai berikut.

1. Menetapkan jumlah kurva batas (dipilih maksimal 4 buah:  $C_0, C_1, \dots, C_4$ ) dengan ketinggian  $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 100$  dan data kurva batasnya berpola poligon  $A_1, A_2$ , dan  $A_3$  menurut ketinggian yang sudah ditetapkan seperti panda langkah (1) pada bagian 4.2.1.
2. Mentranslasikan kurva batas pola poligon  $A_1, A_2$ , dan  $A_3$  (bagian luar) dari alas ke arah vertikal (sumbu  $Z$  positif) agar diperoleh bentuk benda berbentuk lengkung dengan cara antara lain sebagai berikut.
  - a. Menyusun barisan kurva batas dari pola poligon  $A_1, A_2$ , dan  $A_3$  dalam ketinggian  $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 100$  tersebut dengan beda ukuran luas yang bervariasi (Gambar 4.10a).
  - b. Menduplikasi beberapa kurva batas pada ketinggian  $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 100$  untuk diletakkan diantara dua ketinggian berurutan dari kurva yang terduplikasi tersebut (Gambar 4.10b).
3. Membangun permukaan interpolasi antara beberapa dua kurva batas berdekatan hasil perlakuan (2) melalui metode yang telah diperkenalkan pada langkah (3) dalam bagian 4.2.1 atau dengan substitusi formula (2.11) sampai (2.19).

Validasi contoh hasil konstruksi benda ruang dengan menggunakan variasi kelengkungan permukaan kurva batas pola poligon ke arah vertikal diperlihatkan dalam Gambar 4.10d.





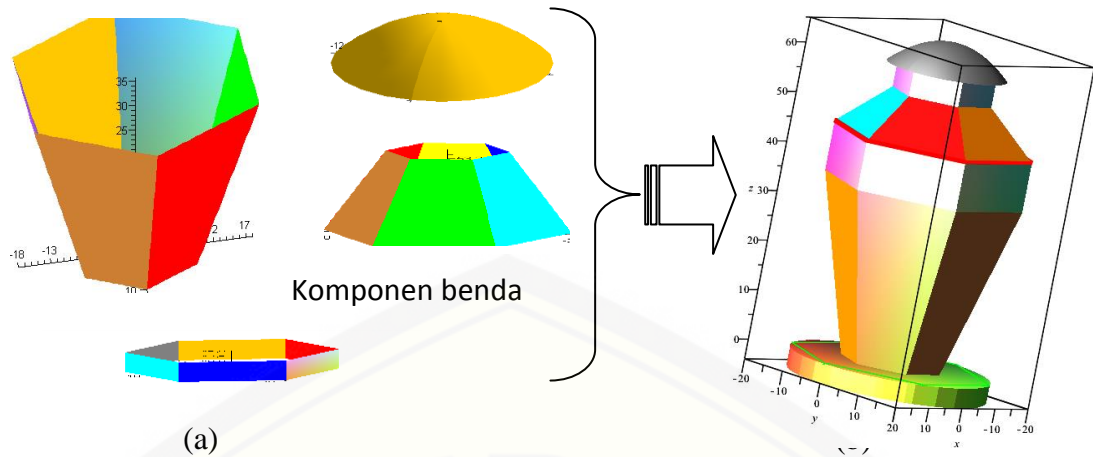
Gambar 4.10 Contoh pembuatan permukaan metode variasi kelengkungan

## 4.2 Pembahasan Hasil Penelitian

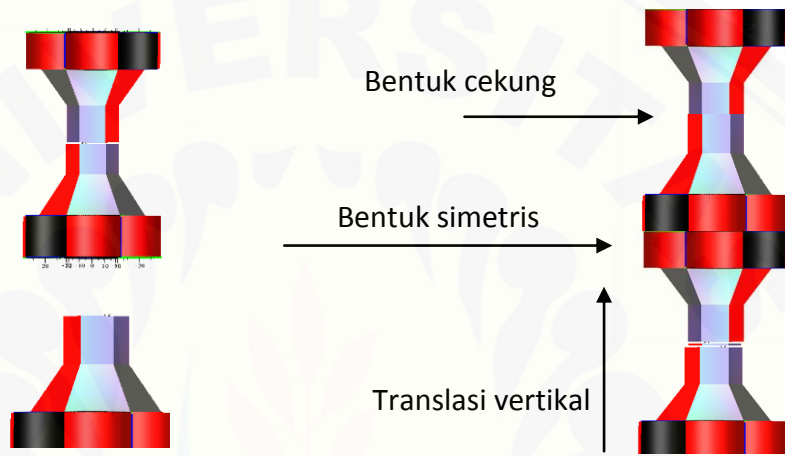
Pada bagian ini dibahas mengenai evaluasi hasil penelitian tentang teknik membangun permukaan benda ruang melalui kurva batas pola ubin segienam beraturan dalam subbab 4.1. Uraian detailnya dijelaskan sebagai berikut.

- Dengan menentukan kurva batas  $C_0, C_1, \dots, C_4$  pada ketinggian  $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 100$  untuk masing-masing komponen benda yang akan di bentuk dan mentranslasikan vertikal kurva batas berpola poligon  $A_1, A_2$ , dan  $A_3$  di  $Z=0$  ke arah sumbu  $Z$  positif, maka dapat mempermudah mengkonstruksi masing-masing komponen benda. Dengan demikian proses desain benda dapat dilakukan secara bertahap dan dapat dilakukan penyisipan permukaan secara langsung dengan menggunakan beberapa permukaan benda dasar dari formula (2.11) sampai dengan (2.19) seperti dalam Gambar 4.11e.
- Operasi translasi kurva batas poligon  $A_1, A_2$ , dan  $A_3$  di  $Z=0$  ke arah sumbu  $Z$  positif, berguna juga untuk membentuk permukaan benda kearah tegak menjadi simetris, cekung, ataupun cembung (Gambar 11c,d).
- Operasi dilatasi beberapa kurva batas poligon  $A_1, A_2$ , dan  $A_3$  dengan pusat pada masing-masing ketinggian  $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 100$  ke arah horisontal, dapat membangun bentuk permukaan benda menjadi sebangun sehingga menjadi nampak indah.
- Dengan menggunakan teknik duplikasi kurva batas poligon  $A_1, A_2$ , dan  $A_3$  yang diletakkan diantara dua ketinggian berdekatan, maka dapat diperoleh permukaan benda menjadi beragam kelengkungan kearah vertikal. Validasi dari evaluasi hasil penelitian ini diperlihatkan seperti dalam Gambar 4.11 (Lampiran 5).



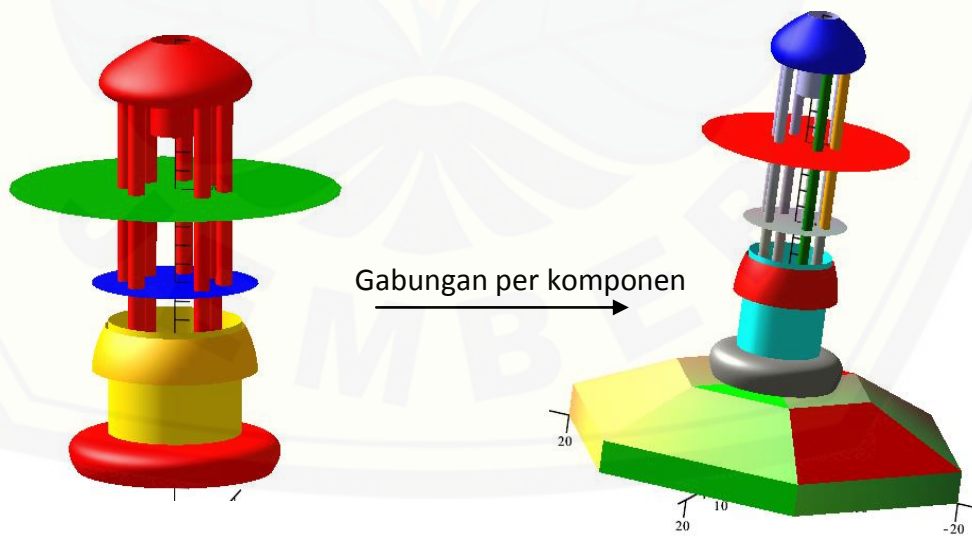


(a)



(c)

(d)



(e)

Gambar 4.11 Contoh variasi gambar hasil penelitian

## BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian pada subbab 4.2 dan pembahasan dibagian 4.3 dapat disimpulkan bahwa untuk mengkontruksi benda ruang melalui pola ubin segienam beraturan dalam bingkai lingkaran atau persegi dapat dilakukan sebagai berikut:

- a. menetapkan kurva batas masing-masing pola ubin di bidang  $Z=0$  dan kurva ketinggian sebanyak 4 (empat) tingkatan untuk batas komponen benda ke arah vertikal (sumbu  $Z$  positif);
- b. mentranslasikan dan duplikasi kurva batas pola ubin segienam beraturan ke arah vertikal ataupun dilatasi ke arah horisontal untuk mendefinisikan kurva batas masing-masing komponen benda ke arah vertikal;
- c. Interpolasi linier antar dua kurva batas berdekatan dari masing-masing komponen benda pada langkah (b).
- d. Interpolasi linier dua kurva tersisa untuk mendapatkan permukaan alas, tutup, ataupun penampang, dan permukaan yang lain dari benda.

### 5.2 Saran

Pada tesis ini telah diperkenalkan bagaimana cara mengkontruksi permukaan benda ruang dengan menggunakan kurva batas ubin pola segi enam beraturan dalam bingkai lingkaran dan persegi. Untuk selanjutnya dapat dikembangkan dengan menggunakan teknik-teknik yang lain, utamanya bentuk permukaan atau ketinggian lebih variatif agar tampilannya lebih indah dan sempurna.

## DAFTAR PUSTAKA

- Ayres, Frank Jr and Elliot Mendelson, 2004. *Kalkulus Schaum's Easy Outlines*, McGraw-Hill Companies, USA.
- Kusno, 2002. *Petunjuk Praktikum Mata Kuliah: Geometri Rancang Bangun*. Jember. Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.
- Kusno, 2003. *Geometri Rancang Bangun Studi Hiperbola, Parabola dan Obyek-Obyek Dasar Geometri Ruang*, Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.
- Kusno, 2009. *Geometri Rancang Bangun Studi Tentang Desain dan Pemodelan Benda dengan Kurva dan Permukaan Berbantu Komputer*. Jember University Press, Universitas Jember.
- Mendelson, E., 1985. *Theory and Problems Of Beginning Calculus*, Mc. Graw Hill, Inc. New York.
- Purcell, E. J. and Varberg, D. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi 5 Jilid 1*, USA: Prentice Hill International, Inc.
- Sukirman, 1996/1997. *Geometri Analitik Ruang Modul 1-9*. Depdikbud Dirjen Pendidikan Dasar dan Menengah Bagian Proyek Penataran Guru SLTP setara D-III, Jakarta.
- Suryadi, 1986. *Teori dan Soal Ilmu Ukur Analitik Ruang*, Ghalia Indonesia, Jakarta.
- Widiastuti, D. 2014. *Rancang Bangun Model Ubin Menggunakan Bingkai Dasar Persegi Berbantu Motif Lingkaran, Elips Dan Segitig*, Tesis, Jurusan Matematika, Fakultas MIPA Universitas Jember.