PENYELESAIAN NUMERIK INTEGRAL LIPAT TIGA DENGAN MENGGUNAKAN INTEGRASI ROMBERG

SKRIPSI

Oleh

Ubay Dillah
NIM 061810101100

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2013

PENYELESAIAN NUMERIK INTEGRAL LIPAT TIGA DENGAN MENGGUNAKAN INTEGRASI ROMBERG

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Ubay Dillah
NIM 061810101100

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2013

PERSEMBAHAN

Dengan penuh rasa syukur kehadirat Allah SWT, sholawat serta salam kepada Nabi besar Muhammad SAW, skripsi ini kupersembahkan untuk:

1. Ummiku tercinta Nasuha dan Abahku tercinta Abdullah yang tidak pernah putus mendoakan dan memberi kasih sayang serta pengorbanannya selama ini;
2. Adikku tercinta Siti Nur Inayah dan keluarga besarku semuanya tanpa terkecuali yang telah memberikan keceriaan serta do’a;
3. guru-guru saya sejak sekolah dasar sampai perguruan tinggi, yang telah mengajarkan ilmu, mendidik dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. keluarga besar PONPES Assiddiqi Putera Talangsari Jember terima kasih banyak atas segala ilmu agama yang diberikan;
5. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman diantara kamu dan
orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat
(*Terjemahan Surat Al-Mujadalah Ayat 11*)[1)]

Jangan tinggalkan sholat lima waktu
Baca alquran setiap hari minimal sepuluh ayat
Perbanyak membaca sholawat
Jangan berbuat dholim
(KH. Achmad Siddiq)[2)]

Sejelek-jelek kedudukan manusia pada sisi Allah di hari
kiamat ialah seorang yang mengorbankan
akhiratnya untuk urusan dunianya.
(*Tafsir Arrahmaan Arrahiim*)[3)]

1) Departemen Agama Republik Indonesia. 1998. Al Qur'an dan terjemahannya. Semarang: PT Kumudasmoro Grafindo.
2) Perpustakaan Nasional. 1999. Menghidupkan Ruh Pemikiran K.H. Achmad Siddiq. Ciputat: PT Logos Wacana Ilmu.
3) Arifin. B. 1976. Samudra Al-fatihah. Surabaya: PT Bina Ilmu

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ubay Dillah

Nim : 061810101100

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: *Penyelesaian Numerik Integral Lipat Tiga dengan Menggunakan Integrasi Romberg* adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi lain manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapatkan sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 25 Februari 2013

Yang menyatakan

Ubay Dillah
NIM 061810101100

SKRIPSI

PENYELESAIAN NUMERIK INTEGRAL LIPAT TIGA DENGAN MENGGUNAKAN INTEGRASI ROMBERG

Oleh

Ubay Dillah
NIM 061810101100

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.
Dosen Pembimbing Anggota : Kusbudiono, S.Si. M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul *Penyelesaian Numerik Integral Lipat Tiga dengan Menggunakan Integrasi Romberg* telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Tim Penguji:

Ketua, (Dosen Pembimbing Utama)	Sekretaris, (Dosen Pembimbing Anggota)
<u>Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.</u> NIP. 196610121993031001	<u>Kusbudiono, S.Si., M.Si.</u> NIP. 197704302005011001
Anggota I,	Anggota II,
<u>Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.</u> NIP. 196908281998021001	<u>Bagus Juliyanto, S.Si.</u> NIP. 198007022003121001

Mengesahkan,
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

<u>Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.</u>
NIP. 196101081986021001

RINGKASAN

Penyelesaian Numerik Integral Lipat Tiga dengan Menggunakan Integrasi Romberg; Ubay Dillah; 061810101100; 2013: 82 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Integrasi Romberg merupakan salah satu metode ekstrapolasi yang didasarkan pada perluasan ekstrapolasi Richardson, dimana pada setiap penerapan ekstrapolasi Richardson akan menaikkan orde galat pada hasil solusinya sebesar dua yang mengakibatkan nilai galat akan semakin kecil, maka solusi numeriknya akan mendekati nilai eksak (sebenarnya). Skripsi ini memiliki tujuan untuk mendapatkan penyelesaian numerik integral lipat tiga dengan menggunakan integrasi Romberg.

Penelitian dilaksanakan dalam lima tahap. Pertama, mendefinisikan integran dan batas-batasnya. Kedua, melakukan penyelesaian secara analitik. Ketiga, melakukan penyelesaian secara numerik. Keempat, analisis hasil yaitu menganalisa *output* yang diperoleh dari hasil simulasi oleh program sebagai evaluasi untuk menunjukkan nilai galat yang diperoleh dari penyelesaian secara analitik dan numerik, dalam hal ini penyelesaian secara numerik dilakukan dengan menggunakan integrasi Romberg. Kelima, kesimpulan.

Hasil simulasi dengan program menunjukkan bahwa penyelesaian integrasi fungsi aljabar dan fungsi transenden dapat dicari penyelesaiannya menggunakan integrasi Romberg. Pada integrasi Romberg, semakin banyak pengulangan (banyak *grid*) yang dilakukan maka akan menaikkan order galatnya. Jika order galatnya naik maka nilai galat akan semakin kecil yang mengakibatkan solusi aproksimasinya semakin mendekati nilai sebenarnya (eksak). Proses perhitungan pada program dalam mencari solusi numerik dengan menggunakan integrasi Romberg akan berhenti secara otomatis pada *iterasi* $\frac{1}{2}n(n+1)$.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Penyelesaian Numerik Integral Lipat Tiga dengan Menggunakan Integrasi Romberg*. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan karya tulis ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang sebesar-besarnya atas segala perhatian, bimbingan, bantuan dan petunjuk kepada:

1. Bapak Drs. Rusli Hidayat, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, petunjuk dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., dan Bapak Bagus Juliyanto, S.Si,. selaku Dosen Penguji yang telah memberikan masukan, saran dan kritik yang membangun dalam penulisan skripsi ini;
3. Bapak Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Wali yang telah membimbing dan mengarahkan selama kegiatan perkuliahan dilakukan;
4. Bapak lr. Eddy Suhan selaku pembina UKM INKAI Federasi Karate Tradisional Indonesia, yang telah memberikan banyak pengetahuan dibidang organisasi, serta teman-teman UKM INKAI FKTI tanpa terkecuali;
5. kepada temen-teman jurusan: Elna Oktavira, Ervin, Riska Dwi Hidayati, Nurul Aqiqi, Haerudin, Arif, dan temen-temen lain yang telah membantu dan memberi masukan dalam penyusunan skripsi ini.

Penulis mengakui bahwa tidak ada yang sempurna di dunia ini, oleh karena itu penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, 25 Februari 2013 Penulis

DAFTAR ISI

		Halaman
HALAMAN JUDUL		**i**
HALAMAN PERSEMBAHAN		**ii**
HALAMAN MOTTO		**iii**
HALAMAN PERNYATAAN		**iv**
HALAMAN PEMBIMBINGAN		**v**
HALAMAN PENGESAHAN		**vi**
RINGKASAN		**vii**
PRAKATA		**viii**
DAFTAR ISI		**ix**
DAFTAR TABEL		**xi**
DAFTAR GAMBAR		**xii**
DAFTAR LAMPIRAN		**xiv**
BAB 1. PENDAHULUAN		
1.1	**Latar Belakang**	**1**
1.2	**Perumusan Masalah**	**2**
1.3	**Batasan Masalah**	**2**
1.4	**Tujuan**	**2**
1.5	**Manfaat**	**2**
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA		
2.1	**Metode Numerik**	**3**
2.2	**Fungsi**	**4**
2.3	**Integral Lipat Tiga**	**4**
	2.3.1 Integral Lipat Tiga Tak Tentu	5
	2.3.2 Integral Lipat Tiga Tertentu	5
2.4	**Aturan Trapesium Rekursif**	**6**
2.5	**Ekstrapolasi Richardson**	**8**

2.6 Metode Romberg 11
2.7 Integrasi Romberg dengan Ekstrapolasi Richardson.............. 12
BAB 3. METODE PENELITIAN
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN
4.1 Penyelesaian Integral Lipat Tiga Secara Analitik 16
4.2 Penyelesaian Integral Lipat Tiga Secara Numerik................... 16
4.3 Cara Penggunaan Program pada Simulasi Integral Lipat Tiga.. 20
4.4 Simulasi Perbandingan Nilai Integrasi Secara Analitik dan Numerik 21
4.5 Analisa Hasil Simulasi Perbandingan Nilai Analitik dan Numerik 24
4.6 Simulasi Penyelesaian Integrasi pada Fungsi Aljabar 24
4.7 Simulasi Penyelesaian Integrasi pada Fungsi Transenden 29
4.8 Kasus – kasus Integral yang Tidak Dapat Diselesaikan Secara Analitik.. 40
BAB 5. PENUTUP
5.1 Kesimpulan 42
5.2 Saran 42
DAFTAR PUSTAKA... ... 43

DAFTAR TABEL

Halaman

2.1 Proses Integrasi Romberg dengan Ekstrapolasi Richardson 11
4.1 Penyelesaian Integrasi Romberg dalam Arah x 17
4.2 Penyelesaian Integrasi Romberg dalam Arah y 18
4.3 Penyelesaian Integrasi Romberg dalam Arah z 19
4.4 Keterangan Program 20
4.5 Hasil Simulasi Perbandingan Secara Analitik dan Numerik 24

DAFTAR GAMBAR

Halaman

2.1 Daerah Integral Berbentuk Balok *B*..4
3.1 Skema Metode Penelitian 15
4.1 Tampilan Simulasi Integrasi Romberg dengan *n=1*..21
4.2 Tampilan Simulasi Integrasi Romberg dengan *n=2*..22
4.3 Tampilan Simulasi Integrasi Romberg dengan *n=3*..22
4.4 Tampilan Simulasi Integrasi Romberg dengan *n=4*..22
4.5 Tampilan Simulasi Integrasi Romberg dengan *n=5*..23
4.6 Tampilan Simulasi Integrasi Romberg dengan *n=6*..23
4.7 Tampilan Simulasi Integral Tunggal dari Fungsi Rasional 25
4.8 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua dari Fungsi Rasional 25
4.9 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Fungsi Rasional..26
4.10 Tampilan Simulasi Integral Tunggal dari Fungsi Irasional 26
4.11 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua dari Fungsi Irasional 27
4.12 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Fungsi Irasional..27
4.13 Tampilan Simulasi Integral Tunggal dari Fungsi Absolut 28
4.14 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua dari Fungsi Absolut..28
4.15 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Fungsi Absolut 29
4.16 Tampilan Simulasi Integral Tunggal dari Fungsi Eksponensial..30
4.17 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua dari Fungsi Eksponensial..30
4.18 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Fungsi Eksponensial 31
4.19 Tampilan Simulasi Integral Tunggal dari Fungsi Logaritma 32
4.20 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua dari Fungsi Logaritma..32
4.21 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Fungsi Logaritma..33
4.22 Tampilan Simulasi Integral Tunggal dari Fungsi Trigonometri..33
4.23 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua dari Fungsi Trigonometri 34
4.24 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Fungsi Trigonometri 34

4.25 Tampilan Simulasi Integral Tunggal dari Fungsi Siklometri 35
4.26 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua dari Fungsi Siklometri 35
4.27 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Fungsi Siklometri............36
4.28 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tunggal dari Fungsi Hiperbolik 37
4.29 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua dari Fungsi Hiperbolik............37
4.30 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Fungsi Hiperbolik 38
4.31 Tampilan Simulasi Integral Tunggal dari Invers Fungsi Hiperbolik....38
4.32 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua dari Invers Fungsi Hiperbolik.39
4.33 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Invers Fungsi Hiperbolik 39
4.34 Tampilan Simulasi Integral Tunggal dari Fungsi Sinus 40
4.35 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua dari Fungsi Siklometri 41
4.36 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Fungsi Eksponen............41

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

A. Flowchat Algoritma Program..44
B. Tampilan program *Input* Integral dalam Arah *x* 47
C. Tampilan program *Input* Integral dalam Arah *y* 49
D. Tampilan program *Input* Integral dalam Arah *z*......................................51
E. Tampilan program *Input* GUI 53
F. Perhitungan Penyelesaian Numerik Integral Lipat Tiga *n=6* 63

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Integrasi numerik merupakan suatu metode yang digunakan untuk mendapatkan nilai-nilai hampiran dari beberapa integral tentu yang memerlukan penyelesaian numerik sebagai hampirannya. Solusi hampiran yang dihasilkan memang tidak tepat sama dengan solusi analitik. Akan tetapi, kita dapat menentukan selisih antara solusi analitik dan solusi numerik sekecil mungkin (Sahid, 2004).

Penyelesaian integrasi dengan metode numerik ada beberapa macam, diantaranya Kuadratur, aturan Trapesium, aturan Simpson, dan integrasi Romberg. Dalam hal ini metode integrasi yang digunakan penulis untuk menyelesaikan integral lipat tiga adalah integrasi Romberg, karena integrasi Romberg dapat memberikan perolehan nilai integrasi yang cermat dan tepat mendekati nilai analitik. Integrasi Romberg merupakan salah satu metode ekstrapolasi yang didasarkan pada perluasan ekstrapolasi Richardson, dimana pada setiap penerapan ekstrapolasi Richadson akan menaikkan orde galat pada hasil solusinya sebesar dua. Apabila order galat naik maka nilai galat semakin kecil dan apabila nilai galat semakin kecil, maka nilai integrasi numeriknya akan mendekati atau sama dengan nilai analitiknya (Sahid, 2004).

Rahmat (2006) dalam skripsinya pernah menjelaskan mengenai simulasi numerik integral tunggal dan integral lipat dua dengan menggunakan aplikasi berbasis web. Selain itu, Khasanah (2008) juga pernah meneliti integral lipat dua dengan menggunakan integrasi Romberg, berdasarkan saran yang diberikan oleh Khasanah, maka dalam hal ini penulis ingin melanjutkan penelitiannya dengan menerapkannya pada integral lipat tiga.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana penyelesaian masalah dari kasus-kasus integrasi pada fungsi aljabar dan fungsi transenden, khususnya integral lipat tiga menggunakan penyelesaian numerik dengan menggunakan integrasi Romberg.

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini penulis membatasi ruang lingkup permasalahan penelitian antara lain :

a. Penyelesaian integral lipat dibatasi pada tiga variabel bebas yaitu x, y, dan z.
b. Batas integral lipat bernilai konstan.
c. Integral yang digunakan adalah integral wajar.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah menyelesaikan permasalahan kasus integrasi khususnya integral lipat tiga secara numerik dalam hal ini dengan menggunakan integrasi Romberg.

1.5 Manfaat

Manfaat yang dapat diambil dalam penulisan skripsi ini adalah dapat menentukan penyelesaian kasus-kasus integrasi khususnya integral lipat tiga secara numerik dengan menggunakan integrasi Romberg.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Metode Numerik

Metode numerik dalam penyelesaian pengintegralan pada dasarnya adalah mencari nilai hampiran integral pada selang tertentu. Beberapa metode numerik untuk menyelesaikan persamaan integral didasarkan pada pengertian interpretasi aproksimasi untuk memperoleh hasil yang mendekati nilai analitik. Interval dari *a* ke *b* dibagi menjadi beberapa sub interval yang lebih kecil sehingga terbentuk aproksimasi yang lebih sederhana dari kurva $y=f(x)$ pada luasan sub interval tersebut. Luas dari semua sub interval kemudian dijumlahkan sehingga memberikan aproksimasi integrasi dalam interval *a* ke *b* (Pujianto, 2007).

Metode numerik adalah suatu metode untuk menyelesaikan masalah-masalah matematika dengan menggunakan operasi aritmatika sederhana, dan metode komputasi yang digunakan dalam metode numerik disebut dengan algoritma. Algoritma adalah suatu rangkaian prosedur yang mempunyai cara penyelesaian yang lengkap dan jelas. Jika operasi hitung yang diperlukan hanya beberapa puluh, maka dapat diselesaikan secara manual. Akan tetapi, jika penyelesaian suatu masalah memerlukan jutaan operasi hitung, maka pemakaian komputer merupakan kebutuhan yang tidak dapat dihindari (Sahid, 2004).

Pada umumnya metode numerik tidak mengutamakan diperolehnya jawaban eksak dari persoalan yang sedang diselesaikan, karena penyelesaian yang digunakan adalah penyelesaian pendekatan (*approximation*), sehingga timbul kesalahan (*error*). Pada penyelesaian ini diusahakan untuk mendapatkan *error* sekecil mungkin untuk mendapatkan hasil yang lebih baik. *Error* yang kecil ditunjukkan dengan adanya konvergenitas. konvergenitas terjadi jika *error* pada iterasi pertama lebih besar dari *error* iterasi kedua, *error* iterasi kedua lebih besar dari *error* iterasi ketiga, dan *error* iterasi ke-*n* lebih besar dari *error* iterasi ke *n+1* (Munif dan Hidayatullah, 2003).

2.2 Fungsi

Definisi: Sebuah fungsi *f* adalah suatu aturan korespondensi yang menghubungkan setiap objek *x* dalam suatu himpunan, dengan sebuah nilai tunggal *f(x)* dari suatu himpunan kedua. (Purcell dan Varberg, 2010).

Secara garis besar fungsi dibedakan menjadi dua yaitu:

a. Fungsi Aljabar

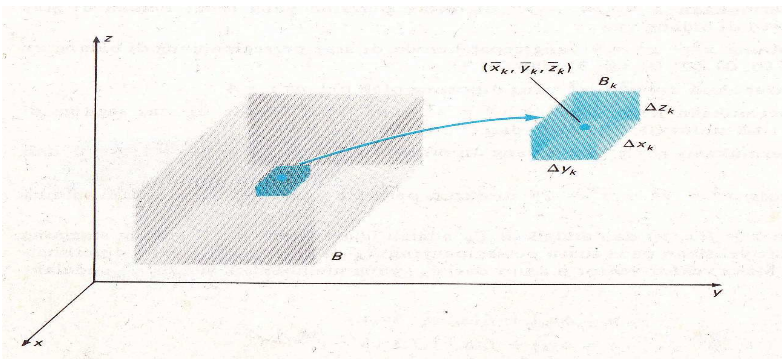
   Fungsi aljabar adalah fungsi yang diperoleh dari sejumlah berhingga operasi aljabar seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, perpangkatan, dan penarikan akar. Adapun yang termasuk fungsi aljabar seperti fungsi rasional,fungsi irasional, fungsi absolut (harga mutlak).

b. Fungsi Transenden

   Fungsi transenden adalah fungsi selain fungsi aljabar. Adapun yang termasuk fungsi transenden seperti fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi trigonometri, fungsi siklometri, fungsi hiperbolik, dan fungsi invers hiperbolik.

2.3 Integral Lipat Tiga (*Triple Integrals*)

Integral lipat tiga merupakan integral tunggal yang hasilnya diintegralkan, kemudian diintegralkan kembali. Suatu fungsi *f* tiga peubah yang didefinisikan atas suatu daerah berbentuk balok *B* dengan sisi-sisi sejajar sumbu-sumbu koordinat, dalam hal ini, grafik *f* tidak dapat digambarkan karena diperlukan empat dimensi, tetapi kita dapat menggambar *B*.



Gambar 2.1 Daerah Integral Berbentuk Balok *B*

Misalkan akan dibentuk suatu partisi *P* dari *B* dengan melewatkan bidang-bidang melalui *B* sejajar bidang koordinat, jadi memotong *B* kedalam balok-balok bagian *B₁, … ,Bₙ.* Pada *Bₖ,* ambil satu titik $(\overline{x}_k, \overline{y}_k, \overline{z}_k)$ dan perhatikan pada penjumlahan Rieman $\sum_{k=1}^{n}(\overline{x}_k, \overline{y}_k, \overline{z}_k)\Delta V_k$

dengan $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$ adalah volume B_k. Andaikan norm patisi $|\,p\,|$ ini adalah panjang diagonal terpanjang dari semua balok bagian. Maka kita definisikan integral lipat tiga oleh $\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{|p|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k, \overline{y}_k, \overline{z}_k)\Delta V_k$

Asalkan limit ini ada (Varberg dan Purcell, 2010)

2.3.1 Integral Lipat Tiga Tak Tertentu (*Indefinite Triple Integrals*)

Integral lipat tiga tak tertentu (*indefinite triple integrals*) dapat dituliskan:

$$\iiint f(x,y,z)dxdydz$$

Adapun langkah-langkah penyelesaiannya:

Fungsi *f*(x,y,z) diintegralkan terhadap *x* dengan menganggap variabel *y* dan *z* konstan. Hasilnya kemudian diintegralkan terhadap *y* dengan menganggap variabel *z* konstan. kemudian diintegralkan terhadap *z.*

2.3.2 Integral Lipat Tiga Tertentu (*Definite Triple Integrals*)

Integral lipat tiga tertentu (*definite triple integrals*) dapat dituliskan:

$$\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,z)dxdydz$$

Adapun langkah-langkah penyelesaiannya:

Fungsi *f*(x,y,z) diintegralkan terhadap *x* dengan menganggap variabel *y* dan *z* konstan, kemudian nilainya dihitung dengan mensubstitusikan batas atas $x = x_2$ dan batas bawah $x = x_1$. Hasilnya diintegralkan terhadap *y* dengan menganggap variabel *z* konstan, dihitung nilainya dengan batas atas $y = y_2$ dan batas bawah $y = y_1$.

Kemudian hasilnya diintegralkan kembali ke z hitung nilainya dengan batas atas $z = z_2$ dan batas bawah $z = z_1$.

Misalkan ada suatu fungsi f tiga peubah yang didefinisikan atas suatu daerah berbentuk balok dengan integran sebagai berikut:

$$\iiint_B \frac{y.z}{x^2}\,dV \;,\; B = \{(x, y, z) \mid 2 \le x \le 5; 3 \le y \le 7; 1 \le z \le 4\}$$

Penyelesaian : $\iiint_B \frac{y.z}{x^2}\,dV = \int_1^4 \int_3^7 \int_2^5 \frac{y.z^2}{x^2}\,dxdydz$

$$= \int_1^4 \int_3^7 \frac{3.y.z^2}{10} dydz$$

$$= \frac{3}{10}\int_1^4 20.z^2 dz$$

$$= 126$$

2.4 Aturan Trapesium Rekursif

Dalam mendapatkan nilai-nilai hampiran integral tentu, digunakan banyak metode, salah satu metode yang dapat digunakan adalah aturan trapezium rekursif.

Teorema 2.1

Misalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada $[a,b]$ dan $h = (b - a)$. untuk $n=1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ atau untuk $n = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^k, \ldots$ kita definisikan barisan aturan trapezium $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_k, \ldots$

dengan $T_0 = T_1(f, h) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$ dan $T_k = T_{2^k}\left(f, \frac{h}{2^k}\right) \quad k = 1,2,3.....$

barisan aturan trapezium tersebut memenuhi hubungan

$$T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}}\sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1} \quad \text{dengan} \quad f_i = f\left(a + i\frac{h}{2^{k+1}}\right)$$

Bukti :

Dimisalkan f adalah suatu fungsi yang terdefinisi pada [*a*,*b*] dengan $a = x_0 < x_1 < x_2 < ..... < x_n = b$ suatu partisi [*a*,*b*] sedemikian sehingga $x_k = x_0 + kh$ dengan *h=(b - a)/n* untuk *k = 0, 1, 2, 3, … ,n.*

Dengan menggunakan rumus ekstrapolasi Richardson, maka integrasi fungsi dapat dihitung menggunakan $I(h_1)$ dan $I(h_2)$. T_n adalah barisan aturan trapezium dengan $n = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 ..., 2^k$.

Jika lebar setiap subinterval adalah *h*, maka di dapat :

$$T_n(f,h) = \frac{h}{2}\{f_0 + 2f_1 + 2f_2 + ... + 2f_{n-1} + f_n\}$$

$$= \frac{h}{2}\{f_0 + f_n\} + h\{f_1 + f_2 + ... + f_{n-1}\}$$

$$= \frac{h}{2}\{f_0 + f_n\} + h\sum_{k=1}^{n-1} f_k \text{ dimana } f_k = f(x_0 + kh)$$

Sedangkan, jika lebar setiap subinterval diperkecil separuhnya, maka didapat

$$T_{2n}(f,\frac{h}{2}) = \frac{h}{4}\{f_0 + f_{2n}\} + \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{2n-1} f_k$$

$$= \frac{h}{4}\{f_0 + f_{2n}\} + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n-1} f_{2j} + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n} f_{2j-1} \text{ dimana } f_k = f(x_0 + kh/2)$$

$$= \frac{T_n(f,h)}{2} + \frac{h}{2}\sum_{j=1}^{n} f_{2j-1} \quad \text{(disebut rumus trapezium rekursif)}$$

Untuk *h = (b - a),* dan $n = 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 ....., 2^k$.

Maka didapatkan barisan aturan trapezium

$$T_0, T_1, T_2, ..., T_k, ...$$

dengan $T_0 = T_1(f,h) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$ dan $T_k = T_{2^k}(f, \frac{h}{2^k})$ dimana $k = 0,1,2,3...$

barisan aturan trapezium tersebut memenuhi hubungan

$$T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}}\sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1} \quad \text{dengan} \quad f_i = f(a + i\frac{h}{2^{k+1}})$$

untuk menghitung hampiran $\int_a^b f(x)dx$ dengan aturan trapezium rekursif, yaitu:

$$h = b - a$$

$$T_0 = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$

$$T_1 = \frac{T_0}{2} + \frac{h}{2} f_1$$

$$T_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{h}{4}(f_1 + f_3)$$

$$T_3 = \frac{T_2}{2} + \frac{h}{8}(f_1 + f_3 + f_5 + f_7)$$

$$\vdots$$

$$T_{1+k} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1} \quad \text{dengan} \quad f_i = f(a + i\frac{h}{2^{k+1}})$$

(Sahid, 2004)

2.5 Ekstrapolasi Richardson

Kembali pada perhitungan integrasi dengan kaidah trapezium,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_n) + h\sum_{i=1}^{n-1} f_i - \frac{(b-a)f''(t)}{12}h^2$$

yang dapat dinyatakan sebagai:

$$\int_a^b f(x)dx = I(h) + Ch^2$$

secara umum, kaidah integrasi dapat ditulis sebagai

$$\int_a^b f(x)dx = I(h) + Ch^q$$

dengan C dan q adalah konstanta yang tidak bergantung pada h. Nilai q dapat ditentukan langsung dari orde galat kaidah integrasi, misalnya

kaidah trapezium, $O(h^2) \rightarrow q = 2$

kaidah 1/3 Simpson, $O(h^2) \rightarrow q = 4$

Tujuan ekstrapolasi Richardson ialah menghitung nilai integrasi yang lebih baik (*improve*) dibandingkan dengan *I*. Misalkan *J* adalah nilai integrasi yang lebih baik daripada *I* dengan jarak antar titik adalah *h*.

$$J = I(h) + Ch^q \tag{2.1}$$

Ekstrapolasikan *h* menjadi *2h*, kemudian menghitung integrasi numeriknya.

$$J = I(2h) + C(2h)^q \tag{2.2}$$

Eliminasikan *C* dari kedua persamaan dengan menyamakan persamaan (2.1) dan persamaan (2.2):

$$I(h) + Ch^q = I(2h) + C(2h)^q$$

Sehingga diperoleh nilai *C* yaitu :

$$C = \frac{I(h) - I(2h)}{(2^q - 1)h^q} \tag{2.3}$$

Substitusikan persamaan (2.3) ke dalam persamaan (2.1) untuk memperoleh:

$$J = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{2^q - 1} \tag{2.4}$$

Persamaan (2.4) merupakan persamaan ekstrapolasi Richardson (Khasanah,2008).

Misalkan, bila *I*(*h*) dan *I*(*2h*) dihitung dengan kaidah trapezium, maka persamaan ekstrapolasi Richardson menyatakan kaidah Simpson 1/3.

Bukti:

Bentuk umum dari metode simpson yaitu:

$$I = \int_a^b f(x)dx = (h/3)[f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + ... + 4f_N + f_{N+1}]$$

I(h) dan *I(2h)* adalah hasil perkiraan integrasi dengan kaidah trapezium menggunakan segmen sebesar *h* dan *2h* :

$$I(h) = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + f_2) \text{ dan } I(2h) = \frac{2h}{2}(f_0 + 2f_2)$$

Ekstrapolasi Richadson menjadi (*q=2*)

$$J = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{2^q - 1} = \frac{3I(h) + I(h) - I(2h)}{3}$$

$$= \frac{3\left(\frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + f_2)\right) + \left(\frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + f_2)\right) - \left(\frac{2h}{2}(f_0 + 2f_2)\right)}{3}$$

$$= \frac{h}{2}f_0 + hf_1 + \frac{h}{2}f_2 + \frac{h}{6}f_0 + \frac{h}{3}f_1 + \frac{h}{6}f_2 - \frac{h}{3}f_0 - \frac{2h}{3}f_2$$

$$= \frac{h}{3}f_0 + \frac{4h}{3}f_1 + \frac{2h}{3}f_2$$ merupakan kaidah Simpson 1/3.

Sedangkan bila *I(h)* dan *I(2h)* dihitung dengan kaidah simpson 1/3, maka ekstrapolasi Richardson menyatakan kaidah Boole.

$$J = \int_0^{4h} f(x)dx = \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$$

Bukti:

I(h) dan *I(2h)* adalah hasil perkiraan integrasi dengan kaidah simpson 1/3 menggunakan segmen masing-masing sebesar *h* dan *2h* :

$$I(h) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) \text{ dan } I(2h) = \frac{2h}{3}(f_0 + 4f_2 + f_4)$$

Ekstrapolasi Richadson menjadi ($q=4$)

$$J = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{2^q - 1}$$

$$= \frac{15I(h) + I(h) - I(2h)}{15} = \frac{16I(h) - I(2h)}{15}$$

$$= \frac{16\left(\frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4)\right) - \left(\frac{2h}{3}(f_0 + 4f_2 + f_4)\right)}{15}$$

$$= \frac{\frac{16h}{3}f_0 + \frac{64h}{3}f_1 + \frac{32h}{3}f_2 + \frac{64h}{3}f_3 + \frac{16h}{3}f_4 - \frac{2h}{3}f_0 - \frac{8h}{3}f_2 - \frac{2h}{3}f_4}{15}$$

$$= \frac{14hf_0 + 64hf_1 + 24hf_2 + 64hf_3 + 14hf_4}{45}$$

$$= \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$$ merupakan kaidah Boole.

2.6 Metode Romberg

Pada integrasi Romberg, mula-mula menghitung kuadratur dengan lebar interval h dan $2h$. untuk menurunkan galat hampiran integral dari $O(h^{2n})$ menjadi $O(h^{2n+2})$ dapat digunakan ekstrapolasi Richardson. Dimana untuk n=1 berhubungan dengan nilai dasar dari hasil perhitungan rumus trapezoid, n=2 berhubungan dengan nilai dasar dari hasil perhitungan rumus Simpson atau $O(h^4)$, n=3 berhubungan dengan nilai dasar dari perhitungan rumus Boole atau $O(h^6)$, jadi untuk n berhubungan dengan $O(h^{2n})$ (Munif dan Hidayatullah, 2003).

Tabel 2.1 Proses Integrasi Romberg dengan Ekstrapolasi Richardson

$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	$O(h^{10})$	$O(h^{12})$
$R(1,1)$					
$R(2,1)$	$R(2,2)$				
$R(3,1)$	$R(3,2)$	$R(3,3)$			
$R(4,1)$	$R(4,2)$	$R(4,3)$	$R(4,4)$		
$R(5,1)$	$R(5,2)$	$R(5,3)$	$R(5,4)$	$R(5,5)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
$R(N,1)$	$R(N,2)$	$R(N,3)$	$R(N,4)$	…	$R(N,N)$

Nilai integral yang lebih baik

Kolom pertama memuat hampiran integral tentu dengan menggunakan aturan trapezium rekursif. Kolom kedua memuat hampiran integral tentu dengan menggunakan aturan simpson rekursif. Kolom ketiga memuat hampiran integral tentu dengan menggunakan aturan Boole rekursif. Kolom keempat, kolom kelima, kolom keenam memuat hampiran integral tentu dengan menggunakan aturan integrasi Romberg dan seterusnya (Sahid, 2004).

2.7 Integrasi Romberg dengan Ekstrapolasi Richardson

Teorema 2.2

Jika diketahui dua buah hampiran $R_k(f,\ h)$ dan $R_k(f,\ 2h)$ untuk nilai Q yang memenuhi $Q = R_k(f,h) + c_1 h^{2k} + c_2 h^{2k+2} + ...$

dan

$$Q = R_k(f,2h) + c_1 4^k h^{2k} + c_2 4^{k+1} h^{2k+2} + ...$$

Maka

$$Q = \frac{4^k R_k(f,h) - R_k(f,2h)}{4^k - 1} + O(h^{2k+2})$$

Bukti :

Misalkan untuk hampiran $R_k(f,\ h)$ dengan jarak antar titik adalah h:

$$R_k(f,h) = Q - c_1 h^{2k} - c_2 h^{2k+2} - .... \tag{2.5}$$

dan untuk hampiran $R_k(f,\ 2h)$ dengan jarak antar titik adalah 2h:

$$R_k(f,2h) = Q - c_1 4^k h^{2k} - c_2 4^{k+1} h^{2k+2} - .... \tag{2.6}$$

Eliminasikan C dari kedua persamaan dengan menyamakan persamaan (2.5) dan persamaan (2.6)

$$R_k(f,h) = R_k(f,2h)$$

$$Q - c_1 h^{2k} - c_2 h^{2k+2} - .... = Q - c_1 4^k h^{2k} - c_2 4^{k+1} h^{2k+2} - ...$$

Sehingga diperoleh

$$c_1 = \frac{R(f,h) - R(f,2h)}{(4^k - 1)h^{2k}} \tag{2.7}$$

Substitusikan (2.7) ke dalam persamaan (2.5) untuk memperoleh

$$Q = R_k(f,h) + \frac{R_k(f,h) - R_k(f,2h)}{(4^k - 1)} + O(h^{2k+2}) \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) merupakan integrasi Romberg.

Jika teorema di atas didefinisikan dalam barisan kuadratur

$\{R(i, j) : i \geq j\}$ untuk j = 1, 2, 3, . . .

untuk hampiran integrasi *f*(x) pada [*a*, *b*] sebagai

$R(i,1) = T_{i-1}, i \geq 1$ (barisan aturan trapezium majemuk)

$R(i,2) = T_{i-1}, i \geq 2$ (barisan aturan Simpson majemuk)

$R(i,1) = B_{i-1}, i \geq 2$ (barisan aturan Boole majemuk)

Maka integrasi Romberg dengan Ekstrapolasi Richardson untuk meningkatkan keakuratan hampiran integral dapat ditulis sebagai berikut:

$$R(j,k) = \frac{4^{k-1} R(j,k) - R(j-1,k-1)}{(4^{k-1} - 1)}$$

Untuk $2 \leq k \leq j$. Dengan nilai awal adalah kuadratur trapezium

$$R(1,1) = T_0 = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

(Sahid, 2004).

BAB 3. METODE PENELITIAN

Dalam bab ini akan dijelaskan mengenai metodologi dan langkah-langkah yang harus ditempuh dalam penyelesaian integral lipat tiga. Adapun prosedur yang digunakan adalah sebagai berikut:

a. Mendefinisikan integran dan batas-batasnya

   Integral lipat yang digunakan merupakan fungsi dengan tiga variabel bebas yaitu *x*,*y*, dan *z* dengan batas-batasnya bernilai konstan.

b. Melakukan penyelesaian secara analitik

   1) Fungsi *f*(x,y,z), diintegralkan terhadap *x* (dengan menganggap *y* dan *z* konstan), kemudian dihitung nilainya dengan mensubstitusikan batas bawah $x = x_1$ dan batas atas $x = x_2$.
   2) Hasil pada langkah b.1) kemudian diintegralkan terhadap *y* (dengan menganggap *z* konstan), selanjutnya dihitung nilainya dengan mensubstitusikan batas bawah $y = y_1$ dan batas atas $y = y_2$.
   3) Dari hasil langkah b.2) diintegralkan kembali ke *z*, kemudian dihitung nilainya dengan mensubstitusikan batas bawah $z = z_1$ dan batas atas $z = z_2$.

c. Melakukan penyelesaian secara numerik

   Secara numerik metode yang digunakan dalam penyelesaian integral lipat tiga ini yaitu menggunakan integrasi Romberg. Proses penyelesaian secara numerik disajikan dalam flowchat pada lampiran A.

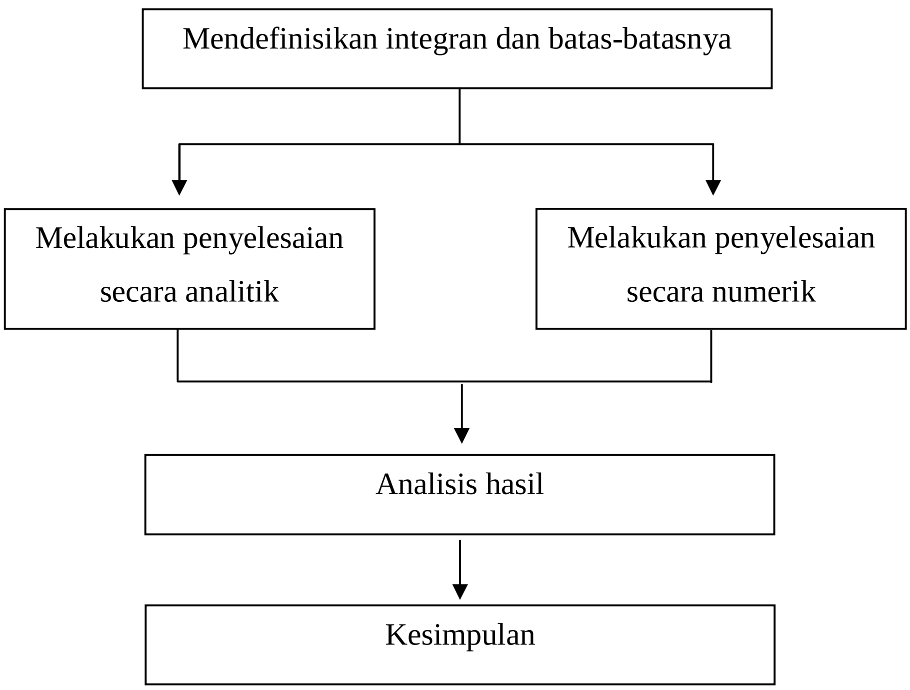
d. Analisis hasil

   Dalam tahap ini akan dilakukan analisis terhadap *output* dari simulasi yang dihasilkan oleh program Matlab 7.8.0, sebagai evaluasi untuk membandingkan antara dua solusi yang digunakan. Penyelesaian kasus integrasi khususnya integral lipat tiga dapat dicari solusinya yaitu secara analitik dan secara numerik, sehingga dapat diketahui solusi hampiran *(approximation)* cukup mendekati dengan solusi analitiknya atau sebaliknya, dan selisih antara keduanya yang disebut galat (*error)*. Serta menganalisa hasil penyelesaian secara numerik berbantu program Matlab 7.8.0 untuk kasus-kasus integrasi khususnya interal lipat tiga yang tidak dapat diselesaikan secara analitik.

e. Kesimpulan

Berdasarkan langkah d dapat disimpulkan bahwasannya, pertama penyelesaian kasus-kasus dari integrasi khususnya integral lipat tiga dapat diselesaikan secara analitik dan secara numerik. Kedua, penyelesaian kasus integrasi khususnya integral lipat tiga yang tidak dapat dicari solusi analitiknya dapat diselesaikan secara numerik dengan menggunakan integrasi Romberg.

Langkah–langkah yang akan dilakukan dalam skripsi ini, secara skematik dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.1 Skema Metode Penelitian

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan langkah-langkah yang telah diuraikan dalam Bab 3, maka pada bab ini akan dibahas tentang penyelesaian numerik integral lipat tiga menggunakan integrasi Romberg berbantu program MATLAB 7.8.

4.1 Penyelesaian Integral Lipat Tiga Secara Analitik

Misalkan ada suatu fungsi f tiga peubah yang didefinisikan atas suatu daerah berbentuk balok dengan integran dan batasnya sebagai berikut.

$$\iiint_B \frac{x^3 y^3}{15\sqrt{z^5}}\, dV \ , B = \{(x, y, z) \mid 2 \le x \le 5; 1 \le y \le 4; 4 \le z \le 9\}$$

Maka penyelesaian secara analitik dari integrasi diatas yaitu

$$\begin{aligned}\iiint_B \frac{x^3 y^3}{15\sqrt{z^5}}\, dV &= \int_4^9 \int_1^4 \int_2^5 \frac{x^3 y^3}{15\sqrt{z^5}}\, dxdydz, \\ &= \int_4^9 \int_1^4 \frac{y^3}{15\sqrt{z^5}} \frac{609}{4}\, dydz, \\ &= \frac{203}{20} \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{z^5}} \frac{255}{4}\, dz, \\ &= \frac{65569}{1728}.\end{aligned}$$

Jika hasil integrasi dirubah dalam bentuk desimal maka solusi analitik yaitu 37,9450.

4.2 Penyelesaian Integral Lipat Tiga Secara Numerik

Pada penyelesaian masalah integrasi secara numerik nilai yang dihasilkan akan berupa nilai pendekatan (*approximation*), mendekati nilai analitik atau nilai sebenarnya (eksak).

Dalam subbab ini akan diselesaiakan permasalahan integral lipat tiga secara numerik dengan menggunakan integrasi Romberg. Fungsi tes yang akan digunakan adalah fungsi pada subbab 4.1 dan perhitungan secara numeriknya dapat dilihat pada lampiran F. Dalam hal ini, penyelesaian secara numerik dilakukan menggunakan integrasi Romberg. Adapun fungsi pada subbab 4.1 sebagai berikut:

$$\iiint_B \frac{x^3 y^3}{15\sqrt{z^5}}\, dV \quad \text{dimana} \quad B = \{(x, y, z) \mid 2 \le x \le 5; 1 \le y \le 4; 4 \le z \le 9\}$$

Dengan menggunakan penyelesaian secara numerik dalam hal ini integrasi Romberg, maka pada kasus integral lipat tiga memberikan solusi penyelesaian numerik sebagai berikut. Hasil perolehan nilai integrasi dengan pengulangan (*grid* sebanyak n=6) dalam arah x (arah pertama) diuraikan pada Tabel 4.1 berikut.

Tabel 4.1 Penyelesaian Integrasi Romberg dalam Arah x

13,3 $y^3/\sqrt{z^5}$					
10,9375 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,15 $y^3/\sqrt{z^5}$				
10,346875 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,15 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,15 $y^3/\sqrt{z^5}$			
10,199219 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,15 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,15 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,15 $y^3/\sqrt{z^5}$		
10,162305 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,15 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,15 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,15 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,15 $y^3/\sqrt{z^5}$	
10,140046 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,132627 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,131468 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,131178 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,131098 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,131080 $y^3/\sqrt{z^5}$

Pada kolom pertama yaitu $R(1,1)$ sampai $R(6,1)$ penyelesaiannya dilakukan dengan menggunakan aturan trapezium rekursif dalam mencari solusi numeriknya. Sedangkan pada kolom kedua, kolom ketiga, kolom keempat, kolom kelima, dan kolom keenam yang dimulai dari $R(2,2)$ pada kolom kedua sampai $R(6,6)$ pada kolom keenam penyelesaiannya dilakukan dengan menggunakan aturan integrasi Romberg. Dengan demikian penyelesaian secara numerik pada perhitungan masalah integrasi dengan menggunakan integrasi Romberg pada tahap pertama ini (arah x) memberikan solusi akhir $R(6,6)$ yaitu 10,131080 y^3/z^5 .

Pada tahap berikutnya setelah diperoleh penyelesaian kasus integrasi khususnya integral lipat tiga dalam arah x maka akan dilanjutkan dengan melakukan penyelesaian masalah integrasi dalam arah y (arah kedua), adapun penyelesaian secara numerik dalam arah y di uraikan pada Tabel 4.2 dibawah ini.

Tabel 4.2 Penyelesaian Integrasi Romberg dalam Arah y

987,78027 $3/\sqrt{z^5}$					
731,33731 $7/\sqrt{z^5}$	645,85633 $1/\sqrt{z^5}$				
667,22657 $9/\sqrt{z^5}$	645,85633 $1/\sqrt{z^5}$	645,85633 $1/\sqrt{z^5}$			
651,19889 $4/\sqrt{z^5}$	645,85633 $1/\sqrt{z^5}$	645,85633 $1/\sqrt{z^5}$	645,85635 $1/\sqrt{z^5}$		
647,19197 $3/\sqrt{z^5}$	645,85633 $1/\sqrt{z^5}$	645,85633 $1/\sqrt{z^5}$	645,85634 $1/\sqrt{z^5}$	645,85633 $1/\sqrt{z^5}$	
646,19024 $2/\sqrt{z^5}$	645,85633 $1/\sqrt{z^5}$	645,85633 $1/\sqrt{z^5}$	645,85634 $1/\sqrt{z^5}$	645,85633 $1/\sqrt{z^5}$	645,85633 $1/\sqrt{z^5}$

Penyelesaian dalam arah y dan dalam arah z sama halnya seperti pada penyelesaian arah x yaitu kolom pertama dilakukan dengan menggunakan aturan trapezium rekursif yang dimulai dari menghitung $R(1,1)$ sampai $R(6,1)$. Sedangkan pada kolom kedua, kolom ketiga, kolom keempat, kolom kelima, dan kolom keenam yang dimulai dari $R(2,2)$ pada kolom kedua sampai $R(6,6)$ pada kolom keenam penyelesaiannya dilakukan menggunakan aturan integrasi Romberg. Adapun solusi penyelesaian pada integral lipat tiga dalam arah y menggunakan integrasi Romberg memberikan hasil akhir $R(6,6)$ yaitu $645{,}8563/\sqrt{z^5}$.

Kemudian pada tahap terakhir (tahap ketiga) penyelesaian kasus integrasi akan diselesaikan dalam arah z dan diperoleh hasil seperti pada Tabel 4.3 dibawah ini.

Tabel 4.3 Penyelesaian Integrasi Romberg dalam Arah z

57,229145					
43,629496	39,853628				
39,456110	38,412531	38,316458			
38,326607	38,092083	38,070720	38,066819		
38.036637	37,979092	37,971559	37,969985	37,969605	
37,963217	37,926415	37,922903	37,922131	37,921943	37,921896

Dengan demikian tahap ketiga memberikan solusi penyelesaian akhir $R(6,6)$ yaitu 37,921896. Apabila digunakan kedalam 1 angka penting, maka hasil numeriknya akan mendekati atau sama dengan solusi analitiknya yaitu 37,9. Adapun pengulangan yang dilakukan dengan n (banyak *grid*) pada integrasi Romberg, yaitu $1+2+3+...+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

4.3 Cara Penggunaan Program pada Simulasi Integral Lipat Tiga

Dalam subbab ini, *user* akan diminta memasukkan beberapa *input* dalam menyelesaikan masalah integrasi sebagai berikut:

Tabel 4.4 Keterangan Program

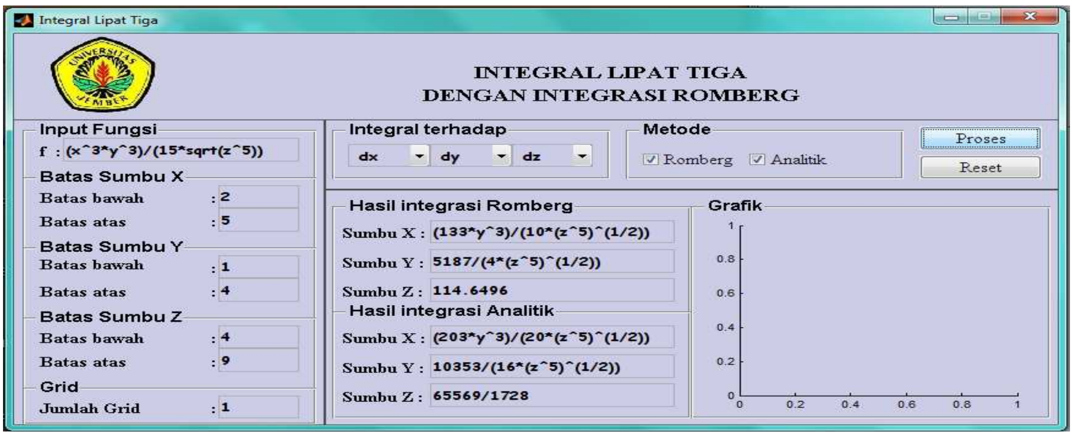
No	***Input***	**Keterangan**
1	Fungsi dalam variabel *x*, *y*, dan *z*	Cara memasukkan persamaan dibuat standar, variabel yang dikenali adalah variabel *x*, *y*, dan *z*, huruf yang digunakan menggunakan huruf kecil.
2	Batas Sumbu *x*	Batas sumbu *x* ada dua yaitu batas bawah (x_1) dan batas atas (x_2), nilai yang diinputkan harus berupa angka (konstan).
3	Batas Sumbu *y*	Batas sumbu *y* ada dua yaitu batas bawah (y_1) dan batas atas (y_2), nilai yang diinputkan harus berupa angka (konstan).
4	Batas Sumbu *z*	Batas sumbu *z* ada dua yaitu batas bawah (z_1)dan batas atas (z_2), nilai yang diinputkan harus berupa angka (konstan).
5	Banyak *Grid*	Banyaknya pengulangan dapat dilakukan sebanyak *n* kali, kecepatan *running* tergantung kemampuan komputer yang digunakan.
6	Pengintegralan	Proses pengintegralan bisa dilakukan dalam arah *x*, kemudian *y*, kemudian *z* atau sebaliknya. Pengintegralan dapat juga dilakukan untuk menyelesaiakan integral tunggal saja, integral lipat dua, atau untuk menyelesaikan integral lipat tiga.
7	Metode Penyelesaian	*User* dapat memilih metode penyelesaian yaitu secara analitik, secara numerik, secara analitik dan numerik.

Setelah *input* diisi, klik tombol proses untuk menjalankannya, atau *reset* untuk menghapus semua *input* yang sudah dimasukkan. Pada bagian program juga disertakan visualisasi gambar, dalam hal ini visualisasi gambar akan tampil hanya untuk integral tunggal dan integral lipat dua, visualisasi gambar integral lipat tiga tidak dapat ditampilkan karena memerlukan empat dimensi.

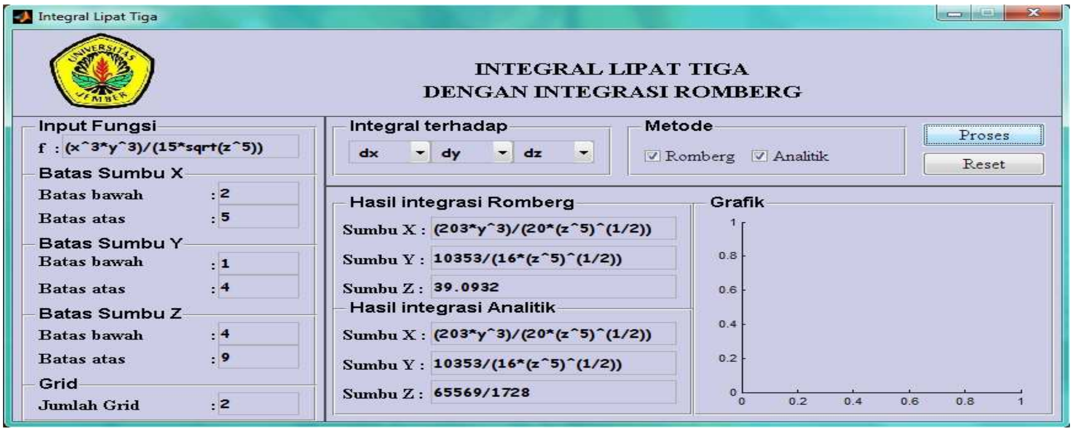
4.4 Simulasi Perbandingan Nilai Integrasi Secara Numerik dan Analitik

Pada subbab ini akan disimulasikan suatu fungsi pada kasus integrasi khususnya integral lipat tiga menggunakan program komputer (MATLAB 7.8.0) untuk mempercepat proses perhitungan dalam mencari solusi penyelesaian secara analitik dan numerik. Selain mempercepat proses perhitungan, program komputer juga memberikan gambaran secara detail hasil integrasi yang diperoleh pada setiap arah pengintegralan (dalam arah *x*, dalam arah *y*, dan dalam arah *z*).

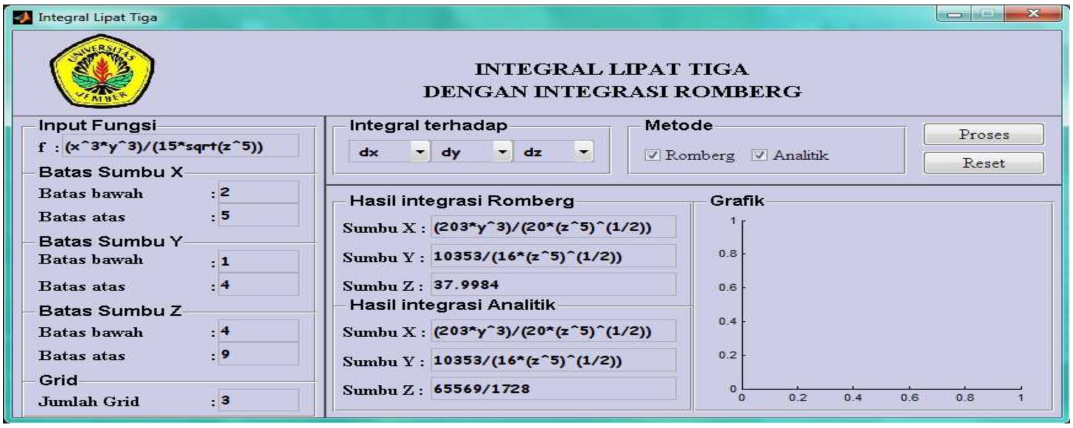
Adapun arah integrasi pada simulasi ini, pertama akan dilakukan dalam arah *x* kemudian dalam arah *y* dan terakhir dilakukan dalam arah *z*. Dengan menggunakan fungsi pada subbab 4.1 maka diperoleh simulasi integrasi sebagai berikut, pengulangan (*grid)* pada fungsi simulasi integrasi Romberg ini akan dilakukan sebanyak n = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Setelah semua *input* dimasukkan, hasil yang diperoleh dapat dilihat pada Gambar 4.1; 4.2; 4.3; 4.4; 4.5, 4.6 dibawah ini.



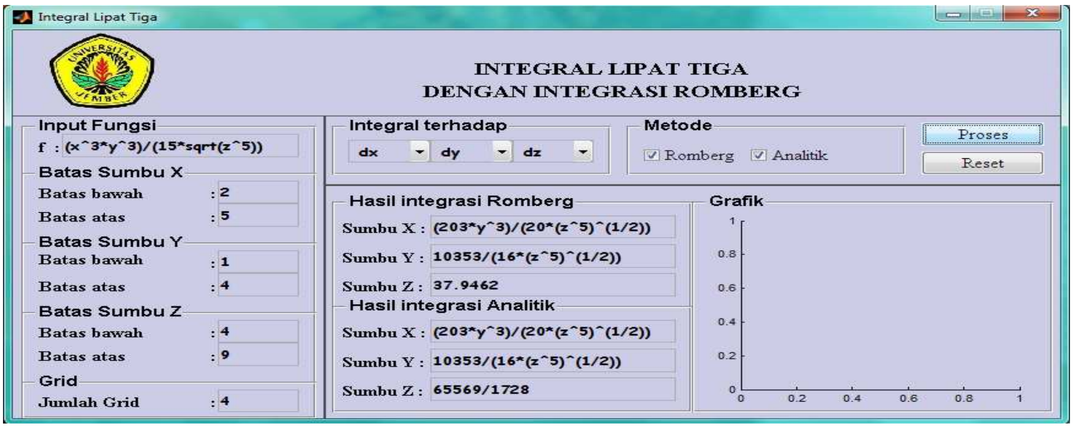
Gambar 4.1 Tampilan Simulasi Integrasi Romberg dengan n=1



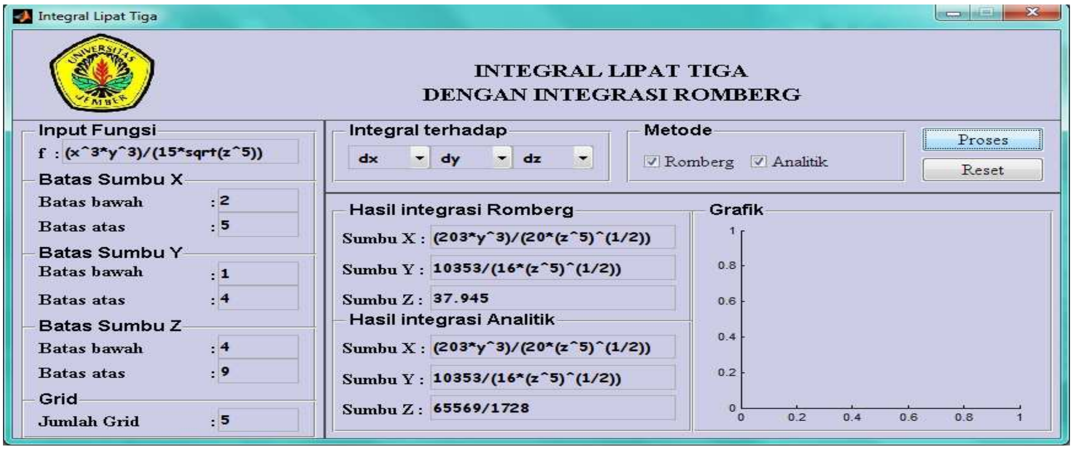
Gambar 4.2 Tampilan Simulasi Integrasi Romberg dengan n=2



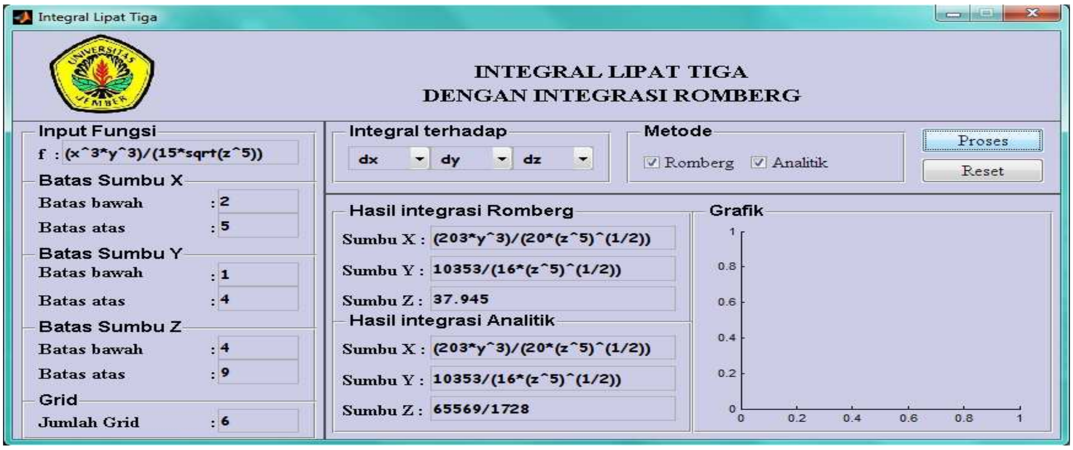
Gambar 4.3 Tampilan Simulasi Integrasi Romberg dengan n=3



Gambar 4.4 Tampilan Simulasi Integrasi Romberg dengan n=4



Gambar 4.5 Tampilan Simulasi Integrasi Romberg dengan *n*=5



Gambar 4.6 Tampilan Simulasi Integrasi Romberg dengan *n*=6

Dari simulasi yang dilakukan dengan program komputer pada permasalahan integral lipat tiga diatas diperoleh hasil analitik yang sama pada setiap pengulangan (*grid*) yang berbeda. Sedangkan hasil penyelesaian numeriknya memberikan hasil yang berbeda pada setiap *grid* yang berbeda, adapun hasil penyelesaian numerik sebagai berikut: pada Gambar 4.1 hasil numeriknya yaitu 114,6496; pada Gambar 4.2 hasil numeriknya yaitu 39,0932; pada Gambar 4.3 hasil numeriknya yaitu 37,9984; pada Gambar 4.4 hasil numeriknya yaitu 37,9462; pada Gambar 4.5 hasil numeriknya yaitu 37,945; dan pada Gambar 4.6 hasil numeriknya yaitu 37,945. Visualisasi gambarnya tidak dapat di tampilkan karena memerlukan empat dimensi.

4.5 Analisa Hasil Simulasi Perbandingan Nilai Analitik dan Numerik

Berdasarkan subbab 4.4 dari hasil simulasi yang dilakukan dengan program komputer (MATLAB 7.8.0) mengenai permasalahan integrasi, dalam hal ini penyelesaian integral lipat tiga dapat disajikan dalam Tabel 4.5 berikut.

Tabel 4.5 Hasil Simulasi Perbandingan Secara Anallitik dan Numerik

n	Hasil Secara Numerik	Selisih Hasil Numerik dan Analitik
1	114,6496	76,7046
2	39,0932	1,1482
3	37,9984	0,0534
4	37,9462	0,0012
5	37,945	0
6	37,945	0

Berdasarkan tabel diatas diperoleh suatu perbandingan nilai galat (*error*) dari penyelesaian masalah integrasi yang dilakukan secara analitik dan secara numerik tabel diatas juga memberikan informasi bahwasannya semakin besar nilai *n* maka semakin kecil nilai galat atau selisih yang diperoleh. Hal ini menunjukkan bahwa hasil integrasi Romberg hampir mendekati atau sama dengan nilai eksaknya.

4.6 Simulasi Penyelesaian Integrasi Pada Fungsi Aljabar

Pada subbab 4.6 akan disimulasikan penyelesaian numerik dan analitik dari kasus integrasi pada fungsi aljabar. Fungsi aljabar yang akan disimulasikan seperti fungsi rasional, fungsi irasional, dan fungsi nilai mutlak. Untuk mensimulasikan fungsi aljabar digunakan fungsi tes yang mewakili masing-masing fungsi pada fungsi aljabar tersebut. Fungsi tes yang digunakan meliputi fungsi pada integral tunggal, integral lipat dua, dan integral lipat tiga. Pada integral tunggal penyelesaian integrasi hanya dilakukan dalam satu arah, sedangkan integral lipat dua dan integral lipat tiga penyelesaian integrasi masing-masing dilakukan dalam dua arah dan tiga arah.

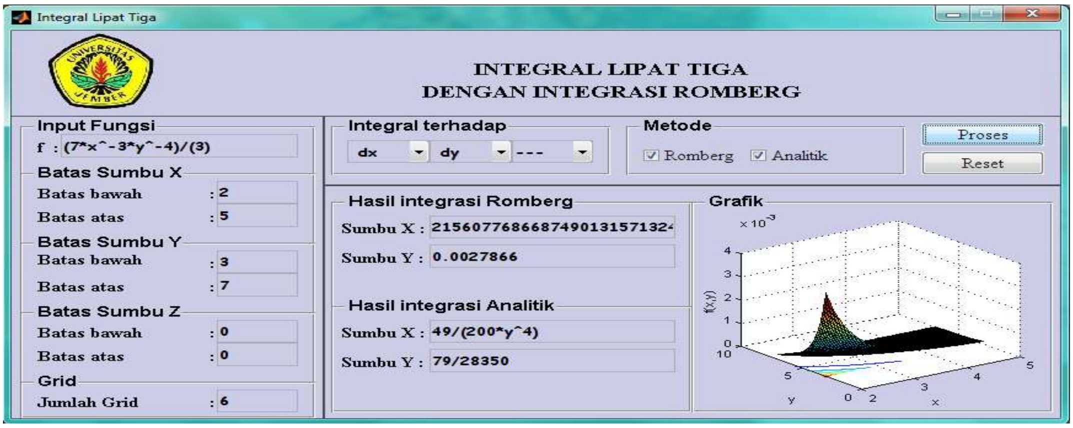
Pada fungsi rasional yang akan dijadikan fungsi tes adalah sebagai berikut:

$\int_2^7 \frac{1}{x^3}dx$, dan $\int_3^7 \int_2^5 \left(\frac{7\left(x^{-3} y^{-4}\right)}{3} \right) dxdy$, serta $\int_2^5 \int_3^5 \int_1^4 \left(\frac{3}{5} \left(\frac{x^5 y^{-7}}{z^3} \right) \right) dydzdx$

Adapun hasil simulasi yang diperoleh dengan bantuan program dari fungsi rasional pada integral tunggal, integral lipat dua, dan integral lipat tiga masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.7; 4.8; dan 4.9 dibawah ini.

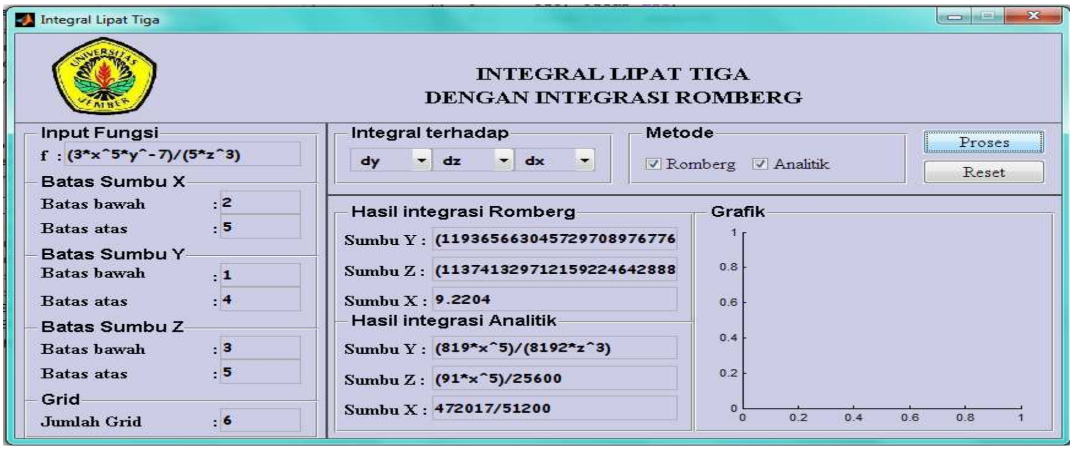
Gambar 4.7 Tampilan Simulasi Integral Tunggal dari Fungsi Rasional

Pada Gambar 4.7 diperoleh penyelesaian integrasi Romberg dari fungsi rasional pada integral tunggal yaitu 0,1148 dan hasil integrasi analitiknya yaitu 45/392, serta grafiknya yang berupa garis lengkung.



Gambar 4.8 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua dari Fungsi Rasional

Gambar 4.8 memberikan solusi penyelesaian secara numerik yaitu 0,0027866 dan analitiknya yaitu 79/28350, serta grafiknya yang berupa sebuah surfas/permukaan.



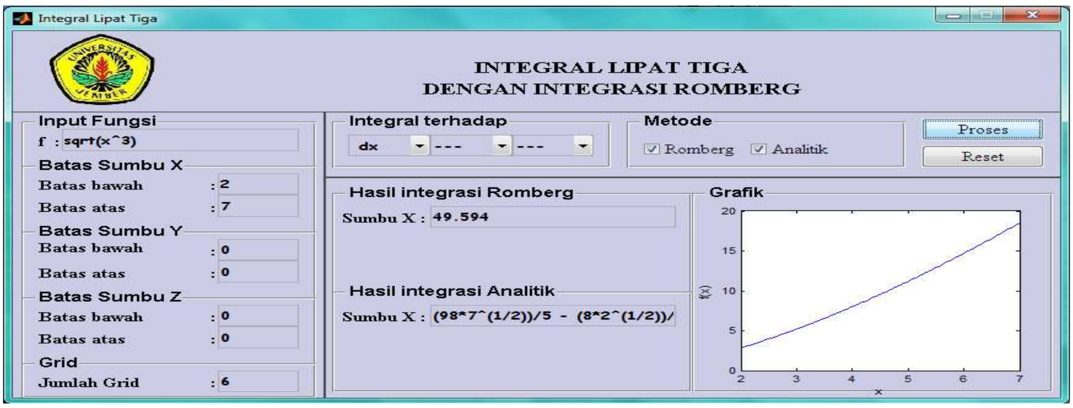
Gambar 4.9 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Fungsi Rasional

Gambar 4.9 memberikan solusi secara numerik yaitu 9,2204 dan analitiknya yaitu 472017/512, grafiknya tidak dapat ditampilkan karena memerlukan empat dimensi.

Pada fungsi irasional yang akan dijadikan fungsi tes sebagai berikut:

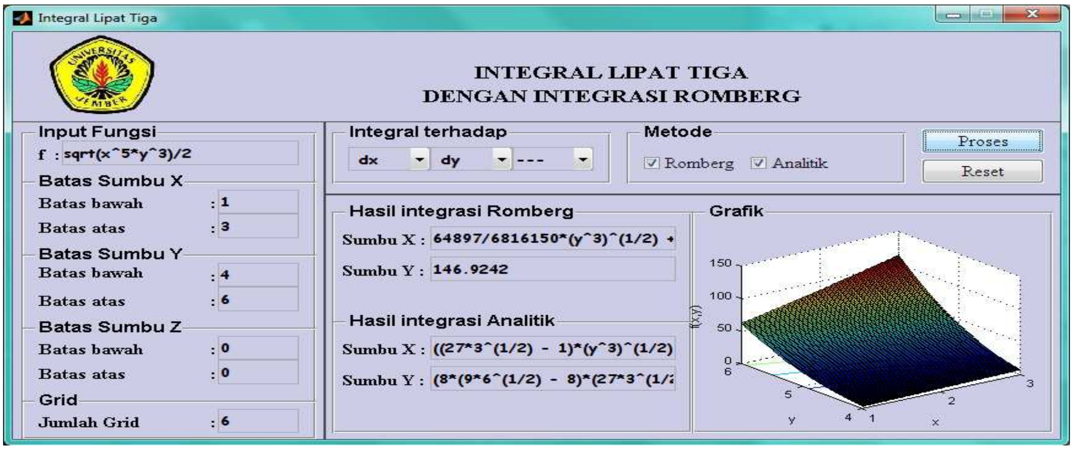
$$\int_2^7 \sqrt{x^3}\,dx \text{ , dan } \int_4^6\int_1^3 \left(\frac{\sqrt{x^5y^3}}{2}\right)dxdy \text{ , serta } \int_1^3\int_3^6\int_2^5 \left(\sqrt{x^2y^3z^4}\right)dydzdx$$

Adapun hasil simulasi yang diperoleh dengan bantuan program dari fungsi irasional dapat dilihat pada Gambar 4.10; 4.11; dan 4.12 dibawah ini.



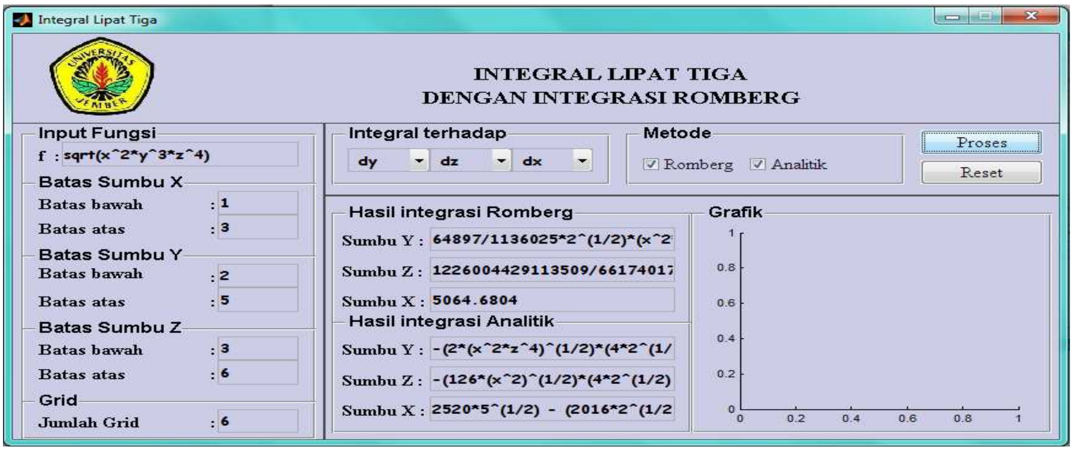
Gambar 4.10 Tampilan Simulasi Integral Tunggal dari Fungsi Irasional

Gambar 4.10 memberikan solusi penyelesaian secara numerik yaitu 49,594 dan hasil analitiknya yaitu $\left(\left(98\times\sqrt{7}\right)/5\right)-\left(\left(8\times\sqrt{2}\right)/5\right)$, serta grafiknya berupa garis lengkung.



Gambar 4.11 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua dari Fungsi Irasional

Sedangkan pada Gambar 4.11 memberikan solusi penyelesaian secara numerik yaitu 144,9242 dan analitiknya $\left(\left(8\times 9\sqrt{6}-8\right)\times\left(27\sqrt{3}-1\right)\right)/35$, grafik berupa surfas .



Gambar 4.12 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Fungsi Irasional

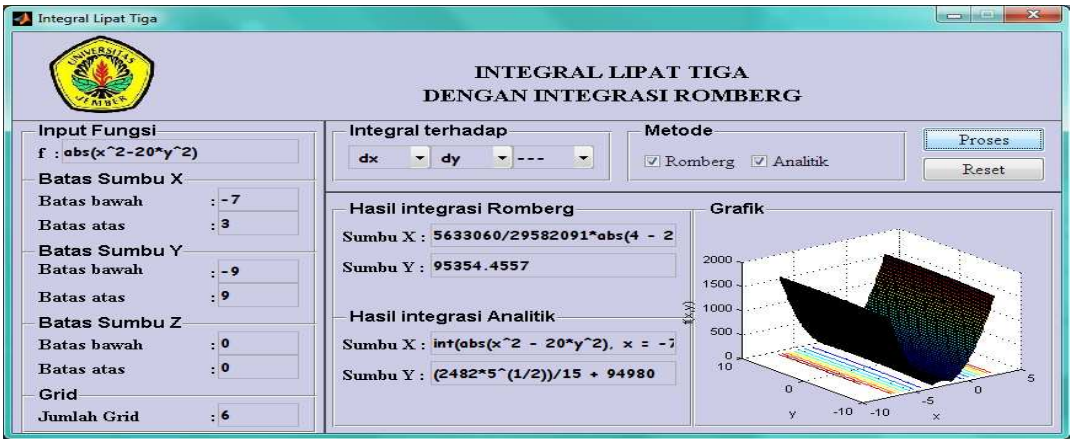
Berdasarkan Gambar 4.12 diperoleh penyelesaian numeriknya yaitu 5064.6804 dan hasil integrasi analitiknya yaitu $2520\sqrt{5}-2016\sqrt{2}/5$, grafiknya tidak dapat ditampilkan karena memerlukan empat dimensi.

Pada fungsi absolut yang akan dijadikan fungsi tes adalah sebagai berikut: $\int_{-7}^{3}(|x+2|)dx$, dan $\int_{-9}^{9}\int_{-7}^{3}(|x^2-20y^2|)dxdy$, serta $\int_{2}^{5}\int_{4}^{8}\int_{3}^{7}(|xyz|)dydzdx$

Adapun hasil simulasi oleh program dari fungsi absolut pada integral tunggal, integral lipat dua, dan integral lipat tiga masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.13; 4.14; dan 4.15 dibawah ini.

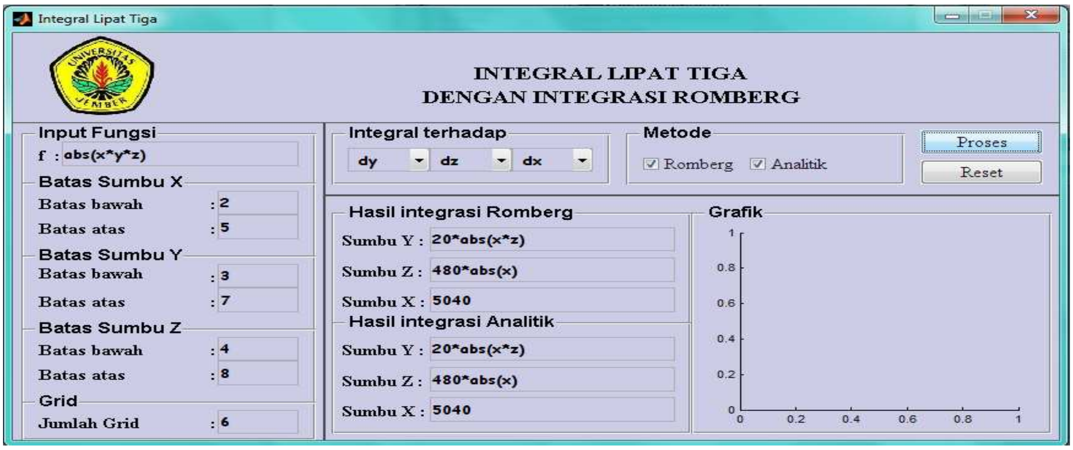
Gambar 4.13 Tampilan Simulasi Integral Tunggal dari Fungsi Absolut

Pada Gambar pada 4.13 diperoleh penyelesaian integrasi Romberg dari fungsi absolut pada integral tunggal yaitu 25 dan hasil integrasi analitiknya yaitu 25, serta grafiknya yang berupa garis huruf v.



Gambar 4.14 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua Dari Fungsi Absolut

Gambar 4.14 memberikan solusi penyelesaian secara numerik yaitu 95354,4557 dan analitiknya yaitu $2482\sqrt{5}/15+9498$,serta grafik yang berupa surfas atau permukaan.



Gambar 4.15 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga Dari Fungsi Absolut

Berdasarkan Gambar 4.15 diperoleh hasil penyelesaian integrasi Romberg dari fungsi absolut pada integral lipat tiga yaitu 5040 dan hasil integrasi analitiknya yaitu 5040, grafiknya tidak dapat ditampilkan karena memerlukan empat dimensi.

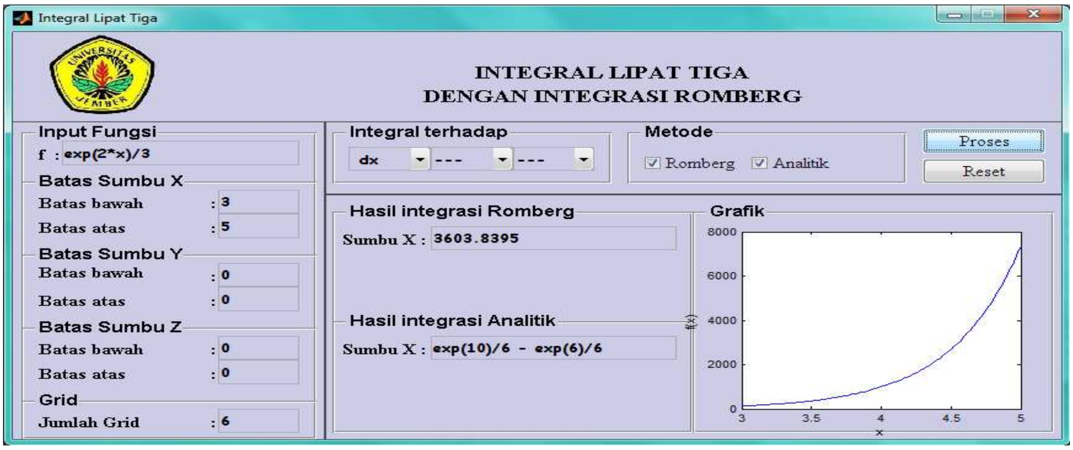
4.7 Simulasi Penyelesaian Integrasi Pada Fungsi Transenden

Pada subbab 4.7 akan disimulasikan penyelesaian numerik dan analitik dari kasus integrasi pada fungsi transenden. Dalam hal ini fungsi transenden yang akan disimulasikan seperti fungsi eksponen, fungsi logaritma, fungsi trigonometri, fungsi siklometri (invers trigonometri), fungsi hiperbolik, dan fungsi invers hiperbolik. Seperti simulasi penyelesaian integrasi pada fungsi aljabar, simulasi pada fungsi transenden juga akan menggunakan fungsi tes yang mewakili dari masing-masing fungsi pada fungsi transenden tersebut. Fungsi tes yang digunakan meliputi integral tunggal, integral lipat dua, dan integral lipat tiga. Pada integral tunggal penyelesaian integrasi dilakukan dalam satu arah, sedangkan integral lipat dua dan integral lipat tiga penyelesaian integrasi masing-masing dilakukan dalam dua arah dan tiga arah.

Pada fungsi eksponen yang akan dijadikan fungsi tes yaitu:

$\int_3^5 \left(\frac{e^{2x}}{3}\right)dx$, dan $\int_1^3 \int_4^7 \left(e^{2x+3} + 2e^{3y+1}\right)dxdy$, serta $\int_5^7 \int_1^6 \int_2^5 \left(\frac{3e^{x+3} + 2e^{2y-1}}{e^{z-1}}\right)dxdydz$

Adapun hasil simulasi oleh program komputer dari fungsi dapat dilihat pada Gambar 4.13; 4,14; dan 4,15 dibawah ini.

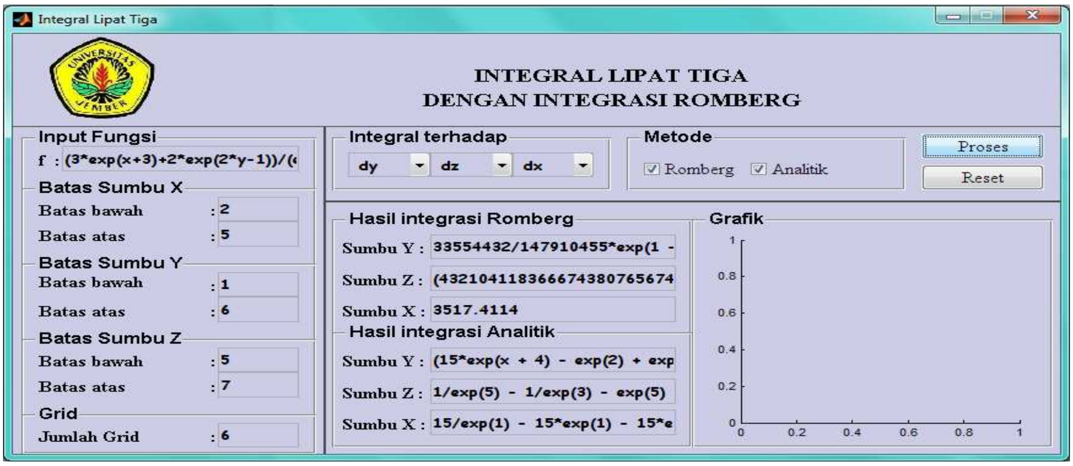


Gambar 4.16 Tampilan Simulasi Integral Tunggal dari Fungsi Eksponensial

Pada Gambar 4.16 diperoleh penyelesaian integrasi Romberg dari fungsi eksponensial pada integral tunggal yaitu 3603,8395 dan hasil integrasi analitiknya yaitu $\left(e^{10}/6\right) - \left(e^{6}/6\right)$, serta grafiknya yang berupa garis lengkung.

Gambar 4.17 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua dari Fungsi Eksponensial

Sedangkan pada Gambar 4.17 dari fungsi eksponensial pada integral lipat dua diperoleh suatu penyelesaian hasil integrasi Romberg yaitu 24139022,3574. dan hasil integrasi analitiknya yaitu $2e^{10} - 2e^{4} - e^{11} + e^{17}$, serta grafiknya yang berupa surfas atau permukaan.



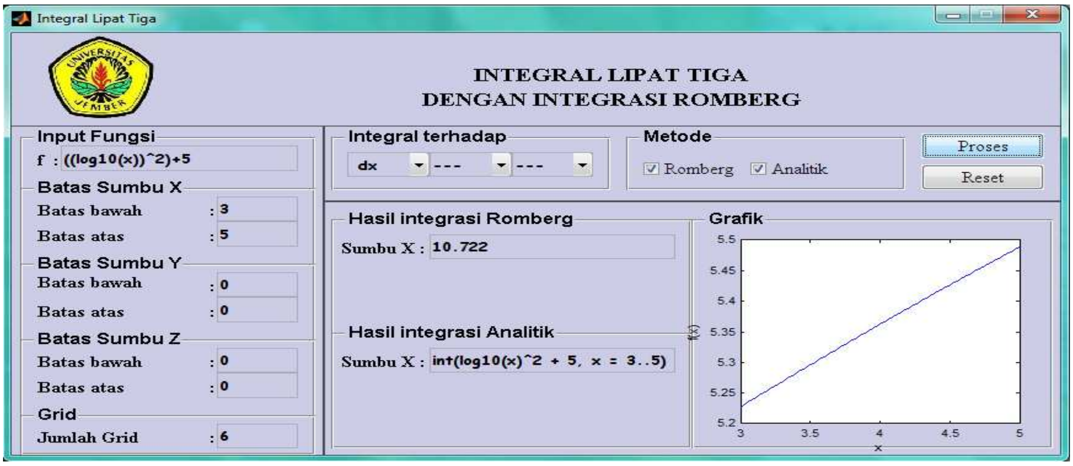
Gambar 4.18 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Fungsi Eksponensial

Berdasarkan Gambar 4.18 diperoleh hasil penyelesaian integrasi Romberg dari fungsi eksponensial pada integral lipat tiga yaitu 3517.4114 dan hasil integrasi analitiknya yaitu $\frac{15}{e} - 15e - 15e^{2} - \frac{3}{e^{3}} + 15e^{4} + \frac{3}{e^{5}} - 3e^{5} + 3e^{7}$, grafiknya tidak dapat ditampilkan karena memerlukan empat dimensi.

Sedangkan hasil penyelesaian yang diperoleh oleh program pada fungsi logaritma, dalam hal ini fungsi simulasi pada fungsi logaritma yang akan dijadikan fungsi tes sebagai berikut:

$\int_3^5 \left((\log(x))^2 + 5\right)dx$, dan $\int_5^7 \int_2^6 \left(5y^3 (\log(x))^3\right)dxdy$, serta $\int_4^7 \int_3^5 \int_2^5 \left(x^3 y \log(z)^3\right)dxdydz$

Adapun hasil simulasi yang diperoleh dengan bantuan program komputer pada kasus integrasi khususnya integrasi Romberg dari fungsi logaritma pada integral tunggal, integral lipat dua, dan integral lipat tiga masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.19; 4.20; dan 4.21 dibawah ini.



Gambar 4.19 Tampilan Simulasi Integral Tunggal dari Fungsi Logaritma

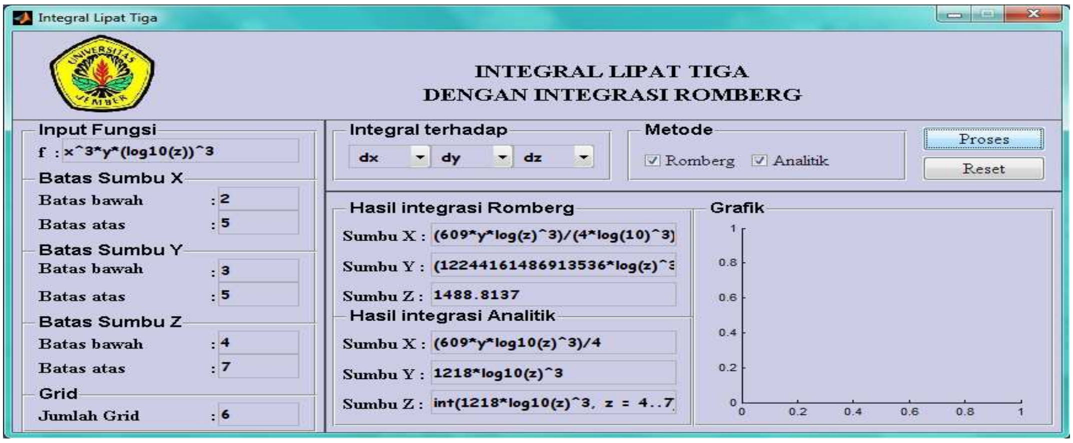
Pada Gambar 4.19 diperoleh penyelesaian integrasi Romberg dari fungsi Logaritma pada integral tunggal yaitu 13,8279 dan hasil integrasi analitiknya yaitu $\log 729/9765625 - 3\log 3^2 + 5\log 5^2 + 14$, serta grafiknya berupa garis lengkung.

Gambar 4.20 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua dari Fungsi Logaritma

Sedangkan pada Gambar 4.20 diperoleh penyelesaian integrasi Romberg dari fungsi logaritma pada penyelesaian integral lipat dua yaitu 24705,5289 dan hasil numerik

$$2664\log(108) + 1332\log(2)^2 - 444\log(2)^3 - 3996\log(6)^2 + 1332\log(6)^3 - 5328$$

, serta gambar grafiknya yang berupa surfas atau permukaan.



Gambar 4.21 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Fungsi Logaritma

Gambar 4.21 memberikan solusi penyelesaian secara numerik yaitu 18175,5436 dan analitiknya $513\log(7)-292\log(4)+146\log(4)^2-487\log(4)^3-256\log(7)^2+853\log(7)^3-219$, grafiknya tidak dapat ditampilkan karena memerlukan empat dimensi.

Pada fungsi trigonometri yang akan dijadikan fungsi tes sebagai berikut:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\right)dx$, dan $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(2x)\cos(3y))dxdy$, serta $\int_3^7\int_2^5\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(x)}{yz^3}\right)dxdydz$

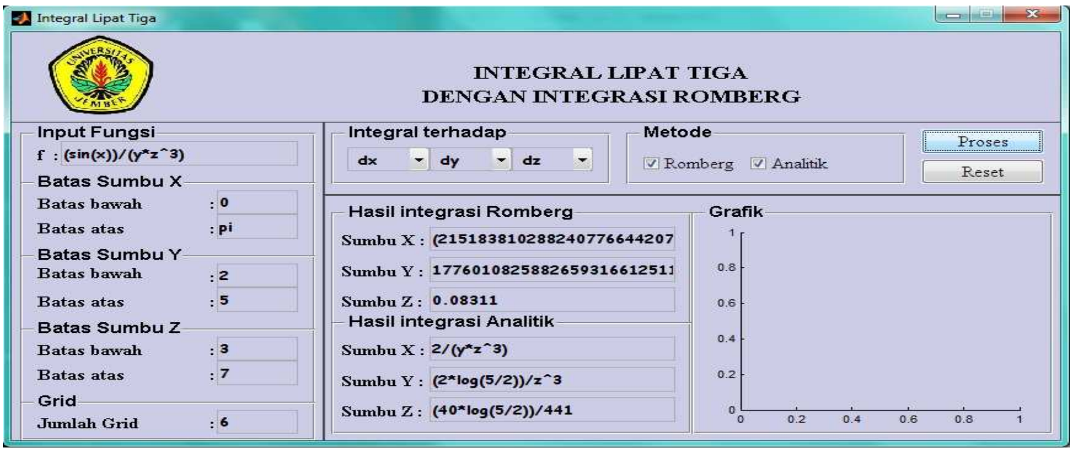
Adapun hasil simulasi yang diperoleh dengan bantuan program dari fungsi trigonometri pada integral tunggal, integral lipat dua, dan integral lipat tiga masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.22; 4.23; dan 4.24 dibawah ini.

Gambar 4.22 Tampilan Simulasi Integral Tunggal dari Fungsi Trigonometri

Gambar 4.22 memberikan solusi penyelesaian secara numerik yaitu 0,7854 dan hasil integrasi analitiknya yaitu $\pi/4$, serta grafiknya berupa garis lengkung.

Gambar 4.23 Tampilan Simulasi Integral Lipat dua dari Fungsi Trigonometri

Sedangkan pada Gambar 4.23 dari fungsi trigonometri pada integral lipat dua diperoleh suatu penyelesaian hasil integrasi Romberg yaitu 7,9635e-034. serta gambar grafik yang berupa bidang lengkung.



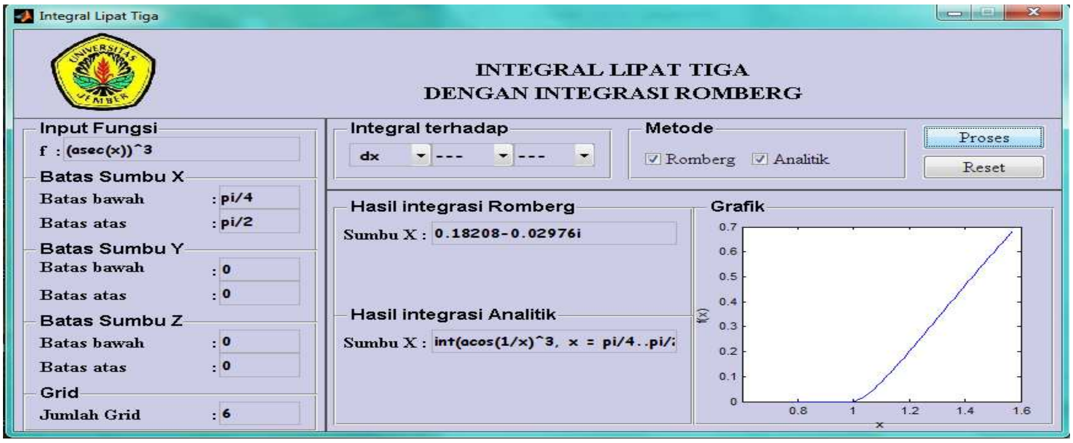
Gambar 4.24 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Fungsi Trigonometri

Gambar 4.24 diperoleh penyelesaian integrasi Romberg dari fungsi trigonometri pada integral lipat tiga yaitu 0.08311 dan integrasi analitiknya $(40 \log 5/2)/441$ grafiknya tidak dapat ditampilkan karena memerlukan empat dimensi.

Pada fungsi siklometri yang akan dijadikan fungsi tes adalah:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\left(\sec^{-1}(x)\right)^3\right)dx\,,\ \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{2}^{5}\left(2x^2\sin^{-1}(y)\right)dxdy\,,\ \int_{\pi/4}^{\pi}\int_{3}^{7}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\left(\cos^{-1}(x)\sqrt{y}\right)+\tan^{-1}(z)\right)dxdydz$$

Adapun hasil simulasi yang diperoleh dengan bantuan program dari fungsi siklometri pada integral tunggal, integral lipat dua, dan integral lipat tiga masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.25; 4.26; dan 4.27 dibawah ini.



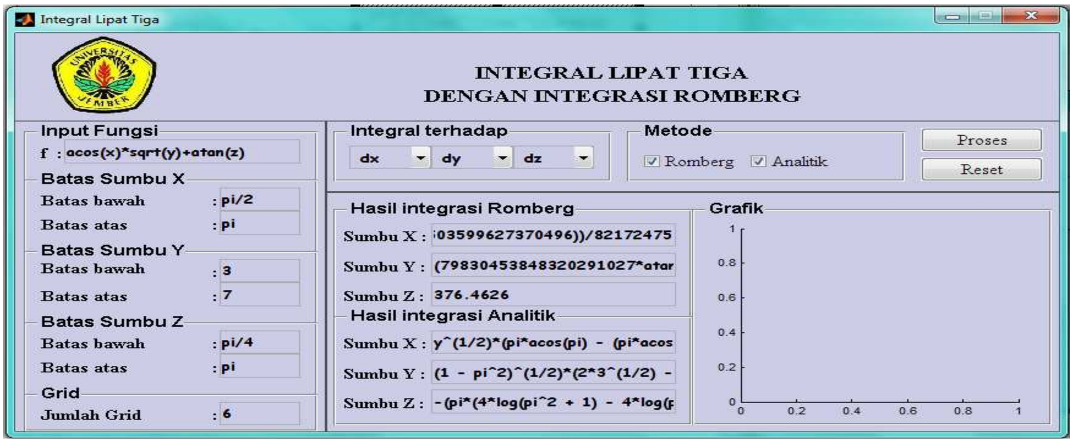
Gambar 4.25 Tampilan Simulasi Integral Tunggal dari Fungsi Siklometri

Pada Gambar 4.25 diperoleh penyelesaian integrasi Romberg dari fungsi siklometri pada integral tunggal yaitu 0,18208-0,02976i dan hasil integrasi analitiknya yaitu 45/392, serta grafiknya berupa garis lengkung.

Gambar 4.26 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua dari Fungsi Siklometri

Sedangkan pada Gambar 4.26 dari fungsi siklometri pada integral lipat dua diperoleh penyelesaian numerik dengan integrasi Romberg 88,9068-30,9218i. dan analitik

$$39\pi(\pi/2) - \cos^{-1}(\pi/2) - \left(39\pi\sin^{-1}(\pi/4)\right)/2 + 78\left(1-\pi^2/4\right)^{1/2} - 78\left(1-\pi^2/16\right)^{1/2}$$



Gambar 4.27 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Fungsi Siklometri

Berdasarkan Gambar 4.27 diperoleh penyelesaian integrasi Romberg dari fungsi siklometri pada integral lipat tiga yaitu 376,4626 dan penyelesaian secara analitiknya

$$-(\left(\pi\left(4\log\left(\pi^2+1\right) - 4\log\left(\pi^{(\pi/16)+1}\right) - 8\pi\tan^{-1}(\pi) - 6\sqrt{3}\sqrt{\left(1-\pi^2\right)} + 3\sqrt{3}\sqrt{4-\pi^2} + 14\sqrt{7}\right)\right)$$

$$\left(\sqrt{1-\pi^2} - 7\sqrt{7}\sqrt{4-\pi^2} + 2\pi\tan^{-1}(\pi/4) - 3\pi\sqrt{3}\cos^{-1}\pi/2 + 7\pi\sqrt{7}\cos^{-1}(\pi/2) + 6\pi\sqrt{3}\right)$$

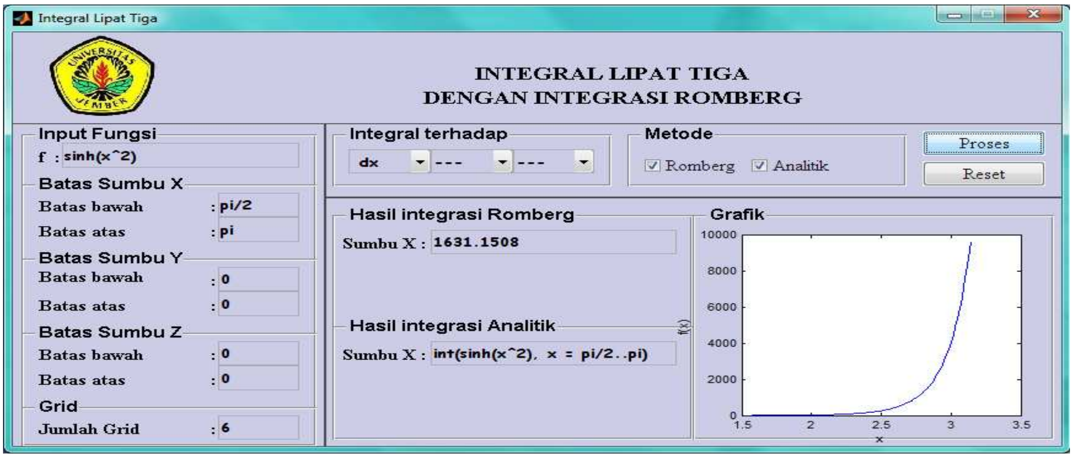
$$\cos^{-1}(\pi) - 14\pi\sqrt{7}\cos^{-1}(\pi))/4.$$

Fungsi transenden selanjutnya yang akan disimulasikan untuk mendapatkan solusi analitik dan solusi numerik dengan bantuan program komputer adalah fungsi hiperbolik. Pada fungsi hiperbolik yang akan dijadikan fungsi tes yaitu:

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\sinh(x^2)\right)dx\,,\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\int_{0}^{\pi}(\cosh(3x)\sinh(3y))dxdy\,,\ \text{dan}\ \int_{5}^{8}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{2}^{6}\left(\sqrt{x}\cosh(y)/\sqrt{z}\right)dxdydz$$

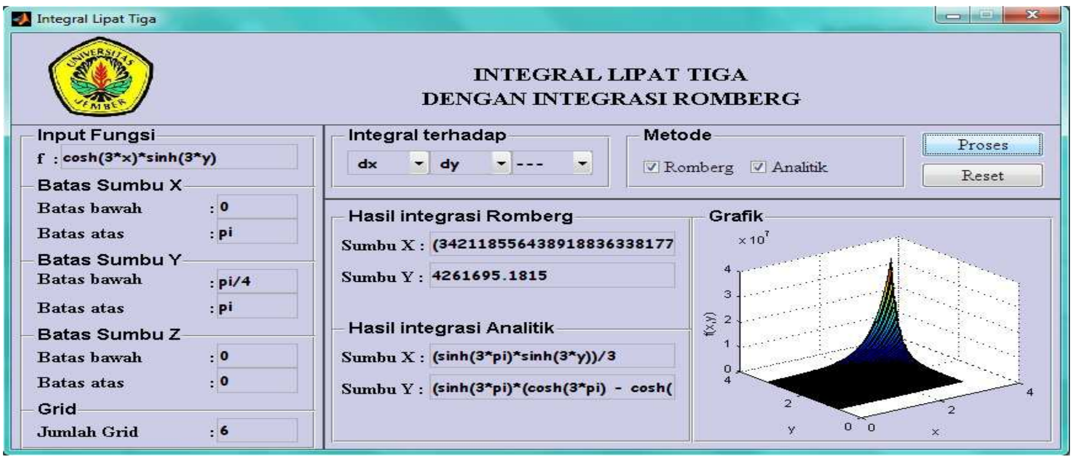
Adapun hasil simulasi yang diperoleh pada kasus integrasi dari fungsi hiperbolik pada integral tunggal, integral lipat dua, dan integral lipat tiga masing-masing dapat dilihat pada Gambar 4.28; 4.29; dan 4.30 dibawah ini.

Berikut adalah hasil simulasi fungsi tes dari fungsi hiperbolik integral tunggal:



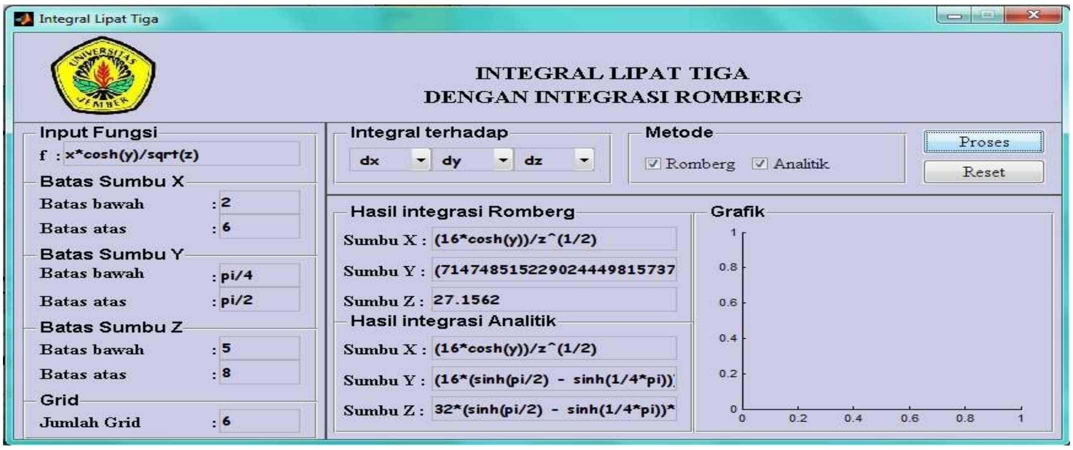
Gambar 4.28 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tunggal dari Fungsi Hiperbolik

Pada Gambar 4.28 diperoleh penyelesaian integrasi Romberg dari fungsi hiperbolik pada integral tunggal yaitu 1631,1508, grafiknya berupa garis lengkung.



Gambar 4.29 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua dari Fungsi Hiperbolik

Sedangkan pada Gambar 4.29 dari fungsi trigonometri pada integral lipat dua diperoleh suatu penyelesaian hasil integrasi Romberg yaitu 4261695,1815 dan hasil integrasi analitiknya $(\sinh(3\pi)\times\cosh(3\pi)-\cosh(3/4\pi))/9$ serta gambar grafiknya yang berupa sebuah surfas atau permukaan.



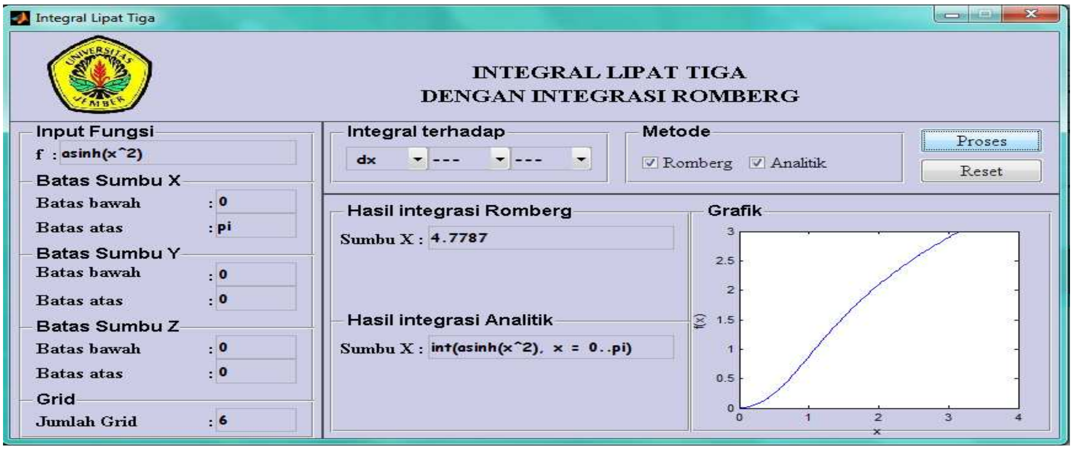
Gambar 4.30 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga dari Fungsi Hiperbolik

Gambar 4.24 memberikan solusi numerik yaitu 27,1562 dan hasil analitiknya $32(\sinh(\pi/2) - \sinh(\pi/4) \times 2\sqrt{2} - \sqrt{5})$ grafiknya tidak dapat ditampilkan, butuh 4 dimensi.

Pada fungsi invers hiperbolik yang akan dijadikan fungsi tes adalah:

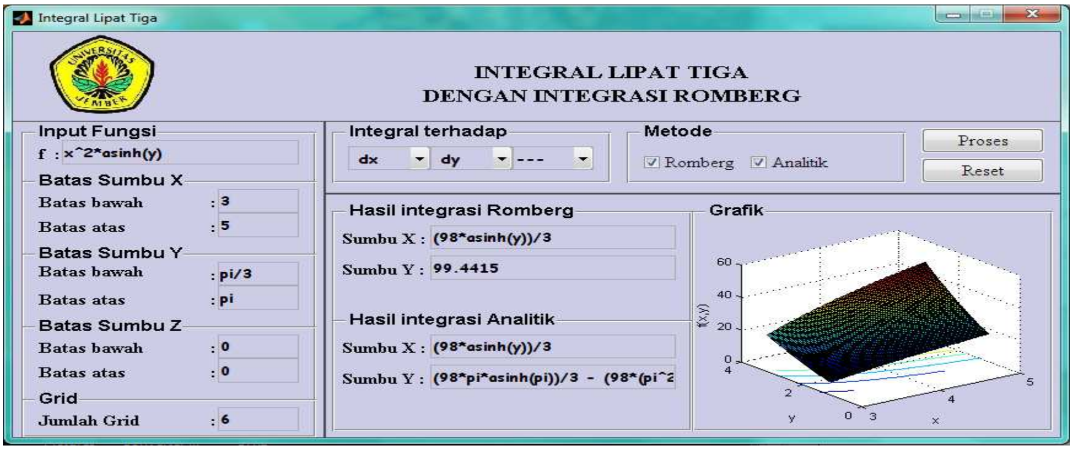
$$\int_0^{\pi} \left(\sinh^{-1}\left(x^2\right)\right) dx\,,\ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\int_3^5 \left(x^2 \sinh^{-1}(y)\right) dxdy,\ \int_3^7\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_2^5 \left(3x\sinh^{-1}(y) + \sqrt{z}\right) dxdydz$$

Adapun hasil simulasi yang diperoleh dengan bantuan program dari fungsi invers hiperbolik dapat dilihat pada Gambar 4.31; 4.32; dan 4.33 dibawah ini.



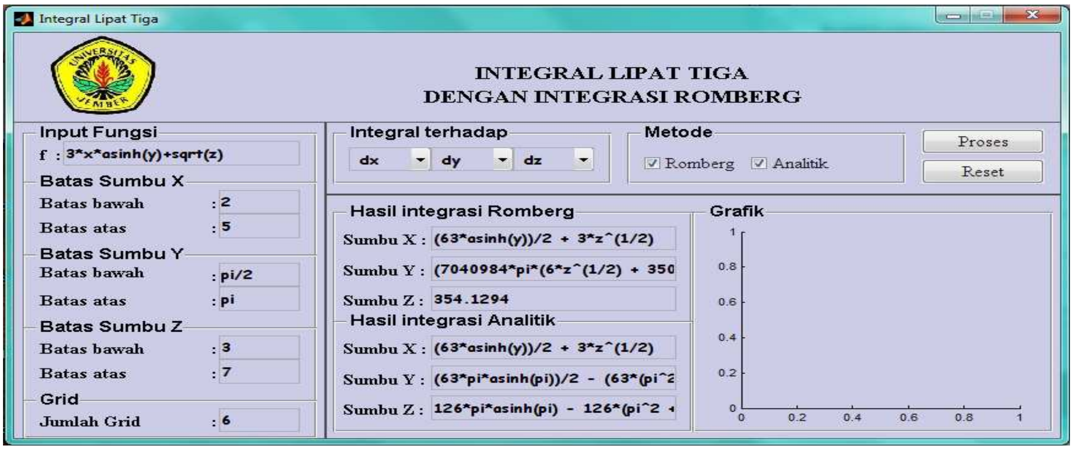
Gambar 4.31 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tunggal Invers Fungsi Hiperbolik

Gambar 4.31 diperoleh penyelesaian integrasi Romberg dari fungsi invers hiperbolik pada integral tunggal yaitu 4,7787 dan grafik berupa garis lengkung.



Gambar 4.32 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua Invers Fungsi Hiperbolik

Sedangkan pada gambar 4.32 dari fungsi trigonometri pada integral lipat dua diperoleh hasil penyelesaian integrasi Romberg yaitu 99,4415 dan hasil analitik yaitu $(98\pi \sinh \pi)/3 - (98\sqrt{(\pi^2+1)})/3 + (98\sqrt{\pi^2+9})/9 - (98\pi \sinh^{-1}(\pi/3))/9$.



Gambar 4.33 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga Invers Fungsi Hiperbolik

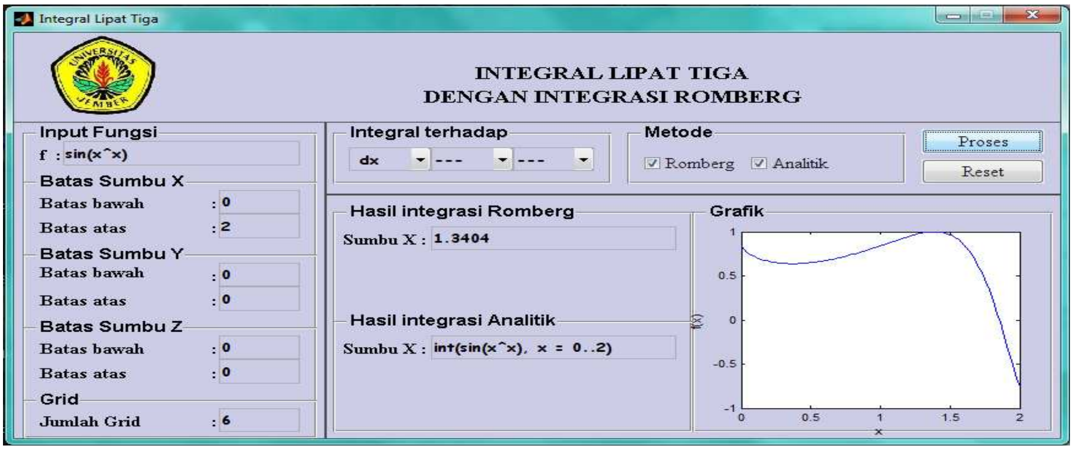
Gambar 4.33 diperoleh hasil simulasi dari fungsi invers hiperbolik pada penyelesaian numerik dengan integrasi Romberg yaitu 354,1294 dan hasil analitiknya yaitu $126\pi \sinh^{-1}(\pi) - 126\sqrt{\pi^2+1} + 63\sqrt{\pi^2+4} - (3\pi 2\sqrt{3}) - ((14\sqrt{7})/3)/2 - 63\pi \sinh^{-1}(\pi/2)$.

4.8 Kasus-kasus Integral Yang Tidak Dapat Diselesaikan Secara Analitik.

Penyelesaian masalah integrasi dapat deselesaikan secara analitik dan juga secara numerik, namun apabila penyelesaian masalah integrasi tidak dapat terpecahkan secara analitik maka solusinya menggunakan numerik, dalam hal ini metode numerik yang digunakan adalah integrasi Romberg. Beberapa kasus integrasi yang tidak dapat diselesaikan secara analitik yaitu:

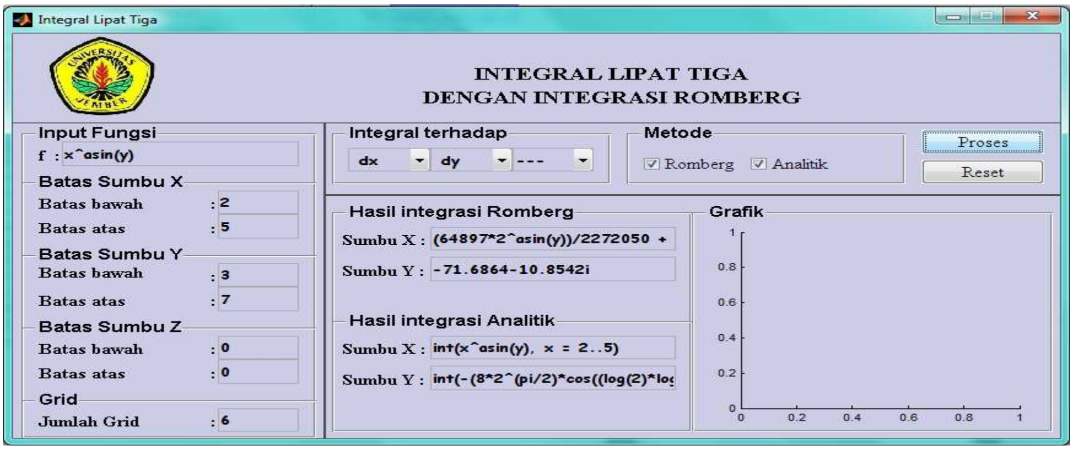
$$\int_0^2 \sin(x^x)dx\,,\ \int_3^7\int_2^5 \left(x^{\sin^{-1}(y)}\right)dxdy\,,\text{dan } \int_3^7\int_2^8\int_3^6 \left(\left(e^{x+y}\right)/\left(z^z\right)\right)dxdydz$$

Berikut ini adalah hasil simulasi yang diperoleh dengan bantuan program dari beberapa kasus integrasi untuk fungsi yang tidak dapat diselesaikan secara analitik pada integral tunggal, integral lipat dua, dan integral lipat tiga dapat dilihat pada Gambar 4.34; 4.35; 4.36 dibawah ini.



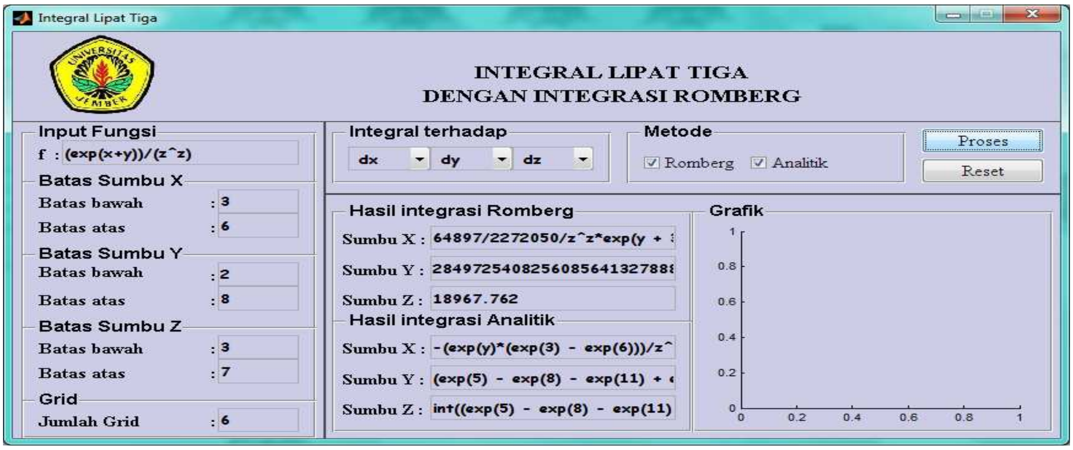
Gambar 4.34 Tampilan Simulasi Integral Tunggal Fungsi Sinus

Pada gambar 4.34 diperoleh penyelesaian secara numerik menggunakan integrasi Romberg dengan bantuan program dari fungsi yang tidak dapat diselesaikan secara analitik pada integral tunggal yaitu 1,3404 dan gambar grafiknya yang berupa suatu garis lengkung atau berupa gelombang. Sedangkan pada simulasi untuk kasus integrasi yang tidak dapat diselesaikan secara analitik pada integral lipat dua dapat dilihat pada gambar 4.35 dibawah ini.



Gambar 4.35 Tampilan Simulasi Integral Lipat Dua Fungsi Siklometri

Pada Gambar 4.35 memberikan penyelesaian numerik yaitu -71,6864-10,8542i dan gambar grafiknya yang berupa sebuah surfas atau permukaan.



Gambar 4.36 Tampilan Simulasi Integral Lipat Tiga Fungsi Eksponen

Gambar 4.36 memberikan solusi penyelesaian numerik 18967,762. Penyelesaian kasus integrasi secara numerik hasilnya berupa nilai pendekatan yang mendekati nilai eksak. Dalam mencari solusi approksimasi dari kasus integrasi yang tidak dapat diselesaikan secara analitik, maka dapat digunakan penyelesaian numerik dengan menggunakan integrasi Romberg berbantu matlab, adapun proses perhitungan pada program dalam mencari solusi numerik akan berhenti secara otomatis pada *iterasi* ke $(1/2)(n)(n+1)$, sehingga memberikan solusi numerik yang mendekati nilai sejatinya.

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

1. Solusi numerik integral lipat tiga dapat dicari dengan menggunakan integrasi Romberg
2. Semakin banyak pengulangan (*grid*) yang dilakukan pada integrasi Romberg dalam mencari solusi numerik pada penyelesaian kasus integrasi, maka nilai galat pada integrasi Romberg akan semakin kecil yang mengakibatkan solusi penyelesaiannya semakin mendekati nilai sebenarnya (eksak).
3. Penyelesaian kasus integrasi pada fungsi aljabar dan fungsi transenden, dengan menggunakan integrasi Romberg akan memberikan solusi numerik mendekati nilai sebenarnya pada pengulangan sebanyak empat kali atau lebih $(n \geq 4)$.
4. Proses perhitungan pada program dalam mencari solusi numerik dengan menggunakan metode Romberg, proses perhitungan akan berhenti secara otomatis pada *iterasi* $\frac{1}{2}n(n+1)$, dimana n adalah jumlah *grid* yang dimasukkan.

5.2 Saran

Pada skripsi ini penulis hanya menggunakan metode Romberg untuk menyelesaikan integral wajar saja dengan menggunakan batas konstan, untuk penulisan selanjutnya agar menganalisis untuk intgral tak wajar dan untuk batas yang tidak konstan. Selain itu dapat digunakan program berbasis web menggunakan bahasa pemrograman PHP dan Java dengan teknologi Applet agar dapat di akses dari mana saja dan kapan saja melalui akses intranet maupun internet.

DAFTAR PUSTAKA

Khasanah, I. 2008. *Penyelesaian Numerik Integral Lipat Dua dengan Menggunakan Integrasi Romberg Berbantuan Matlab*. Tidak Diterbitkan. Skripsi. Malang : Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.

Munif, M. & Hidayatullah, A. P. 2003. *Cara Praktis Penguasaan dan Penggunaan Metode Numerik (Edisi Kedua)*. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh November.

Pujiyanto, A. 2007. *Komputasi Numerik Dengan Matlab (Edisi Pertama)*. Yogyakarta: Graha Ilmu

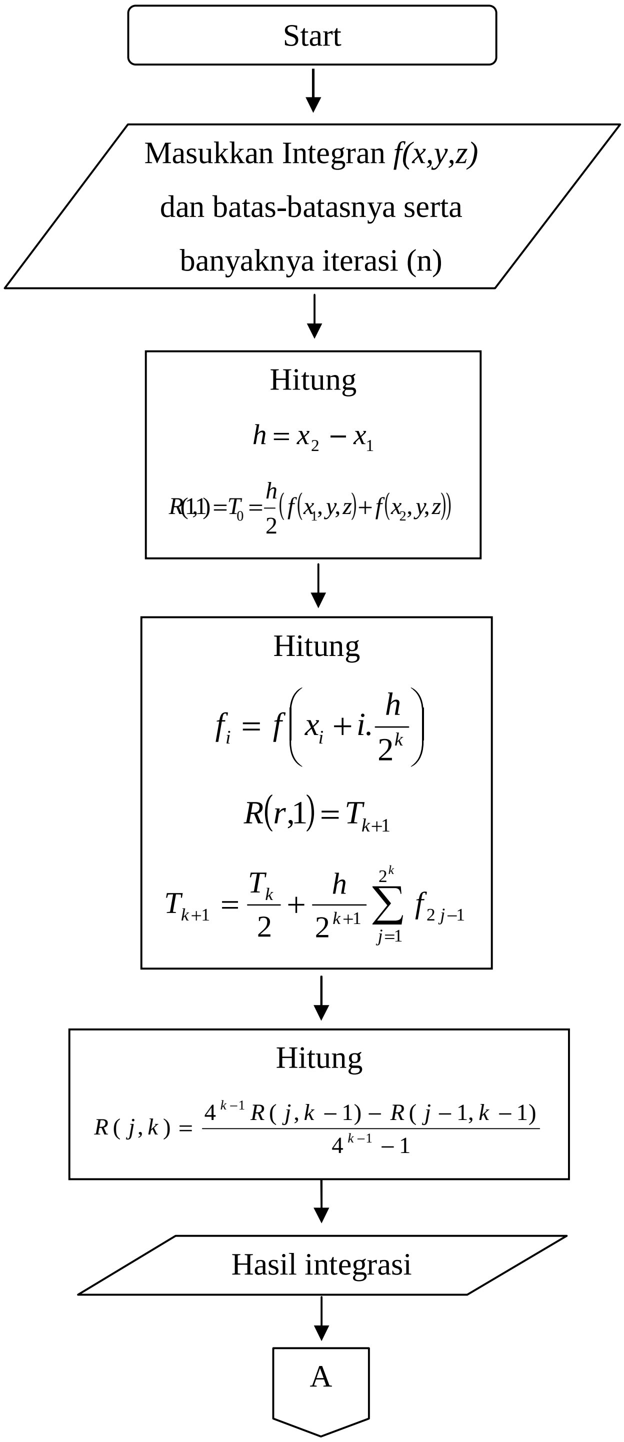
Rahmat, N. 2006. *Aplikasi Berbasis Web Untuk Simulasi Solusi Numerik Integral Tunggal dan Integral Lipat Dua*. Tidak Diterbitkan. Skripsi. Depok : Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia.

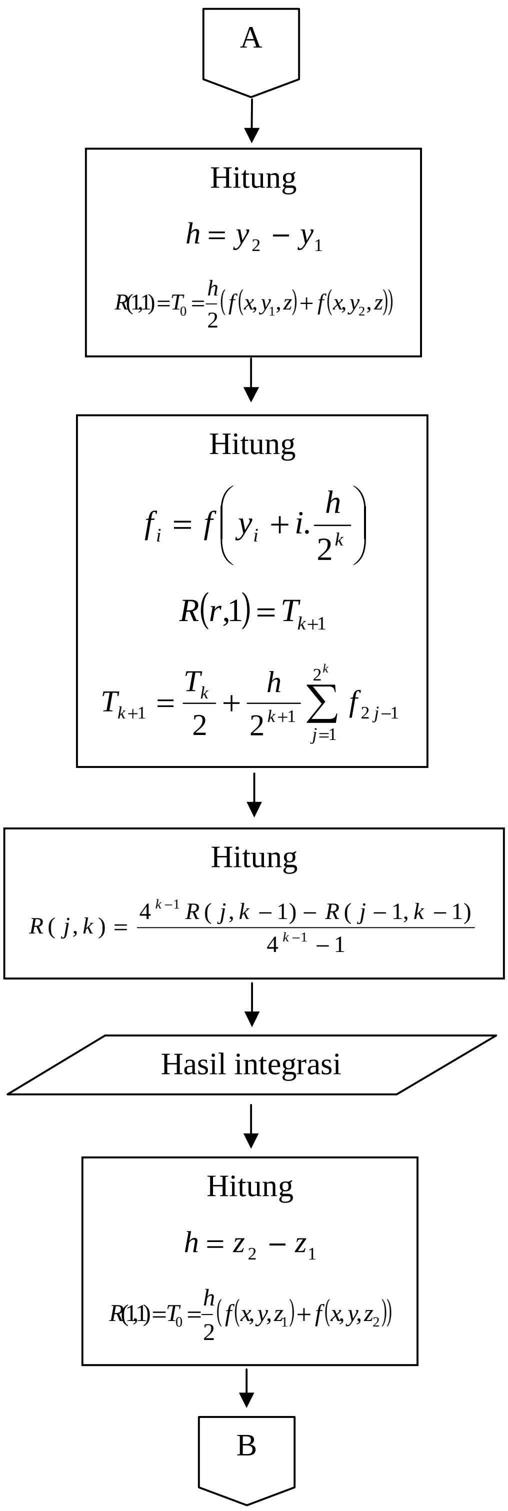
Sahid, 2004. *Pengantar Komputasi Numerik dengan MATLAB*. Yogyakarta : Laboratorium Komputer Jurusan Pendidikan Matematika MIPA UNY.

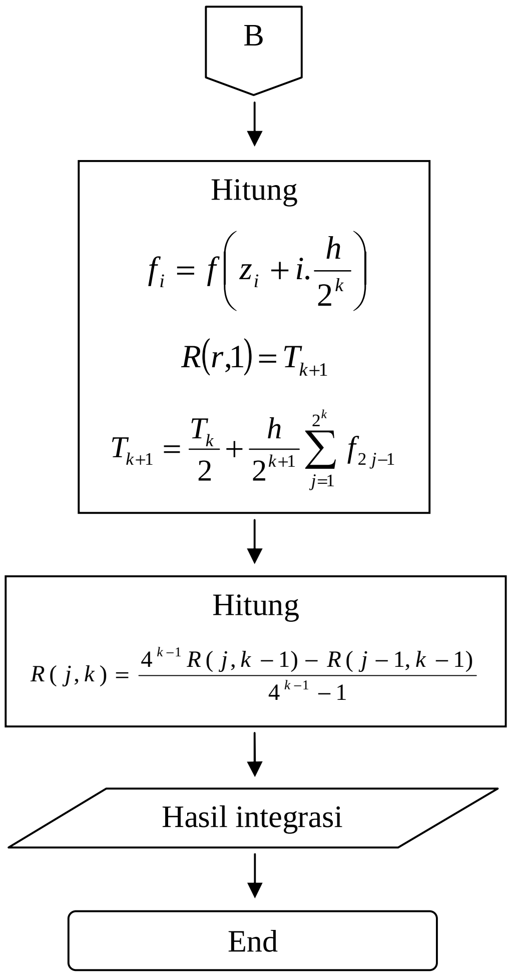
Varberg, D. & Purcell, E. J. 2010a. *Kalkulus Jilid Satu*. Tangerang: Binarupa Aksara Publisher. Alih Bahasa Institut Teknologi Bandung.

Varberg, D. & Purcell, E. J. 2010b.. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2 Edisi Keempat*. Jakarta : Penerbit Erlangga. Alih Bahasa Institut Teknologi Bandung.

LAMPIRAN A. Flowchat Algoritma Program




A
Hitung
$h = y_2 - y_1$
$R(1,1) = T_0 = \frac{h}{2}\left(f(x, y_1, z) + f(x, y_2, z)\right)$
Hitung
$f_i = f\left(y_i + i.\frac{h}{2^k}\right)$
$R(r,1) = T_{k+1}$
$T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}$
Hitung
$R(j,k) = \frac{4^{k-1} R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{4^{k-1} - 1}$
Hasil integrasi
Hitung
$h = z_2 - z_1$
$R(1,1) = T_0 = \frac{h}{2}\left(f(x, y, z_1) + f(x, y, z_2)\right)$
B


B
Hitung
$f_i = f\left(z_i + i.\frac{h}{2^k}\right)$
$R(r,1) = T_{k+1}$
$T_{k+1} = \frac{T_k}{2} + \frac{h}{2^{k+1}} \sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}$
Hitung
$R(j,k) = \frac{4^{k-1} R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{4^{k-1} - 1}$
Hasil integrasi
End

LAMPIRAN B. Tampilan Program *Input* Integral dalam Arah *x*.

```
a=isnumeric(fungsi);
if a==1
    fungsi = num2str(fungsi);
end
fungsi=char(fungsi);
clear R f T
if metod1==1
h=b1-a1;
% untuk arah X
for k=1:n
for j=k:n % untuk baris
    if j==1 && k==1
        x=a1;
        f(1)=eval(fungsi,x);
        x=b1;
        f(3)=eval(fungsi,x);
        R(j,k)=(h/2)*sum(f); % sum (f) adalah sigma f
        T(1)=R;
        clear f
    else
        if k<2
        clear f
        c=2^(j-2);%2^k
        for i=1:c %j=i
       x=(a1+(2*i-1)*h/(2^(j-1)));
        f(i)=eval(fungsi,x);

        end
    T(j)=T(j-1)/2+(h/(2^(j-1)))*sum(f);
    R(j,k)=T(j);
%          else
        end
    end
    if k>=2
                R(j,k)=(4^(k-1)*R(j,k-1)-R(j-1,k-1))/(4^(k-1)-1) ;
%          end
    end
end
end
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[pos1 pos2 80 15],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string','Sumbu X :',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
```

```
'fontweight','bold');
edit11=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[pos1+55 pos2 150 20],...
'HorizontalAlignment','left',...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',10,...
'fontweight','bold');
fungsi=R(j,k);
a=isnumeric(fungsi);
if a==1
    fungsi = num2str(fungsi);
end
fungsi=char(fungsi);
set(edit11,'string',fungsi);
end
if metod2==1
   F=int(Fungsi,'x',a1,b1);
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[pos1 pos2-90 80 15],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string','Sumbu X :',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');
edit21=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[pos1+55 pos2-90 150 20],...
'HorizontalAlignment','left',...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',10,...
'fontweight','bold');
F=char(F);
set(edit21,'string',F);
Fungsi=F;
end
pos2=pos2-25;
```

LAMPIRAN C. Tampilan Program *Input* Integral dalam Arah *y*.

```
a=isnumeric(fungsi);
if a==1
    fungsi = num2str(fungsi);
end
fungsi=char(fungsi);
if metod1==1
clear R f T
h=b2-a2;
k=1;j=1;i=1;
for k=1:n
for j=k:n % untuk baris
    if j==1 && k==1
        y=a2;
        f(1)=eval(fungsi,y);
        y=b2;
        f(3)=eval(fungsi,y);
        R(j,k)=(h/2)*sum(f); % sum (f) adalah sigma f
        T(1)=R(j,k);
        clear f
    else
       if k<2
        clear f
        c=2^(j-2);%2^k
        for i=1:c %j=i
       y=(a2+(2*i-1)*h/(2^(j-1)));
        f(i)=eval(fungsi,y);

        end
    T(j)=T(j-1)/2+(h/(2^(j-1)))*sum(f);
    R(j,k)=T(j);
        else
                 R(j,k)=(4^(k-1)*R(j,k-1)-R(j-1,k-1))/(4^(k-1)-1)
;
        end
     end
end
end
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[pos1 pos2 80 15],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string','Sumbu Y :',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');
```

```
edit12=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[pos1+55 pos2 150 20],...
'HorizontalAlignment','left',...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',10,...
'fontweight','bold');
fungsi=R(j,k);
a=isnumeric(fungsi);
if a==1
    fungsi = num2str(fungsi);
end
fungsi=char(fungsi);
set(edit12,'string',fungsi);
 end
 if metod2==1

   F=int(Fungsi,'y',a2,b2);
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[pos1 pos2-90 80 15],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string','Sumbu Y :',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');
edit22=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[pos1+55 pos2-90 150 20],...
'HorizontalAlignment','left',...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',10,...
'fontweight','bold');
F=char(F);
set(edit22,'string',F);
 Fungsi=F;
end
pos2=pos2-25;
```

LAMPIRAN D. Tampilan Program *Input* Integral dalam Arah *z*.

```
a=isnumeric(fungsi);
if a==1
    fungsi = num2str(fungsi);
end
fungsi=char(fungsi);
clear R f T
% fungsi='(7*y^3*z)/2';
h=b3-a3;
if metod1==1
for k=1:n
for j=k:n % untuk baris
    if j==1 && k==1
        z=a3;
        f(1)=eval(fungsi,z);
        z=b3;
        f(3)=eval(fungsi,z);
        R(j,k)=(h/2)*sum(f); % sum (f) adalah sigma f
        T(1)=R(j,k) ;
        clear f
    else
        if k<2
        clear f
        c=2^(j-2);%2^k
        for i=1:c %j=i
       z=(a3+(2*i-1)*h/(2^(j-1)));
        f(i)=eval(fungsi,z);
        end
    T(j)=T(j-1)/2+(h/(2^(j-1)))*sum(f);
    R(j,k)=T(j);
        else
                R(j,k)=(4^(k-1)*R(j,k-1)-R(j-1,k-1))/(4^(k-1)-1) ;
        end
    end
end
end
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[pos1 pos2 80 15],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string','Sumbu Z :',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');

edit13=uicontrol('parent',win1,...
```

```
'units','points',...
'position',[pos1+55 pos2 150 20],...
'HorizontalAlignment','left',...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',10,...
'fontweight','bold');
fungsi=R(j,k);
a=isnumeric(fungsi);
if a==1
    fungsi = num2str(fungsi);
end
fungsi=char(fungsi);
set(edit13,'string',fungsi);
end
if metod2==1
   F=int(Fungsi,'z',a3,b3);
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[pos1 pos2-90 80 15],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string','Sumbu Z :',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');
edit23=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[pos1+55 pos2-90 150 20],...
'HorizontalAlignment','left',...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',10,...
'fontweight','bold');
F=char(F);
set(edit23,'string',F);
 Fungsi=F;
end
pos2=pos2-25;
```

LAMPIRAN E. Tampilan Program *Input* GUI.

```
clc; clear all;
close all; gagal=0;
syms x y z
win1=figure(...
'units','points',...
'position',[50 100 640 335],...
'color',[.8 .8 .9],...
'menubar','none',...
'resize','off',...
'numbertitle','off',...
'name','Integral Lipat Tiga');

grafik1=axes('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[10 265 90 70],...
'fontsize',8,...
'color',[.8 .8 .9]);
olmat=imread('unej.jpg');
    imshow(olmat);
        set(win1,'CurrentAxes',grafik1);

%==========================================
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[90 290 550 20],...
'style','Text',...
'string',' INTEGRAL LIPAT TIGA ',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',15,...
'fontweight','bold',...
    'foregroundcolor',[.0 .0 .0]);

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[140 266 450 24],...
'style','Text',...
'string',' DENGAN INTEGRASI ROMBERG ',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',15,...
'fontweight','bold',...
    'foregroundcolor',[.0 .0 .0]);
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[0 260 900 1],...
'style','Text',...
```

```
'backgroundcolor',[.3 .3 .3],...
 'foregroundcolor',[1 1 1]);

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[190 0 1 260],...
'style','Text',...
'backgroundcolor',[.3 .3 .3],...
 'foregroundcolor',[1 1 1]);

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[190 200 700 2],...
'style','Text',...
'backgroundcolor',[.3 .3 .3],...
 'foregroundcolor',[1 0 1]);

%=============================================
hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','Input Fungsi','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'fontweight','bold',...
             'Position',[5 120 180 140]);

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[15 220 110 20],...
'style','Text',...
'string','f',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'HorizontalAlignment','left',...
'fontweight','bold',...
'fontsize',12);
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[25 220 3 20],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string',':',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontweight','bold',...
'fontsize',12);

editf=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[30 225 145 20],...
'style','edit',...
'string','0',...
```

```
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'HorizontalAlignment','left',...
'fontname','comic',...
'fontweight','bold',...
'fontsize',10);

 hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','Batas Sumbu X','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'fontweight','bold',...
             'Position',[5 0 180 220]);

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[15 180 110 20],...
'style','Text',...
'string','Batas bawah',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'HorizontalAlignment','left',...
'fontweight','bold',...
'fontsize',12);
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[120 180 3 20],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string',':',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontweight','bold',...
'fontsize',12);

edit1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[125 185 50 20],...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'HorizontalAlignment','left',...
'fontname','comic',...
'fontweight','bold',...
'fontsize',10);

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[15 160 80 20],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string','Batas atas ',...
```

```
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[120 160 3 20],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string',':',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');

edit2=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[125 165 50 20],...
'HorizontalAlignment','left',...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',10,...
'fontweight','bold');
%============================================
 hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','Batas Sumbu Y','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'fontweight','bold',...
             'Position',[5 0 180 160]);

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'HorizontalAlignment','left',...
'position',[15 123 100 20],...
'style','Text',...
'string','Batas bawah ',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[120 120 3 20],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string',':',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
```

```
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');

edit3=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[125 125 50 20],...
'HorizontalAlignment','left',...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',10,...
'fontweight','bold');

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[15 100 80 20],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string','Batas atas ',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[120 100 3 20],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string',':',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');

edit4=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[125 105 50 20],...
'HorizontalAlignment','left',...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',10,...
'fontweight','bold');
%============================================
 hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','Batas Sumbu Z','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'fontweight','bold',...
```

```
              'Position',[5 0 180 100]);
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[15 60 80 20],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string','Batas bawah ',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[120 60 3 20],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string',':',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');

edit5=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[125 65 50 20],...
'HorizontalAlignment','left',...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',10,...
'fontweight','bold');

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[15 45 80 15],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string','Batas atas ',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[120 45 3 15],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string',':',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
```

```
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');

edit6=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[125 45 50 20],...
'HorizontalAlignment','left',...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',10,...
'fontweight','bold');

%===========================================
 hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','Grid','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'fontweight','bold',...
             'Position',[5 0 180 40]);

label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[15 5 80 15],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string','Jumlah Grid ',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');
label1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[120 5 3 15],...
'style','Text',...
'HorizontalAlignment','left',...
'string',':',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','Times New Roman',...
'fontsize',12,...
'fontweight','bold');
edit7=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[125 5 50 20],...
'HorizontalAlignment','left',...
'style','edit',...
'string','0',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',10,...
```

```
'fontweight','bold');

%============================================
 hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','Integral terhadap','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'fontweight','bold',...
             'Position',[195 210 170 50]);

 pilihan1=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[205 220 50 20],...
'HorizontalAlignment','left',...
'style','popup',...
'string','---| dx | dy | dz',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',10,...
'callback','pilihan',...
'fontweight','bold');
pilihan2=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[255 220 50 20],...
'HorizontalAlignment','left',...
'style','popup',...
'string','---| dx | dy | dz',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',10,...
'callback','pilihan',...
'fontweight','bold');

pilihan3=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[305 220 50 20],...
'HorizontalAlignment','left',...
'style','popup',...
'string','---| dx | dy | dz',...
'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
'fontname','comic',...
'fontsize',10,...
'callback','pilihan',...
'fontweight','bold');

%=============================================
 hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','Metode','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'fontweight','bold',...
```

```
              'Position',[375 210 170 50]);
chek1=uicontrol('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[385 220 70 15],...
    'style','CheckBox',...
    'string','Romberg',...
    'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
    'fontname','times new roman',...
    'fontsize',12);

chek2=uicontrol('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[450 220 70 15],...
    'style','CheckBox',...
    'string','Analitik',...
    'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
    'fontname','times new roman',...
    'fontsize',12);

%============================================
hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','Hasil integrasi Romberg','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'fontweight','bold',...
             'Position',[195 95 220 100]);
hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','Hasil integrasi Analitik','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'fontweight','bold',...
             'Position',[195 5 220 100]);

hp = uipanel('parent',win1,...
             'Title','Grafik','FontSize',12,...
             'units','points',...
             'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
             'fontweight','bold',...
             'Position',[415 5 220 190]);
grafik2=axes('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[445 25 170 145],...
'fontsize',8,...
'color',[.8 .8 .9]);

%============================================
pros11=uicontrol('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[555 235 75 20],...
    'style','Pushbutton',...
    'callback','Proses',...
```

```
     'string','Proses',...
     'fontname','times new roman',...
     'fontsize',12);
pros11=uicontrol('parent',win1,...
     'units','points',...
     'position',[555 210 75 20],...
     'style','Pushbutton',...
     'callback','ROMBERG',...
     'string','Reset',...
     'fontname','times new roman',...
     'fontsize',12);
clc
pos1=200;
pos2=155;
a1=str2num(get(edit1,'string'));% batas bawah x
b1=str2num(get(edit2,'string')); %batas atas x
a2=str2num(get(edit3,'string')); % bats bawah y
b2=str2num(get(edit4,'string')); %batas atas y
a3=str2num(get(edit5,'string'));%batas bawah z
b3=str2num(get(edit6,'string')); %batas atas z
n= str2num(get(edit7,'string')); % jumlah grid

fungsi=get(editf,'string'); %fungsi yang akan di integralkan
Fungsi=fungsi;
int1=get(pilihan1,'value');int2=get(pilihan2,'value');
int3=get(pilihan3,'value');
metod1=get(chek1,'value'); metod2=get(chek2,'value');
fungsi1=fungsi;
tot=symvar(fungsi1);
tot=length(tot);

if gagal==1
             errordlg('Pilihan Arah Integral Tidak Boleh Ada yang
Sama','error');
break;
end
switch int1
    case 2
        dx;
    case 3
        dy;
    case 4
        dz ;

end

switch int2
   case 2
        dx;
    case 3
        dy;
```

```
    case 4
        dz ;

end

switch int3
   case 2
        dx;
    case 3
        dy;
    case 4
        dz ;

end
% grafik
% tot=int1+int2+int3;
fungsi=fungsi1;
if tot==1
if a1==b1
    q=zeros(1,101);
else
    h1=(b1-a1)/100;
    x1=a1:h1:b1;
    for i=1:101
    x=x1(i);
   Yi(i)=eval(fungsi,x);
end
        set(win1,'CurrentAxes',grafik2);
plot(x1,Yi);
xlabel('x'); ylabel('f(x)');
end
if a2==b2
    q=zeros(1,101);
else
    h2=(b2-a2)/100;
    x2=a2:h2:b2;
    for i=1:101
    y=x2(i);
   Yi(i)=eval(fungsi,y);
end
        set(win1,'CurrentAxes',grafik2);
plot(x2,Yi);
xlabel('y'); ylabel('f(x)');

end
if a3==b3
    q=zeros(1,101);
else
    h3=(b3-a3)/100;
    x3=a3:h3:b3;
    for i=1:101
```

```
    z=x3(i);
   Yi(i)=eval(fungsi,z);
end
        set(win1,'CurrentAxes',grafik2);
plot(x3,Yi);xlabel('z'); ylabel('f(x)');

end
end

if tot==2
if a1==b1

    h1=(b3-a3)/100;
        h2=(b2-a2)/100;
    x1=a3:h1:b3;
    x2=a2:h2:b2;
    for i1=1:101
        y=x2(i1);
        F=fungsi;
%         F=eval(F,y);
        for i=1:101
            z=x1(i);
            Yi(i,i1)=eval(F,z);
        end
    end
        set(win1,'CurrentAxes',grafik2);
        surfc(x1,x2,Yi);
xlabel('z'); ylabel('y');zlabel('f(y,z)');

end

if a2==b2

    h1=(b3-a3)/100;
        h2=(b1-a1)/100;
    x1=a3:h1:b3;
    x2=a1:h2:b1;
    for i1=1:101
        x=x2(i1);
        F=fungsi;
%         F=eval(F,x);
        for i=1:101
            z=x1(i);
            Yi(i,i1)=eval(F,z);
        end
    end
        set(win1,'CurrentAxes',grafik2);
        surfc(x1,x2,Yi);
xlabel('z'); ylabel('x');zlabel('f(x,z)');
end
```

```
if a3==b3

    h1=(b1-a1)/100;
        h2=(b2-a2)/100;
    x1=a1:h1:b1;
    x2=a2:h2:b2;
    for i1=1:101
        y=x2(i1);
        F=fungsi;
%          F=eval(F,y);
        for i=1:101
            x=x1(i);
            Yi(i,i1)=eval(F,x);
        end
    end
        set(win1,'CurrentAxes',grafik2);
        surfc(x1,x2,Yi);
xlabel('x'); ylabel('y');zlabel('f(x,y)');

end
end

clear fungsi Fungsi
```

LAMPIRAN F. Perhitungan Penyelesaian Numerik Integral Lipat Tiga *n=6*

Penyelesaian Integrasi dalam Arah x

Integran	Batas Integran x		$h = x_2 - x_1$	$f(x_1, y, z)$	$f(x_2, y, z)$	$R(1,1) = \frac{h}{2}(f(x_1, y, z) + f(x_2, y, z))$
	x_1	x_2				
$\frac{x^3 y^3}{15\sqrt{z^5}}$	2	5	3	$\frac{8y^3}{15\sqrt{z^5}}$	$\frac{125y^3}{15\sqrt{z^5}}$	$13{,}3\frac{y^3}{\sqrt{z^5}}$

		x_1	i	h	2^{k+1}	$f_i = f\left(x_1 + i\frac{h}{2^{k+1}}\right)$	$\frac{(f_i)^3 y^3}{15\sqrt{z^5}}$	k	$\sum\left(\frac{(f_i)^3 y^3}{15\sqrt{z^5}}\right)$	T_0	$T_{k+1} = \frac{T_0}{2} + \frac{h}{2^{k+1}}\sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}$
R(2,1)	f_1	2	1	3	2	3,5	2,8583333 $y^3/\sqrt{z^5}$	0	2,858333333 $y^3/\sqrt{z^5}$	13,3 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,9375 $y^3/\sqrt{z^5}$
R(3,1)	f_1	2	1	3	4	2,75	1,3864583 $y^3/\sqrt{z^5}$	1	6,504166667 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,9375 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,346875 $y^3/\sqrt{z^5}$
	f_3	2	3	3	4	4,25	5,1177083 $y^3/\sqrt{z^5}$	1			

R(4,1)	f_1	2	1	3	8	2,375	0,8930989 $y^3/\sqrt{z^5}$	2	13,40208333 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,346875 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,19921875 $y^3/\sqrt{z^5}$
	f_3	2	3	3	8	3,125	2,0345052 $y^3/\sqrt{z^5}$	2			
	f_5	2	5	3	8	3,875	3,8790364 $y^3/\sqrt{z^5}$	2			
	f_7	2	7	3	8	4,625	6,5954427 $y^3/\sqrt{z^5}$	2			
R(5,1)	f_1	2	1	3	16	2,1875	0,6978352 $y^3/\sqrt{z^5}$	3	27,00104167 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,19921875 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,16230469 $y^3/\sqrt{z^5}$
	f_3	2	3	3	16	2,5625	1,1217610 $y^3/\sqrt{z^5}$	3			
	f_5	2	5	3	16	2,9375	1,6898274 $y^3/\sqrt{z^5}$	3			
	f_7	2	7	3	16	3,3125	2,4231282 $y^3/\sqrt{z^5}$	3			

	f_9	2	9	3	16	3,6875	3,3427571 $y^3/\sqrt{z^5}$	3			
	f_{11}	2	11	3	16	4,0625	4,4698079 $y^3/\sqrt{z^5}$	3			
	f_{13}	2	13	3	16	4,4375	5,8253743 $y^3/\sqrt{z^5}$	3			
	f_{15}	2	15	3	16	4,8125	7,4305501 $y^3/\sqrt{z^5}$	3			
R(6,1)	f_1	2	1	3	32	2,09375	0,6119038 $y^3/\sqrt{z^5}$	4	53,96153364 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,16230469 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,14004612 $y^3/\sqrt{z^5}$
	f_3	2	3	3	32	2,28125	0,7914571 $y^3/\sqrt{z^5}$	4			
	f_5	2	5	3	32	2,46875	1,0030904 $y^3/\sqrt{z^5}$	4			
	f_7	2	7	3	32	2,65625	1,2494405 $y^3/\sqrt{z^5}$	4			

	f_9	2	9	3	32	2,84375	1,5331441 $y^3/\sqrt{z^5}$	4				
	f_{11}	2	11	3	32	3,03125	1,8568379 $y^3/\sqrt{z^5}$	4				
	f_{13}	2	13	3	32	3,21875	2,2231587 $y^3/\sqrt{z^5}$	4				
	f_{15}	2	15	3	32	3,40625	2,6347432 $y^3/\sqrt{z^5}$	4				
	f_{17}	2	17	3	32	3,59375	3,0942281 $y^3/\sqrt{z^5}$	4				
	f_{19}	2	19	3	32	3,78125	3,6042500 $y^3/\sqrt{z^5}$	4				
	f_{21}	2	21	3	32	3,96875	4,1674458 $y^3/\sqrt{z^5}$	4				
	f_{23}	2	23	3	32	4,15625	4,6474650 $y^3/\sqrt{z^5}$	4				
	f_{25}	2	25	3	32	4,34375	5,4639058 $y^3/\sqrt{z^5}$	4				

	f_{27}	2	27	3	32	4,53125	6,2024434 $y^3/\sqrt{z^5}$	4			
	f_{29}	2	29	3	32	4,71875	7,0047017 $y^3/\sqrt{z^5}$	4			
	f_{31}	2	31	3	32	4,90625	7,8733174 $y^3/\sqrt{z^5}$	4			

R(j,k)	4^{k-1}	*R(j,k-1)*	*R(j-1,k-1)*	$4^{k-1}-1$	$R(j,k)=\dfrac{4^{k-1}R(j,k-1)-R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1}$
$R(2,2)$	4	10,9375 $y^3/\sqrt{z^5}$	13,3 $y^3/\sqrt{z^5}$	3	10,15 $y^3/\sqrt{z^5}$
$R(3,2)$	4	10,346875 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,9375 $y^3/\sqrt{z^5}$	3	10,15 $y^3/\sqrt{z^5}$
$R(4,2)$	4	10,19921875 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,346875 $y^3/\sqrt{z^5}$	3	10,15 $y^3/\sqrt{z^5}$
$R(5,2)$	4	10,16230469 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,19921875 $y^3/\sqrt{z^5}$	3	10,15 $y^3/\sqrt{z^5}$
$R(6,2)$	4	10,14004461 $y^3/\sqrt{z^5}$	10,16230469 $y^3/\sqrt{z^5}$	3	10,1326266 $y^3/\sqrt{z^5}$

R(j,k)	4^{k-1}	*R(j,k-1)*	*R(j-1,k-1)*	$4^{k-1}-1$	$R(j,k)=\dfrac{4^{k-1}R(j,k-1)-R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1}$
R(3,3)	16	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$	15	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$
R(4,3)	16	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$	15	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$
R(5,3)	16	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$	15	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$
R(6,3)	16	$10{,}1326266\,y^3/\sqrt{z^5}$	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$	15	$10{,}13146837\,y^3/\sqrt{z^5}$

R(j,k)	4^{k-1}	*R(j,k-1)*	*R(j-1,k-1)*	$4^{k-1}-1$	$R(j,k)=\dfrac{4^{k-1}R(j,k-1)-R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1}$
R(4,4)	64	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$	63	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$
R(5,4)	64	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$	63	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$
R(6,4)	64	$10{,}13146623\,y^3/\sqrt{z^5}$	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$	63	$10{,}1310982\,y^3/\sqrt{z^5}$

R(j,k)	4^{k-1}	*R(j,k-1)*	*R(j-1,k-1)*	$4^{k-1}-1$	$R(j,k)=\dfrac{4^{k-1}R(j,k-1)-R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1}$
R(5,5)	256	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$	255	$10{,}15\,y^3/\sqrt{z^5}$

$R(6,5)$	256	$10{,}13117204\, y^3 / \sqrt{z^5}$	$10{,}15\, y^3 / \sqrt{z^5}$	255	$10{,}1310982\, y^3 / \sqrt{z^5}$

R(j,k)	4^{k-1}	*R(j,k-1)*	*R(j-1,k-1)*	$4^{k-1}-1$	$R(j,k)=\dfrac{4^{k-1}R(j,k-1)-R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1}$
$R(6,6)$	1024	$10{,}1310982\, y^3 / \sqrt{z^5}$	$10{,}15\, y^3 / \sqrt{z^5}$	1023	$10{,}13107972\, y^3 / \sqrt{z^5}$

Penyelesaian integrasi dalam arah *y*

Integran	Batas Integran *y*		$h = y_2 - y_1$	$f(x, y_1, z)$	$f(x, y_2, z)$	$R(1{,}1) = \dfrac{h}{2}\left(f(x, y_1, z) + f(x, y_2, z)\right)$
	y_1	y_2				
$10{,}13107972\dfrac{y^3}{\sqrt{z^5}}$	1	4	3	$\dfrac{10{,}13107972}{\sqrt{z^5}}$	$\dfrac{648{,}38910208}{15\sqrt{z^5}}$	$\dfrac{987{,}7802727}{\sqrt{z^5}}$

		y_1	i	h	2^{k+1}	$f_i = f\left(x_1 + i\dfrac{h}{2^{k+1}}\right)$	$\dfrac{10{,}1310797(f_i)^3}{\sqrt{z^5}}$	k	$\sum\left(\dfrac{10{,}1310797(f_i)^3}{\sqrt{z^5}}\right)$	T_0	$T_{k+1} = \dfrac{T_0}{2} + \dfrac{h}{2^{k+1}}\sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}$
$R(2,1)$	f_1	1	1	3	2	2,5	158,2981206 $1/\sqrt{z^5}$	0	158,2981206 $1/\sqrt{z^5}$	987,780272 $7\,1/\sqrt{z^5}$	731,3373173 $1/\sqrt{z^5}$
$R(3,1)$	f_1	1	1	3	4	1,75	54,29625537 $1/\sqrt{z^5}$	1	402,0772264 $1/\sqrt{z^5}$	731,337317 $3\,1/\sqrt{z^5}$	667,2265785 $1/\sqrt{z^5}$

	f_3	1	3	3	4	3,25	347,780971 $1/\sqrt{z^5}$	1			
$R(4,1)$	f_1	1	1	3	8	1,375	26,33684982 $1/\sqrt{z^5}$	2	846,8949453 $1/\sqrt{z^5}$	667,226578 $5\,1/\sqrt{z^5}$	651,1988937 $1/\sqrt{z^5}$
	f_3	1	3	3	8	2,125	97,21483333 $1/\sqrt{z^5}$	2			
	f_5	1	5	3	8	2,875	240,7516542 $1/\sqrt{z^5}$	2			
	f_7	1	7	3	8	3,625	482,591608 $1/\sqrt{z^5}$	2			
$R(5,1)$	f_1	1	1	3	16	1,1875	16,9651064 $1/\sqrt{z^5}$	3	1715,160137 $1/\sqrt{z^5}$	651,198893 $7\,1/\sqrt{z^5}$	647,1919725 $1/\sqrt{z^5}$
	f_3	1	3	3	16	1,5625	38,64700211 $1/\sqrt{z^5}$	3			

	f_5	1	5	3	16	1,9375	73,68530174 $1/\sqrt{z^5}$	3			
	f_7	1	7	3	16	2,3125	125,2855423 $1/\sqrt{z^5}$	3			
	f_9	1	9	3	16	2,6875	196,6532606 $1/\sqrt{z^5}$	3			
	f_{11}	1	11	3	16	3,0625	290,9939936 $1/\sqrt{z^5}$	3			
	f_{13}	1	13	3	16	3,4375	411,5132784 $1/\sqrt{z^5}$	3			
	f_{15}	1	15	3	16	3,8125	561,4166518 $1/\sqrt{z^5}$	3			
$R(6,1)$	f_1	1	1	3	32	1,09375	13,25592172 $1/\sqrt{z^5}$	4	3441,005397 $1/\sqrt{z^5}$	647,191972 $5\,1/\sqrt{z^5}$	646,1902422 $1/\sqrt{z^5}$
	f_3	1	3	3	32	1,28125	21,30872026 $1/\sqrt{z^5}$	4			

	f_5	1	5	3	32	1,46875	32,0995816 $1/\sqrt{z^5}$	4			
	f_7	1	7	3	32	1,65625	46,02919786 $1/\sqrt{z^5}$	4			
	f_9	1	9	3	32	1,84375	63,49826116 $1/\sqrt{z^5}$	4			
	f_{11}	1	11	3	32	2,03125	84,90746363 $1/\sqrt{z^5}$	4			
	f_{13}	1	13	3	32	2,21875	110,6574974 $1/\sqrt{z^5}$	4			
	f_{15}	1	15	3	32	2,40625	141,1490545 $1/\sqrt{z^5}$	4			
	f_{17}	1	17	3	32	2,59375	176,7828271 $1/\sqrt{z^5}$	4			
	f_{19}	1	19	3	32	2,78125	217,9595074 $1/\sqrt{z^5}$	4			

	f_{21}	1	21	3	32	2,96875	265,0797874 $1/\sqrt{z^5}$	4			
	f_{23}	1	23	3	32	3,15625	318,5443593 $1/\sqrt{z^5}$	4			
	f_{25}	1	25	3	32	3,34375	378,7539152 $1/\sqrt{z^5}$	4			
	f_{27}	1	27	3	32	3,53125	446,1091472 $1/\sqrt{z^5}$	4			
	f_{29}	1	29	3	32	3,71875	521,0107474 $1/\sqrt{z^5}$	4			
	f_{31}	1	31	3	32	3,90625	603,8594079 $1/\sqrt{z^5}$	4			

R(j,k)	4^{k-1}	*R(j,k-1)*	*R(j-1,k-1)*	$4^{k-1}-1$	$R(j,k)=\dfrac{4^{k-1}R(j,k-1)-R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1}$
$R(2,2)$	4	$731{,}3373173\,1/\sqrt{z^5}$	$987{,}7802727\,1/\sqrt{z^5}$	3	$645{,}8563322\,1/\sqrt{z^5}$
$R(3,2)$	4	$667{,}2265785\,1/\sqrt{z^5}$	$731{,}3373173\,1/\sqrt{z^5}$	3	$645{,}8563322\,1/\sqrt{z^5}$

$R(4,2)$	4	651,1988937 $1/\sqrt{z^5}$	667,2265785 $1/\sqrt{z^5}$	3	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$
$R(5,2)$	4	647,1919725 $1/\sqrt{z^5}$	651,1988937 $1/\sqrt{z^5}$	3	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$
$R(6,2)$	4	646,1902422 $1/\sqrt{z^5}$	647,1919725 $1/\sqrt{z^5}$	3	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$

$R(j,k)$	4^{k-1}	$R(j,k-1)$	$R(j-1,k-1)$	$4^{k-1}-1$	$R(j,k)=\dfrac{4^{k-1}R(j,k-1)-R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1}$
$R(3,3)$	16	645,8563322 $1/\sqrt{z^5}$	645,8563322 $1/\sqrt{z^5}$	15	645,8563322 $1/\sqrt{z^5}$
$R(4,3)$	16	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$	645,8563322 $1/\sqrt{z^5}$	15	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$
$R(5,3)$	16	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$	15	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$
$R(6,3)$	16	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$	15	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$

$R(j,k)$	4^{k-1}	$R(j,k-1)$	$R(j-1,k-1)$	$4^{k-1}-1$	$R(j,k)=\dfrac{4^{k-1}R(j,k-1)-R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1}$
$R(4,4)$	64	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$	645,8563322 $1/\sqrt{z^5}$	63	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$
$R(5,4)$	64	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$	63	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$
$R(6,4)$	64	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$	63	645,8563321 $1/\sqrt{z^5}$

$R(j,k)$	4^{k-1}	$R(j,k-1)$	$R(j-1,k-1)$	$4^{k-1}-1$	$R(j,k)=\dfrac{4^{k-1}R(j,k-1)-R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1}$
$R(5,5)$	256	$645{,}8563321\,1/\sqrt{z^5}$	$645{,}8563321\,1/\sqrt{z^5}$	255	$645{,}8563321\,1/\sqrt{z^5}$
$R(6,5)$	256	$645{,}8563321\,1/\sqrt{z^5}$	$645{,}8563321\,1/\sqrt{z^5}$	255	$645{,}8563321\,1/\sqrt{z^5}$

$R(j,k)$	4^{k-1}	$R(j,k-1)$	$R(j-1,k-1)$	$4^{k-1}-1$	$R(j,k)=\dfrac{4^{k-1}R(j,k-1)-R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1}$
R(6,6)	1024	$645{,}8563321\,1/\sqrt{z^5}$	$645{,}8563321\,1/\sqrt{z^5}$	1023	$645{,}8563321\,1/\sqrt{z^5}$

Penyelesaian integrasi dalam arah z

Integran	Batas Integran z		$h=z_2-z_1$	$f(x,y,z_1)$	$f(x,y,z_2)$	$R(1,1)=\dfrac{h}{2}\left(f(x,y,z_1)+f(x,y,z_1)\right)$
	z_1	z_2				
$\dfrac{645{,}8563321}{\sqrt{z^5}}$	4	9	5	21,18301037812	2,6578449880658	59,60213841548

		z_1	i	h	2^{k+1}	$f_i = f\left(x_1 + i\frac{h}{2^{k+1}}\right)$	$\frac{645{,}8563321}{\sqrt{(f_i)^5}}$	k	$\sum\left(\frac{645{,}8563321}{\sqrt{(f_i)^5}}\right)$	T_k	$T_{k+1} = \frac{T_0}{2} + \frac{h}{2^{k+1}}\sum_{j=1}^{2^k} f_{2j-1}$
$R(2,1)$	f_1	4	1	5	2	6,5	6,005969633	0	6,005969633	57,2291446	43,62949636
$R(3,1)$	f_1	4	1	5	4	5,25	10,24396922	1	14,11308983	43,6294964	39,45611047
	f_3	4	3	5	4	7,75	3,869120604	1			
$R(4,1)$	f_1	4	1	5	8	4,625	14,06329805	2	29,75768301	39,4561105	38,32660712
	f_3	4	3	5	8	5,875	7,732979275	2			
	f_5	4	5	5	8	7,125	4,774241152	2			
	f_7	4	7	5	8	8,375	3,187164536	2			
$R(5,1)$	f_1	4	1	5	16	4,3125	16,75111628	3	60,39466762	38,3266071	38,03663719
	f_3	4	3	5	16	4,9375	11,9425963	3			
	f_5	4	5	5	16	5,5625	8,865259725	3			
	f_7	4	7	5	16	6,1875	6,79326402	3			
	f_9	4	9	5	16	6,8125	5,340725236	3			

	f_{11}	4	11	5	16	7,4375	4,288437418	3			
	f_{13}	4	13	5	16	8,0625	3,505033753	3			
	f_{15}	4	15	5	16	8,6875	2,908234885	3			
$R(6,1)$	f_1	4	1	5	32	4,15625	18,37013581	4	121,2473471	38,0366372	37,96321658
	f_3	4	3	5	32	4,46875	15,3250315	4			
	f_5	4	5	5	32	4,78125	12,94234261	4			
	f_7	4	7	5	32	5,09375	11,0477149	4			
	f_9	4	9	5	32	5,40625	9,519764646	4			
	f_{11}	4	11	5	32	5,71875	8,272061319	4			
	f_{13}	4	13	5	32	6,03125	7,241827853	4			
	f_{15}	4	15	5	32	6,34375	6,382655064	4			
	f_{17}	4	17	5	32	6,65625	5,659687611	4			
	f_{19}	4	19	5	32	6,96875	5,046372579	4			
	f_{21}	4	21	5	32	7,28125	4,522219797	4			
	f_{23}	4	23	5	32	7,59375	4,071231381	4			
	f_{25}	4	25	5	32	7,90625	3,680782593	4			
	f_{27}	4	27	5	32	8,21875	3,340812471	4			
	f_{29}	4	29	5	32	8,53125	3,043230527	4			

	f_{31}	4	31	5	32	8,84375	2,781476407	4			

R(j,k)	4^{k-1}	*R(j,k-1)*	*R(j-1,k-1)*	$4^{k-1}-1$	$R(j,k)=\dfrac{4^{k-1}R(j,k-1)-R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1}$
R(2,2)	4	44.79075533	59,60213842	3	39,85362763
R(3,2)	4	40,00708732	44,79075533	3	38,41253132
R(4,2)	4	38,570834	40,00708732	3	38,09208289
R(5,2)	4	38,12702723	38,570834	3	37,97909164
R(6,2)	4	37,9765679	38,12702723	3	37,92641479

R(j,k)	4^{k-1}	*R(j,k-1)*	*R(j-1,k-1)*	$4^{k-1}-1$	$R(j,k)=\dfrac{4^{k-1}R(j,k-1)-R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1}$
R(3,3)	16	38,41253132	39,85362763	15	38,31645823
R(4,3)	16	38,09208289	38,41253132	15	38,07071966
R(5,3)	16	37,97909164	38,09208289	15	37,97155889
R(6,3)	16	37,92641479	37,97909164	15	37,922903

R(j,k)	4^{k-1}	*R(j,k-1)*	*R(j-1,k-1)*	$4^{k-1}-1$	$R(j,k)=\dfrac{4^{k-1}R(j,k-1)-R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1}$
R(4,4)	64	38,07071966	38,31645823	63	38,06681905
R(5,4)	64	37,97155889	38,07071966	63	37,96998491

R(6,4)	64	37,922903	37,97155889	63	37,92213068

R(j,k)	4^{k-1}	*R(j,k-1)*	*R(j-1,k-1)*	$4^{k-1}-1$	$R(j,k)=\dfrac{4^{k-1}R(j,k-1)-R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1}$
R(5,5)	256	37,96998491	38,06681905	255	37,96960517
R(6,5)	256	37,92213068	37,96998491	255	37,92194302

R(j,k)	4^{k-1}	*R(j,k-1)*	*R(j-1,k-1)*	$4^{k-1}-1$	$R(j,k)=\dfrac{4^{k-1}R(j,k-1)-R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1}$
R(6,6)	1024	37,92194302	37,96960517	1023	37,92189643