



**PELABELAN TOTAL SUPER (a, d) SISI ANTIMAGIC
PADA GRAF *CROWN STRING* DAN KAITANNYA
DALAM MENGASAH KETERAMPILAN BERPIKIR
TINGKAT TINGGI**

SKRIPSI

Oleh

**Enin Lutfi Sundari
NIM 110210151014**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2015



**PELABELAN TOTAL SUPER (a, d) SISI ANTIMAGIC
PADA GRAF *CROWN STRING* DAN KAITANNYA
DALAM MENGASAH KETERAMPILAN BERPIKIR
TINGKAT TINGGI**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

Enin Lutfi Sundari
NIM 110210151014

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2015



**PELABELAN TOTAL SUPER (a, d) SISI ANTIMAGIC
PADA GRAF *CROWN STRING* DAN KAITANNYA
DALAM MENGASAH KETERAMPILAN BERPIKIR
TINGKAT TINGGI**

SKRIPSI

Oleh

Enin Lutfi Sundari

NIM 110210151014

Dosen Pembimbing 1 : Prof.Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D.

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2015

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang maha pengasih lagi maha penyayang, dan turchahkan sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Kedua malaikatku tercinta Ibunda Mulyani dan Ayahanda Siyaji, adikku tersayang Setya Budi yang selalu menjadi penyemangat dalam hidupku, senantiasa memberikan kasih sayang tiada henti, dan butiran do'a kalian yang selalu menemani setiap perjuangan hidupku;
2. Bapak Prof. Dafik, M.Sc., Ph.D., dan Prof.Slamin, M.Comp, Ph.D.selaku pembimbing skripsi yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan skripsiku;
3. Bapak dan Ibu Dosen FKIP Pendidikan Matematika yang telah dengan sabar memberikan ilmunya kepadaku;
4. Teman seperjuangan Sindy, Inge, Rinti, Ridho, Cita, Agnes dan yang tergabung dalam CGANT yang telah berbagi ilmu dan pengalaman berharga serta kalian mengajarkan bahwa perbedaan bukan alasan untuk tidak saling membantu;
5. Sahabat terbaikku *Pink* yang selalu memberikan keceriaan, doa serta motivasi positif untukku;
6. Sahabat-sahabatku pendidikan matematika angkatan 2011 serta keluarga besar MAIN 2011;
7. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

HALAMAN MOTTO

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

”Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.”

(QS. Alam Nasyroh: 5)

”Tak perlu menjelaskan tentang dirimu pada siapapun karena yang menyukaimu tidak membutuhkannya. Dan yang membencimu tidak akan mempercayainya.”

(Ali bin Abi Thalib)

”Kadang-kadang orang yang tumpul otaknya tetapi tidak berputus asa lebih maju daripada seorang yang cerdas tetapi malas”

(Buya Hamka)

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Enin Lutfi Sundari

NIM : 110210151014

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Pelabelan Total Super (a, d) - Sisi Antimagic Pada Graf *Crown String* dan Kaitannya Dalam Mengasah Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 20 Februari 2015

Yang menyatakan,

Enin Lutfi Sundari

NIM. 110210151014

PERSETUJUAN

**PELABELAN TOTAL SUPER (a, d) SISI ANTIMAGIC PADA
GRAF *CROWN STRING* DAN KAITANNYA DALAM
MENGASAH KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI**

SKRIPSI

diajukan guna memenuhi syarat untuk menyelesaikan pendidikan Program Sarjana Strata Satu Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Nama Mahasiswa : Enin Lutfi Sundari
NIM : 110210151014
Jurusan : Pendidikan MIPA
Program Studi : Pendidikan Matematika
Angkatan Tahun : 2011
Daerah Asal : Pasuruan
Tempat, Tanggal Lahir : Sidoarjo, 08 April 1993

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19680802 199303 1 004

Prof. Drs. Slamun, M.Comp.Sc., Ph.D.
NIP.19670420 199201 1 001

PENGESAHAN

Skripsi berjudul Pelabelan Total Super (a, d) - Sisi Antimagic Pada Graf *Crown String* dan Kaitannya Dalam Mengasah Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan pada:

hari : Jumat

tanggal : 20 Februari 2015

tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua,

Sekretaris,

Dr. Hobri , S.Pd.,M.Pd.
NIP.19730506 199702 1 001

Prof. Drs. Slamir, M.Comp.Sc., Ph.D.
NIP. 19670420 199201 1 001

Anggota I,

Anggota II,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19680802 199303 1 004

Susi Setiawani,S.Si.,M.Sc.
NIP. 19700307 199512 2 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Jember,

Prof. Dr. Sunardi, M.Pd.
NIP. 19540501 198303 1 005

RINGKASAN

Pelabelan Total Super (a, d) - Sisi Antimagic Pada Graf *Crown String* dan Kaitannya Dalam Mengasah Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi; Enin Lutfi Sundari, 110210151014; 2015: 120 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Graf dapat dikembangkan sebagai salah satu upaya menumbuhkan kemampuan berpikir tingkat tinggi. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek diskrit tersebut. Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan cacah yang disebut label. Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic atau dalam bahasa Inggris disebut sebagai *super (a, d) -edge antimagic total labeling* (SEATL), dimana a bobot sisi terkecil dan d nilai beda.

Graf *Crown String* adalah salah satu graf yang dikembangkan dari graf buku segitiga dengan menambahkan sisi berupa lintasan. Graf *Crown String* termasuk graf sederhana karena tidak mengandung sisi ganda dan loop, juga termasuk graf berhingga serta graf tak berarah karena sisi-sisinya tidak mengandung orientasi arah. Graf *Crown String* adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan $Cs_{m,n}$ dengan $m, n \geq 1$. Sedangkan gabungannya dinotasikan dengan $pCs_{m,n}$. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui apakah graf *Crown String* memiliki pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan teorema tentang pelabelan graf, kemudian diterapkan dalam pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ dan $pCs_{m,n}$. Batas atas nilai d yang memenuhi untuk graf ini adalah $d = 0, 1, 2$. Hasil penelitian ini berupa lema dan teorema baru mengenai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic $Cs_{m,n}$ dan $pCs_{m,n}$ yaitu sebagai berikut:

1. Ada pelabelan titik $(3, 1)$ -sisi antimagic pada graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ jika

$m, n \geq 1$.

2. Ada pelabelan total super $((6n+9)m, 0)$ dan $((2n+3)m+4, 2)$ -sisi antimagic pada graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ untuk $m, n \geq 1$.
3. Ada pelabelan total super $((2n+3)m+4, 1)$ -sisi antimagic pada graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ untuk $m, n \geq 1$, m genap.
4. Ada pelabelan titik $(\frac{3p+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan Graf *Crown String* $pCs_{m,n}$ jika p ganjil, $m \geq 3$, $n \geq 1$, m kelipatan 3.
5. Ada pelabelan total super $((6n+9)mp - 2p + \frac{p-1}{2} + 2, 0)$, dan $((2n+3)mp + p + \frac{p-1}{2} + 3, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *Crown String* $pCs_{m,n}$ jika p ganjil, $m \geq 3$, $n \geq 1$, m kelipatan 3.
6. Ada pelabelan total super $(6mnp - 4mn + 2, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *Crown String* $pCs_{m,n}$ jika p ganjil, $m \geq 3$, $n \geq 1$, m kelipatan 3 bernilai genap.

Selain itu, pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada graf *Crown String* telah melalui keenam tahapan pada tahapan taksonomi Bloom yang telah direvisi. Keenam tahapan terlaksana secara sinergis. Oleh karena itu, pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic pada graf *Crown String* mengasah kemampuan berpikir tingkat tinggi.

Hasil penelitian diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pelabelan graf dan bisa diteliti lebih lanjut untuk dapat diaplikasikan dan bermanfaat dalam kehidupan.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Pelabelan Total Super (a, d) - Sisi Antimagic Pada Graf *Crown String* dan Kaitannya Dalam Mengasah Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan S1 pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Ketua Laboratorium Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan MIPA FKIP;
5. Dosen Pembimbing Akademik yang senantiasa memberikan masukan terbaik;
6. Dosen Pembimbing I dan Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
7. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
8. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Februari 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN JUDUL	i
Halaman Persembahan	ii
Halaman Motto	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PERSETUJUAN	v
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
Kata Pengantar	ix
DAFTAR ISI	xii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR LAMBANG	xvi
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	5
2 TINJAUAN PUSTAKA	6
2.1 Terminologi Dasar Graf	6
2.2 Jenis- Jenis Graf	8
2.3 Aplikasi Graf	12
2.4 Graf Khusus	13
2.5 Graf Crown String $C_{s,m,n}$	16
2.6 Fungsi Bijektif dan Barisan Aritmatika	18
2.7 Aksioma, Teorema, Lema, Akibat, Dugaan dan Masalah Terbuka	20
2.8 Pelabelan Graf	20
2.8.1 Definisi Pelabelan Graf	20

2.8.2	Pelabelan Total Super (a, d) -sisi antimagic	22
2.9	Hasil-Hasil Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic	25
2.10	Berpikir Tingkat Tinggi	28
3	METODE PENELITIAN	32
3.1	Metode Penelitian	32
3.2	Definisi Operasional	32
3.2.1	Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic	33
3.2.2	Graf <i>Crown String</i> dan Gabungan Saling Lepas Graf <i>Crown String</i>	33
3.3	Teknik Penelitian	35
3.4	Observasi	37
4	HASIL DAN PEMBAHASAN	38
4.1	Graf <i>Crown String</i> $(Cs_{m,n})$	38
4.1.1	Jumlah Titik dan Sisi pada Graf <i>Crown String</i> $(Cs_{m,n})$	38
4.1.2	Batas Atas d Graf <i>Crown String</i> $(Cs_{m,n})$	39
4.2	Pelabelan Total Super (a, d) -sisi Antimagic pada Graf <i>Crown String</i> $(Cs_{m,n})$	40
4.3	Gabungan graf <i>Crown String</i> $Cs_{m,n}$	57
4.3.1	Jumlah Titik dan Sisi pada Gabungan graf <i>Crown String</i> $pCs_{m,n}$	57
4.3.2	Batas Atas d gabungan graf <i>Crown String</i> $pCs_{m,n}$	59
4.4	Pelabelan Total Super (a, d) -sisi Antimagic pada Gabungan Graf <i>Crown String</i> $(pCs_{m,n})$	59
4.5	Tahapan Berfikir Tingkat Tinggi Dalam Pelabelan Total Super (a,d) -Sisi Antimagic Pada Graf <i>Crown String</i> $Cs_{m,n}$	91
4.5.1	Tahap 1. Mengingat. Kata Kerja Kunci : Mengingat, Mengenali, dan Menamai	91
4.5.2	Tahap 2. Memahami. Kata Kerja Kunci : Menyeleksi, Menjelaskan, dan Menganalogikan	92
4.5.3	Tahap 3. Menerapkan. Kata Kerja Kunci : Menerapkan dan Menggunakan	93

4.5.4	Tahap 4. Menganalisis. Kata Kerja Kunci : Mengkaji Ulang dan Mengorganisir	94
4.5.5	Tahap 5. Mengevaluasi. Kata Kerja Kunci : Mengecek dan Menjustifikasi	95
4.5.6	Tahap 6. Mencipta. Kata Kerja Kunci : Memformulasikan dan Menciptakan	95
4.6	Hasil dan Pembahasan	96
5	KESIMPULAN DAN SARAN	99
5.1	Kesimpulan	99
5.2	Saran	100
	DAFTAR PUSTAKA	101

DAFTAR GAMBAR

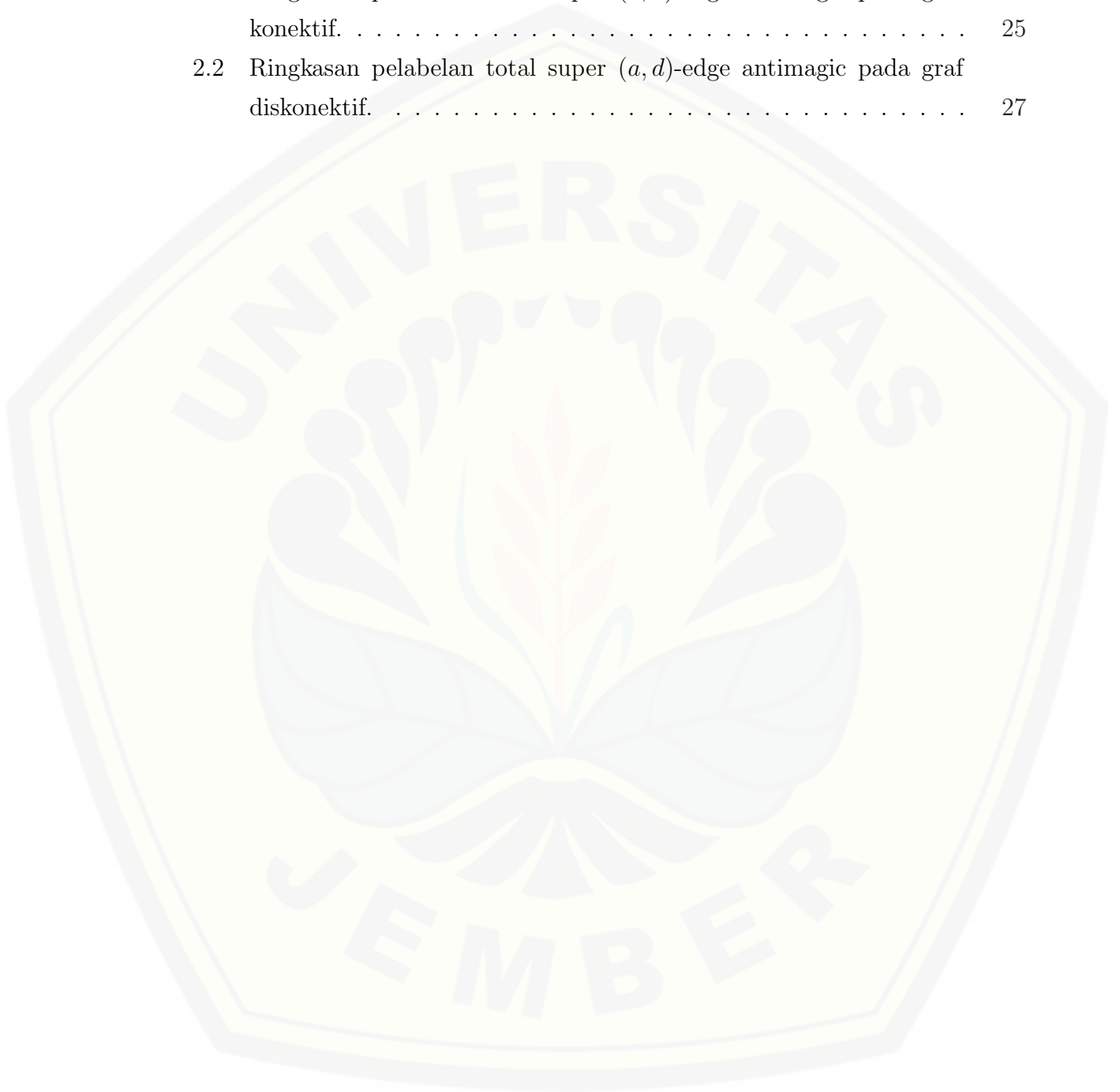
1.1	Visualisasi dan Representasi Jembatan Konigsberg	2
2.1	Graf G_1 dan G_2	7
2.2	Graf G_3	8
2.3	Graf G_{4a} dan G_{4b}	8
2.4	Graf G_6, G_7 dan G_8	9
2.5	Graf G_9 dan G_{10}	10
2.6	Graf G_{11} dan G_{12}	11
2.7	Gabungan graf G_1 dan G_2	11
2.8	Graf G_1 dan G_2	12
2.9	Graf Tangga St_3	14
2.10	Graf Gunung	14
2.11	Graf E	15
2.12	Graf Tangga Permata Dl_4	15
2.13	graf tangga tiga-siklus TCL_2	16
2.14	Graf Kelelawar Bat_3	16
2.15	Graf <i>Crown String</i> Konektif $Cs_{3,2}$	17
2.16	(a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif . . .	19
2.17	(i) Pelabelan titik, (ii) Pelabelan sisi, (iii) Pelabelan total	21
3.1	Graf <i>Crown String</i> Konektif $Cs_{3,2}$	33
3.2	Graf <i>Crown String</i> Diskonektif $3Cs_{3,2}$	34
3.3	Rancangan Penelitian	36
4.1	Graf <i>Crown String</i> Konektif $Cs_{3,2}$	39
4.2	Label Titik $Cs_{3,2}$	42
4.3	Bobot sisi $Cs_{3,2}$	43
4.4	Label sisi $d=0$	44
4.5	Label sisi $d=2$	48
4.6	Graf $3Cs_{3,2}$	58

4.7	Label Titik $5C_{s_{3,3}}$	69
4.8	Graf G_3	92
4.9	Bobot sisi $C_{s_{3,2}}$	95



DAFTAR TABEL

2.1	Ringkasan pelabelan total super (a, d) -edge antimagic pada graf konektif.	25
2.2	Ringkasan pelabelan total super (a, d) -edge antimagic pada graf diskonektif.	27



DAFTAR LAMBANG

G	: Graf atau graf berarah
$V(G)$: Himpunan titik dari graf berarah G
$E(G)$: Himpunan sisi berarah dari graf berarah G
d	: Derajat keluar dari graf berarah
u	: Titik pada graf berarah
uv	: Sisi berarah yang dimulai dari u dan berakhir pada v
$Cs_{m,n}$: Lambang untuk Graf <i>Crown String</i>
$pCs_{m,n}$: Lambang untuk gabungan Graf <i>Crown String</i> , dengan p merupakan jumlah gabungan
m	: banyak perluasan graf <i>Crown String</i> ke kanan
n	: banyak perluasan graf <i>Crown String</i> ke atas
$f_1(v)$: Fungsi bijektif pelabelan titik pada graf <i>Crown String</i>
$w_1(v_i v_j)$: Bobot sisi yang menghubungkan titik $v_i v_j$ pada graf <i>Crown String</i>
$f_2(v)$: Fungsi bijektif pelabelan sisi pada graf <i>Crown String</i> $d=0$
$w_2(v_i v_j)$: Fungsi bijektif pelabelan total sisi $v_i v_j$ pada graf <i>Crown String</i> $d=0$
$f_3(v)$: Fungsi bijektif pelabelan sisi pada graf <i>Crown String</i> $d=2$
$w_3(v_i v_j)$: Fungsi bijektif pelabelan total sisi $v_i v_j$ pada graf <i>Crown String</i> $d=2$
$f_4(v)$: Fungsi bijektif pelabelan sisi pada graf <i>Crown String</i> $d=1$
$w_4(v_i v_j)$: Fungsi bijektif pelabelan total sisi $v_i v_j$ pada graf <i>Crown String</i> $d=1$

BAB 1. PENDAHULUAN

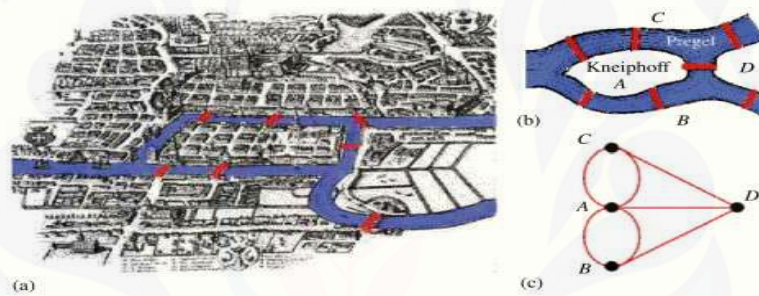
1.1 Latar Belakang

Ilmu pengetahuan semakin berkembang seiring kemajuan teknologi dan sumberdaya manusia. Hal tersebut dikarenakan peranannya yang mutlak diperlukan dalam kehidupan. Ilmu pengetahuan terdiri atas berbagai macam disiplin ilmu baik yang bersifat praktis maupun teoritis. Setiap disiplin ilmu dikaji dan dikembangkan dalam lingkup semestanya. Namun, tidak dapat dipungkiri bahwasanya suatu disiplin ilmu memiliki korelasi satu sama lain. Disiplin ilmu tidak hanya bersifat tunggal melainkan dapat merupakan turunan atau bagian dari ilmu lain yang dikaji secara mendalam. Dari keseluruhan ilmu pengetahuan tersebut, hampir seluruhnya berpijak pada matematika. Sehingga matematika sering disebut sebagai bahasa dari ilmu pengetahuan.

Matematika dikaji melalui pendekatan induktif dan deduktif. Kedua pendekatan tersebut digunakan untuk memecahkan berbagai macam permasalahan matematika. Kegiatan pemecahan masalah matematika tidak dapat dipisahkan dari proses berpikir kognitif. Proses berpikir menurut taksonomi Bloom terbagi menjadi enam tahapan, tiga diantaranya termasuk kategori berpikir tingkat rendah dan tiga lainnya termasuk berpikir tingkat tinggi. Tingkat berpikir rendah dan tinggi memiliki peran yang sama penting. Seorang individu tidak dapat mencapai tahapan berpikir tingkat tinggi tanpa melalui tiga tahap awal yang disebut sebagai berpikir tingkat rendah. Kemampuan berpikir tingkat tinggi meliputi tahap menganalisis, mengevaluasi dan mengkreasi atau mencipta. Bagian yang tersulit dalam hal ini adalah mengkreasi atau mencipta. Kata *create* dapat diartikan sebagai produce atau menghasilkan suatu karya baru. Karya baru disini dimaknai sebagai sebuah karya yang belum pernah ada (original) atau diperoleh dengan cara mengeksplorasi penemuan sebelumnya sehingga menjadi berbeda. Namun, selama ini penerapan pemecahan masalah matematika yang melatih terbentuknya kemampuan berpikir tingkat tinggi dalam tahap mengkreasi masih kurang.

Terdapat beberapa cabang keilmuan dalam matematika yang dapat dikembangkan sebagai upaya menumbuhkan kemampuan berpikir tingkat tinggi, salah satunya adalah matematika diskrit. Bagian dari matematika diskrit yang menarik peneliti untuk mengkaji lebih dalam yaitu teori graf.

Teori graf diperkenalkan pertama kali oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Pada mulanya, teori graf diciptakan sebagai alternatif solusi dari permasalahan yang muncul pada saat itu. Königsberg merupakan sebuah kota di wilayah Rusia. Di kota tersebut terdapat tujuh jembatan yang menghubungkan empat kota. Permasalahannya adalah bagaimana seseorang dapat melakukan perjalanan melewati ketujuh jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Euler merepresentasikan permasalahan tersebut dalam sebuah graf. Keempat kota direpresentasikan oleh vertex dan sisi sebagai representasi dari jembatan yang menghubungkan kota-kota tersebut.



Gambar 1.1 Visualisasi dan Representasi Jembatan Königsberg
(Sumber: <http://www.sciencedirect.com>)

Dengan menganalisa graf diatas, Euler menyimpulkan bahwa permasalahan tersebut mustahil terjadi. Jadi, tidak mungkin seseorang dapat melakukan perjalanan melewati ketujuh jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat semula. Hal tersebut dikarenakan tidak semua vertex berderajat genap. Dengan kata lain, tidak ada siklus Euler dalam lintasan jembatan Königsberg. Hasil penelitian Euler dalam permasalahan jembatan Königsberg menjadi teorema pertama dalam teori graf. Selanjutnya berbagai penelitian dilakukan dalam bidang teori graf dikarenakan aplikasinya yang begitu luas dalam kehidupan.

Pelabelan merupakan salah satu bahasan dalam teori graf. Pelabelan men-

jadi sebuah dasar untuk pengembangan penerapan graf dalam sektor lainnya. Pelabelan merupakan pemetaan injektif dari himpunan titik atau sisi ke dalam himpunan bilangan asli, hasil pemetaan inilah yang kemudian disebut sebagai label. Sedláček (1964), Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970) adalah tokoh yang memperkenalkan pelabelan graf pertama kali. Pelabelan pada graf mempunyai peranan dalam kehidupan dan telah diaplikasikan dalam berbagai bidang, seperti pada sistem komunikasi, transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan pemancar frekuensi radio. Terdapat beberapa jenis teknik pelabelan graf antara lain *graceful labeling*, *harmonious labeling*, *magic labeling*, *antimagic labeling* dst. Maka dari itu penelitian untuk menemukan pelabelan graf baru dibutuhkan.

Salah satu jenis pelabelan pada graf adalah total super (a, d) -edge antimagic labeling (SEATL) atau dalam bahasa Indonesia disebut dengan istilah pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic. Dimana a bobot sisi terkecil dan d nilai beda. Pelabelan ini diperkenalkan oleh Simanjutak, Bertault dan Miller pada tahun 2000 (Dafik, 2007:19). Pada graf konektif telah banyak ditemukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic sedangkan pada graf diskonektif, hanya sedikit famili graf yang diketahui mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic. Permasalahannya adalah hal ini melibatkan angka pelabelan lebih banyak pada setiap komponen graf konektif terpisahnya dan tidak ada jaminan jika graf G mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic kemudian pada gabungan graf diskonektifnya mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic. Oleh karena itu masalah ini dianggap cukup sulit sehingga memerlukan penelitian berkelanjutan. Selanjutnya, kemampuan berpikir tingkat diperlukan untuk mengkreasi atau mencipta graf baru yang dapat ditemukan pelabelan tunggal serta gabungannya. Seperti penjabaran dari mengkreasi yang telah dijelaskan diatas, graf baru dapat diperoleh dengan cara memperbaiki atau memperluas graf yang telah ada sebelumnya.

Jenis graf baru yaitu *Crown String*. Graf ini merupakan salah satu contoh graf *well-defined*, yang dinotasikan dengan $(Cs_{m,n})$ adalah salah satu graf yang belum ditemukan pelabelannya sebelumnya. Gabungan diskonektif graf *Crown*

String merupakan gabungan saling lepas graf *Crown String* dan dinotasikan dengan $(PC_{s_{m,n}})$ juga belum ditemukan pelabelannya.

Dalam penelitian ini akan dibahas tentang pelabelan total super (a, d) sisi antimagic pada graf *Crown String* konektif dan gabungan diskonektif graf *Crown String* karena belum pernah ditemukan sebelumnya. Berdasarkan latar belakang tersebut pada penelitian ini penulis memilih judul ”**Pelabelan Total Super (a, d) - Sisi Antimagic Pada Graf *Crown String* dan Kaitannya Dalam Mengasah Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi**”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. apakah batas atas d sehingga graf *Crown String* konektif dan diskonektif?
2. bagaimanakah fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String* konektif?
3. bagaimanakah fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String* diskonektif?
4. bagaimanakah tahapan berpikir tingkat tinggi dalam pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String*?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. mengetahui batas atas d sehingga graf *Crown String* konektif dan diskonektif memiliki pelabelan total;
2. mengetahui fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String* tunggal (konektif);
3. mengetahui fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String* gabungan saling lepas (diskonektif);

4. mengetahui tahapan berpikir tingkat tinggi dalam pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String*.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

1. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pelabelan graf, dengan menunjukkan eksistensi pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String*;
2. memberikan motivasi bagi peneliti lain untuk menumbuhkan keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam menemukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf baru lainnya;
3. hasil penelitian ini diharapkan dapat dijadikan pengembangan atau perluasan ilmu serta aplikasi dalam masalah pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic.

1.5 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi pada:

1. pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String* disimbolkan dengan $C_{s_{m,n}}$ untuk graf tunggal (konektif) dan $pC_{s_{m,n}}$ untuk graf gabungan saling lepas (diskonektif) dengan $m \geq 1$ dan $n \geq 1$. Dalam hal ini, P merupakan banyaknya graf *Crown String* yang digabung yaitu minimal 2 graf. sedangkan m, n merupakan definisi graf *Crown String* yang telah ditentukan;
2. menggunakan taksonomi Bloom yang telah direvisi.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Untuk membangun sebuah graf baru yang dapat dikembangkan, terlebih dahulu diperlukan pemahaman tentang konsep-konsep dasar graf. Konsep dasar graf meliputi definisi graf, jenis-jenis graf, graf khusus seperti *well define graph* serta *well known graph*, dll. Pengetahuan dasar tersebut mutlak dibutuhkan agar dihasilkan graf yang memiliki pola dan dapat diperluas. Selanjutnya dapat ditentukan jenis pelabelan yang akan diterapkan dalam graf tersebut.

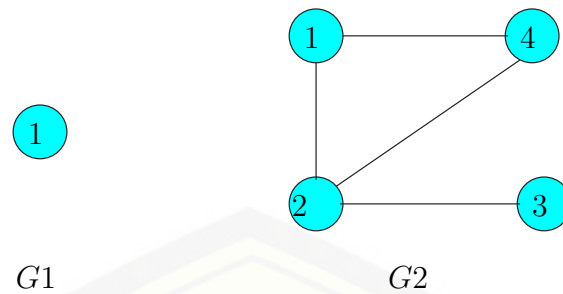
2.1 Terminologi Dasar Graf

Terminologi dasar graf merupakan konsep dasar dari graf yang harus dipahami oleh peneliti. Secara umum graf dapat disebut juga sebuah diagram yang disajikan dalam bentuk titik yang saling terhubung oleh garis lurus maupun lengkung. Titik (*vertex*) dinotasikan dengan V sedangkan garis penghubung antar titik yang disebut sebagai sisi (*edge*) dinotasikan dengan E . Berikut definisi dari graf:

Definisi 2.1 *sebuah graf G merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut u, v dari titik-titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi. $V(G)$ disebut himpunan titik dari G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G (Slamin, 2009:11-12).*

Berdasarkan definisi diatas dapat diketahui bahwa sebuah graf dimungkinkan tidak memiliki satu sisi (*edge*) sekalipun namun sebuah graf haruslah memuat sedikitnya satu titik (*vertex*). Perhatikan gambar 2.1 sebagai ilustrasi dari graf. Graf G_1 adalah graf yang terbentuk oleh satu titik V_1 tanpa memiliki sisi. Graf G_1 disebut sebagai *empty graph* atau graf kosong. Jadi himpunan titik pada graf G_1 adalah : $V=\{1\}$, $E=\{-\}$ sedangkan G_2 adalah graf dengan : $V=\{1, 2, 3, 4\}$, $E=\{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$.

Sebuah sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sama yakni (v_i, v_i)

Gambar 2.1 Graf G_1 dan G_2

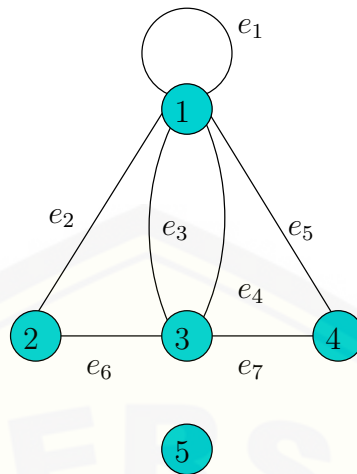
disebut loop dan dua buah atau lebih sisi yang mempunyai titik - titik ujung yang sama disebut sisi yang paralel atau *multiple edge*. Pada 2.8 dapat dilihat, gambar G_1 dan G_2 tidak memiliki loop maupun sisi paralel.

Misalkan pada graf G terdapat 2 titik (*vertex*) v_i dan v_j , dua buah titik pada graf G dikatakan berdekatan (*adjacent*) bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Atau dapat ditulis singkat dengan notasi $e = (v_i, v_j) \in E(G)$. Suatu graf G dengan $(v_i, v_j) \in V(G)$ jika $e = (v_i, v_j) \in E(G)$ maka dikatakan e insiden (*incident*) dengan titik v_i atau e insiden dengan titik v_j .

Misal terdapat dua buah titik u dan v di dalam graf, dimana u dan v saling berdekatan, jika sisi e insiden terhadap titik u dan v , maka titik u dan v disebut *endpoint* dari sisi e .

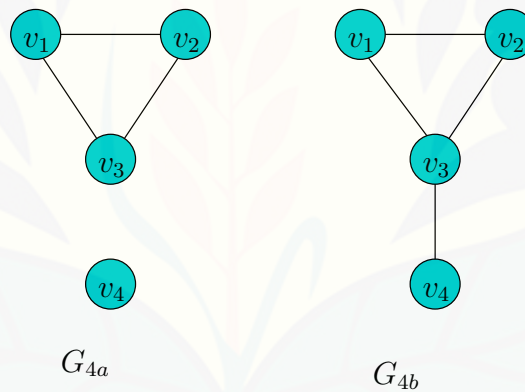
Pada Gambar 4.8, graf G_3 , titik v_2 dan titik v_3 merupakan titik yang berdekatan, sedangkan titik v_2 dan titik v_4 bukan merupakan titik yang berdekatan. Sisi e_6 insiden dengan titik v_2 dan titik v_3 , tetapi tidak terdapat sisi yang insiden dengan titik v_2 dan titik v_4 . Titik v_2 dan titik v_3 merupakan *endpoint* dari sisi e_6 . Selanjutnya, $\text{der}(v_3)=4$, $\text{der}(v_4)=2$, dan $\text{der}(v_5)=0$. Pada gambar juga terdapat *isolated vertex* yaitu titik v_5 dan juga terdapat *loop* yang ditunjukkan dengan simbol e_1 .

Suatu graf disebut graf terhubung (*connected graph*), jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j di dalam himpunan V terdapat *path* dari v_i ke v_j . Jika tidak, maka G disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*). Graf yang hanya terdiri atas satu titik saja (tanpa sisi) tetap dikatakan terhubung, karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri (Chartrand and Oellermann, 1993:22). Graf G_{4a}



Gambar 2.2 Graf G_3

pada Gambar 2.3 merupakan graf tak terhubung, sedangkan graf G_{4b} merupakan graf terhubung.



Gambar 2.3 Graf G_{4a} dan G_{4b}

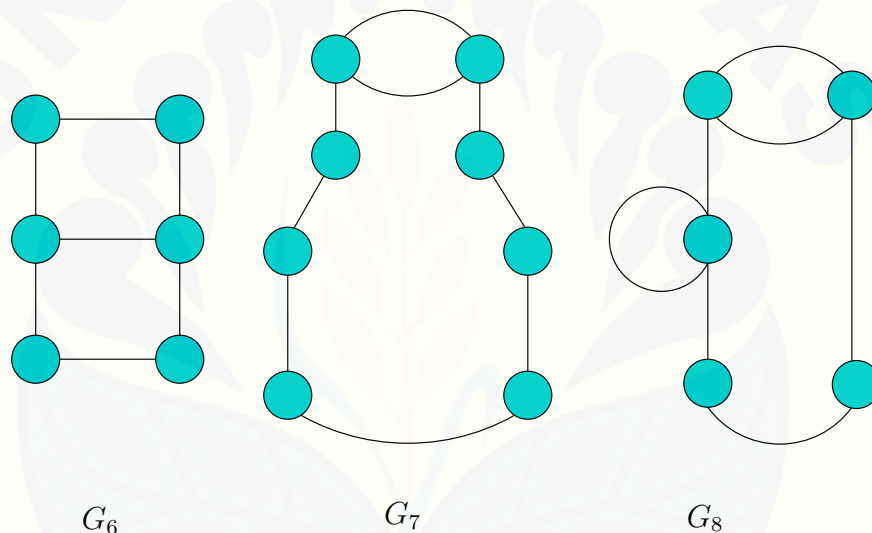
2.2 Jenis- Jenis Graf

Untuk memahami batasan masalah yang telah dikemukakan pada bab satu, kajian mengenai jenis graf diperlukan. Berdasarkan sifatnya graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) berdasarkan pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya

sisi ganda, berdasarkan banyak titik, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi .

Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi 2 jenis:

1. Graf sederhana (*simple graph*) adalah graf yang tidak mengandung sisi ganda maupun *loop*.
2. Graf tak-sederhana (*unsimple graph*) adalah graf yang mengandung sisi ganda atau *loop*. Ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Graf semu adalah graf yang mengandung sisi ganda dan *loop*.



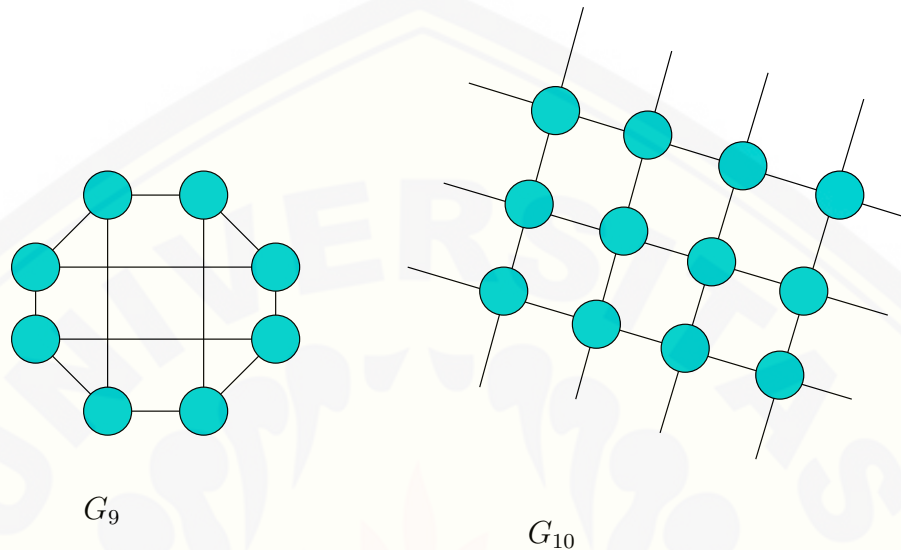
Gambar 2.4 Graf G_6, G_7 dan G_8

Pada Gambar 2.4, graf G_6 merupakan graf sederhana, graf G_7 merupakan graf ganda, dan graf G_8 merupakan graf semu.

Banyak titik pada graf disebut sebagai kardinalitas graf, dinyatakan dengan $p = |V|$, dan banyak sisi dinyatakan dengan $q = |E|$. Berdasarkan banyak titik pada suatu graf, maka secara umum graf dapat dikelompokkan menjadi dua jenis, yaitu graf berhingga (*finite graph*) adalah graf yang banyak titiknya n ,

berhingga. Graf tak-berhingga (*infinite graph*) adalah graf yang banyak titiknya n , tak berhingga.

Pada Gambar 2.5, graf G_9 merupakan graf berhingga, sedangkan graf G_{10} merupakan graf tak berhingga.

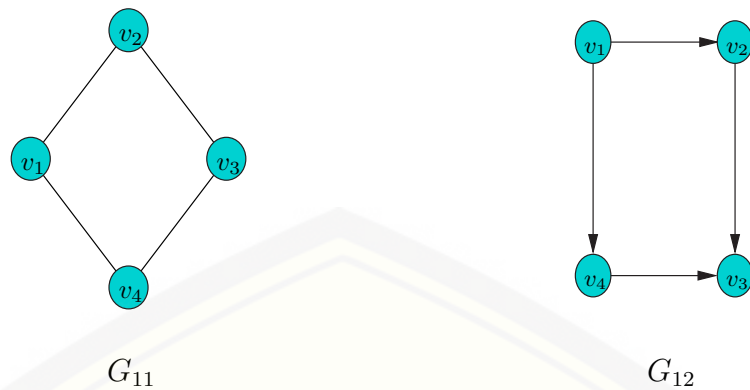


Gambar 2.5 Graf G_9 dan G_{10}

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dikelompokkan menjadi dua jenis:

1. Graf tak-berarah (*undirected graph*) adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi $(v_j, v_k) = (v_k, v_j)$ adalah sisi yang sama.
2. Graf berarah (*directed graph*). Graf berarah G merupakan pasangan himpunan $(V(G), A(G))$ dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen berbeda yang disebut titik, dan $A(G)$ adalah himpunan terurut (u, v) dari titik yang berbeda u, v yang disebut sisi berarah. (Slamin, 2009:21)

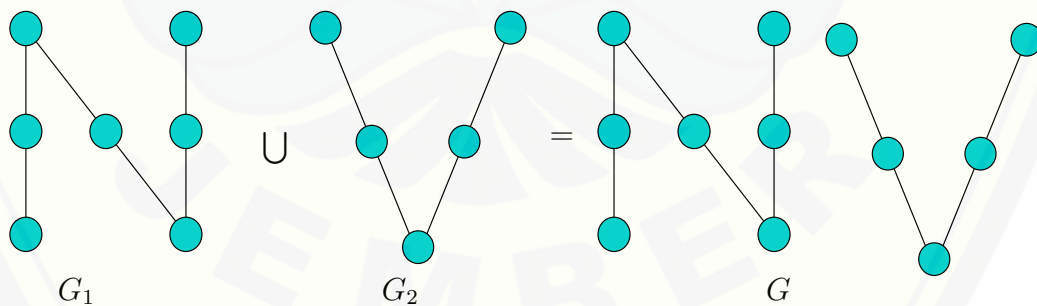
Pada Gambar 2.6, graf G_{11} merupakan graf tak berarah, sedangkan graf G_{12}



Gambar 2.6 Graf G_{11} dan G_{12}

merupakan graf berarah.

Gabungan dari dua graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$, didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titiknya adalah $V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1) \cup E(G_2)$. Pada Gambar 2.11, graf G merupakan gabungan graf G_1 dan G_2 , yaitu $G = G_1 \cup G_2$. Graf gabungan mG didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari m buah kopi graf G , atau dapat juga dikatakan sebagai graf dengan m komponen, dimana setiap komponennya adalah graf G . Dengan kata lain $mG = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_m$, dengan $G_1 = G_2 = G_3 = \dots = G_m = G$. Misal graf G mempunyai p titik dan q sisi, maka graf mG memiliki mp titik dan mq sisi (Wijaya, 2001:85). Pada Gambar 2.7 adalah contoh gabungan graf G_1 dan G_2 .

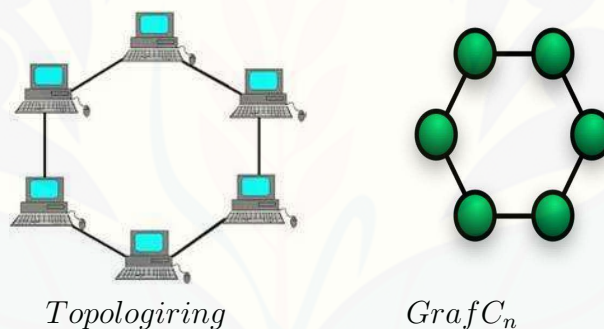


Gambar 2.7 Gabungan graf G_1 dan G_2

2.3 Aplikasi Graf

Pelabelan dari graf yang telah ditemukan banyak diaplikasikan dalam kehidupan. Salah satu graf yang dimanfaatkan pelabelannya adalah graf *Cycle*. Dalam graf *Crown String* merupakan gabungan beberapa graf *cycle* C_3 yang disebut juga sebagai graf buku segitiga. Pemanfaatan graf *Cycle* diantaranya dalam bidang teknologi jaringan komputer. Terdapat sejumlah perangkat komputer yang terhubung membentuk siklus atau dikenal dengan topologi *ring*. Setiap komputer tentunya memiliki *IP address* yang berbeda.

IP address pada masing-masing komputer sangatlah penting. maka dari itu kerahasiaannya pun selalu dijaga. Tidak hanya itu *IP address* pun sulit untuk dicek apabila terjadi kerusakan pada komputer. Maka dari itu untuk memudahkan dan sekaligus sebagai tanda yang bersifat pribadi, pelabelan digunakan. Pelabelan dapat dikombinasikan dengan *IP address* komputer. Kemudian kombinasi angka tersebut ditempelkan pada kabel penghubung sebagai representasi dari sisi pada graf.



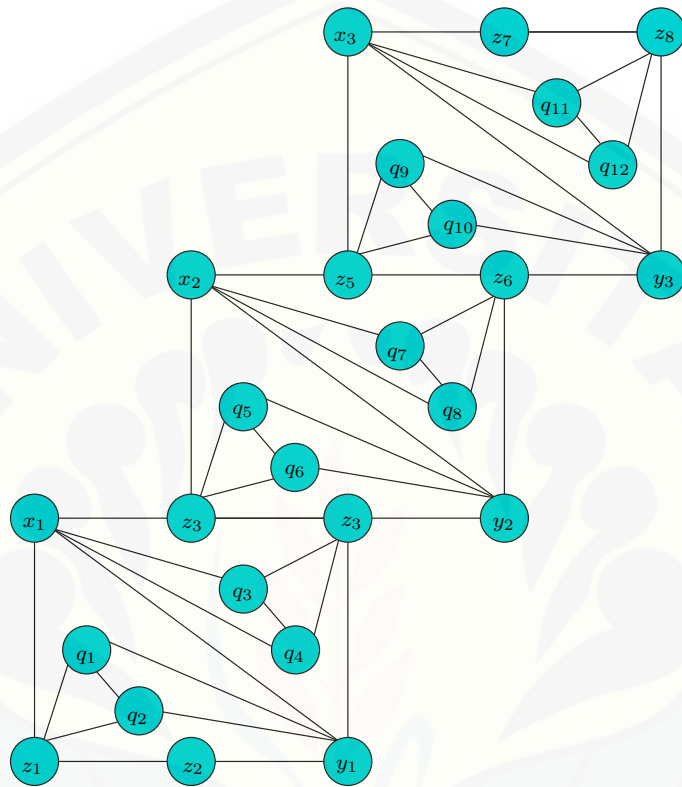
Gambar 2.8 Graf G_1 dan G_2

2.4 Graf Khusus

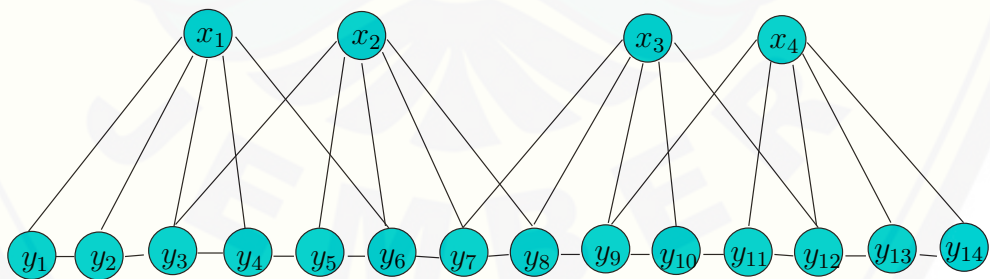
Graf khusus merupakan graf yang telah ditemukan pelabelannya. Graf - graf tersebut sebagai bahan kajian terkait pola pelabelan serta pelabelan yang telah ada. Hal ini dimaksudkan agar tidak terjadi penelitian terhadap graf yang sejenis atau isomorfis.

Terdapat beberapa jenis graf sederhana khusus. Berikut didefinisikan beberapa graf khusus :

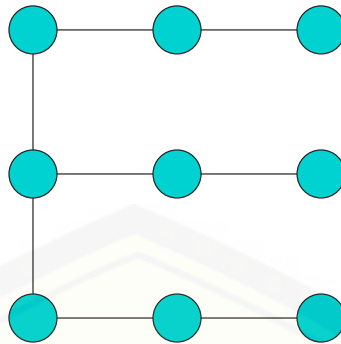
1. Graf tangga (Aprillia,2011) merupakan sebuah graf yang dinotasikan dengan St_n dimana n banyaknya tangga. Graf Tangga mempunyai himpunan titik dimana $V(St_n) = \{x_i, y_i, z_j, q_k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n + 2, 1 \leq k \leq 4n\}$. Graf $V(St_n)$ mempunyai jumlah titik $8n + 2$. Dan jumlah sisi graf $St(St_n)$ berdasarkan definisi yaitu: $E(St_n) = \{x_i y_i, x_i z_{2i+1}, y_i z_{2i+2}, y_i z_{2i}, y_i q_{4i-3}, y_i q_{4i-2}, x_i q_{4i-1}, x_i q_{4i}, 1 \leq i \leq n\} \cup \{q_i q_{i+1}; \text{iganjil}, 1 \leq i \leq 4n - 1\} \cup \{z_i z_{i+1}; \text{iganjil}, 1 \leq i \leq 2n+1\} \cup \{z_i q_{2i-1}, z_i q_{2i}; \text{iganjil}, 1 \leq i \leq 2n-1\} \cup \{z_i q_{2i-4}, z_i q_{2i-5}; \text{igenap}, 4 \leq i \leq 2n+2\}$. Gambar 2.9 merupakan contoh *Graf Tangga* St_3 dengan $n = 3$.
2. Graf Gunung, dinotasikan M_{2n} (Alvin,2011) adalah sebuah graf dengan himpunan *vertex*, $|V| = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq 2n \text{ dan } 1 \leq j \leq 6n + 2, n \in \mathbb{N}\}$ dan himpunan *edge*, $|E| = \{x_i y_{3i-2}, x_i y_{3i+3} \text{ untuk } i \text{ ganjil}, x_i y_{3i-3}, x_i y_{3i+2} \text{ untuk } i \text{ genap}, x_i y_{3i-1}, x_i y_{3i}, x_i y_{3i+1} \text{ untuk } i \text{ sebarang}, 1 \leq i \leq 2n \text{ dan } y_j y_{j+1}, 1 \leq j \leq 6n + 1\}$. Gambar 2.10 merupakan contoh *Graf Gunung*, M_{2n} .
3. Graf E (Deviyana,2011) adalah sebuah graf pohon dengan 9 simpul yang digambarkan seperti huruf E dan dilambangkan dengan E_n . Graf E (E_n) dengan $1 \leq i \leq 2n - 3$ dan $1 \leq j \leq n - 1$ mempunyai himpunan titik $V(E_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 2n - 3 \cup x_{1,j} \cup x_{n-1,j} \cup x_{2n-3,j}; 1 \leq j \leq n - 1\}$ dan himpunan sisi $E(E_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq 2n - 4 \cup x_{1,j} x_{1,j+1} \cup x_{n-1,j} x_{n-1,j+1} \cup x_{2n-3,j} x_{2n-3,j+1}; 1 \leq j \leq n - 2 \cup x_{1,j} x_{n-1,j} \cup x_{n-1,j} x_{2n-3,j}; j = n - 1\}$. Gambar 2.11 merupakan contoh Graf E (E_n).
4. Graf tangga permata (Laelatus,2011) adalah salah satu family dari graf tangga. Graf tangga permata adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan Dl_n di-



Gambar 2.9 Graf Tangga St_3

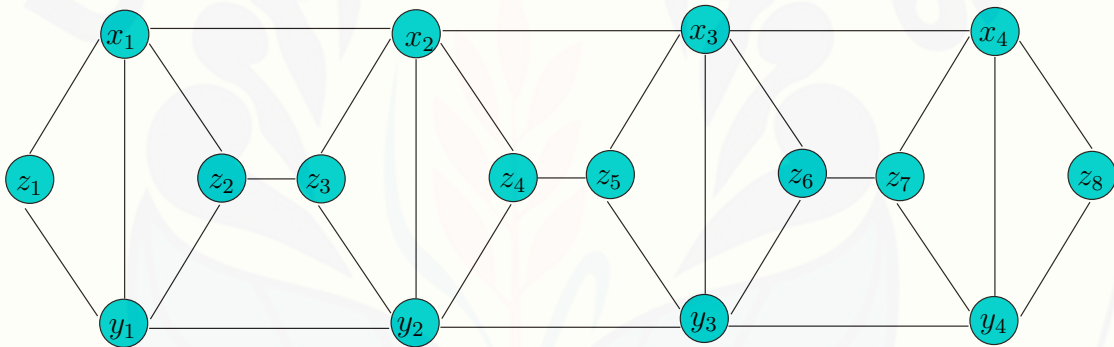


Gambar 2.10 Graf Gunung



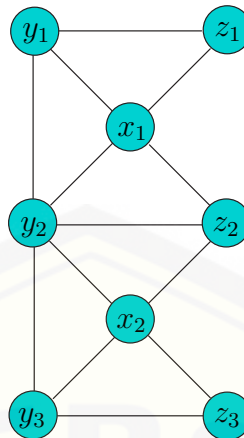
Gambar 2.11 Graf E

mana $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n\}$ dan $E(Dl_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}; 2 \leq j \leq 2n - 2 \text{ genap}\} \cup \{x_i z_{2i-1}, x_i z_{2i}, y_i z_{2i-1}, y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$. Gambar 2.12 merupakan graf tangga permata Dl_n dan pada Gambar 2.12 adalah contoh graf Dl_4 .



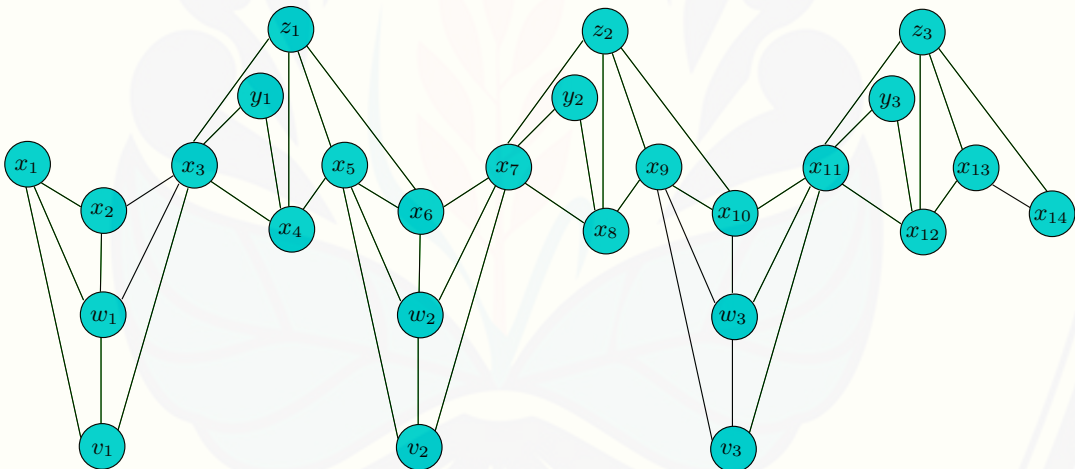
Gambar 2.12 Graf Tangga Permata Dl_4

5. Graf tangga tiga-siklus (Kunti,2012))adalah salah satu family dari graf ladder. Graf tangga tiga-siklus adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan TCL_n dimana $V(TCL_n) = \{x_i, y_j, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n + 1\}$ dan $E(TCL_n) = \{y_j z_j, ; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i y_i, x_i z_i, x_i y_{i+1}, x_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$. Gambar 2.13 merupakan graf tangga tiga-siklus TCL_2 .
6. Graf Kelelawar (Mukhlis,2012) adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan Bat_n dimana $V(Bat_n) = \{v_i, w_i, x_j, y_i, z_i; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4n + 2\}$ dan



Gambar 2.13 graf tangga tiga-siklus TCL_2

$E(Bat_n) = \{v_i w_i, v_i x_{4i-3}, v_i x_{4i-1}, w_i x_{4i-3}, w_i x_{4i-2}, w_i x_{4i-1}, y_i x_{4i-1}, y_i x_{4i}, z_i x_{4i-1}, z_i x_{4i}, z_i x_{4i+1}, z_i x_{4i+2}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_j x_{j+1}; 1 \leq j \leq 4n + 1\}$. Gambar 2.14 merupakan graf kelelawar Bat_3 .

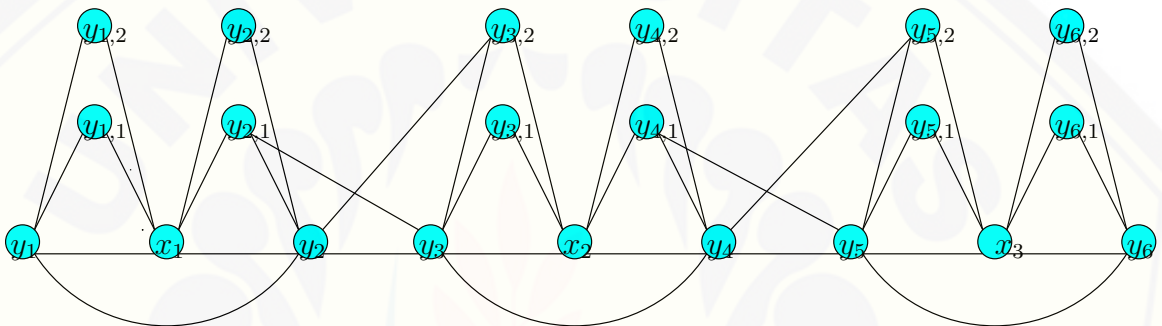


Gambar 2.14 Graf Kelelawar Bat_3

2.5 Graf Crown String $C_{s,m,n}$

Graf *Crown String* merupakan famili dari graf Buku Segitiga. Graf *Crown String* adalah salah satu graf yang dikembangkan dari graf buku segitiga dengan

menambahkan sisi berupa lintasan. Graf *Crown String* termasuk graf sederhana karena tidak mengandung sisi ganda dan loop, juga termasuk graf berhingga serta graf tak berarah karena sisi-sisinya tidak mengandung orientasi arah. Graf *Crown String* adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan $C_{s_m,n}$ dimana himpunan titik nya adalah $V = \{x_i, y_j, y_{j,k}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2m, 1 \leq k \leq n\}$ dan sisi adalah $E = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq 2m - 1\} \cup \{y_j y_{j,k}; 1 \leq j \leq 2m, 1 \leq k \leq n\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2m\} \cup \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2m\} \cup \{x_i, y_{j,k}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\} \cup \{x_i, y_{j+1,n}; 2 \leq j \leq 2m - 2\} \cup \{y_j y_{j-1,1}; 3 \leq j \leq 2m - 1\}$. Pada Graf *Crown String* dapat diperluas kearah samping dan pada kedua puncaknya.



Gambar 2.15 Graf *Crown String* Konektif $C_{s_{3,2}}$

2.6 Fungsi Bijektif dan Barisan Aritmatika

Pelabelan merupakan suatu pemetaan yang disebut juga fungsi. Fungsi yang digunakan dalam pelabelan total super (a, d) adalah fungsi bijektif. Secara umum, fungsi dari himpunan A ke himpunan B didefinisikan sebagai aturan yang memetakan setiap anggota himpunan A (dinamakan sebagai domain) kepada anggota himpunan B (dinamakan sebagai kodomain) (Munir, 2012:129).

Definisi 2.2 *Suatu himpunan bagian f dari $A \times B$ (perkalian himpunan A dan B) disebut fungsi dari A ke B jika setiap anggota A muncul hanya satu kali sebagai koordinat pertama pasangan terurut di f . (Seputro, 1992:155)*

Anggota himpunan yang dipetakan dapat berupa apa saja (kata, orang, atau objek lain), namun biasanya yang dibahas adalah besaran matematika seperti bilangan riil. Untuk mendefinisikan fungsi dapat digunakan notasi berikut.

$$f : A \rightarrow B$$

yang artinya bahwa fungsi f yang memetakan setiap elemen himpunan A kepada B . Jenis-jenis fungsi ada tiga, yaitu fungsi injektif, surjektif dan bijektif.

Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi satu-satu atau fungsi injektif jika dan hanya jika untuk sembarang a_1 dan $a_2 \in A$ dengan a_1 tidak sama dengan a_2 maka berlaku $f(a_1)$ tidak sama dengan $f(a_2)$.

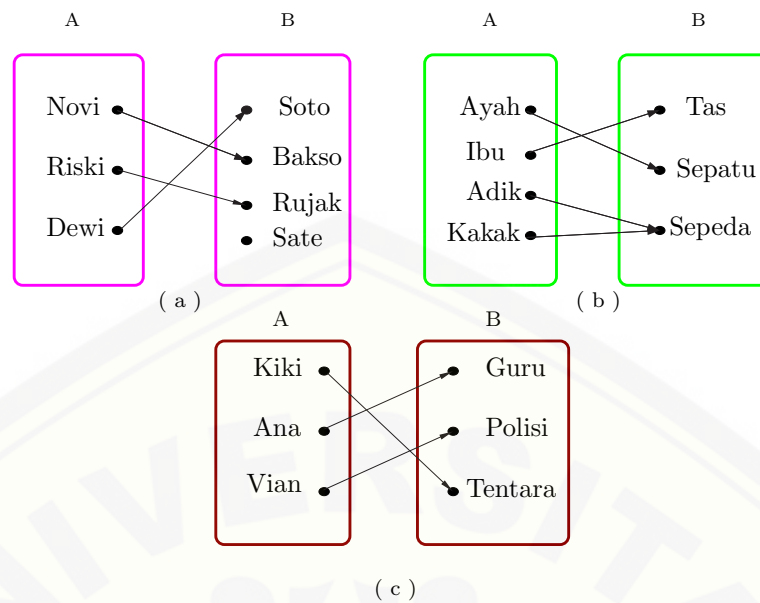
Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi kepada atau fungsi surjektif jika dan hanya jika untuk setiap b dalam kodomain B terdapat paling tidak satu a dalam domain A sehingga berlaku $f(a) = b$. Dengan kata lain, suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan kisarannya (range).

Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif. Gambar 2.16 menunjukkan fungsi injektif, surjektif dan bijektif.

Barisan yang dibentuk dengan cara menambah atau mengurangi suku sebelumnya dengan suatu bilangan tetap tertentu disebut barisan aritmatika, misalkan:

$$(a) 1, 6, 11, 16, \dots \text{ dan } (b) 45, 30, 15, -15, \dots$$

Barisan (a) mempunyai beda, $b = 5$. Barisan (a) disebut barisan aritmatika naik karena nilai suku-sukunya makin besar. Barisan (b) mempunyai beda,



Gambar 2.16 (a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif

$b = -15$. Barisan (b) disebut barisan aritmatika turun karena nilai suku-sukunya makin kecil. Suatu barisan U_1, U_2, U_3, \dots disebut barisan aritmatika jika selisih dua suku yang berurutan adalah tetap. Nilai untuk menentukan suku ke- n dari barisan aritmatika. perhatikan kembali contoh barisan (a). (a) $1, 6, 11, 16, \dots$

Misalkan U_1, U_2, U_3, \dots adalah barisan aritmatika tersebut, maka:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= 1 = 1 + 5(0) \\
 U_2 &= 6 = 1 + 5 = 1 + 5(1) \\
 U_3 &= 11 = 1 + 5 + 5 = 1 + 5(2) \\
 &\dots \\
 U_n &= 1 + 5(n - 1)
 \end{aligned}$$

Secara umum, jika suku pertama (U_1) = a dan beda suku yang berurutan adalah b maka dari rumus $U_n = 1 + 5(n - 1)$ diperoleh 1 adalah a dan 5 adalah b . Oleh sebab itu, suku ke- n dapat dirumuskan

$$U_n = a + b(n - 1)$$

Barisan aritmetika yang mempunyai beda positif disebut barisan aritmetika naik, sedangkan jika bedanya negatif disebut barisan aritmetika turun.

$U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$ disebut barisan aritmatika, jika $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 =$

$\dots = U_n - U_{n-1} = \text{konstanta}$.

2.7 Aksioma, Teorema, Lema, Akibat, Dugaan dan Masalah Terbuka

Aksioma adalah proposisi yang diterima sebagai kebenaran. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi. Teorema adalah proposisi yang memerlukan pembuktian dan ditunjukkan bernilai benar. Bentuk khusus dari teorema adalah lema dan akibat. Lema adalah teorema sederhana yang digunakan dalam pembuktian teorema lain. Lema biasanya tidak menarik namun berguna pada pembuktian proposisi yang lebih kompleks, yang dalam hal ini pembuktian tersebut dapat lebih mudah dimengerti bila menggunakan sederetan lema, setiap lema dibuktikan secara individual. Akibat adalah teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan, atau dapat dikatakan akibat adalah teorema yang mengikuti dari teorema lain. Dugaan adalah sebuah proposisi yang dipradugakan sebagai hal yang nyata, benar, atau asli, sebagian besarnya didasarkan pada landasan inkonklusif (tanpa simpulan). Dugaan bertentangan dengan hipotesis (oleh karenanya bertentangan pula dengan teori, aksioma, atau prinsip), yang merupakan pernyataan yang mengandung perjanjian menurut landasan yang dapat diterima. Di dalam matematika, dugaan adalah proposisi yang tidak terbukti atau tidak memerlukan bukti atau juga teorema yang dianggap pasti benar adanya. Masalah terbuka adalah beberapa masalah yang dapat secara akurat dinyatakan, dan belum diselesaikan (tidak ada solusi untuk diketahui).

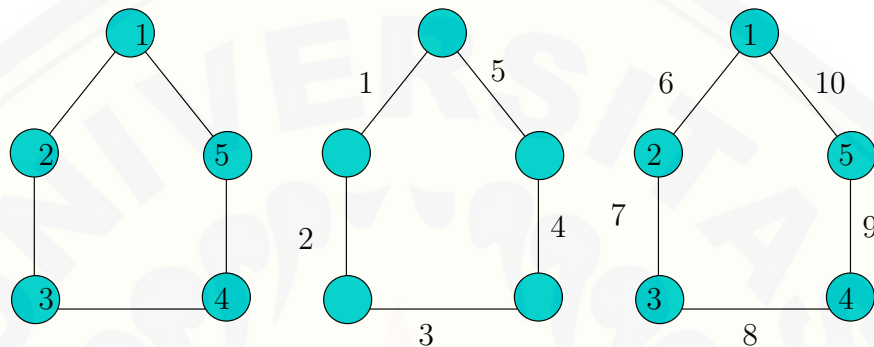
2.8 Pelabelan Graf

2.8.1 Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan satu-satu dan onto (fungsi bijektif) yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif. Secara umum, fungsi f yang memetakan himpunan A ke dalam B disebut fungsi satu-satu jika setiap elemen dalam A mempunyai bayangan yang berbeda pada B dan disebut onto jika dan hanya jika range f sama dengan B . Secara lebih singkat, $f : A \rightarrow B$ adalah satu-satu jika $f(a) = f(a')$ maka $a = a'$ dan merupakan onto jika $f(A) = B$. Sehingga, fungsi yang memetakan himpunan elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif disebut fungsi

bijektif jika tidak ada dua buah elemen yang berbeda pada graf yang mempunyai bayangan yang sama atau dengan kata lain semua elemen pada graf dinomori dengan bilangan bulat positif yang berbeda. Secara matematik, definisi pelabelan graf dapat dituliskan sebagai berikut:

Pelabelan graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan : $D \rightarrow N$, dimana D : domain, N : himpunan label dari G . Jika, $D = V$ maka disebut pelabelan titik, $D = E$ maka disebut pelabelan sisi, sedangkan $D = V \cup E$ maka disebut pelabelan total.



Gambar 2.17 (i) Pelabelan titik, (ii) Pelabelan sisi, (iii) Pelabelan total

Pada pelabelan titik, jumlah label dua titik yang menempel pada suatu sisi disebut *bobot sisi*. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka disebut pelabelan titik sisi ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama a dan beda d maka pelabelan tersebut disebut pelabelan titik sisi anti ajaib (*edge antimagic vertex labelling (EAVL)*).

Sedangkan dalam pelabelan total, bobot sisi diartikan sebagai jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada suatu sisi. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total-sisi-ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmetika dengan suku pertama a dan beda d maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total sisi anti ajaib (pelabelan total sisi antimagic).

2.8.2 Pelabelan Total Super (a, d) -sisi antimagic

Suatu graf dikatakan memiliki pelabelan total (a, d) -sisi antimagic jika terdapat sebuah pemetaan satu-satu dari suatu $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $1, 2, 3, \dots, p + q$ sehingga himpunan bobot sisinya $W(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)$ pada semua sisi G adalah $a, a + d, \dots, a + (q - 1)d$ untuk $a > 0$ dan $d > 0$ keduanya bilangan bulat. Sebuah pelabelan total (a, d) - sisi antimagic disebut pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic jika $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ dan $f(E) = \{p + 1, p + 2, p + 3, \dots, p + q\}$. Berdasarkan penjelasan sebelumnya dapat juga diartikan bahwa pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada sebuah graf $G = (V, E)$ adalah pelabelan titik dengan bilangan bulat $1, 2, 3, \dots, p$ dan pelabelan sisi dengan bilangan bulat $f(E) = \{p + 1, p + 2, p + 3, \dots, p + q\}$ dari sebuah graf G dimana p adalah banyaknya titik dan q adalah banyaknya sisi pada graf G . Himpunan bobot sisi yang terbentuk adalah $W = w(xy) \mid xy \in E(G) = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$ untuk $a \geq 0$ dan $d \geq 0$. $\alpha(u)$ adalah label dari titik u , $\alpha(v)$ adalah label dari titik v dan $\alpha(uv)$ adalah label dari sisi uv . Untuk mencari batas atas nilai beda d pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dapat ditentukan dengan lemma 2.1 (dalam Dafik: 2007, 26):

Lema 2.8.1. *Jika sebuah graf (p, q) adalah pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic maka $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$*

Bukti: $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ dan $f(E) = \{p + 1, p + 2, p + 3, \dots, p + q\}$. Misalkan graf (p, q) adalah pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan pemetaan $f : V(G) \cup E(G) \longrightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\}$. Nilai minimum yang mungkin dari bobot sisi terkecil $\alpha(u) + \alpha(uv) + \alpha(v) = 1 + (p + 1) + 2 = p + 4$ dan dapat ditulis $p + 4 \leq a$. Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari bobot sisi terbesar diperoleh dari jumlah 2 label titik terbesar dan label sisi terbesar atau dapat ditulis $(p - 1) + (p + q) + p = 3p + q - 1$. Akibatnya:

$$a + (q - 1)d \leq 3p + q - 1 \tag{2.1}$$

$$d \leq \frac{3p + q - 1 - (p + 4)}{q - 1} \tag{2.2}$$

$$d \leq \frac{2p + q - 5}{q - 1} \tag{2.3}$$

Dari Lemma 2.8.1, telah terbukti dan diperoleh nilai $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$ dari berbagai jenis atau famili graf.

K.A. Dafik, dkk (2014) mengatakan bahwa lemma berikut digunakan untuk menemukan pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf untuk jumlah sisi ganjil.

Lema 2.8.2. Misalkan Ψ merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan $\Psi = \{c, c+1, c+2, \dots, c+k\}$, dengan k genap. Maka terdapat sebuah permutasi $\Pi(\Psi)$ dari anggota-anggota himpunan Ψ sehingga $\Psi + \Pi(\Psi)$ juga merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan yaitu $\Psi + \Pi(\Psi) = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \dots, 2c + \frac{3k}{2}\}$.

Bukti. Misal Ψ adalah suatu himpunan bilangan berurutan $\Psi = \{v_i | v_i = c + (i - 1), 1 \leq i \leq k + 1\}$ dan k adalah genap. Selanjutnya didefinisikan nilai permutasi $\Pi(\Psi) = \{w_i | 1 \leq i \leq k + 1\}$ dari anggota Ψ adalah sebagai berikut:

$$w_i = \begin{cases} c + i + \frac{k}{2} - 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq \frac{k}{2} + 1 \\ c + i - (\frac{k}{2} + 2), & \text{jika } \frac{k}{2} + 2 \leq i \leq k + 1 \end{cases}$$

untuk membuktikan lema 2.8.2, langkah pertama yang harus dilakukan adalah mensubstitusikan nilai i sesuai batasan yang diberikan maka akan diperoleh w_i sebagai berikut: Untuk $1 \leq i \leq \frac{k}{2} + 1$ maka akan diperoleh hasil: untuk $i = 1$, maka $w_1 = c + \frac{k}{2}$; untuk $i = 2$, maka $w_2 = c + \frac{k}{2} + 1$; untuk $i = \frac{k}{2}$, maka $w_{\frac{k}{2}} = c + k - 1$; \dots ; untuk $i = \frac{k}{2} + 1$, maka $w_{\frac{k}{2}+1} = c + k$.

Sedangkan untuk nilai $\frac{k}{2} + 2 \leq i \leq k + 1$ diperoleh hasil: untuk $i = \frac{k}{2} + 2$, maka $w_{\frac{k}{2}+2} = c$; untuk $i = \frac{k}{2} + 3$, maka $w_4 = c + 1$; \dots ; untuk $i = k$, maka $w_k = c + \frac{k}{2} - 2$; untuk $i = k + 1$, maka $w_{k+1} = c + \frac{k}{2} - 1$.

Jika \mathfrak{C} dinyatakan dalam himpunan v_i dan $\Pi(\Psi)$ dinyatakan dalam himpunan w_i seperti telah disampaikan sebelumnya, maka akan diperoleh: $\Psi + \Pi(\Psi) = \{v_i + w_i | 1 \leq i \leq k + 1\}$

Berdasarkan substitusi nilai i , maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
 \text{untuk } i = 1 \rightarrow v_1 + w_1 &= c + \left(c + \frac{k}{2}\right) \\
 &= 2c + \frac{k}{2} \\
 \text{untuk } i = 2 \rightarrow v_2 + w_2 &= (c + 1) + \left(c + 2 + \frac{k}{2} + 1\right) \\
 &= 2c + \frac{k}{2} + 2 \\
 &\dots \\
 \text{untuk } i = \frac{k}{2} \rightarrow v_{\frac{k}{2}} + w_{\frac{k}{2}} &= \left(c + \frac{k}{2} - 1\right) + \left(c + \frac{3k}{2} - 2\right) \\
 &= 2c + \frac{3}{2} - 1 \\
 &\dots \\
 \text{untuk } i = \frac{k}{2} + 1 \rightarrow v_{\frac{k}{2}+1} + w_{\frac{k}{2}+1} &= \left(c + \frac{k}{2}\right) + (c + k) \\
 &= 2c + \frac{3k}{2} \\
 \text{untuk } i = \frac{k}{2} + 2 \rightarrow v_{\frac{k}{2}+2} + w_{\frac{k}{2}+2} &= \left(c + \frac{k}{2} + 1\right) + (c) \\
 &= 2c + \frac{k}{2} + 1 \\
 &\dots \\
 \text{untuk } i = k \rightarrow v_k + w_k &= (c + k - 1) + \left(c + \frac{k}{2} - 2\right) \\
 &= 2c + \frac{3}{2} - 3 \\
 \text{untuk } i = k + 1 \rightarrow v_{k+1} + w_{k+1} &= (c + k) + \left(c + \frac{k}{2} - 1\right) \\
 &= 2c + \frac{3k}{2} - 1
 \end{aligned}$$

Jika diurutkan mulai dari nilai terkecil hingga terbesar, maka diperoleh: $\left\{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \dots, 2c + \frac{3k}{2}\right\}$. Dengan demikian rumusan tersebut terbukti benar. \square

Teorema 2.8.1. Misalkan G_i untuk $i = 1, 2, \dots, m$ adalah graf dengan jumlah

titik p dan jumlah sisi q dan memiliki pelabelan super $(a, 1)$ -EAT. Maka, gabungan saling lepas dari $\cup_{i=1}^m G_i$ juga memiliki super $(b, 1)$ -EAT.

Bukti. Misalkan $G_i; i = 1, 2, \dots, m$ adalah sebuah graf yang memiliki p titik dan q sisi. Perlu diketahui bahwa G_i tidak harus isomorfis dengan G_j untuk $i = j$. Misalkan untuk setiap $G_i; i = 1, 2, \dots, m$ memiliki sebuah pelabelan super $(a, 1)$ -EAT berdasarkan f_i , sedemikian hingga:

$$\begin{aligned} f_i &= V(G_i) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\} \\ &= E(G_i) \rightarrow \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\} \end{aligned}$$

dan $\{f_i(u) + f_i(v) + f_i(uv); uv \in E(G_i)\} = \{a, a + 1, \dots, a + q - 1\}$

Definisi pelabelan f untuk semua titik dan sisi dari $\cup_{i=1}^m G_i$ adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} m[f_i(x) - 1] + i, & \text{jika } x \in V(G_i) \\ mf_i(x) + 1 - i, & \text{jika } x \in E(G_i) \end{cases}$$

Bobot total dari gabungan $\cup_{i=1}^m G_i$ adalah $\{f(u) + f(v) + f(uv) : uv \in E(\cup_{i=1}^m G_i)\}$ sama dengan $\{m(a - 2) + 2, m(a - 2) + 3, \dots, m(a + q - 2) + 1\}$ \square

2.9 Hasil-Hasil Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic

Pada bagian ini disajikan rangkuman hasil pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf diskonektif.

Tabel 2.1: Ringkasan pelabelan total super (a, d) -edge antimagic pada graf konektif.

Notasi Graf	d	Hasil	Open Problem
$E_n(\text{Graf } E)$	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 3$ (R.Deviyana, 2011)	–
$Dl_n(\text{Diamond})$	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 2$ (L.Sya'diyah, 2011)	–

Notasi Graf	d	Hasil	Open Problem
$M_{2n}(\text{Graf Gunung})$	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$ (A.Fajriatin, 2011)	–
$Bt_n(\text{Buku Segitiga})$	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$ (F.E.Chandra, 2011)	–
$St_n(\text{Graf Tangga})$	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 2$ (I.Aprilia, 2011)	–



Tabel 2.2: Ringkasan pelabelan total super (a, d) -edge antimagic pada graf diskonektif.

Graf	d	Hasil	Open Problem
$kP_{(n,2)}$ (<i>Petersen</i>)	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk k, n ganjil (Indayani.D.V , 2010)	jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk k, n genap
$mB_{(n,k)}$ (<i>Banana Tree</i>)	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $m \geq 2$, $n \geq 2$ dan $k \geq 4$ (K.Biyadi , 2010)	jika $d \in \{0, 2\}$ untuk m, n genap
$mF_{(n,k)}$ (<i>Firecracker</i>)	$d < 4$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $m \geq 2$, $n \geq 2$ dan $k \geq 3$ (Z.Abidin , 2010)	<ul style="list-style-type: none"> • jika $d \in \{0, 2\}$ untuk m, n genap dan $k \geq 3$ • jika $d \in \{1, 3\}$ untuk $m \geq 2$ n ganjil dan $k \geq 3$
$m\mathcal{L}_{(i,j,k)}$ (<i>Lobster Graph</i>)	$d < 4$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $m \geq 3$, $1 \leq i \leq n$, $j = 2$, dan $k = 1$ (R.Raty Rahmad , 2010)	<ul style="list-style-type: none"> • jika $d = 3$ untuk $m \geq 3$ ganjil dan $n \geq i \geq 2$ genap • jika $d \in \{1, 3\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil dan $n \geq i \geq 2$ ganjil • jika $d \in \{1, 3\}$ untuk $m \geq 3$ genap dan $n \geq i \geq 2$
mE_n (m copies of E graph)	$d < 4$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$, ganjil $n \geq 3$ (R.Deviyana , 2011)	<ul style="list-style-type: none"> • jika $d = 1$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 3$ ganjil • jika $d = 3$ untuk ($m \geq 3$ dan $n \geq 3$) ganjil • jika $d = 3$ untuk ($m \geq 3$ dan $n \geq 3$) genap

Graph	d	Hasil	Open Problem
$sW_0(3, j, 2)$ (s copies of Generalized web)	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil dan s ganjil (Yeni Anggraeni, 2011)	• jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $1 \leq j \leq m$ genap dan $1 \leq k \leq s$ genap
nDl_n (n copies of graph E)	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil $d \in \{1\}$ untuk $m \geq 2$ dan m sembarang (L. Syakdiyah, 2011)	• jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $1 \leq j \leq m$ genap
nM_n	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil $d \in \{1\}$ untuk $m \geq 2$ dan m sembarang (A. Fajriatin, 2011)	• jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $1 \leq j \leq m$ genap
mBt_n (m copies triangular book)	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil dan $n \geq 1$ (F. E. Chandra, 2011)	• jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ genap dan $n \geq 1$
$mC_n^k \cup (\mu - 1)$ $C_n \cup \mu C_n^3$	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $\mu \geq 1$, $(\mu - 1) \leq m \leq \mu, n \geq 7$ dan n ganjil (Y. Listiana, 2011)	• jika $d \in \{1\}$ untuk $\mu \geq 1, \mu - 1 \leq m \leq \mu, m \neq \mu, n \geq 7$
mSt_n (m copies of stair graphs)	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil $n \geq 2$ $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 2$ sembarang $n \geq 2$ (I. Aprilia, 2011)	• jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $m \geq 2$ genap dan $n \geq 2$

2.10 Berpikir Tingkat Tinggi

Berpikir merupakan suatu upaya kompleks dan reflektif dan juga pengalaman kreatif. Berpikir merupakan faktor penting dalam proses pembelajaran. Kemampuan berpikir ini dimungkinkan untuk berkembang karena manusia memiliki rasa ingin tahu yang selalu terus berkembang. Ini memiliki arti bahwa keterampilan berpikir setiap orang akan selalu berkembang dan dapat dipelajari. Sehingga

salah satu kecakapan hidup (*life skill*) yang perlu dikembangkan melalui proses pendidikan adalah keterampilan berpikir. Keterampilan berpikir dapat didefinisikan sebagai proses kognitif yang dipecah-pecah ke dalam langkah-langkah nyata yang kemudian digunakan sebagai pedoman berpikir. Satu contoh keterampilan berpikir adalah menarik kesimpulan (*inferring*), yang didefinisikan sebagai kemampuan untuk menghubungkan berbagai petunjuk (*clue*) dan fakta atau informasi dengan pengetahuan yang telah dimiliki untuk membuat suatu prediksi hasil akhir yang terumuskan.

Menurut Rajendran, ranah kognitif menggolongkan dan mengurutkan keahlian berpikir menggambarkan tujuan yang diharapkan. Proses berpikir mengekspresikan tahap-tahap kemampuan yang harus dikuasai sehingga dapat menunjukkan kemampuan mengolah pikirannya serta mampu mengaplikasikan teori ke dalam perbuatan. Mengubah teori ke dalam keterampilan sehingga dapat menghasilkan sesuatu yang baru sebagai produk inovasi pikirannya. Memahami sebuah konsep berarti dapat mengingat informasi atau ilmu mengenai konsep itu. Seseorang tidak akan mampu mengaplikasikan ilmu dan konsep jika tanpa terlebih dahulu memahami isinya.

Berbasis kepada Taksonomi Bloom (Anderson:2001), terdapat tiga aspek dalam ranah kognitif yang menjadi bagian dari kemampuan berpikir tingkat tinggi atau *higher-order thinking*. Ketiga aspek itu adalah aspek analisa, aspek evaluasi dan aspek mencipta. Sedang tiga aspek lain dalam ranah yang sama, yaitu aspek mengingat, aspek memahami, dan aspek aplikasi, masuk dalam bagian intelektual berpikir tingkat rendah atau *lower-order thinking*.

Setiap kategori dalam Revisi Taksonomi Bloom terdiri dari subkategori yang memiliki kata kunci berupa kata yang berasosiasi dengan kategori tersebut. Kata-kata kunci itu seperti terurai di bawah ini:

1. mengingat yaitu kemampuan menyebutkan kembali informasi atau pengetahuan yang tersimpan dalam ingatan. Kata kerja : mengurutkan, menjelaskan, mengidentifikasi, menamai, menempatkan, mengulangi , menemukan kembali
2. memahami yaitu kemampuan memahami instruksi dan menegaskan konsep

yang telah diajarkan baik dalam bentuk lisan, tertulis, maupun grafik atau diagram. Kata kerja : memperkirakan, menjelaskan, mengkategorikan, men-cirikan, merinci, mengasosiasikan, membandingkan, menghitung, mengkon-traskan, mengubah mempertahankan, menguraikan, menjalin, membedakan, mendiskusikan, menggali, mencontohkan, menerangkan, mengemukakan, mem-polakan, memperluas, menyimpulkan, meramalkan, merangkum, menjabarkan dsb,

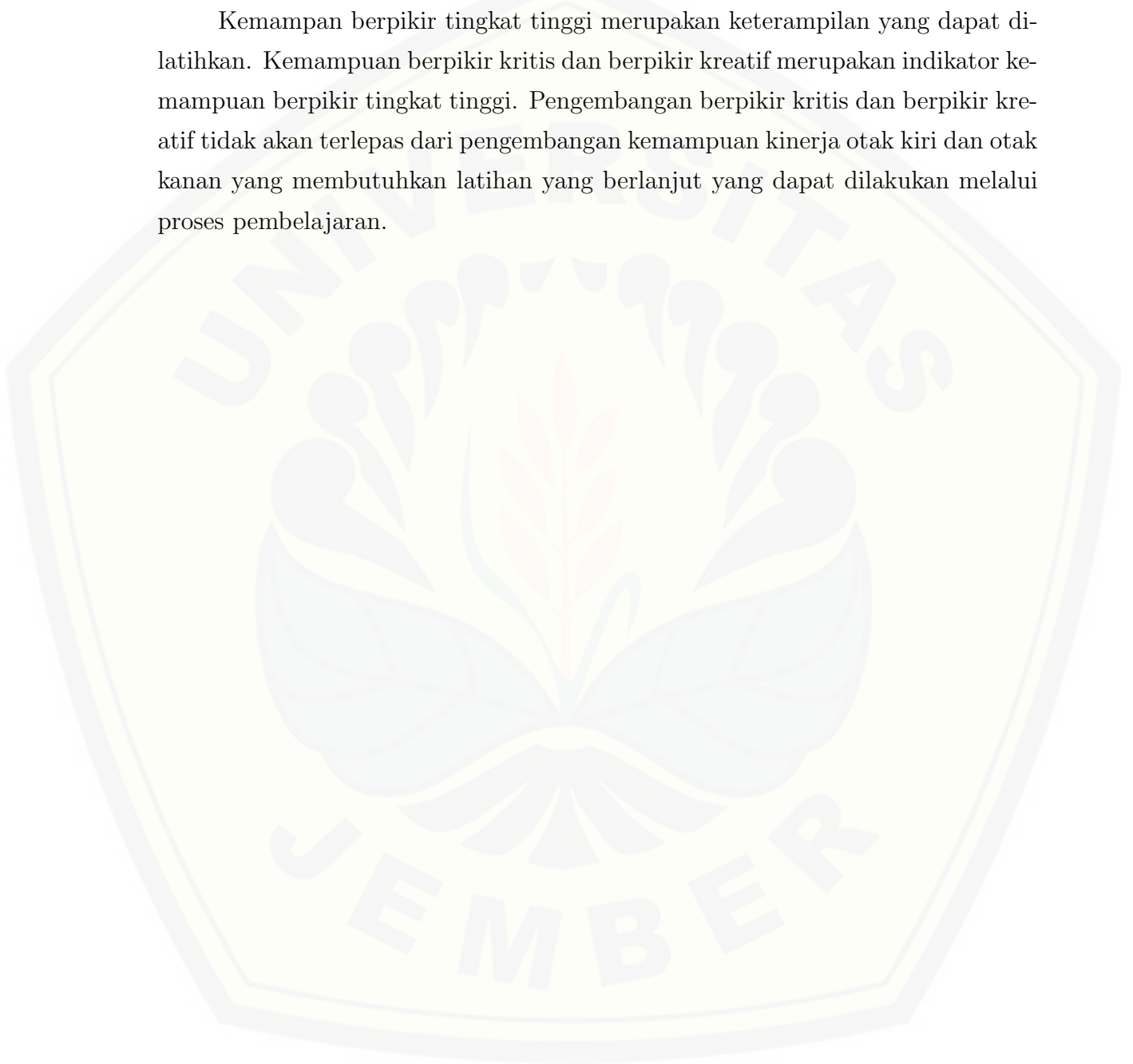
3. menerapkan yaitu kemampuan melakukan sesuatu dan mengaplikasikan kon-sep dalam situasi tertentu. Kata kerja : melaksanakan, menggunakan, men-jalankan, melakukan, mempraktekan, memilih, menyusun, memulai, menye-lesaikan, mendeteksi dsb,
4. menganalisis yaitu kemampuan memisahkan konsep kedalam beberapa kom-ponen dan mnghubungkan satu sama lain untuk memperoleh pemahaman atas konsep tersebut secara utuh. Kata : menguraikan, membandingkan, mengorganisir, menyusun ulang, mengubah struktur, mengkerangkakan, menyusun outline, mengintegrasikan, membedakan, menyamakan, memband-ingkan, mengintegrasikan dsb,
5. mengevaluasi yaitu kemampuan menetapkan derajat sesuatu berdasarkan norma, kriteria atau patokan tertentu. Kata kerja : menyusun hipotesi, mengkritik, memprediksi, menilai, menguji, mebenarkan, menyalahkan, dsb,
6. berkreasi yaitu kemampuan memadukan unsurunsur menjadi sesuatu ben-tuk baru yang utuh dan koheren, atau membuat sesuatu yang orisinil. Kata kerja : merancang, membangun, merencanakan, memproduksi, menemukan, membaharui, menyempurnakan, memperkuat, memperindah, menggubah dsb.

(Utari: 2012)

Keenam tahapan tersebut akan diterapkan dalam pelabelan graf SEATL. Tahapan berpikir seseorang dalam pelabelan graf tentu berbeda. Perbedaan terse-but bukan dari tahapannya, melainkan kata kunci pada setiap tahapan akan dis-esaikan dengan apa yang dialami pada saat melakukan pelabelan graf SEATL.

Kemampuan berpikir tingkat tinggi akan terjadi ketika seseorang mengaitkan informasi baru dengan informasi yang sudah tersimpan di dalam ingatannya dan menghubung-hubungkannya dan/atau menata ulang serta mengembangkan informasi tersebut untuk mencapai suatu tujuan ataupun menemukan suatu penyelesaian dari suatu keadaan yang sulit dipecahkan.

Kemampuan berpikir tingkat tinggi merupakan keterampilan yang dapat dilatihkan. Kemampuan berpikir kritis dan berpikir kreatif merupakan indikator kemampuan berpikir tingkat tinggi. Pengembangan berpikir kritis dan berpikir kreatif tidak akan terlepas dari pengembangan kemampuan kinerja otak kiri dan otak kanan yang membutuhkan latihan yang berlanjut yang dapat dilakukan melalui proses pembelajaran.



BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik, yaitu dengan menerapkan turunan aksioma atau teorema yang telah ada kedalam pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String*. Metode ini akan diterapkan pada graf *Crown String* tunggal (konektif) dan gabungan saling lepas (diskonektif). Dalam penelitian ini, terlebih dahulu akan ditentukan nilai beda (d) , selanjutnya nilai d tersebut diterapkan dalam pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String*. Jika terdapat pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic, maka akan dirumuskan bagaimana pola pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String* tersebut dengan menggunakan metode pendeksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pola umumnya.

Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai beda (d) pada gabungan saling lepas graf *Crown String*, selanjutnya nilai d tersebut diterapkan dalam pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf *Crown String*. Jika terdapat pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic, maka akan dirumuskan bagaimana pola pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf tersebut dengan menggunakan metode yang sama untuk menentukan pola umumnya. Dalam menentukan pola pelabelan pada graf *Crown String* tunggal (konektif) maupun gabungan (diskonektif) akan di kaitkan dengan tahapan berpikir tingkat tinggi menurut taksonomi Bloom.

3.2 Definisi Operasional

Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi operasional variabel yang dimaksud adalah sebagai berikut:

3.2.1 Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic

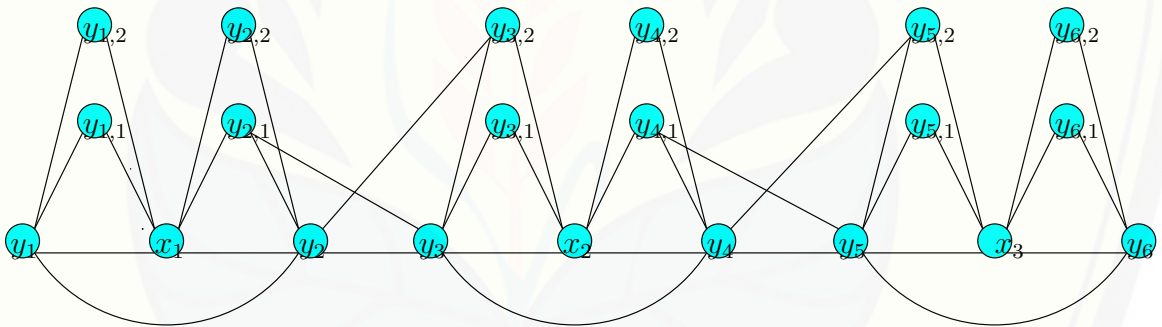
Misal $p = |V|$ dan $q = |E|$ maka pelabelan total (a, d) -sisi antimagic adalah sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, p+q\}$ sehingga himpunan bobot sisinya $w(uv) = f(u) + f(v) + f(w)$ pada semua sisi G adalah $\{a, a + d, \dots, a + (q - 1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$ adalah bilangan bulat.

Sebuah pelabelan total (a, d) - sisi antimagic disebut pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic jika $f(V) = \{1, 2, 3 \dots p\}$ dan $f(E) = \{p+1, p+2, \dots, p+q\}$.

3.2.2 Graf *Crown String* dan Gabungan Saling Lepas Graf *Crown String*

Graf *Crown String* dinotasikan $C_{s_{m,n}}$ adalah sebuah graf dengan himpunan *vertex*, $V = \{x_i, y_j, y_{j,k}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2m, 1 \leq k \leq n\}$ dan himpunan sisi, $E = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq 2m - 1\} \cup \{y_j y_{j,k}; 1 \leq j \leq 2m, 1 \leq k \leq n\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2m\} \cup \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2m\} \cup \{x_i, y_{j,k}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\} \cup \{y_j y_{j+1,n}; 2 \leq j \leq 2m - 2\} \cup \{y_j y_{j-1,1}; 3 \leq j \leq 2m - 1\}$.

Gambar 4.1 merupakan contoh *Graf Crown String* ($C_{s_{m,n}}$).



Gambar 3.1 Graf *Crown String* Konektif $C_{s_{3,2}}$

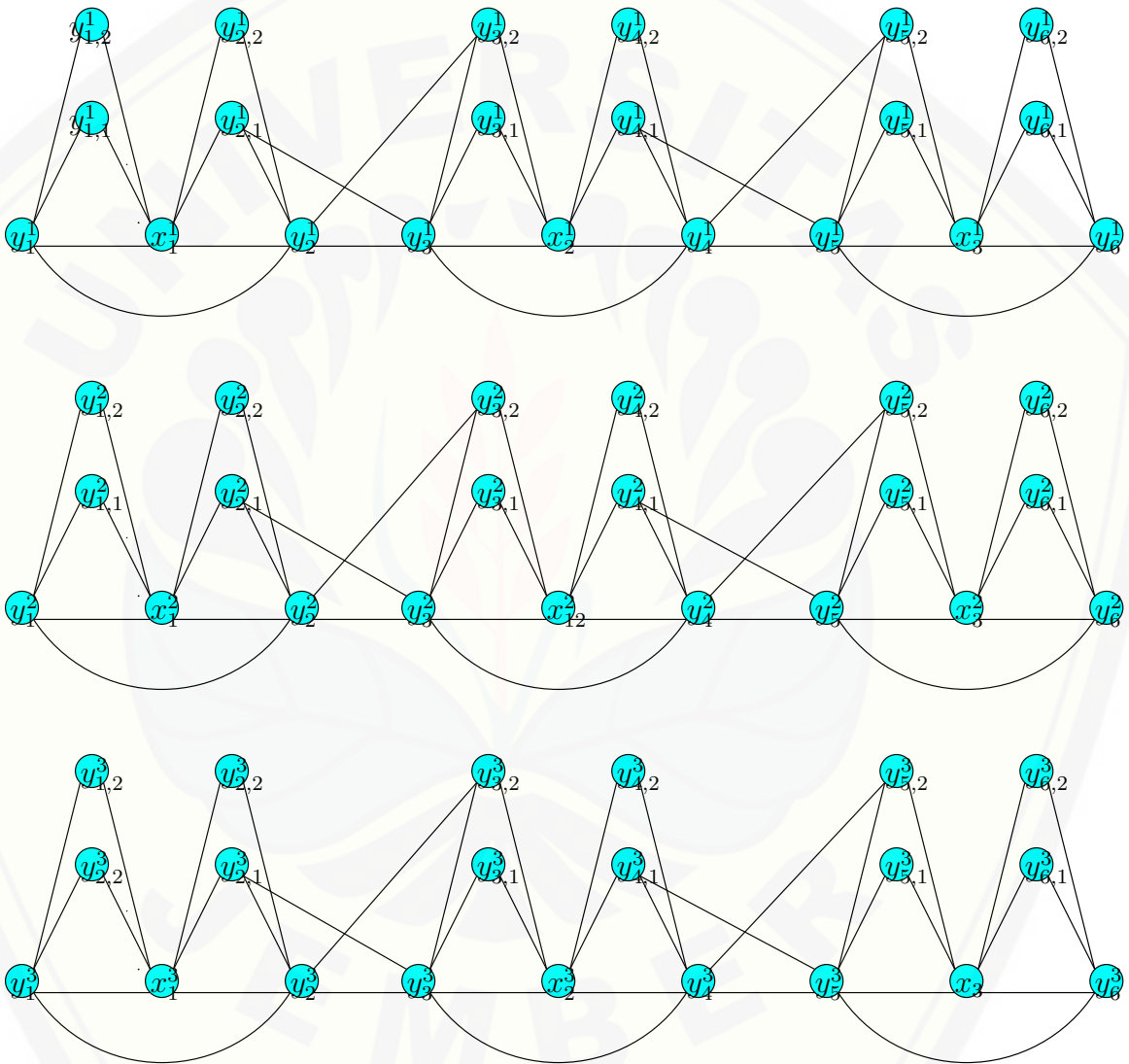
Gabungan saling lepas graf *Crown String* $PC_{s_{m,n}}$ didefinisikan sebagai gabungan diskonektif dari sebanyak p gabungan saling lepas graf *Crown String* yang mempunyai himpunan titik. dan sisi sebagai berikut. $3C_{s_{3,2}}$

$$V = \{x_i^c, y_j^c, y_{j,k}^c; 3 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2m, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p\}$$

$$E = \{y_j^c y_{j+1}^c; 1 \leq j \leq 2m - 1, 1 \leq c \leq p\} \cup \{y_j^c y_{j,k}^c; 1 \leq j \leq 2m, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p\} \cup \{x_i^c y_j^c; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2m, 1 \leq c \leq p\} \cup$$

$$\{x_i^c, y_j^c; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2m, 1 \leq c \leq p\} \cup \{x_i^c, y_{j,k}^c; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p\} \cup \{x_i^c, y_{j,k}^c; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p\} \cup \{y_j^c y_{j+1,n}^c; 2 \leq j \leq 2m-2, 1 \leq c \leq p\} \cup \{y_j^c y_{j-1,1}^c; 3 \leq j \leq 2m-1, 1 \leq c \leq p\}$$

Dalam penelitian ini akan dibatasi pada $pC_{s_{m,n}}$ untuk $p \geq 1, m \geq 1$ dan $n \geq 2$. Gambar 4.1 adalah gabungan saling lepas Graf *Crown String*, $P = 3, m = 3$ dan $n = 2$.



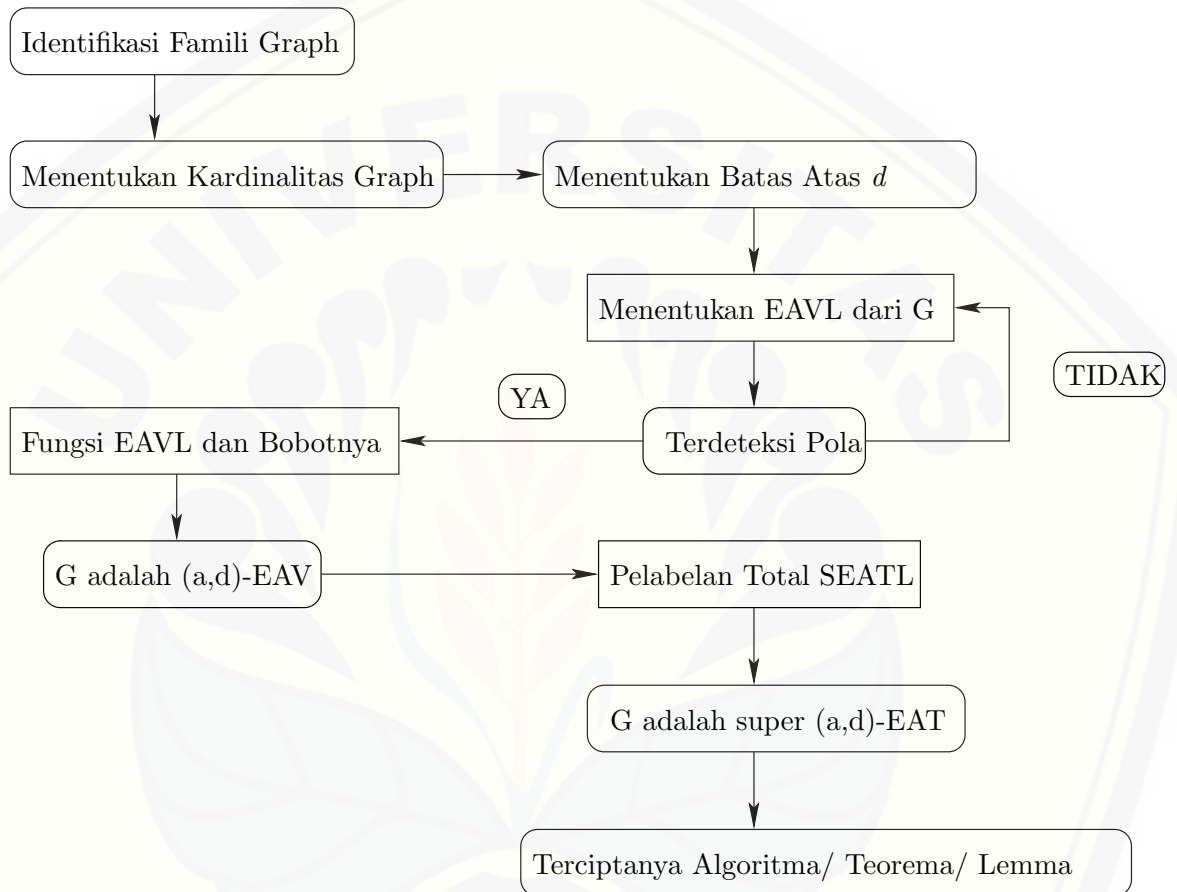
Gambar 3.2 Graf *Crown String* Diskonektif $3C_{s_{3,2}}$

3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf *Crown String* tunggal dan gabungan saling lepasnya. Jika pada graf tersebut ditemukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola (*pattern recognition*). Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

1. menghitung jumlah titik p dan sisi q pada graf *Crown String* ($C_{s,m,n}$),
2. menentukan batas atas nilai beda d pada graf *Crown String* ($C_{s,m,n}$),
3. menentukan label *EAVL* (*edge-antimagic vertex labeling*) atau pelabelan titik (a,d) -sisi antimagic pada graf *Crown String* ($C_{s,m,n}$),
4. apabila label *EAVL* berlaku untuk beberapa graf baik secara *heuristik* maupun *determinatik* maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan menentukan fungsi bijektif *EAVL* pada graf *Crown String* ($C_{s,m,n}$),
5. menentukan fungsi bijektif *EAVL* pada graf *Crown String* ($C_{s,m,n}$),
6. melabeli graf *Crown String* ($C_{s,m,n}$) tunggal dengan *SEATL* (*super edge antimagic total labeling*) atau pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan nilai beda d yang *feasible*,
7. menentukan fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String* ($C_{s,m,n}$).

Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam bagan diagram alir pada Gambar 3.3. Adapun teknik penelitian untuk gabungan diskonektif shackle amalgamasi graf buku segitiga ($PC_{s,m,n}$), adalah sama seperti teknik penelitian pada graf *Crown String* tunggalnya. Berikut pada Gambar adalah diagram alir untuk gabungan diskonektif graf *Crown String*.



Gambar 3.3 Rancangan Penelitian

3.4 Observasi

Sebelum penelitian lanjutan pada graf *Crown String*, telah dilakukan observasi awal sebagai pedoman observasi selanjutnya. Langkah-langkah untuk melakukan observasi pelabelan graf *Crown String* tunggal adalah sebagai berikut:

1. mencari pelabelan titik pada graf *Crown String* tunggal, dengan cara pendeteksian pola pada titik,
2. mencari bobot sisi pada graf *Crown String* tunggal,
3. daftar merentang bobot sisi graf *Crown String* untuk mencari label sisinya,
4. mencari label sisinya, dimulai dari jumlah titik (p) ditambah 1.

Selanjutnya, jika kita akan menemukan pelabelan titik dan bobot sisi pada graf *Crown String* diskonektif, maka kita dapat melakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. mencari pelabelan titik pada graf *Crown String* diskonektif,
2. mencari bobot sisi pada graf *Crown String* diskonektif,
3. daftar merentang bobot sisi graf *Crown String* diskonektif untuk mencari label sisinya,
4. mencari label sisinya, dimulai dari jumlah titik (p) ditambah 1.

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String* tunggal maupun gabungan saling lepas graf *Crown String*. Penelitian ini diawali dengan menentukan batas atas d dari graf *Crown String*, menentukan *EAVL* dan bobot sisi *EAV*, menentukan *SEATL* dan menentukan bobot total *SEATL* pada graf *Crown String* tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Penelitian tersebut dilakukan untuk membuktikan bahwa graf *Crown String* tunggal maupun gabungannya memiliki pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic atau *SEATL*.

Hasil penelitian pada pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String* baik tunggal maupun gabungan saling lepasnya berupa 2 lemma dan 4 teorema. Penyajian pada penelitian ini, dengan menuliskan lemma ataupun teorema terlebih dahulu, dilanjutkan dengan disertai bukti mengenai lemma dan teorema tersebut dan disertakan bukti berupa contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran pembuktian lemma dan teorema tersebut.

4.1 Graf *Crown String*($C_{s_{m,n}}$)

Menentukan batas atas d merupakan hal yang penting dalam penelitian ini. Batas atas ini adalah titik penting yang mengisyaratkan seberapa banyak nilai d yang mungkin dimiliki oleh graf *Crown String* baik tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Untuk menentukan nilai-nilai d tersebut, perlu diketahui jumlah titik (p) dan jumlah sisi (q) graf *Crown String* tunggal maupun gabungannya.

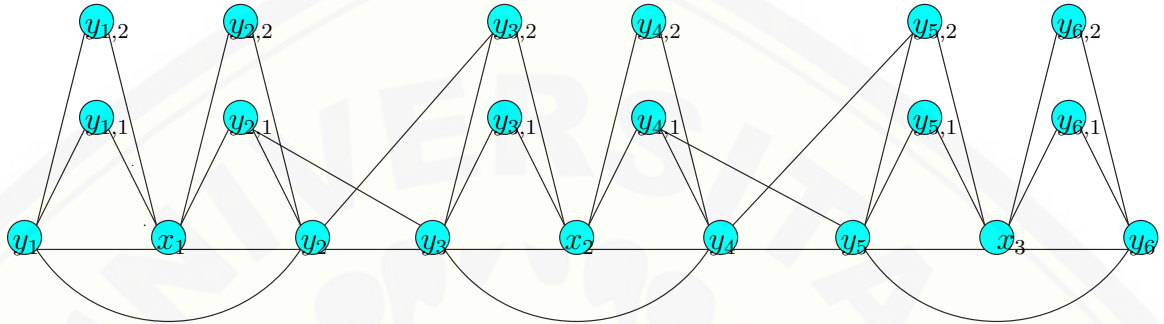
4.1.1 Jumlah Titik dan Sisi pada Graf *Crown String*($C_{s_{m,n}}$)

Graf *Crown String* dinotasikan dengan $C_{s_{m,n}}$ dimana m adalah banyaknya perluasan graf ke samping dan n banyaknya perluasan puncak graf ke atas. Sedangkan himpunan V dan E dari graf *Crown String* adalah sebagai berikut.

$V = \{x_i, y_j, y_{j,k}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2m, 1 \leq k \leq n\}$ dan himpunan

sisi, $E = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq 2m - 1\} \cup \{y_j y_{j,k}; 1 \leq j \leq 2m, 1 \leq k \leq n\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2m\} \cup \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2m\} \cup \{x_i, y_{j,k}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\} \cup \{x_i, y_{j,k}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n\} \cup \{y_j y_{j+1,n}; 2 \leq j \leq 2m - 2\} \cup \{y_j y_{j-1,1}; 3 \leq j \leq 2m - 1\}$.

Gambar 4.1 berikut merupakan representasi dari graf *Crown String* secara umum untuk mengetahui letak titik dan sisi sesuai dengan yang telah didefinisikan.



Gambar 4.1 Graf *Crown String* Konektif $Cs_{3,2}$

Berdasarkan Gambar 4.1 dan perluasan pola pada graf *Crown String* diperoleh rumusan untuk mengetahui jumlah titik dan sisi. Jumlah titik pada graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ adalah $2mn + 3m$. Dan jumlah sisi pada graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ adalah $4mn + 6m - 3$.

4.1.2 Batas Atas d Graf *Crown String* ($Cs_{m,n}$)

Untuk mengetahui batas atas d pada graf *Crown String* ($Cs_{m,n}$) dapat ditentukan dengan mengaplikasikan Lemma 2.7.1. Diketahui jumlah titik pada graf ($Cs_{m,n}$) adalah $2mn + 3m$ yang disimbolkan dengan p sedangkan jumlah sisi $4mn + 6m - 3$ disimbolkan dengan q . Sehingga batas atas nilai beda d graf

Crown String ($C_{s_{m,n}}$) adalah:

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{2p + q - 5}{q - 1} \\
 &= \frac{2(2mn + 3m) + (4mn + 6m - 3) - 5}{(4mn + 6m - 3) - 1} \\
 &= \frac{4mn + 6m + 4mn + 6m - 8}{4mn + 6m - 4} \\
 &= \frac{8mn + 12m - 8}{4mn + 6m - 4} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Karena *SEATL* selalu menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai $d \geq 0$ dan d adalah bilangan bulat, sehingga $d \in \{0, 1, 2\}$. Selanjutnya penentuan fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic akan disesuaikan dengan nilai d yang telah ditetapkan.

4.2 Pelabelan Total Super (a, d) -sisi Antimagic pada Graf *Crown String* ($C_{s_{m,n}}$)

Dalam menemukan pelabelan total super sisi antimagic pada graf *Crown String* digunakan metode yang terdiri dari beberapa langkah. Metode ini diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*). Kemudian, untuk menentukan pola secara umum digunakan rumus deret aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya, pada akhirnya fungsi ini merupakan fungsi bijektif pada graf *Crown String*. Setelah fungsi bijektif diketahui selanjutnya dilakukan pembuktian secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari lemma atau teorema yang didapat. Dari hasil pendeteksian pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, diperoleh beberapa lemma dan teorema. Lemma atau teorema yang dihasilkan dalam penelitian ini adalah lemma atau teorema yang bersifat karakteristik atau tidak *biimplikatif* sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Setelah batas atas nilai beda d ditentukan, langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan total super sisi antimagic. Diawali dengan menentukan pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi antimagic pada graf *Crown String* dan sekaligus menentukan

fungsi bijektifnya melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika. Lemma 4.2.1 adalah lemma yang berkaitan dengan pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi Antimagic pada Graf *Crown String* $Cs_{m,n}$.

Lema 4.2.1. *Ada pelabelan titik $(3, 1)$ -sisi antimagic pada graf Crown String $Cs_{m,n}$ jika $m \geq 1$ dan $n \geq 1$.*

Bukti. Labeli titik graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ dengan sebuah fungsi f_1 , definisikan pelabelan $f_1 : V(Cs_{m,n}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2mn + 3m\}$ maka pelabelan f_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_1(y_j) = \begin{cases} (2n + 3) + \frac{j+1}{2} - 2n + 2, & \text{untuk } 1 \leq j \leq 2m, \text{ dan } j \text{ ganjil} \\ (2n + 3)\frac{j}{2}, & \text{untuk } 1 \leq j \leq 2m, \text{ dan } j \text{ genap} \end{cases}$$

$$f_1(y_{j,k}) = \begin{cases} (2n + 3)\frac{j+1}{2} - n - k - 1, & \text{untuk } 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq 2m, \\ & \text{dan } j \text{ ganjil} \\ (2n + 3)\frac{j}{2} - k, & \text{untuk } 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq 2m, \\ & \text{dan } j \text{ genap} \end{cases}$$

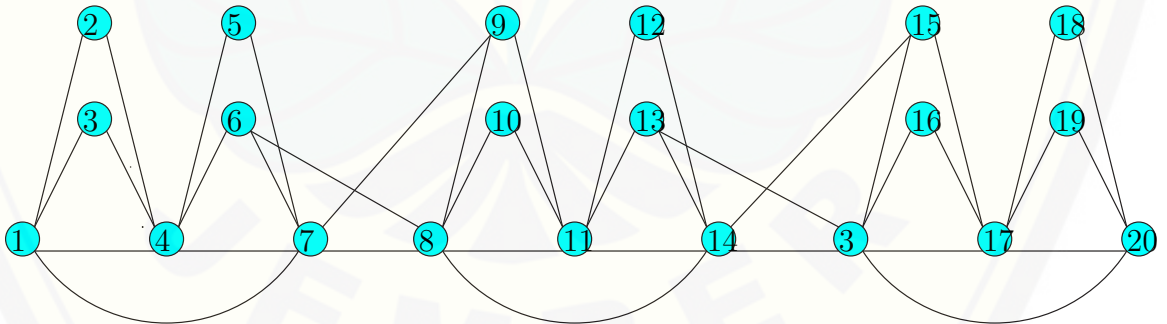
$$f_1(x_i) = (2n + 3)i - n - 1, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq m$$

Pelabelan titik f_1 merupakan fungsi bijektif yang memetakan $V(Cs_{m,n})$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \dots, 2mn + 3m\}$. Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan titik f_1 yang diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang bersisian, maka fungsi bijektif w_{f_1} dapat ditentukan melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika sebagai berikut:

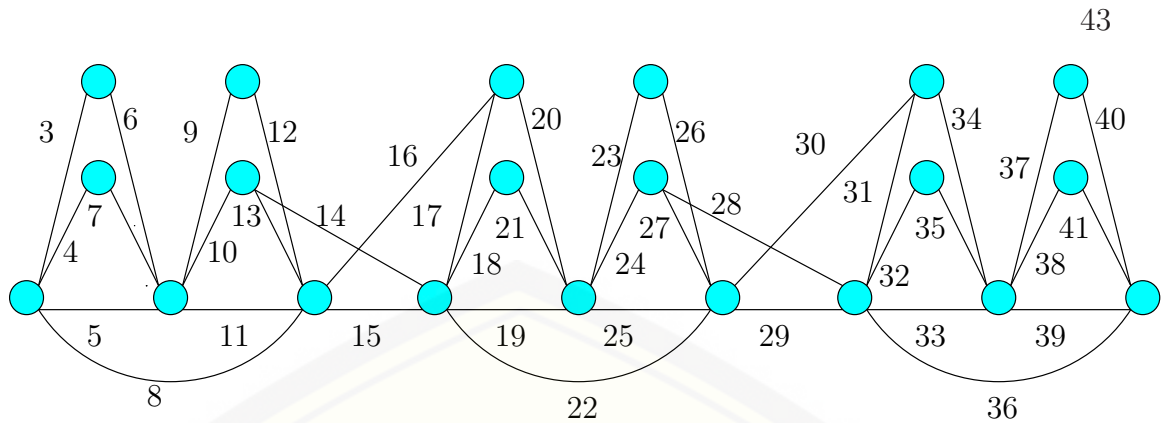
$$\begin{aligned}
 w_{f_1}(y_j y_{j,k}) &= (2n + 3)j - n - k; && \text{jika } 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq 2m, \\
 &&& \text{dan } j \text{ ganjil} \\
 w_{f_1}(x_i y_j) &= (i - 1)(4n + 6) + n + 3; && \text{jika } 1 \leq i \leq m, j = 2i - 1 \\
 w_{f_1}(x_i y_{j,k}) &= (4n + 6)i - 2n - k - 2; && \text{jika } 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n \\
 w_{f_1}(y_j y_{j+1}) &= (2n + 3)j + 1, && \text{jika } 1 \leq j \leq 2m - 1 \\
 w_{f_1}(x_i y_{j,k}) &= (4n + 6)i - k - n - 1, && \text{jika } 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n \\
 w_{f_1}(x_i y_j) &= (4n + 6)i - n - 1, && \text{jika } 1 \leq i \leq m, j = 2i \\
 w_{f_1}(y_j y_{j,k}) &= (2n + 3)j - k, && \text{jika } 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq 2m, \\
 &&& \text{dan } j \text{ genap} \\
 w_{f_1}(y_j y_{j-1,1}) &= (2n + 3)(j - 1), && \text{jika } 3 \leq j \leq 2m - 1, \text{ dan } j \text{ ganjil} \\
 w_{f_1}(y_j y_{j+1,n}) &= (2n + 3)j + 2, && \text{jika } 2 \leq j \leq 2m - 2, \text{ dan } j \text{ genap}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot sisi EAV ini, bobot sisi terkecil terletak pada $w_{f_1}(y_j y_{j,k})$ yaitu $(2n + 3)j - n - k$ untuk $j = 1$ dan $k = n$. Sedangkan bobot sisi terbesar terletak pada $w_{f_1}(y_j y_{j,k})$ yaitu $(2n + 3)j - k$ untuk $j = 2m$ dan $k = 1$. Dengan mensubstitusikan fungsi yang bergerak, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq 2m$ dan $1 \leq k \leq n$ didapatkan nilai-nilai berurutan yang membentuk suatu himpunan $w_{f_1} = \{3, 4, 5, \dots, 4mn + 6m - 1\}$. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa f_1 adalah suatu pelabelan titik $(3, 1)$. \square

Gambar 4.2 merupakan contoh pelabelan titik sedangkan gambar 4.9 merupakan bobot sisi EAVL $(3, 2)$ -sisi antimagic graf *Crown String* $C_{s_3,2}$ dengan $d = 1$.



Gambar 4.2 Label Titik $C_{s_3,2}$



Gambar 4.3 Bobot sisi $Cs_{3,2}$

Berdasarkan Lemma 4.2.1 maka diperoleh pelabelan titik $(3, 1)$ -sisi antimagic. Kemudian dapat ditentukan pelabelan total super sisi antimagic dengan nilai awal a dan nilai beda $d = 0$ atau dapat dituliskan dengan pelabelan total super $(a, 0)$ -sisi antimagic. Pelabelan tersebut ditentukan berdasarkan label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL w dengan urutan yang berkebalikan. Sehingga sisi dengan w terkecil dilabeli dengan label sisi terbesar dan sisi dengan w terbesar dilabeli dengan label sisi terkecil. Melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika, maka dapat ditentukan fungsi bijektifnya. Dari uraian di atas dapat diturunkan teorema 4.2.1.

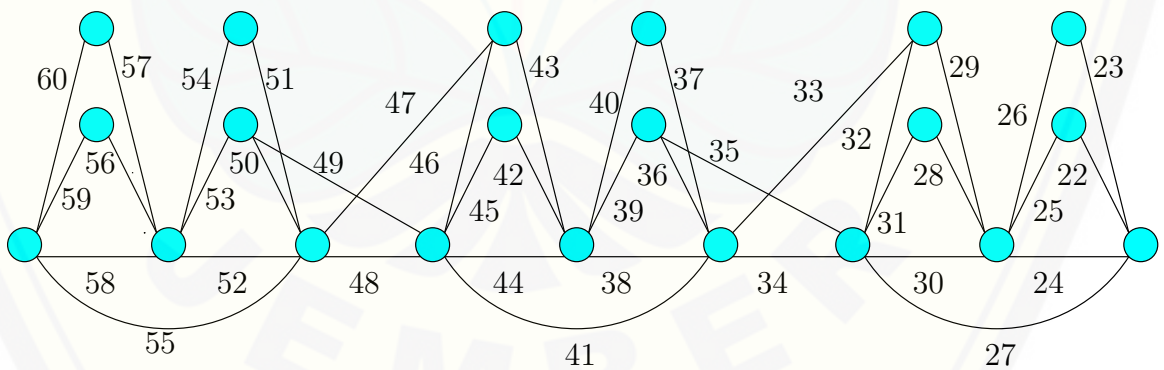
Teorema 4.2.1. *Ada pelabelan total super $((6n+9)m, 0)$, dan $((2n+3)m+4, 2)$ -sisi antimagic pada graf Crown String $Cs_{m,n}$ jika $m \geq 1$, dan $n \geq 1$.*

Pembuktian teorema ini dibagi menjadi dua kasus yakni $d = 0$ dan $d = 2$.

Kasus 1 ($d = 0$)

Bukti. Gunakan pelabelan titik f_1 untuk melabeli titik graf Crown String $Cs_{m,n}$, kemudian definisikan label sisi $f_2 : E(Cs_{m,n}) \rightarrow \{(2n+3)m+1, (2n+3)m+2, \dots, (6n+9)m-3\}$, sehingga label sisi f_2 untuk pelabelan total super $(a, 0)$ -sisi antimagic pada graf $Cs_{m,n}$ dapat dirumuskan sebagai berikut. (lihat gambar 4.4 sebagai ilustrasi cara melabeli sisi $d=0$)

$$\begin{aligned}
 f_2(y_j y_{j,k}) &= (6n + 9)m - (2n + 3)j + k; \\
 &\text{jika } , 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq 2m, \text{ dan; } j \text{ genap} \\
 f_2(x_i y_{2i}) &= (6n + 9)m - (4n + 6)i + n + 1; \\
 &\text{jika } 1 \leq i \leq m, \\
 f_2(x_i y_{2i,k}) &= (6n + 9)m - (4n + 6)i + n + k + 1; \\
 &\text{jika } 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n \\
 f_2(y_j y_{j+1}) &= (6n + 9)m - (2n + 3)j - 1; \\
 &\text{jika } 1 \leq j \leq 2m - 1 \\
 f_2(x_i y_{2i-1,k}) &= (6n + 9)m - (4n + 6)i + k + 2n + 2; \\
 &\text{jika } 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n \\
 f_2(x_i y_{2i-1}) &= (6n + 9)m - (4n + 6)i + 3n + 3; \\
 &\text{jika } 1 \leq i \leq m \\
 f_2(y_j y_{j,k}) &= (6n + 9)m - (2n + 3)j + n + k; \\
 &\text{jika } 1 \leq k \leq n 1 \leq j \leq 2m - 1 \text{ dan } j \text{ ganjil} \\
 f_2(y_j y_{j+1,n}) &= (6n + 9)m - (2n + 3)j - 2, \\
 &\text{jika } 2 \leq j \leq 2m - 2 \text{ dan } j \text{ genap} \\
 f_2(y_j y_{j-1,1}) &= (6n + 9)m - (2n + 3)(j - 1), \\
 &\text{jika } 3 \leq j \leq 2m - 1 \text{ dan } j \text{ ganjil}
 \end{aligned}$$



Gambar 4.4 Label sisi d=0

Jika W_{f_2} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total graf *Crown String* berdasarkan penjumlahan bobot sisi dengan label sisinya maka W_{f_2} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot sisi EAVL w_{f_1} dan rumus label sisi f_2 dengan syarat batas i , j dan k yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_2} &= \{w_{f_1} + f_2(y_j y_{j,k})\}; \text{ jika } 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq 2m, j = 2i \\ &= ((2n + 3)j - k) + ((6n + 9)m - (2n + 3)j + k) \\ &= (6n + 9)m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_2} &= \{w_{f_1} + f_2(x_i y_j)\}; \text{ jika } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2m, j = 2i \\ &= ((4n + 6)i - n - 1) + ((6n + 9)m - (4n + 6)i + n + 1) \\ &= (6n + 9)m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_2} &= \{w_{f_1} + f_2(x_i y_{j,k})\}; \text{ jika } 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n, j = 2i \\ &= ((4n + 6)i - n - k - 1) + ((6n + 9)m - (4n + 6)i + n + k + 1) \\ &= (6n + 9)m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_2} &= \{w_{f_1} + f_2(y_j y_{j+1})\}; \text{ jika } 1 \leq j \leq 2m - 1 \\ &= ((2n + 3)j + 1) + ((6n + 9)m - (2n + 3)j - 1) \\ &= (6n + 9)m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_2} &= \{w_{f_1} + f_2(x_i y_{j,k})\}; \text{ jika } 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n, j = 2i - 1 \\ &= ((4n + 6)i - k - 2n - 2) + ((6n + 9)m - (4n + 6)i + k + 2n + 2) \\ &= (6n + 9)m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_2} &= \{w_{f_1} + f_2(x_i y_j)\}; \text{ jika } 1 \leq i \leq m, j = 2i - 1 \\ &= ((4n + 6)i - 3n - 3) + ((6n + 9)m - (4n + 6)i + 3n + 3) \\ &= (6n + 9)m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_2} &= \{w_{f_1} + f_2(y_j y_{j,k})\}; \text{ jika } 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq 2m - 1 \text{ dan } j \text{ ganjil} \\ &= ((2n + 3)j - n - k) + ((6n + 9)m - (2n + 3)j + n + k) \\ &= (6n + 9)m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_2} &= \{w_{f_1} + f_2(y_j y_{j+1,n})\}; \text{ jika } 2 \leq j \leq 2m - 2 \text{ dan } j \text{ genap} \\ &= ((2n + 3)j + 2) + ((6n + 9)m - (2n + 3)j - 2) \\ &= (6n + 9)m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_2} &= \{w_{f_1} + f_2(y_j y_{j-1,1})\}; \text{ jika } 3 \leq j \leq 2m - 1 \text{ dan } j \text{ ganjil} \\ &= ((2n + 3)(j - 1)) + ((6n + 9)m - (2n + 3)(j - 1)) \\ &= (6n + 9)m \end{aligned}$$

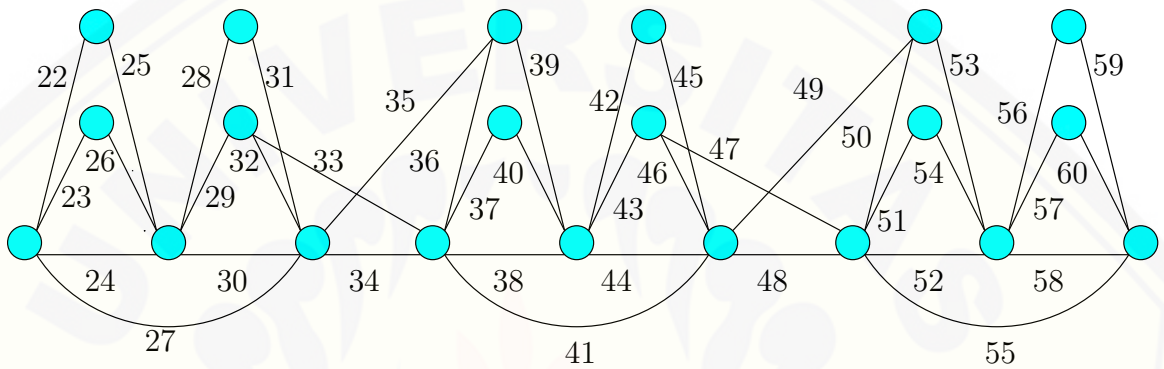
Berdasarkan hasil diatas, dapat dilihat bahwa setiap bobot sisi nilainya $(6n + 9)m$. Sehingga himpunan bobot sisi untuk W_{f_2} dapat ditulis $W_{f_2} = \{(6n + 9)m, (6n + 9)m, \dots, (6n + 9)m\}$. Dapat disimpulkan bahwa graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ dengan $m, n \geq 1$, mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan $a = (6n + 9)m$ dan $d = 0$, dengan kata lain graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ mempunyai pelabelan total super $((6n+9)m, 0)$ -sisi antimagic. Gambar 4.9 merupakan contoh pelabelan total super $((6n + 9)m, 0)$ -sisi antimagic pada graf *Crown String* $Cs_{3,2}$.

Kasus 2 ($d = 2$)

Untuk mencari pelabelan sisi untuk $d = 2$ menggunakan hasil pelabelan sisi dari $d = 0$ dan menggunakan jumlah sisi dan jumlah titik. Sebagai berikut : $f_3(E) = 2|V| + |E| + 1 - f_2(E)$. Jadi dengan rumus tersebut berlaku untuk semua label sisi $d = 2$ dengan mensubstitusikan nilai $f_2(E)$ yang sesuai. Berikut hasil fungsi label sisi untuk $d = 2$. (lihat gambar 4.5 sebagai ilustrasi cara melabeli sisi $d=2$)

$$\begin{aligned}
 f_3(y_j y_{j,k}) &= (2n + 3)m + (2n + 3)(j - 1) + n - k + 1; \\
 &\quad \text{jika } 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq 2m, \text{ dan } j \text{ ganjil} \\
 f_3(x_i y_{2i-1}) &= (2n + 3)m + (4n + 6)(i - 1) + n + 1; \\
 &\quad \text{jika } 1 \leq i \leq m \\
 f_3(x_i y_{2i-1,k}) &= (2n + 3)m + (4n + 6)(i - 1) + 2n - k + 2; \\
 &\quad \text{jika } 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n \\
 f_3(y_j y_{j+1}) &= (2n + 3)m + (2n + 3)j - 1, \\
 &\quad \text{jika } 1 \leq j \leq 2m - 1 \\
 f_3(x_i y_{2i,k}) &= (2n + 3)m + (4n + 6)i - n - k - 3, \\
 &\quad \text{jika } 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n \\
 f_3(x_i y_{2i}) &= (2n + 3)m + (4n + 6)i - n - 3, \\
 &\quad \text{jika } 1 \leq i \leq m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_3(y_j y_{j,k}) &= (2n + 3)m + (2n + 3)j - k - 2, \\
 &\text{jika } 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq 2m, \text{ dan } j \text{ genap} \\
 f_3(y_j y_{j-1,1}) &= (2n + 3)m + (2n + 3)(j - 1) - 2, \\
 &\text{jika } 3 \leq j \leq 2m - 1, \text{ dan } j \text{ ganjil} \\
 f_3(y_j y_{j+1,n}) &= (2n + 3)m + (2n + 3)j, \\
 &\text{jika } 2 \leq j \leq 2m - 2, \text{ dan } j \text{ genap}
 \end{aligned}$$



Gambar 4.5 Label sisi $d=2$

Untuk mencari bobot total $d = 2$ dengan menjumlahkan bobot sisi dan fungsi label sisi $d = 2$ atau dituliskan sebagai $W_{f_3} = w_{f_2} + 2|V| + |E| + 1 - f_2(E)$. Dengan mensubstitusikan nilai f_3 yang sesuai. Sehingga dapat diperoleh bobot total sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= \{w_{f_2} + f_3(y_j x_{j,k})\}; \text{ jika } 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq 2m, \text{ dan } j \text{ ganjil} \\ &= (2n + 3)m + (4n + 6)j - 2n - 2k - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= \{w_{f_2} + f_3(x_i y_j)\}; \text{ jika } 1 \leq i \leq m, j = 2i - 1 \\ &= (2n + 3)m + (4n + 6)2i - (4n + 6) - 2n - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= \{w_{f_2} + f_3(x_1 y_{j,k})\}; \text{ jika } 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n, j = 2i - 1 \\ &= (2n + 3)m + (4n + 6)2i - (4n + 6) - 2k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= \{w_{f_2} + f_3(y_j y_{j+1})\}; \text{ jika } 1 \leq j \leq 2m - 1 \\ &= (2n + 3)m + (4n + 6)j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= \{w_{f_2} + f_3(x_i y_{j,k})\}; \text{ jika } 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n, j = 2i \\ &= (2n + 3)m + (4n + 6)2i - 2n - 2k - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= \{w_{f_2} + f_3(x_i y_j)\}; \text{ jika } 1 \leq i \leq m, j = 2i \\ &= (2n + 3)m + (4n + 6)2i - 2n - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= \{w_{f_2} + f_3(y_j y_{j,k})\}; \text{ jika } 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq 2m, \text{ dan } j \text{ genap} \\ &= (2n + 3)m + (4n + 6)j - 2k - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= \{w_{f_2} + f_3(y_j y_{j-1,l})\}; \text{ jika } 3 \leq j \leq 2m - 1, \text{ dan } j \text{ ganjil} \\ &= (2n + 3)m + (4n + 6)(j - 1) - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= \{w_{f_2} + f_3(y_j y_{j+1,n})\}; \text{ jika } 2 \leq j \leq 2m - 2, \text{ dan } j \text{ genap} \\ &= (2n + 3)m + (4n + 6)j + 2 \end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot sisi W_{f_3} , dapat dilihat bahwa bobot sisi terkecil didefinisikan oleh $w_{f_3}(y_j y_{j,k})$ untuk $j = 1$ dan $k = n$ dengan nilai $(2n + 3)m + 4$, dan bobot sisi terkecil kedua didefinisikan oleh $w_{f_3}(y_j y_{j,k})$ untuk $j = 1$ dan $k = n - 1$ dengan nilai $W_{f_3} = (2n + 3)m + 6$, sedangkan bobot sisi terbesar didefinisikan oleh $w_{f_3}(y_j y_{j,k})$ untuk $j = 2m$ dan $k = 1$ dengan nilai $(10n + 15)m - 4$. Sehingga dinyatakan W_{f_3} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $a = (2n + 3)m + 4$ dan $beda(b) = 2$ yaitu $w_{f_3} = \{(2n + 3)m + 4, (2n + 3)m + 6,$

$\dots, (10n + 15)m - 4\}$. Dapat disimpulkan bahwa graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ dengan $m, n \geq 1$ mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan $a = (2n + 3)m + 4$ dan $d = 2$, dengan kata lain graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ mempunyai pelabelan total super $((2n + 3)m + 4, 2)$ -sisi antimagic. Gambar ?? merupakan contoh pelabelan total super $((2n + 3)m + 4, 2)$ pada graf *Crown String* $Cs_{3,2}$.

Teorema 4.2.2. *Ada pelabelan total super $((4n + 6)m + 2, 1)$ -sisi antimagic pada graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ jika $m, n \geq 1$, m genap.*

Bukti. Gunakan pelabelan titik f_1 untuk melabeli titik graf *Crown String* $Cs_{m,n}$, kemudian definisikan label sisi $f_4 : E(Cs_{m,n}) \rightarrow \{(2n+3)m+1, (2n+3)m+2, \dots, (6n+9)m-3\}$, sehingga label sisi f_4 untuk pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic pada graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_4(y_j y_{j+1}) &= (2n + 3)j + 1; && \text{jika } m \leq j \leq 2m - 1 \\
 f_4(y_j y_{j+1, n}) &= (2n + 3)j + 2; && \text{jika } m \leq j \leq 2m - 2, \quad j \text{ genap} \\
 f_4(y_j y_{j, k}) &= (2n + 3)j - n - k; && \text{jika } 1 \leq k \leq n, \quad m + 1 \leq j \leq 2m - 1, \\
 &&& \quad j \text{ ganjil} \\
 f_4(x_i y_j) &= (4n + 6)i - 3n - 3; && \text{jika } \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m, \quad m + 1 \leq j \leq \\
 &&& \quad 2m - 1, \quad j \text{ ganjil} \\
 f_4(x_i y_{j, k}) &= (4n + 6)i - 2n - k - 2; && \text{jika } 1 \leq k \leq n, \quad \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m, \\
 &&& \quad m + 1 \leq j \leq 2m - 1, \quad j \text{ ganjil} \\
 f_4(x_i y_{j, k}) &= (4n + 6)i - n - k - 1; && \text{jika } 1 \leq k \leq n, \quad \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m, \\
 &&& \quad m + 1 \leq j \leq 2m - 1, \quad j \text{ genap} \\
 f_4(x_i y_j), &= (4n + 6)i - n - 1; && \text{jika } \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m, \quad m + 1 \leq j \leq \\
 &&& \quad 2m - 1, \quad j \text{ genap} \\
 f_4(y_j y_{j, k}) &= (2n + 3)j - k; && \text{jika } 1 \leq k \leq n, \quad m + 2 \leq j \leq 2m, \\
 &&& \quad j \text{ genap}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_4(y_j y_{j-1,1}) &= (2n+3)j - 2n - 3; \\
 &\quad \text{jika } m+3 \leq j \leq 2m-2, \quad j \text{ ganjil} \\
 f_4(y_j y_{j,k}) &= (4n+6)m + (2n+3)j - n - k - 3; \\
 &\quad \text{jika } 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq j \leq m-1, \quad j \text{ ganjil} \\
 f_4(x_i y_j), &= (4n+6)m + (4n+6)i - 3n - 6; \\
 &\quad \text{jika } 1 \leq i \leq \frac{m}{2}, \quad 1 \leq j \leq m-1, \quad j \text{ ganjil} \\
 f_4(x_i y_{j,k}) &= (4n+6)m + (4n+6)i - 2n - k - 5; \\
 &\quad \text{jika } 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq i \leq \frac{m}{2}, \quad 1 \leq j \leq m-1, \quad j \text{ ganjil} \\
 f_4(y_j y_{j+1}) &= (4n+6)m + (2n+3)j - 2; \\
 &\quad \text{jika } 1 \leq j \leq m-1 \\
 f_4(x_i y_{j,k}) &= (4n+6)m + (4n+6)i - n - k - 4; \\
 &\quad \text{jika } 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq i \leq \frac{m}{2}, \quad 1 \leq j \leq m-1, \quad j \text{ genap} \\
 f_4(x_i y_j) &= (4n+6)m + (4n+6)i - n - 4; \\
 &\quad \text{jika } 1 \leq i \leq \frac{m}{2}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad j \text{ genap} \\
 f_4(y_j y_{j,k}) &= (4n+6)m + (2n+3)j - k - 3; \\
 &\quad \text{jika } 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq j \leq m, \quad j \text{ genap} \\
 f_4(y_j y_{j-1,1}) &= (4n+6)m + (2n+3)j - 2n - 6; \\
 &\quad \text{jika } 3 \leq j \leq m+1, \quad j \text{ ganjil} \\
 f_4(y_j y_{j+1,n}) &= (4n+6)m + (2n+3)j - 1; \\
 &\quad \text{jika } 2 \leq j \leq m-2, \quad j \text{ genap}
 \end{aligned}$$

Jika W_{f_4} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total, berdasarkan pelabelan f_4 maka W_{f_4} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL w_{f_1} dan rumus label sisi f_4 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_4} &= \{w_{f_3} + f_4(y_j y_{j+1})\}; \text{jika } m \leq j \leq 2m - 1 \\ &= ((2n + 3)j + 1) + ((2n + 3)j + 1) \\ &= (4n + 6)j + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= \{w_{f_4} + f_4(y_j y_{j+1,n})\}; \text{jika } m \leq j \leq 2m - 2, \quad j \text{ genap} \\ &= ((2n + 3)j + 2) + ((2n + 3)j + 2) \\ &= (4n + 6)j + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_4} &= \{w_{f_3} + f_4(y_j y_{j,k})\}; \text{jika } 1 \leq k \leq n, \quad m + 1 \leq j \leq 2m - 1, \\ &\quad j \text{ ganjil} \\ &= ((2n + 3)j - n - k) + ((2n + 3)j - n - k) \\ &= (4n + 6)j - 2n - 2k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= \{w_{f_4} + f_4(x_i y_j)\}; \text{jika } \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m, \quad m + 1 \leq j \leq 2m - 1, \\ &\quad j \text{ ganjil} \\ &= ((4n + 6)i - 3n - 3) + ((4n + 6)i - 3n - 3) \\ &= (4n + 6)2i - 6n - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= \{w_{f_4} + f_4(x_i y_{j,k})\}; \text{jika } 1 \leq k \leq n, \quad \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m, \quad m + 1 \leq j \leq 2m - 1, \\ &\quad j \text{ ganjil} \\ &= ((4n + 6)i - 2n - k - 2) + ((4n + 6)i - 2n - k - 2) \\ &= (4n + 6)2i - 4n - 2k - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_4} &= \{w_{f_3} + f_4(x_i y_{j,k})\}; \text{jika } 1 \leq k \leq n, \quad \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m, \quad m + 1 \leq j \leq 2m - 1, \\ &\quad j \text{ genap} \\ &= ((4n + 6)i - n - k - 1) + ((4n + 6)i - n - k - 1) \\ &= (4n + 6)2i - 2n - 2k - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_4} &= \{w_{f_3} + f_4(x_i y_j)\}; \text{jika } \frac{m}{2} + 1 \leq i \leq m, \quad m + 1 \leq j \leq 2m - 1, \\ &\quad j \text{ genap} \\ &= ((4n + 6)i - n - 1) + ((4n + 6)i - n - 1) \\ &= (4n + 6)2i - 2n - 2 \end{aligned}$$

$$W_{f_4} = \{w_{f_3} + f_4(y_j y_{j,k})\}; \text{ jika } 1 \leq k \leq n, m+2 \leq j \leq 2m, \\ j \text{ genap}$$

$$= ((2n+3)j - k) + ((2n+3)j - k)$$

$$= (4n+6)j - 2k$$

$$W_{f_4} = \{w_{f_3} + f_4(y_j y_{j-1,1})\}; \text{ jika } m+3 \leq j \leq 2m-2, j \text{ ganjil}$$

$$= ((2n+3)j - 2n - 3) + ((2n+3)j - 2n - 3)$$

$$= (4n+6)j - 4n - 6$$

$$W_{f_4} = \{w_{f_3} + f_4(y_j y_{j,k})\}; \text{ jika } 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m-1, \\ j \text{ ganjil}$$

$$= ((2n+3)j - n - k) + ((4n+6)m + (2n+3)j - n - k - 3)$$

$$= (4n+6)m + (4n+6)j - 2n - 2k - 3$$

$$W_{f_4} = \{w_{f_3} + f_4(x_i y_j)\}; \text{ jika } 1 \leq i \leq \frac{m}{2}, 1 \leq j \leq m-1, \\ j \text{ ganjil}$$

$$= ((4n+6)i - 3n - 3) + ((4n+6)m + (4n+6)i - 3n - 6)$$

$$= (4n+6)m + (4n+6)2i - 6n - 9$$

$$W_{f_4} = \{w_{f_3} + f_4(x_i y_{j,k})\}; \text{ jika } 1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq \frac{m}{2}, 1 \leq j \leq m-1, \\ j \text{ ganjil}$$

$$= ((4n+6)i - 2n - k - 2) + ((4n+6)m + (4n+6)i - 2n - k - 5)$$

$$= (4n+6)m + (4n+6)2i - 4n - 2k - 7$$

$$W_{f_4} = \{w_{f_3} + f_4(y_j y_{j+1})\}; \text{ jika } 1 \leq j \leq m-1$$

$$= ((2n+3)j + 1) + ((4n+6)m + c)$$

$$= (4n+6)m + (4n+6)j - 1$$

$$\begin{aligned}
 W_{f_4} &= \{w_{f_3} + f_4(x_i y_{j,k})\}; \text{ jika } 1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq \frac{m}{2}, \\
 &\quad 1 \leq j \leq m-1, \quad j \text{ genap} \\
 &= ((4n+6)i - n - k - 1) + ((4n+6)m + (4n+6)i - n - k - 4) \\
 &= (4n+6)m + (4n+6)2i - 2n - 2k - 5 \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_3} + f_4(x_i y_j)\}; \text{ jika } 1 \leq i \leq \frac{m}{2}, \\
 &\quad 1 \leq j \leq m, \quad j \text{ genap} \\
 &= ((4n+6)i - n - 1) + ((4n+6)m + (4n+6)i - n - 4) \\
 &= (4n+6)m + (4n+6)2i - 2n - 5 \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_3} + f_4(y_j y_{j,k})\}; \text{ jika } 1 \leq k \leq n, \\
 &\quad 1 \leq j \leq m, \quad j \text{ genap} \\
 &= ((2n+3)j - k) + ((4n+6)m + (2n+3)j - k - 3) \\
 &= (4n+6)m + (4n+6)j - 2k - 3 \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_3} + f_4(y_j y_{j-1,1})\}; \text{ jika } 3 \leq j \leq m+1, \quad j \text{ ganjil} \\
 &= ((2n+3)j - 2n - 3) + ((4n+6)m + (2n+3)j - 2n - 6) \\
 &= (4n+6)m + (4n+6)j - 4n - 9 \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_3} + f_4(y_j y_{j+1,n})\}; \text{ jika } 2 \leq j \leq m-2, \quad j \text{ genap} \\
 &= ((2n+3)j + 2) + ((4n+6)m + (2n+3)j - 1) \\
 &= (4n+6)m + (4n+6)j + 1
 \end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot sisi w_{f_4} dapat diperhatikan bahwa bobot sisi terkecil terdefiniskan oleh $w_{f_4}(y_j x_{j+1})$ yaitu $(4n+6)j + 2$ dengan $j = m$, dan bobot sisi terbesar terletak pada $w_{f_4}(y_j y_{j-1,1}) = (4n+6)m + (4n+6)j - 4n - 9$ dengan $j = m+1$. Jika nilai tiap batas rumusan bobot definisi w_{f_4} disubstitusikan dengan tepat, maka akan diperoleh sebuah barisan bilangan yang membentuk deret aritmatika dengan suku awal $(4n+6)m + 2$. Beda setiap barisan tersebut adalah 1, sehingga dapat ditulis dalam himpunan $w_{f_4} = \{(4n+6)m+2, (4n+6)m+3, \dots, (4n+6)2m-3\}$. Dengan kata lain graf *Crown String* $C_{S_{m,n}}$ mempunyai pelabelan total super $((4n+6)m+2, 1)$ -sisi antimagic.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ mempunyai pelabelan total super $((4n + 6)m + 2, 1)$ -antimagic menggunakan lemma yang disajikan pada bab 2. Lemma yang digunakan penulis adalah lemma yang dikembangkan oleh Dafik, Robiyatul pada tahun 2014.

Bukti ini didasarkan pada lema untuk mendapatkan barisan bilangan berurutan dengan beda 1 dari sebuah permutasi $\Pi(\Psi)$ dan himpunan bilangan berurutan Ψ .

Selanjutnya, sebagai alternatif pembuktian dari teorema 4.2.2, peneliti akan menggunakan lemma yang telah dijelaskan di bab 2 .

Bukti. Berdasarkan lemma 4.2.1 bahwa graf *Crown String* memiliki pelabelan $(3, 1)$ -EAV. Hal ini berarti graf $Cs_{m,n}$ memiliki himpunan bobot sisi yang dinyatakan dalam $\{3, 4, 5, \dots, 8mn + 12m - 3\}$, dengan kata lain graf $Cs_{m,n}$ memiliki sebuah barisan bobot sisi dengan nilai awal $a = 3$ dan beda tiap sukunya adalah 1. Jika dimisalkan barisan bobot sisi $Cs_{m,n}$ dinyatakan dalam $\Upsilon = \{c, c+1, c+2, \dots, c+k\}$ maka diperoleh nilai $c = 3$ dan $k = q - 1 = 8mn + 12m - 4$. Berdasarkan lemma pada bab 2, $\Pi(\Upsilon)$ adalah permutasi nilai Υ sedemikian hingga nilai $\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta)$ adalah bobot total dari fungsi tersebut.

$$\begin{aligned}\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= a \\ c + (c + 1 + \frac{k}{2} - 1) + \eta &= 4mn + 6m + 2 \\ 2c + \frac{k}{2} + \eta &= 4mn + 6m + 2 \\ 6 + \frac{k}{2} + \eta &= 4mn + 6m + 2 \\ \eta &= 4mn + 6m - 4 - \frac{k}{2}\end{aligned}$$

Maka $\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta)$ adalah bobot total dari fungsi tersebut. Pembuktian lemma pada bab 2 telah menyebutkan bobot total terkecil terletak pada $i = 1$

sehingga:

$$\begin{aligned}\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= c + (c + i + \frac{k}{2} - 1 + 4mn + 6m - 4 - \frac{k}{2}) \\ &= 2c + \frac{k}{2} + 4mn + 6m - 4 - \frac{k}{2} \\ &= 4mn + 6m + 2\end{aligned}$$

bobot total terkecil kedua terletak di $i = \frac{k}{2} + 2$:

$$\begin{aligned}\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= c + \frac{k}{2} + 1 + c + i - \frac{k}{2} - 2 + 4mn + 6m - 4 - \frac{k}{2} \\ &= 2c + 1 + \frac{k}{2} + 4mn + 6m - 4 - \frac{k}{2} \\ &= 4mn + 6m + 3\end{aligned}$$

dan seterusnya, hingga bobot total terbesar terletak di $i = \frac{k}{2} + 1$:

$$\begin{aligned}\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= c + c + i - 1 + 8mn + 12m - 9 - \frac{k}{2} \\ &= 2c + \frac{k}{2} + 1 - 1 + 8mn + 12m - 9 - \frac{k}{2} \\ &= 2c - 8mn + 12m - 9 \\ &= 8mn + 12m - 3\end{aligned}$$

Nilai yang diperoleh dari perhitungan berdasarkan lemma yang telah dibuktikan pada bab 2 dengan bobot terkecil adalah $4mn+6m+2$ dan bobot terbesar adalah $8mn+12m-3$ sesuai dengan nilai yang terdapat pada teorema 4.2.2.

Berdasarkan perhitungan yang telah dituliskan, diketahui bahwa nilai $\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta)$ dapat dinyatakan dalam himpunan $\{4mn+6m+2, 4mn+6m+3, 4mn+6m+4, \dots, 8mn+12m-3\}$. Sehingga terbukti bahwa graf $C_{S_{m,n}}$ memiliki pelabelan $((4n+6)m+2, 1)$ -super sisi antimagic untuk $m, n \geq 1$, m genap. \square

4.3 Gabungan graf *Crown String* $C_{s_{m,n}}$

Selanjutnya peneliti melakukan penelitian untuk gabungan graf *Crown String* $C_{s_{m,n}}$. Penelitian ini merupakan pengembangan dari graf *Crown String* tunggal. Gabungan graf *Crown String* didefinisikan sebagai graf *Crown String* dengan salinan sebanyak p , p ganjil. Gabungan graf *Crown String* $C_{s_{m,n}}$ dinotasikan dengan $pC_{s_{m,n}}$ yang merupakan gabungan saling lepas *Crown String* sebanyak p . Berikut himpunan titik dan sisi $pC_{s_{m,n}}$. Gambar 4.6 merupakan contoh dari graf $3C_{s_{3,2}}$

$$V = \{x_i^c, y_j^c, y_{j,k}^c; 3 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2m, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p\}$$

$$E = \{y_j^c y_{j+1}^c; 1 \leq j \leq 2m-1, 1 \leq c \leq p\} \cup \{y_j^c y_{j,k}^c; 1 \leq j \leq 2m, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p\} \cup \{x_i^c y_j^c; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2m, 1 \leq c \leq p\} \cup \{x_i^c, y_j^c; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2m, 1 \leq c \leq p\} \cup \{x_i^c, y_{j,k}^c; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p\} \cup \{x_i^c, y_{j,k}^c; 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p\} \cup \{y_j^c y_{j+1,n}^c; 2 \leq j \leq 2m-2, 1 \leq c \leq p\} \cup \{y_j^c y_{j-1,1}^c; 3 \leq j \leq 2m-1, 1 \leq c \leq p\}$$

4.3.1 Jumlah Titik dan Sisi pada Gabungan graf *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$

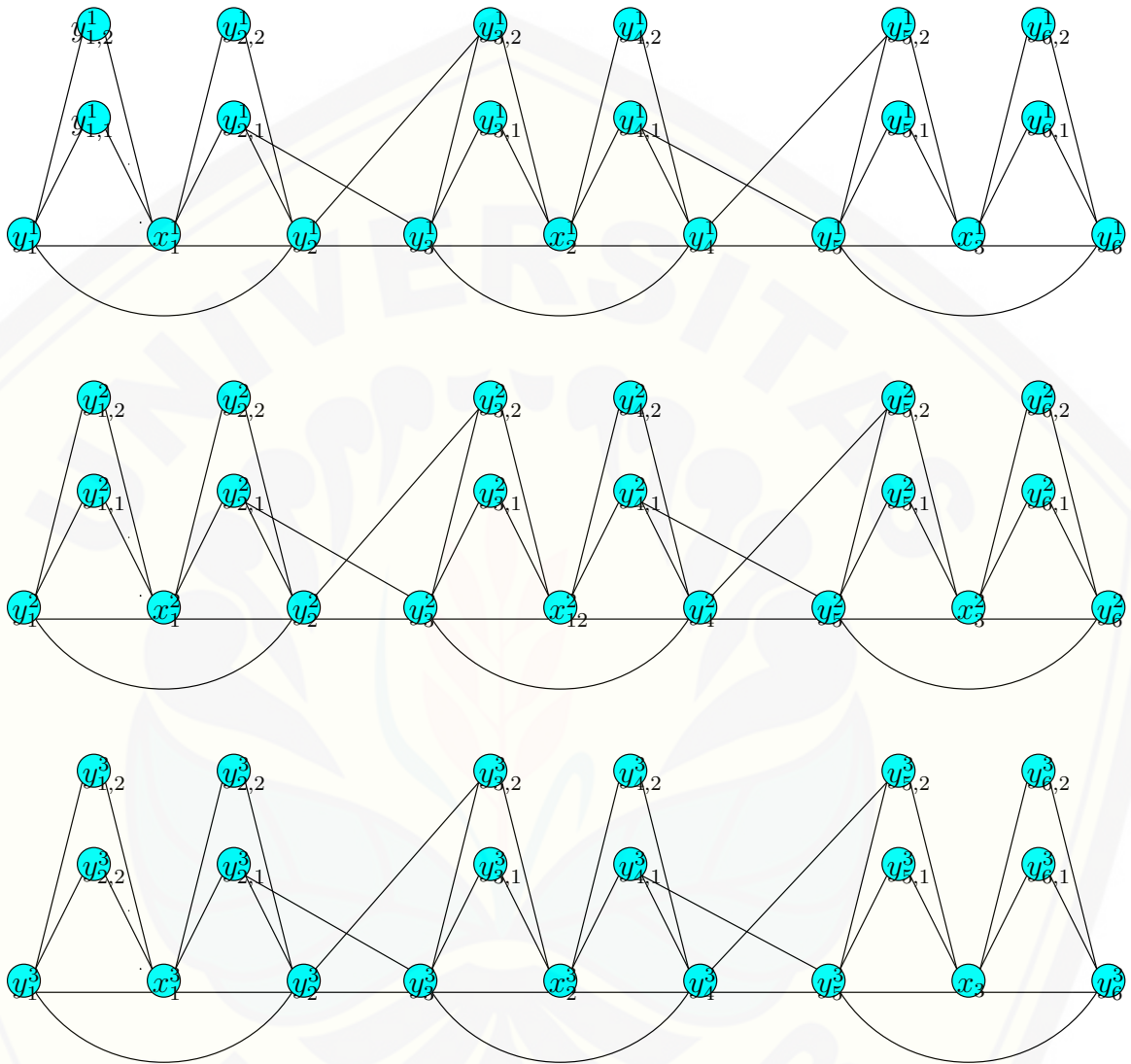
Sama halnya graf *Crown String* tunggal, untuk menentukan batas atas d pada gabungan graf *Crown String*, perlu diketahui pula rumusan jumlah titik (p) dan jumlah sisi (q) pada gabungan graf *Crown String*.

Jumlah titik dan jumlah sisi pada $pC_{s_{m,n}}$ dapat ditentukan dengan terlebih dahulu mencermati definisi pada suatu graf gabungan. Gabungan sebanyak p graf *Crown String* $C_{s_{m,n}}$ yang dinotasikan $pC_{s_{m,n}}$ didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari p buah graf $C_{s_{m,n}}$ dengan $1 \leq c \leq p$, p ganjil ditulis: $C_{s_{m,n}}^1 \cup C_{s_{m,n}}^2 \cup C_{s_{m,n}}^3 \cup \dots \cup C_{s_{m,n}}^c$. Sehingga jumlah titik graf $pC_{s_{m,n}}$ adalah p kali jumlah titik graf $C_{s_{m,n}}$. Misalkan p_1 adalah jumlah titik graf *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$

$$p_1 = p.(2mn + 3m) \Leftrightarrow p_1 = 2mnp + 3mp$$

Sedangkan jumlah sisi graf $pC_{s_{m,n}}$ adalah p kali jumlah sisi graf $C_{s_{m,n}}$. dan q_1 adalah jumlah sisi graf $pC_{s_{m,n}}$ dituliskan dengan

$$q_1 = p.(4mn + 6m - 3) \Leftrightarrow q_1 = 4mnp + 6mp - 3p.$$



Gambar 4.6 Graf $3Cs_{3,2}$

4.3.2 Batas Atas d gabungan graf *Crown String* $pCs_{m,n}$

Batas atas d gabungan graf *Crown String* $pCs_{m,n}$ juga dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 2.7.1. Diketahui jumlah titik pada graf $pCs_{m,n}$ adalah $p_1 = 2mnp + 3mp$ dan jumlah sisi $q_1 = 4mnp + 6mp - 3p$. Dengan demikian batas atas nilai beda d tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{2p_1 + q_1 - 5}{q_1 - 1} \\
 &= \frac{2(2mnp + 3mp) + (4mnp + 6mp - 3p) - 5}{(4mnp + 6mp - 3p) - 1} \\
 &= \frac{4mnp + 6mp + 4mnp + 6mp - 3p - 5}{4mnp + 6mp - 3p - 1} \\
 &= \frac{8mnp + 12mp - 3p - 5}{4mnp + 6mp - 3p - 1} \\
 &= 2 + \frac{3p - 3}{4mnp + 6mp - 3p - 1} \\
 &\leq 2
 \end{aligned}$$

Sesuai dengan pelabelan *SEAT* pada graf *Crown String* tunggal, gabungan graf *Crown String* juga menggunakan bilangan bulat positif, sehingga nilai $d \geq 0$ dan d adalah bilangan bulat. Dengan demikian dapat disimpulkan $d \in \{0, 1, 2\}$. Selanjutnya akan ditentukan fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic sesuai dengan nilai d yang telah ditetapkan.

4.4 Pelabelan Total Super (a, d) -sisi Antimagic pada Gabungan Graf *Crown String* ($pCs_{m,n}$)

Metode dalam menemukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf $Cs_{m,n}$ sama dengan metode yang digunakan pada Graf *Crown String* tunggal yakni dengan diawali pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas i, j, k, p yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Setelah

fungsi bijektif diketahui maka harus dibuktikan secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari lema atau teorema. Perlu diketahui bahwa lema dan teorema dalam penelitian ini adalah bukan lema atau teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika (lihat lampiran sebagai contoh), akan diperoleh beberapa lema, teorema. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Setelah mengetahui batas atas nilai d , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan terlebih dahulu menentukan pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Rem *Crown String*. Sekaligus menentukan fungsi bijektifnya melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika. Lema 4.4.1 adalah lema yang berkaitan dengan pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi Antimagic Gabungan Graf *Crown String*.

Lema 4.4.1. *Ada pelabelan titik $(\frac{3p+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan Graf *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$ jika p ganjil, $m \geq 3$, $n \geq 1$, m kelipatan 3.*

Bukti. Labeli titik gabungan graf *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$ dengan fungsi bijektif f_5 , untuk $1 \leq c \leq p$, definisikan pelabelan $f_5 : V(pC_{s_{m,n}}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2mnp + 3mp\}$ maka pelabelan f_5 dapat dituliskan sebagai berikut.

$$f_5(y_j^c) = \begin{cases} (\frac{j+5}{6} - 1)(6n + 9)p + c; \\ \text{untuk } j = 1 \text{ modulo } 6, 1 \leq c \leq p \\ (\frac{j+4}{6} - 1)(6n + 9)p + (2n + 2)p + \frac{p-1}{2} - \frac{c}{2} + 1; \\ \text{untuk } j = 2 \text{ modulo } 6, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ genap} \\ (\frac{j+4}{6} - 1)(6n + 9)p + (2n + 3)p - \frac{c+1}{2} + 1; \\ \text{untuk } j = 2 \text{ modulo } 6, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ ganjil} \\ (\frac{j+3}{6} - 1)(6n + 9)p + (2n + 3)p + \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1; \\ \text{untuk } j = 3 \text{ modulo } 6, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ ganjil} \\ (\frac{j+3}{6} - 1)(6n + 9)p + (2n + 4)p - \frac{c}{2} + 1; \\ \text{untuk } j = 3 \text{ modulo } 6, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ genap} \\ (\frac{j+2}{6} - 1)(6n + 9)p + (4n + 5)p + c; \\ \text{untuk } j = 4 \text{ modulo } 6, 1 \leq c \leq p \\ (\frac{j+1}{6} - 1)(6n + 9)p + (4n + 6)p + \frac{p-1}{2} - \frac{c}{2} + 1; \\ \text{untuk } j = 5 \text{ modulo } 6, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ genap} \\ (\frac{j+1}{6} - 1)(6n + 9)p + (4n + 7)p - \frac{c+1}{2} + 1; \\ \text{untuk } j = 5 \text{ modulo } 6, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ ganjil} \\ (\frac{j}{6} - 1)(6n + 9)p - p + \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1; \\ \text{untuk } j = 6 \text{ modulo } 6, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ ganjil} \\ (\frac{j}{6})(6n + 9)p - \frac{c}{2} + 1; \\ \text{untuk } j = 6 \text{ modulo } 6, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ genap} \end{cases}$$

$$f_5(y_{j,k}^c) = \left\{ \begin{array}{l} (\frac{j+5}{6} - 1)(6n + 9)p + (n - k)p + p + \frac{p-1}{2} - \frac{c}{2} + 1; \\ \text{untuk } j = 1 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ genap} \\ (\frac{j+5}{6} - 1)(6n + 9)p + (n - k)p + 2p - \frac{c+1}{2} + 1; \\ \text{untuk } j = 1 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ ganjil} \\ (\frac{j+4}{6} - 1)(6n + 9)p + (2n - k)p + 2p + c; \\ \text{untuk } j = 2 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p \\ (\frac{j+3}{6} - 1)(6n + 9)p + (3n - k)p + 4p + c; \\ \text{untuk } j = 3 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p \\ (\frac{j+2}{6} - 1)(6n + 9)p + (4n - k)p + 5p + \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1; \\ \text{untuk } j = 4 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ ganjil} \\ (\frac{j+2}{6} - 1)(6n + 9)p + (4n - k)p + 6p - \frac{c}{2} + 1; \\ \text{untuk } j = 4 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ genap} \\ (\frac{j+1}{6} - 1)(6n + 9)p + (5n - k)p + 7p + \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1; \\ \text{untuk } j = 5 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ ganjil} \\ (\frac{j+1}{6} - 1)(6n + 9)p + (5n - k)p + 8p - \frac{c}{2} + 1; \\ \text{untuk } j = 5 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ genap} \\ (\frac{j}{6} - 1)(6n + 9)p + (6n - k)p + 8p + \frac{p-1}{2} - \frac{c}{2} + 1; \\ \text{untuk } j = 6 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ genap} \\ (\frac{j}{6} - 1)(6n + 9)p + (6n - k)p + 9p - \frac{c+1}{2} + 1; \\ \text{untuk } j = 6 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ ganjil} \end{array} \right.$$

$$f_5(x_i^c) = \begin{cases} \left(\frac{i+2}{3} - 1 \right) (6n + 9)p + (n + 1)p + \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1; \\ \text{untuk } i = 1 \text{ modulo } 3, 1 \leq i \leq m, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ ganjil} \\ \left(\frac{i+2}{3} - 1 \right) (6n + 9)p + (n + 2)p - \frac{c}{2} + 1; \\ \text{untuk } i = 1 \text{ modulo } 3, 1 \leq i \leq m, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ genap} \\ \left(\frac{i+1}{3} - 1 \right) (6n + 9)p + (3n + 4)p + \frac{p-1}{2} - \frac{c}{2} + 1; \\ \text{untuk } i = 2 \text{ modulo } 3, 1 \leq i \leq m, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ genap} \\ \left(\frac{i+1}{3} - 1 \right) (6n + 9)p + (3n + 5)p - \frac{c+1}{2} + 1; \\ \text{untuk } i = 2 \text{ modulo } 3, 1 \leq i \leq m, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ ganjil} \\ \left(\frac{i}{3} - 1 \right) (6n + 9)p + (5n + 7)p + c; \\ \text{untuk } i = 3 \text{ modulo } 3, 1 \leq i \leq m, 1 \leq c \leq p \end{cases}$$

Pelabelan titik f_5 tersebut merupakan sebuah fungsi bijektif. Jika w_{f_5} merupakan bobot sisi berdasarkan pelabelan titik f_5 dimana bobot sisi pelabelan titik diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang bersisian pada $pC_{s_{m,n}}$. Berikut bobot sisi dari gabungan graf *Crown String*:

Bobot pada sisi $y_j^c y_{j,k}^c$

$$\begin{aligned} w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) &= \left(\frac{j+5}{6} - 1 \right) (6n + 9)2p + (n - k)p + p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1; \\ &\text{untuk } j = 1 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ genap} \\ w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) &= \left(\frac{j+5}{6} - 1 \right) (6n + 9)2p + (n - k)p + 2p + \frac{c+1}{2}; \\ &\text{untuk } j = 1 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ ganjil} \\ w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) &= \left(\frac{j+4}{6} - 1 \right) (6n + 9)2p + (4n - k)p + 4p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1; \\ &\text{untuk } j = 2 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ genap} \\ w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) &= \left(\frac{j+4}{6} - 1 \right) (6n + 9)2p + (4n - k)p + 5p + \frac{c+1}{2}; \\ &\text{untuk } j = 2 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ ganjil} \\ w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) &= \left(\frac{j+3}{6} - 1 \right) (6n + 9)2p + (5n - k)p + 7p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2}; \\ &\text{untuk } j = 3 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ ganjil} \\ w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) &= \left(\frac{j+3}{6} - 1 \right) (6n + 9)2p + (5n - k)p + 8p + \frac{c}{2} + 1; \\ &\text{untuk } j = 3 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ genap} \\ w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) &= \left(\frac{j+2}{6} - 1 \right) (6n + 9)2p + (8n - k)p + 10p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2}; \\ &\text{untuk } j = 4 \text{ modulo } 6, 1 \leq k \leq n, 1 \leq c \leq p, \text{ dan } c \text{ ganjil} \end{aligned}$$

Bobot pada sisi $y_j^c y_{j,k}^c$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (8n-k)p + 11p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+1}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (9n-k)p + 14p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 5$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (12n-k)p + 17p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

Bobot sisi $x_i^c y_j^c$:

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (n+1)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (n+2)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (3n+4)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (5n+8)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (7n+9)p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (7n+10)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (9n+13)p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (9n+14)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (11n+15)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (11n+16)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

Bobot sisi $x_i^c y_{j,k}^c$:

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (2n - k)p + 3p + \frac{p+1}{2} - c + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (3n - k)p + 3p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (3n - k)p + 4p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (6n - k)p + 8p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (6n - k)p + 9p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (7n - k)p + 10p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (10n - k)p + 14p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (10n - k)p + 15p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (11n - k)p + 15p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (11n - k)p + 16p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Bobot sisi $y_j^c y_{j+1}^c$:

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (2n + 2)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c}{2};$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (2n + 3)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (4n + 6)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (6n + 8)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Bobot sisi $y_j^c y_{j+1}^c$:

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (6n+9)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (8n+11)p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (8n+12)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+1}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (10n+15)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 5$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (12n+17)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (12n+18)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganap

Bobot sisi $y_j^c y_{j-1,1}^c$:

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j-1,1}^c) = \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (4n+4)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j-1,1}^c) = \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (4n+5)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j-1,1}^c) = \left(\frac{j+1}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (8n+11)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 5$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j-1,1}^c) = \left(\frac{j-1}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (12n+16)p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 7$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j-1,1}^c) = \left(\frac{j-1}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (12n+17)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 7$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Bobot sisi $y_j^c y_{j+1,n}^c$:

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1,n}^c) = \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (4n + 6)p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1,n}^c) = \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (4n + 7)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1,n}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (8n + 12)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1,n}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (8n + 13)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1,n}^c) = \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (12n + 19)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

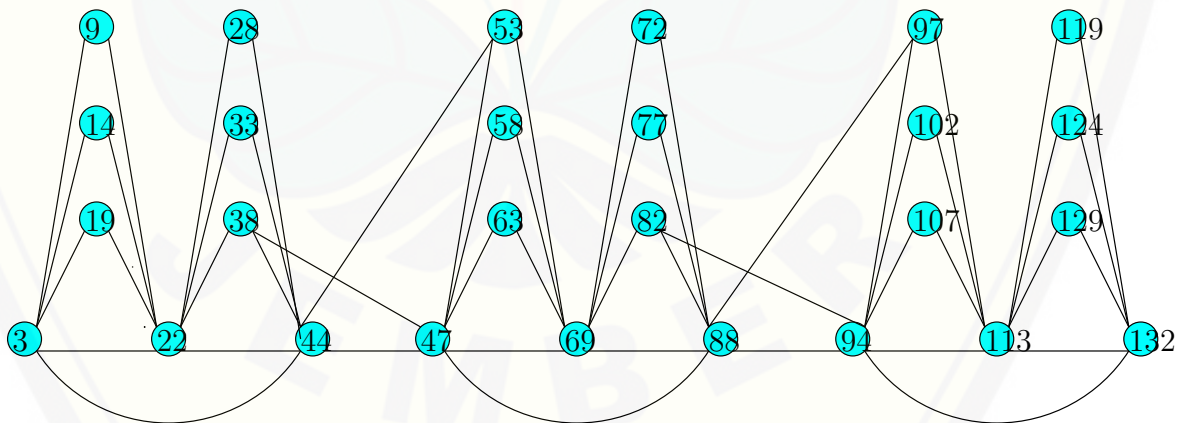
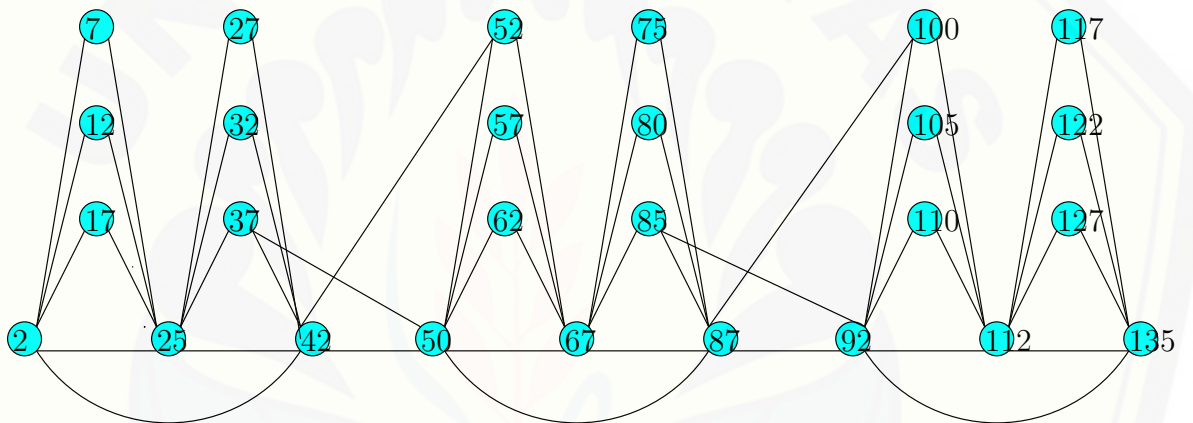
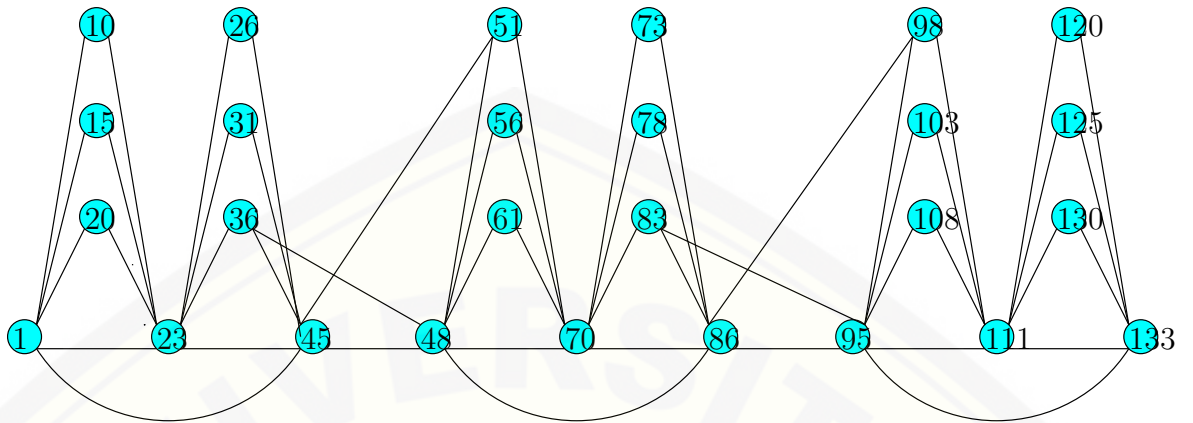
Berdasarkan bobot sisi yang didefinisikan diatas, bobot sisi terkecil terletak pada $w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c)$ untuk $c = 2$, $j = 1$ dan $k = n$. sedangkan bobot sisi terbesar terletak pada $w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c)$ ketika $c = 1$, $k = 1$, $j = 2m$. Dengan mensubstitusikan nilai batas pada tiap definisi rumusan yang diberikan maka didapatkan nilai-nilai berurutan yang akan membentuk himpunan $w_{f_5} = \left\{ \frac{3p+3}{2}, \frac{3p+3}{2} + 1, \dots, (4n + 6)mp - 2p + \frac{p-1}{2} + 1 \right\}$. Himpunan tersebut membentuk sebuah himpunan yang memiliki nilai awal $\frac{3p+3}{2}$ dan beda tiap elemennya adalah 1, sehingga dapat disimpulkan bahwa pelabelan f_5 adalah suatu pelabelan titik $(\frac{3p+3}{2}, 1)$ atau bisa dituliskan sebagai pelabelan titik $(\frac{3p+3}{2}, 1)$ sisi antimagic . \square

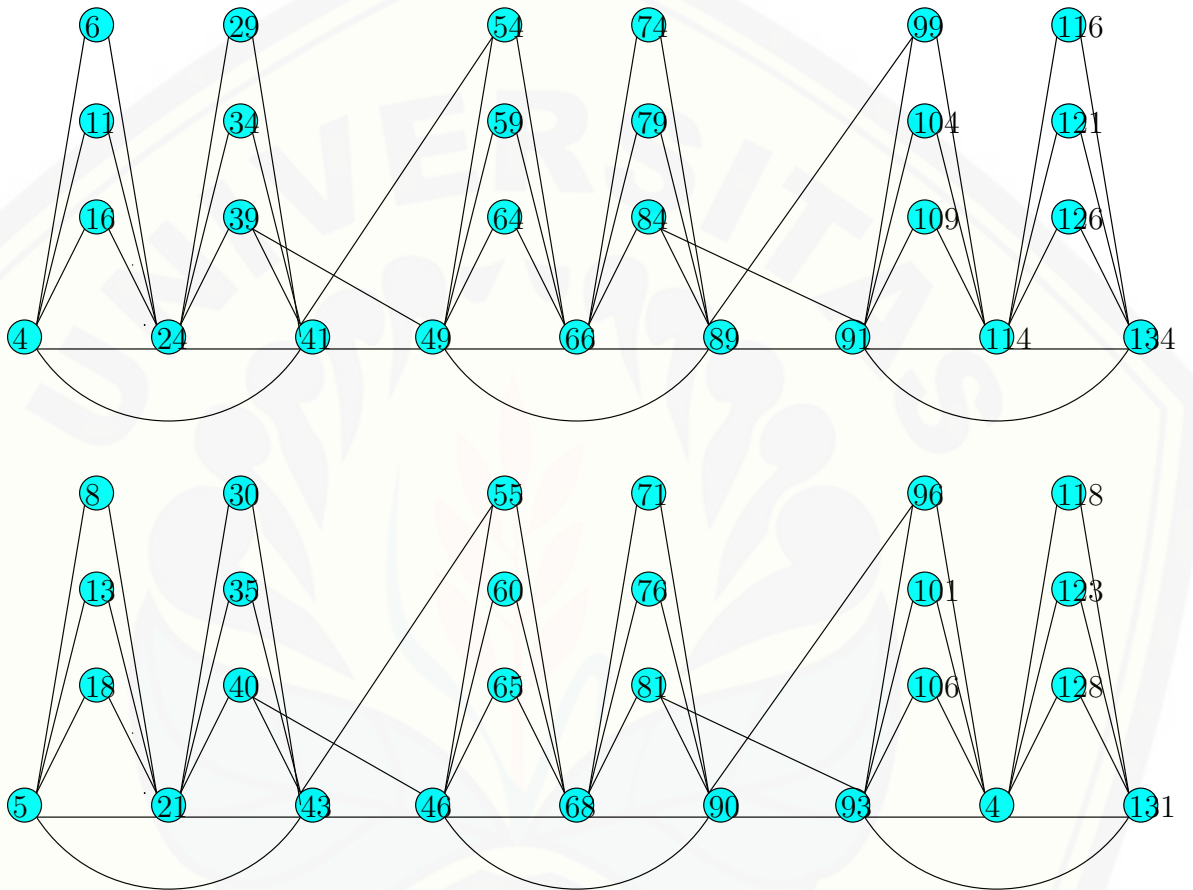
Gambar 4.7 merupakan contoh pelabelan titik beserta bobot sisi pelabelan total super $(\frac{3p+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic gabungan graf *Crown String* $5Cs_{3,2}$ dengan $d = 1$.

Teorema 4.4.1. *Ada pelabelan total super $((6n + 9)mp - 2p + \frac{p-1}{2} + 2, 0)$, dan $((2n + 3)mp + p + \frac{p-1}{2} + 3, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *Crown String* $pCs_{m,n}$ jika p ganjil, $m \geq 3$, $n \geq 1$, m kelipatan 3.*

Kasus 1 ($d = 0$)

Bukti. Labeli titik gabungan graf *Crown String* $pCs_{m,n}$ dengan definisikan label sisi $f_6 : E(pCs_{m,n}) \rightarrow \{(2n + 3)mp + 1, (2n + 3)mp + 2, \dots, (6n + 9)mp - 3p\}$, maka label sisi f_6 untuk pelabelan total super $((6n + 9)mp - 2p + \frac{p-1}{2} + 2, 0)$ -sisi





Gambar 4.7 Label Titik $5C_{s_{3,3}}$

antimagic pada graf $pC_{s_{m,n}}$ dapat dirumuskan sebagai berikut.

Label sisi $y_j^c y_{j,k}^c$

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (n + 2)p - \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (n + 3)p - \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p + \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (4n + 5)p - \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (4n + 6)p - \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p + \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_5(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (5n + 8)p - \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (5n + 9)p - \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (8n + 11)p - \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (8n + 12)p - \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + \frac{p-1}{2} + (k - 1)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (9n + 15)p - \left(\frac{j+1}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p + c;$$

untuk $j = 5$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (2n + 3)jp + (k - 1)p + c;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

Label sisi $x_i^c y_j^c$:

$$f_6(x_i^c y_{2i-1}^c) = (6n + 9)mp - (n + 3)p - \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(x_i^c y_{2i-1}^c) = (6n + 9)mp - (n + 4)p - \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(x_i^c y_{2i}^c) = (6n + 9)mp - (3n + 6)p - \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + c;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$

$$f_6(x_i^c y_{2i-1}^c) = (6n + 9)mp - (5n + 10)p - \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + c;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$

$$f_6(x_i^c y_{2i}^c) = (6n + 9)mp - (7n + 11)p - \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(x_i^c y_{2i}^c) = (6n + 9)mp - (7n + 12)p - \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(x_i^c y_{2i-1}^c) = (6n + 9)mp - (9n + 15)p - \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(x_i^c y_{2i-1}^c) = (6n + 9)mp - (9n + 16)p - \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(x_i^c y_{2i}^c) = (6n + 9)mp - (9n + 17)p - \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(x_i^c y_{2i}^c) = (6n + 9)mp - (9n + 18)p - \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

Label sisi $x_i^c y_{j,k}^c$:

$$f_6(x_i^c y_{2i-1,k}^c) = (6n+9)mp - (2n+4)p - \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (k-1)p + c;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

$$f_6(x_i^c y_{2i,k}^c) = (6n+9)mp - (3n+4)p - \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (k-1)p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(x_i^c y_{2i,k}^c) = (6n+9)mp - (3n+5)p - \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n+9)2p + \frac{p-1}{2} + (k-1)p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(x_i^c y_{2i-1,k}^c) = (6n+9)mp - (6n+9)p - \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (k-1)p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(x_i^c y_{2i-1,k}^c) = (6n+9)mp - (6n+10)p - \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n+9)2p + \frac{p+1}{2} + (k-1)p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(x_i^c y_{2i,k}^c) = (6n+9)mp - (7n+11)p - \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (k-1)p + c;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

$$f_6(x_i^c y_{2i-1,k}^c) = (6n+9)mp - (10n+15)p - \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (k-1)p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(x_i^c y_{2i-1,k}^c) = (6n+9)mp - (10n+16)p - \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n+9)2p + \frac{p+1}{2} + (k-1)p - \frac{c}{2} + 1;;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(x_i^c y_{2i,k}^c) = (6n+9)mp - (11n+16)p - \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (k-1)p - \frac{c}{2} + 1;;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(x_i^c y_{2i,k}^c) = (6n+9)mp - (11n+17)p - \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n+9)2p + (k-1)p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Label sisi $y_j^c y_{j+1}^c$:

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n+9)mp - (2n+4)p - \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n+9)2p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n+9)mp - (2n+5)p - \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n+9)2p + \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n+9)mp - (4n+8)p - \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n+9)2p + c;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n+9)mp - (6n+10)p - \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n+9)2p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Label sisi $y_j^c y_{j+1}^c$:

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n + 9)mp - (6n + 11)p - \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + \frac{p-1}{2} - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n + 9)mp - (8n + 13)p - \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c}{2} + 1$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n + 9)mp - (8n + 14)p - \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n + 9)mp - (10n + 17)p - \left(\frac{j+1}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + c;$$

untuk $j = 5$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n + 9)mp - (11n + 17)p - \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n + 9)mp - (11n + 17)p - \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

Label sisi $y_j^c y_{j+1,n}^c$:

$$f_6(y_j^c y_{j+1,n}^c) = (6n + 9)mp - (4n + 8)p - \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j+1,n}^c) = (6n + 9)mp - (4n + 9)p - \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j+1,n}^c) = (6n + 9)mp - (8n + 14)p - \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j+1,n}^c) = (6n + 9)mp - (8n + 15)p - \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{p-1}{2} - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j+1,n}^c) = (6n + 9)mp - (11n + 17)p - \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + c;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

Label sisi $y_j^c y_{j-1,1}^c$:

$$f_6(y_j^c y_{j-1,1}^c) = (6n + 9)mp - (4n + 6)p - \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j-1,1}^c) = (6n + 9)mp - (4n + 7)p - \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j-1,1}^c) = (6n + 9)mp - (8n + 13)p - \left(\frac{j+1}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + c;$$

untuk $j = 5$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

$$f_6(y_j^c y_{j-1,1}^c) = (6n + 9)mp - (11n + 17)p - \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + c;$$

untuk $j = 7$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j-1,1}^c) = (6n + 9)mp - (11n + 17)p - \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + c;$$

untuk $j = 7$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Jika W_{f_6} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total maka W_{f_6} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL $w_{f_5} = w_{f_6}$ dan rumus label sisi f_6 dengan syarat batas i, j dan c yang bersesuaian. Berikut rumus bobot sisi EAVL w_{f_6} :

Bobot pada sisi $y_j^c y_{j,k}^c$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (n - k)p + p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (n - k)p + 2p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (4n - k)p + 4p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (4n - k)p + 5p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (5n - k)p + 7p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (5n - k)p + 8p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (8n - k)p + 10p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Bobot pada sisi $y_j^c y_{j,k}^c$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (8n - k)p + 11p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+1}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (9n - k)p + 14p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 5$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (12n - k)p + 17p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

Bobot sisi $x_i^c y_j^c$:

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (n + 1)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (n + 2)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (3n + 4)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (5n + 8)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (7n + 9)p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganap

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (7n + 10)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (9n + 13)p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganap

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (9n + 14)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganap

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (11n + 15)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (11n + 16)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganap

Bobot sisi $x_i^c y_{j,k}^c$:

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (2n - k)p + 3p + \frac{p+1}{2} - c + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (3n - k)p + 3p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (3n - k)p + 4p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (6n - k)p + 8p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (6n - k)p + 9p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (7n - k)p + 10p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (10n - k)p + 14p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (10n - k)p + 15p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (11n - k)p + 15p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (11n - k)p + 16p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Bobot sisi $y_j^c y_{j+1}^c$:

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (2n + 2)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c}{2};$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (2n + 3)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (4n + 6)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (6n + 8)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Bobot sisi $y_j^c y_{j+1}^c$:

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (6n+9)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (8n+11)p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (8n+12)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+1}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (10n+15)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 5$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (12n+17)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (12n+18)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

Bobot sisi $y_j^c y_{j-1,1}^c$:

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j-1,1}^c) = \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (4n+4)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j-1,1}^c) = \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (4n+5)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j-1,1}^c) = \left(\frac{j+1}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (8n+11)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 5$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j-1,1}^c) = \left(\frac{j-1}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (12n+16)p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 7$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j-1,1}^c) = \left(\frac{j-1}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (12n+17)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 7$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Bobot sisi $y_j^c y_{j+1,n}^c$:

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1,n}^c) = \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (4n + 6)p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1,n}^c) = \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (4n + 7)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1,n}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (8n + 12)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1,n}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (8n + 13)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1,n}^c) = \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (12n + 19)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

Di dapat semua sisi memiliki bobot yang sama yaitu $(6n+9)mp - 2p + \frac{p-1}{2} + 2$, maka himpunan bobot sisi $W_{f_6} = \{ (6n+9)mp - 2p + \frac{p-1}{2} + 2, (6n+9)mp - 2p + \frac{p-1}{2} + 2, \dots, (6n+9)mp - 2p + \frac{p-1}{2} + 2 \}$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa gabungan graf *Crown String* $pCs_{m,n}$ dengan $m \geq 3$, $n \geq 1$ dan m kelipatan 3, p ganjil mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan $a = (6n + 9)mp - 2p + \frac{p-1}{2} + 2$ dan $d = 0$, atau gabungan graf *Crown String* $pCs_{m,n}$ mempunyai pelabelan total super $((6n+9)mp - 2p + \frac{p-1}{2} + 2, 0)$ -sisi antimagic jika $m \geq 3$, $n \geq 1$ dan m kelipatan 3, p ganjil.

Masalah 2 ($d = 2$)

Bukti. Gunakan pelabelan titik $f_7 = f_5$ untuk melabeli titik gabungan graf *Crown String* $pCs_{m,n}$, kemudian definisikan label sisi f_7 : $E(pCs_{m,n}) \rightarrow \{ (2n + 3)mp + 1, (2n + 3)mp + 2, \dots, (2n + 3)mp + (12n + 15)p \}$, sedemikian hingga label sisi f_7 untuk pelabelan total super $(a, 2)$ -sisi antimagic pada graf $pCs_{m,n}$, dapat dirumuskan sebagai berikut::

Label sisi $y_j^c y_{j,k}^c$

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (n + 2)p - \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (n + 3)p - \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p + \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (4n + 5)p - \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (4n + 6)p - \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p + \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_5(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (5n + 8)p - \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (5n + 9)p - \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (8n + 11)p - \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (8n + 12)p - \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + \frac{p-1}{2} + (k - 1)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (9n + 15)p - \left(\frac{j+1}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p + c;$$

untuk $j = 5$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

$$f_6(y_j^c y_{j,k}^c) = (6n + 9)mp - (2n + 3)jp + (k - 1)p + c;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

Label sisi $x_i^c y_j^c$:

$$f_6(x_i^c y_{2i-1}^c) = (6n + 9)mp - (n + 3)p - \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(x_i^c y_{2i-1}^c) = (6n + 9)mp - (n + 4)p - \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(x_i^c y_{2i}^c) = (6n + 9)mp - (3n + 6)p - \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + c;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$

$$f_6(x_i^c y_{2i-1}^c) = (6n + 9)mp - (5n + 10)p - \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + c;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$

$$f_6(x_i^c y_{2i}^c) = (6n + 9)mp - (7n + 11)p - \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(x_i^c y_{2i}^c) = (6n + 9)mp - (7n + 12)p - \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(x_i^c y_{2i-1}^c) = (6n + 9)mp - (9n + 15)p - \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(x_i^c y_{2i-1}^c) = (6n + 9)mp - (9n + 16)p - \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(x_i^c y_{2i}^c) = (6n + 9)mp - (9n + 17)p - \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(x_i^c y_{2i}^c) = (6n + 9)mp - (9n + 18)p - \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

Label sisi $x_i^c y_{j,k}^c$:

$$f_6(x_i^c y_{2i-1,k}^c) = (6n + 9)mp - (2n + 4)p - \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p + c;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

$$f_6(x_i^c y_{2i,k}^c) = (6n + 9)mp - (3n + 4)p - \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(x_i^c y_{2i,k}^c) = (6n + 9)mp - (3n + 5)p - \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + \frac{p-1}{2} + (k - 1)p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(x_i^c y_{2i-1,k}^c) = (6n + 9)mp - (6n + 9)p - \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(x_i^c y_{2i-1,k}^c) = (6n + 9)mp - (6n + 10)p - \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + \frac{p+1}{2} + (k - 1)p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(x_i^c y_{2i,k}^c) = (6n + 9)mp - (7n + 11)p - \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p + c;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

$$f_6(x_i^c y_{2i-1,k}^c) = (6n + 9)mp - (10n + 15)p - \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(x_i^c y_{2i-1,k}^c) = (6n + 9)mp - (10n + 16)p - \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + \frac{p+1}{2} + (k - 1)p - \frac{c}{2} + 1;;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(x_i^c y_{2i,k}^c) = (6n + 9)mp - (11n + 16)p - \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c}{2} + 1;;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(x_i^c y_{2i,k}^c) = (6n + 9)mp - (11n + 17)p - \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Label sisi $y_j^c y_{j+1}^c$:

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n + 9)mp - (2n + 4)p - \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n + 9)mp - (2n + 5)p - \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n + 9)mp - (4n + 8)p - \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + c;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n + 9)mp - (6n + 10)p - \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Label sisi $y_j^c y_{j+1}^c$:

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n + 9)mp - (6n + 11)p - \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + \frac{p-1}{2} - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n + 9)mp - (8n + 13)p - \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c}{2} + 1$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n + 9)mp - (8n + 14)p - \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n + 9)mp - (10n + 17)p - \left(\frac{j+1}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + c;$$

untuk $j = 5$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n + 9)mp - (11n + 17)p - \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j+1}^c) = (6n + 9)mp - (11n + 17)p - \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (k - 1)p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

Label sisi $y_j^c y_{j+1,n}^c$:

$$f_6(y_j^c y_{j+1,n}^c) = (6n + 9)mp - (4n + 8)p - \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j+1,n}^c) = (6n + 9)mp - (4n + 9)p - \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{p+1}{2} - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j+1,n}^c) = (6n + 9)mp - (8n + 14)p - \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j+1,n}^c) = (6n + 9)mp - (8n + 15)p - \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{p-1}{2} - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j+1,n}^c) = (6n + 9)mp - (11n + 17)p - \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + c;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

Label sisi $y_j^c y_{j-1,1}^c$:

$$f_6(y_j^c y_{j-1,1}^c) = (6n + 9)mp - (4n + 6)p - \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c+1}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$f_6(y_j^c y_{j-1,1}^c) = (6n + 9)mp - (4n + 7)p - \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p - \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j-1,1}^c) = (6n + 9)mp - (8n + 13)p - \left(\frac{j+1}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + c;$$

untuk $j = 5$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

$$f_6(y_j^c y_{j-1,1}^c) = (6n + 9)mp - (11n + 17)p - \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + c;$$

untuk $j = 7$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$f_6(y_j^c y_{j-1,1}^c) = (6n + 9)mp - (11n + 17)p - \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + c;$$

untuk $j = 7$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Jika W_{f_7} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total maka W_{f_7} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL $w_{f_5} = w_{f_7}$ dan rumus label sisi f_7 sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

Bobot pada sisi $y_j^c y_{j,k}^c$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (n - k)p + p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (n - k)p + 2p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (4n - k)p + 4p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (4n - k)p + 5p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (5n - k)p + 7p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (5n - k)p + 8p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (8n - k)p + 10p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Bobot pada sisi $y_j^c y_{j,k}^c$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (8n - k)p + 11p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j+1}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (9n - k)p + 14p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 5$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (12n - k)p + 17p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

Bobot sisi $x_i^c y_j^c$:

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (n + 1)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (n + 2)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (3n + 4)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (5n + 8)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (7n + 9)p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (7n + 10)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (9n + 13)p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (9n + 14)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (11n + 15)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_j^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (11n + 16)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

Bobot sisi $x_i^c y_{j,k}^c$:

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (2n - k)p + 3p + \frac{p+1}{2} - c + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (3n - k)p + 3p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+2}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (3n - k)p + 4p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 1$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (6n - k)p + 8p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (6n - k)p + 9p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i+1}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (7n - k)p + 10p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (10n - k)p + 14p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (10n - k)p + 15p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 2$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i - 1$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (11n - k)p + 15p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(x_i^c y_{j,k}^c) = \left(\frac{i}{3} - 1\right)(6n + 9)2p + (11n - k)p + 16p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $i = 3$ modulo 3, $1 \leq i \leq m$, $j = 2i$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Bobot sisi $y_j^c y_{j+1}^c$:

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (2n + 2)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c}{2};$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+5}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (2n + 3)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 1$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (4n + 6)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (6n + 8)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Bobot sisi $y_j^c y_{j+1}^c$:

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (6n+9)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (8n+11)p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (8n+12)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j+1}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (10n+15)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 5$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (12n+17)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1}^c) = \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (12n+18)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

Bobot sisi $y_j^c y_{j-1,1}^c$:

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j-1,1}^c) = \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (4n+4)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j-1,1}^c) = \left(\frac{j+3}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (4n+5)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 3$ modulo 6, $1 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j-1,1}^c) = \left(\frac{j+1}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (8n+11)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 5$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j-1,1}^c) = \left(\frac{j-1}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (12n+16)p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 7$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j-1,1}^c) = \left(\frac{j-1}{6} - 1\right)(6n+9)2p + (12n+17)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 7$ modulo 6, $3 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

Bobot sisi $y_j^c y_{j+1,n}^c$:

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1,n}^c) = \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (4n + 6)p + \frac{p-1}{2} + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1,n}^c) = \left(\frac{j+4}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (4n + 7)p + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 2$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1,n}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (8n + 12)p + \frac{p+1}{2} + \frac{c+1}{2};$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c ganjil

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1,n}^c) = \left(\frac{j+2}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (8n + 13)p + \frac{c}{2} + 1;$$

untuk $j = 4$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$, dan c genap

$$w_{f_5}(y_j^c y_{j+1,n}^c) = \left(\frac{j}{6} - 1\right)(6n + 9)2p + (12n + 19)p + \frac{p-1}{2} - c + 2;$$

untuk $j = 6$ modulo 6, $2 \leq j \leq 2m$, $1 \leq c \leq p$

Perhatikan Himpunan bobot sisi W_{f_7} . Tampak bahwa bobot sisi terkecil pertama terletak pada $W_{f_7} : y_j^c y_{j,k}^c$ dengan $j = 1$, $k = n$ dan $c = 2$ yaitu $(2n + 3)mp + p + \frac{p-1}{2} + 3$ sedangkan bobot sisi terbesar terletak pada $W_{f_7} : y_j^c y_{j,k}^c$ dengan dengan $j = 2m$, $k = 1$ dan $c = 1$ yaitu $(2n + 3)5mp - 5p + \frac{p-1}{2} + 2$. Sehingga dapat dinyatakan bahwa W_{f_7} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $3mn + \frac{mn+1}{2} - 2mn + 2$ dan beda 2 (dua), atau dapat dituliskan $W_{f_7} = \{(2n + 3)mp + p + \frac{p-1}{2} + 3, (2n + 3)mp + p + \frac{p-1}{2} + 4, (2n + 3)mp + p + \frac{p-1}{2} + 5, \dots, (2n + 3)5mp - 5p + \frac{p-1}{2} + 2\}$. Dapat disimpulkan bahwa gabungan graf *Crown String* $pCs_{m,n}$ mempunyai pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic dengan $a = (2n + 3)mp + p + \frac{p-1}{2} + 3$ dan $d = 2$ atau gabungan graf *Crown String* $pCs_{m,n}$ mempunyai Super $((2n + 3)mp + p + \frac{p-1}{2} + 3, 2)$ -EAT; $m \geq 3$, $n \geq 1$ dan m kelipatan 3, p ganjil.

Teorema 4.4.2. *Ada pelabelan total super $(6mnp - 4mn + 2, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *Crown String* $pCs_{m,n}$ jika p ganjil, $m \geq 3$, $n \geq 1$, m kelipatan 3 bernilai genap.*

Bukti. Gunakan pelabelan titik $f_8 = f_5$ untuk melabeli titik gabungan graf *Crown String* $pCs_{m,n}$, kemudian definisikan label sisi $f_8 : E(pCs_{m,n}) \rightarrow \{(2n + 3)mp + 1, (2n + 3)mp + 2, \dots, 12mnp - 9mn + 1\}$, sedemikian hingga label sisi f_8 untuk

pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic pada graf $mDb_{n,p}$, dapat dirumuskan sebagai berikut::

Untuk pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$ dengan $d = 1$, akan dibuktikan melalui sebuah teorema yang sudah dibuktikan oleh Martin Baca yakni apabila pada graf tunggal memiliki pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic maka pasti pada gabungan graf nya memiliki pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic. Peneliti menggunakan teorema martin baca ini untuk membuktikan apakah gabungan graf *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$ memiliki pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic. Berikut penjelasanya:

Bukti. Berdasarkan teorema martin baca untuk pelabelan super (a, d) -sisi antimagic, maka diperoleh rumusan:

$$f(x), x \in V(G_c) = \begin{cases} p[(f_1)_s(x_i) - 1] + c; & 1 \leq i \leq m, p \text{ ganjil} \\ p[(f_1)_s(y_j) - 1] + c; & 1 \leq j \leq 2m, p \text{ ganjil} \\ p[(f_1)_s(y_{j,k}) - 1] + c; & 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq 2m, p \text{ ganjil} \end{cases}$$

dan

$$\delta(d), d \in E(G_i) = \begin{cases} p.(f_4)_s(y_j y_{j+1}) + 1 - c; & 1 \leq j \leq 2m - 1 \\ p.(f_4)_s(y_j y_{j,k}) + 1 - c; & 1 \leq j \leq 2m, 1 \leq k \leq n \\ p.(f_4)_s(x_i y_j) + 1 - c; & \text{untuk } j \text{ ganjil, } 1 \leq i \leq m, \\ & 1 \leq j \leq 2m \\ p.(f_4)_s(x_i y_j) + 1 - c; & \text{untuk } j \text{ genap, } 1 \leq i \leq m, \\ & 1 \leq j \leq 2m \\ p.(f_4)_s(x_i y_{j,k}) + 1 - c; & \text{untuk } j \text{ ganjil, } 1 \leq i \leq m, \\ & 1 \leq k \leq n \\ p.(f_4)_s(x_i y_{j,k}) + 1 - c; & \text{untuk } j \text{ genap, } 1 \leq i \leq m, \\ & 1 \leq k \leq n \\ p.(f_4)_s(y_j y_{j+1,n}) + 1 - c; & \text{untuk } j \text{ genap,} \\ & 2 \leq j \leq 2m - 2 \\ p.(f_4)_s(y_j y_{j-1,1}) + 1 - c; & \text{untuk } j \text{ ganjil,} \\ & 3 \leq j \leq 2m - 1 \end{cases}$$

Jika himpunan $\{f_s(u) + f_s(v) + f_s(uv); uv \in E(G_s)\} = \{a, a+1, \dots, a+q-1\}$ merupakan himpunan bobot total dari gabungan graf *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$ maka, berdasarkan rumus diatas diperoleh $f(u) + f(v) + f(uv)$

$$\begin{aligned} &= m[f_s(u) - 1] + s + m[f_s(v) - 1] + s + mf_s(uv) + 1 - s \\ &= m[f_s(u) + f_s(v) + f_s(uv) - 2] + 1 + s \end{aligned}$$

dan $f_s(u) + f_s(v) + f_s(uv)$ merupakan bobot terkecil dari $d = 1$ konektif. Sehingga dapat diperoleh bobot terkecil dari $d = 1$ diskonektif sebagai berikut :

$$\begin{aligned} &\text{Bobot sisi terkecil adalah: } p[f_s(u) + f_s(v) + f_s(uv) - 2] + 1 + c \\ &= p[f_s(u) + f_s(v) + f_s(uv) - 2] + 1 + c \\ &= p[a - 2] + 1 + s \\ &= p[6m + 4mn + 2 - 2] + 1 + 1 \\ &= p[6m + 4mn] + 2 \\ &= [6mp + 4mnp + 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Sedangkan bobot sisi terbesar, yaitu: } p[f_s(u) + f_s(v) + f_s(uv) - 2] + 1 + c \\ &= p[f_s(u) + f_s(v) + f_s(uv) - 2] + 1 + c \\ &= p[a + q - 2] + 1 \\ &= p[6m + 4mn + 2 + 6m + 4mn - 3 - 2] + 1 \\ &= p[12m + 8mn - 3] + 1 \\ &= [12mp + 8mnp - 3p + 1] \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema Martin Baca telah disebutkan bahwa $\bigcup_{s=1}^m G_s$ memiliki pelabelan super $m(a - 2 + 2, 1)$ -EAT labeling. Jika a untuk graf *Crown String* tunggal adalah $6m + 4mn + 2$, maka $m(a - 2) + 2, 1) = 6mp + 4mnp + 2$ sedangkan bobot terbesar didefinisikan oleh $m(a + q - 2) + 1 = [2mp + 8mnp - 3p + 1]$. Berdasarkan pembuktian diatas dapat disimpulkan bahwa gabungan graf *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$ memiliki pelabelan super $(6mp + 4mnp + 2, 1)$ -sisi antimagic. \square

4.5 Tahapan Berfikir Tingkat Tinggi Dalam Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic Pada Graf *Crown String* $C_{s,m,n}$

Berdasarkan taksonomi Blooms yang telah direvisi, terdapat enam tahapan dalam ranah pengetahuan yang saling berkesinambungan, tahapan tersebut secara berurutan adalah : mengingat, memahami, menerapkan, menganalisa, mengevaluasi dan mengkreasi. Keenam tahapan diatas membentuk sebuah piramida dengan tahapan awal sebagai dasar dan seterusnya hingga tahapan keenam sebagai puncak. Hal tersebut berarti seseorang hanya dapat dikatakan berpikir tingkat tinggi apabila telah melalui seluruh enam tahapan secara utuh sebagai proses yang terintegrasi. Berikut adalah tahapan berpikir tingkat tinggi yang dilalui peneliti dalam pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic pada graf *Crown String*.

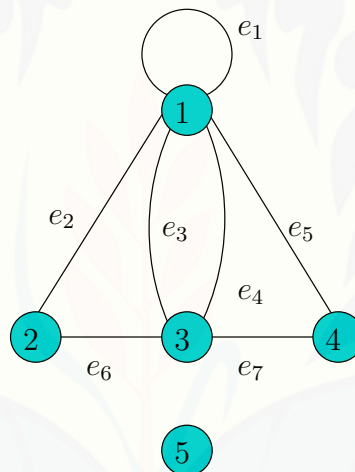
4.5.1 Tahap 1. Mengingat. Kata Kerja Kunci : Mengingat, Mengenali, dan Menamai

Untuk menghasilkan sebuah graf baru yang memiliki SEATL tidaklah mudah. Pada tahapan ini, mengingat kembali definisi graf, titik dan sisi, serta pengertian dari SEATL yang telah dijelaskan pada bab dua mutlak dibutuhkan. Hal tersebut diperlukan agar nantinya graf yang akan dikembangkan sesuai dengan yang diharapkan. Seperti beberapa hal berikut. Graf yang dikembangkan adalah graf sederhana, yaitu graf yang tidak memiliki sisi ganda maupun loop, serta graf yang berhingga. Selanjutnya adalah mengingat lema maupun teorema apa saja yang telah diketahui sebelumnya. Sebagai contoh adalah lema untuk menentukan batas atas graf agar memiliki SEATL.

Dalam perkembangannya, beberapa graf telah ditemukan pelabelannya, baik pelabelan titik maupun sisi. Dalam penelitian ini yang dikembangkan adalah pelabelan total super (a,d) sisi antimagic, maka perlu dilakukan studi untuk mengenali graf - graf tersebut. hal ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana graf tersebut dikembangkan, pola pelabelan serta kekurangan yang dimiliki. Setelah proses mengingat dan mengenali selanjutnya adalah mengembangkan gambar graf baru. Graf baru ini merupakan hasil dari penggabungan graf buku segitiga dan graf lintasan dengan penambahan sisi. Karena bentuknya menyerupai mahkota

yang berjajar maka graf ini diberi nama *Crown String*. Walaupun graf *Crown String* menyerupai graf buku segitiga, namun kedua graf ini berbeda karena telah digabung dengan lintasan dan sisi. Oleh karena itu langkah selanjutnya adalah pemberian nama pada titik dan sisi graf.

Pemberian nama titik dan sisi graf tidak bisa dilakukan sembarangan. Karena pemberian nama pada komponen *Crown String* bertujuan untuk memudahkan dan mengetahui variabel apa saja yang akan digunakan. Nama pada titik diberikan berdasarkan kesamaan letak atau pola ketika graf diperluas. Sedangkan nama sisi diberikan berdasarkan nama dua titik yang bersisian. Sehingga ketika graf diperluas keatas dan kesamping nama titik dan sisi tidak berubah. Berikut adalah penamaan titik dan sisi yang digunakan dalam graf *Crown String*. (gambar ilustrasi penamaan titik dan sisi)



Gambar 4.8 Graf G_3

4.5.2 Tahap 2. Memahami. Kata Kerja Kunci : Menyeleksi, Menjelaskan, dan Menganalogikan

Salah satu yang telah dilakukan pada tahap pertama taksonomi Blooms adalah mengingat lema dan teorema. Pada tahap ini perlu adanya tindakan lanjutan yaitu menyeleksi. Seleksi dapat diartikan juga memilih dari sekian teorema maupun lema yang pernah dipelajari. Hanya teorema yang diperlukan dalam

SEATL yang ditulis dalam kajian pustaka. Seperti teorema untuk mencari batas atas d , lema untuk membuktikan adanya pelabelan total super $(a,1)$ sisi antimagic graf tunggal dan gabungan.

Setiap teorema dan lema seringkali disajikan dalam bentuk variabel-variabel tertentu, maka proses selanjutnya adalah menjelaskan maksud dari teorema dan lema yang telah dipilih. Hal ini bertujuan agar dapat menganalogikan variabel tersebut teorema dalam kasus yang dihadapi pada graf *Crown String*. Seperti pada lema 2.7.1 untuk mencari batas atas nilai d , terdapat variabel p dan q . p disini diartikan sebagai jumlah titik, sedangkan q adalah jumlah sisi dalam graf dalam graf yang akan dilabeli.

Untuk mencari p dan q pada graf *Crown String* tidak cukup dengan hanya menggunakan nama titik dan sisi saja. Namun diperlukan variabel berupa indeks sebagai batasan. Misalnya i pada titik x , dan j pada titik y . Batasan yang diberikan adalah $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq 2m$, serta $1 \leq k \leq n$. Sehingga dapat ditentukan p atau jumlah titik dalam graf *Crown String* tunggal adalah $2mn + 3m$ dan q atau jumlah sisi adalah $4mn + 6m - 3$. Nilai p dan q untuk graf *Crown string* gabungan pun ditentukan. Selain teorema dan lema, beberapa konsep dasar yang dipakai dalam penelitian pun perlu adanya penjelasan. Seperti pengertian dari fungsi, fungsi bijektif, serta barisan aritmatika.

4.5.3 Tahap 3. Menerapkan. Kata Kerja Kunci : Menerapkan dan Menggunakan

Sebelum menentukan pelabelan pada graf, batas atas nilai d harus ditentukan terlebih dahulu. Penentuan batas atas nilai d menggunakan lemma 2.7.1. dengan p dan q yang telah disesuaikan dengan graf *Crown String* tunggal maupun gabungannya. Setelah dihitung menggunakan lema 2.7.1 didapatkan nilai d graf *Crown String* adalah $d \leq 2$. Karena SEATL adalah pelabelan dengan menggunakan bilangan bulat positif maka nilai $d = 0, 1, 2$.

Untuk mendapatkan pelabelan total super (a, d) sisi antimagic, langkah awal yang dilakukan setelah didapatkan nilai d adalah melabeli titik pada graf tunggal dan gabungannya. Teknik pelabelan titik pada graf *Crown String* dengan menerapkan apa yang telah dipelajari pada graf - graf yang telah ditemukan se-

belumnya. Label titik pada graf *Crown String* selanjutnya akan dihitung bobot sisinya. Hal ini bertujuan untuk mengetahui apakah label yang diberikan pada titik menghasilkan bobot sisi yang membentuk suatu barisan aritmatika dengan beda satu.

4.5.4 Tahap 4. Menganalisis. Kata Kerja Kunci : Mengkaji Ulang dan Mengorganisir

Pelabelan titik yang diberikan pada graf *Crown string* selanjutnya dikaji ulang. Karena pola pelabelan pada graf tunggal dan gabungan *Crown string* sangat berbeda. Label titik pada graf perlu dipastikan agar dapat diperluas namun tetap membentuk suatu barisan aritmatika dengan beda satu. Selain itu perlu ditentukan batasan m , n , dan p yang berlaku pada graf *Crown string*. Batasan m , n , dan p yang ditentukan berdasarkan ekspansi graf dengan bobot sisi yang membentuk suatu pola tertentu.

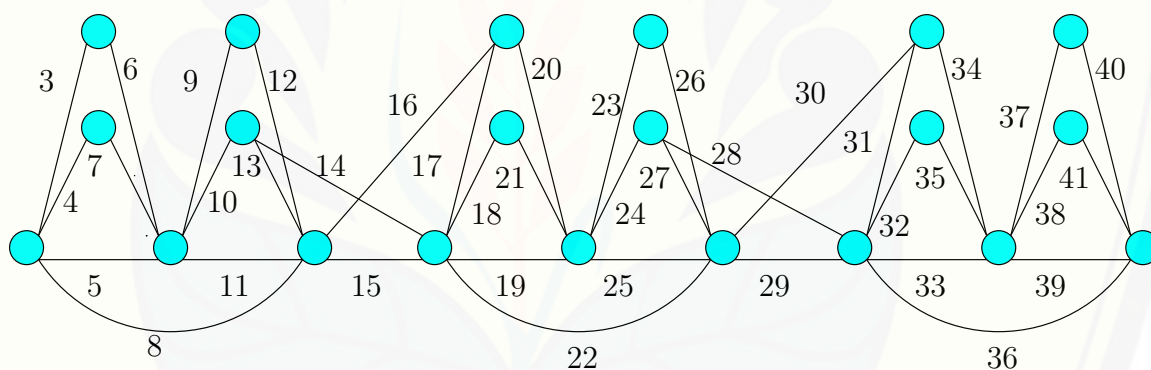
Apabila label titik yang diberikan pada graf *Crown string* tidak membentuk bobot sisi yang berpola ketika graf diperluas, maka perlu dilakukan perubahan terhadap teknik pelabelan titik atau mengorganisir label titik sebelumnya hingga menghasilkan pola tertentu. Setelah dipastikan label titik pada graf *Crown string* membentuk pola yang konsisten dan *expandable*, selanjutnya menentukan label untuk tiap sisinya.

Label sisi dimulai dari $p + 1$ dimana p merupakan label titik terbesar pada graf. Label pada tiap sisi dijumlahkan dengan bobot masing - masing sisi (disebut sebagai bobot total) sedemikian hingga membentuk barisan aritmatika dengan beda = 0, 1, 2 untuk graf *Crown string* tunggal maupun gabungan. Nilai beda tersebut berdasarkan hasil yang didapat pada perhitungan sebelumnya. Untuk mendapatkan bobot total dengan beda nol, label sisi $p + 1$ diletakkan pada bobot sisi terkecil berurutan hingga bobot sisi terbesar. dan ntuk menghasilkan bobot total dengan beda dua, label sisi $p + 1$ dimulai dari bobot sisi terbesar menuju bobot sisi terkecil. Sedangkan untuk menghasilkan bobot total dengan beda satu, dapat dilakukan dengan mengaplikasikan lema yang dikembangkan oleh Dafik.

4.5.5 Tahap 5. Mengevaluasi. Kata Kerja Kunci : Mengecek dan Menjustifikasi

Pelabelan total super dengan beda $d = 0, 1, 2$ telah ditentukan. Namun perlu dilakukan pengujian terhadap sembarang titik yang berlaku sesuai batasan yang telah diberikan. Untuk mempermudah pengujian terhadap label titik dan sisi pada graf tunggal maupun gabungannya, digunakan rumus untuk mencari suku ke- n pada barisan aritmatika.

Penggunaan rumus barisan aritmatika dengan beda yang disesuaikan dengan pola yang didapat dari graf *Crown String*. Beda yang dimaksud tidak sama dengan nilai d yang didapat dari hasil perhitungan menggunakan lema 2.7.1. Setelah beda pola graf *Crown String* tunggal maupun gabungannya sesuai, selanjutnya dapat disubstitusikan pada rumus suku ke- n . Tidak hanya itu, rumusan yang dihasilkan pun akan memiliki m , n dan p batasan sesuai yang berlaku. Untuk mengetahui nilai pada titik ataupun sisi tertentu yang perlu dilakukan adalah menyubstitusikan batasan i , j , k dari titik atau sisi yang akan dicari.



Gambar 4.9 Bobot sisi $C_{s_3,2}$

4.5.6 Tahap 6. Mencipta. Kata Kerja Kunci : Memformulasikan dan Menciptakan

Tahap ini merupakan bagian terpenting dalam pelabelan total super (a, d) sisi antimagic pada graf *Crown String*. Setelah memperoleh rumusan dengan

rumus barisan aritmatika, selanjutnya adalah memformulasikan rumusan umum untuk setiap beda 0, 1, 2, pada graf *Crown String* tunggal dan gabungannya.

Dalam penelitian kali ini dihasilkan sebuah graf baru yang diberi nama *Crown String* dengan formulasi pelabelan total super (a, d) sisi antimagic sebagai berikut.

1. Pelabelan titik super sisi antimagic pada $Cs_{m,n}$ dengan nilai terkecil $a = 3$ dengan beda=1,
2. Pelabelan total super sisi antimagic pada $Cs_{m,n}$ dengan nilai terkecil $a = (6n + 9)m$ dengan beda=0,
3. Pelabelan total super sisi antimagic pada $Cs_{m,n}$ dengan nilai terkecil $a = (2n + 3)m + 4$ dengan beda=2,
- ...

4.6 Hasil dan Pembahasan

Penelitian ini bertujuan untuk mencari batas atas d dari graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ maupun gabungan Graf *Crown String* $pCs_{m,n}$ sehingga mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic, selanjutnya dicari pelabelan pada graf tersebut dan ditentukan rumusan fungsi bijektifnya. Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh nilai d yang mungkin untuk pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ maupun gabungannya adalah $d \in \{0, 1, 2\}$. Setelah menentukan nilai d , peneliti mencari pelabelan sesuai dengan nilai d yang telah ditentukan.

Dari hasil penelitian sesuai dengan nilai d tersebut, diperoleh 2 (dua) lemma dan 4 (empat) teorema baru tentang pelabelan graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ maupun gabungan graf *Crown String* $pCs_{m,n}$, yaitu:

1. Ada pelabelan titik $(3, 1)$ -sisi antimagic pada graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ jika $m, n \geq 1$ telah dibuktikan pada lemma 4.2.1.
2. Ada pelabelan total super $((6n+9)m, 0)$ dan $((2n+3)m+4, 2)$ -sisi antimagic pada graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ untuk $m, n \geq 1$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.2.1.

3. Ada pelabelan total super $((2n + 3)m + 4, 1)$ -sisi antimagic pada graf *Crown String* $C_{s_{m,n}}$ untuk $m, n \geq 1$, m genap yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.2.2.
4. Ada pelabelan titik $(\frac{3p+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan Graf *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$ jika p ganjil, $m \geq 3$, $n \geq 1$, m kelipatan 3, telah dibuktikan pada lemma 4.4.1.
5. Ada pelabelan total super $((6n + 9)mp - 2p + \frac{p-1}{2} + 2, 0)$, dan $((2n + 3)mp + p + \frac{p-1}{2} + 3, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$ jika p ganjil, $m \geq 3$, $n \geq 1$, m kelipatan 3, yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.4.1.
6. Ada pelabelan total super $(6mnp - 4mn + 2, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$ jika p ganjil, $m \geq 3$, $n \geq 1$, m kelipatan 3 bernilai genap, yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.4.2.

Berdasarkan hasil penelitian tersebut, jika diketahui nilai batas atas d yang berlainan maka nilai awal a juga akan berlainan. Namun demikian seluruh label titik dan seluruh label angka pada bobot sisi yang digunakan sama, baik pada saat $d = 0$, $d = 1$ maupun untuk $d = 2$, label titik yang digunakan adalah dari 1 hingga p dimana p adalah jumlah titik pada graf sedangkan label untuk sisi yang digunakan adalah dimulai dari $p + 1$ hingga $p + q$ dimana q merupakan jumlah sisi, sehingga $p + q$ merupakan jumlah titik dan sisi pada graf. Jika kedua label tersebut digunakan untuk melabeli sebuah graf dengan aturan yang diberikan diatas maka pelabelan tersebut disebut sebagai pelabelan total. Pada graf *Crown String* $C_{s_{m,n}}$ dan gabungan graf *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$ ketiga nilai d tersebut berlaku pada syarat yang tidak sama yaitu untuk graf gabungan *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$ berlaku $m, n \geq 1$. Sedangkan untuk graf *Crown String* $C_{s_{m,n}}$ graf gabungan *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$ berlaku $m \geq 3$ dan merupakan kelipatan 3. Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilaksanakan, peneliti telah mendapatkan SEATL (Super Edge Antimagic Total Labeling) untuk graf *Crown String* $C_{s_{m,n}}$ tunggal untuk $d = 0, 1, 2$ dan SEATL untuk gabungan graf *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$ untuk $d = 0, 1, 2$ dengan salinan ganjil. Penelitian SEATL gabungan graf *Crown String*

$pC_{s_{m,n}}$ untuk $d = 0, 1, 2$ untuk *copy* p genap masih belum ditemukan dikarenakan pola pelabelan yang telah ditemukan pada gabungan graf *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$ untuk p ganjil tidak dapat diterapkan pada gabungan graf yang sama dengan nilai m atau gabungan yang genap. Hal ini berarti harus ditemukan pola pelabelan baru terlebih dahulu untuk menentukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$ untuk $d = 0, 1, 2$ dengan p genap dan untuk hal tersebut, peneliti mengalami kesulitan.

Penentuan nilai kebenaran sebuah rumus bijektif pada bidang teori graf hanya ditentukan melalui pendeteksian pola (*pattern recognition*) yang kemudian dikembangkan menjadi sebuah teorema atau lema. Teorema ini kemudian juga dikembangkan dengan menggunakan pendeteksian pola pada gabungan graf yang berlaku sampai batas m dan n yang ditemukan peneliti kemudian baru menentukan fungsi bijektifnya. Dalam hal ini, penulis tidak mencantumkan bagaimana cara memperoleh fungsi bijektif tersebut, tetapi pembuktian kebenaran teorema tersebut telah dipaparkan serta diberikan pula beberapa contoh pelabelan sebagai visualisasi dari kebenaran teorema.

Berdasarkan hasil perhitungan dan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, peneliti memberikan beberapa visualisasi pelabelan pada graf *Crown String* yang telah peneliti peroleh, dengan demikian diharapkan hasil tersebut dapat digunakan sebagai rujukan untuk penelitian rujukan atau membantu peneliti lain yang akan melakukan penelitian sejenis.

Masalah terbuka 4.6.1. *Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *Crown String* $C_{s_{m,n}}$, dengan $m, n \geq 1$; $1 \leq c \leq p$; p genap untuk $d = 0, 1, 2$.*

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa:

1. Batas atas nilai d untuk graf *Crown String* adalah $d = 0, 1, 2$.
2. Graf *Crown String* $C_{s_{m,n}}$ memiliki pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic untuk $d = 0, 1, 2$. Hasil penelitiannya telah dibuktikan pada lema 4.2.1 yaitu graf *Crown String* tunggal memiliki pelabelan titik $(3, 1)$ -sisi antimagic, pada teorema 4.2.1, serta memiliki pelabelan total super $((6n+9)m, 0)$ dan $((2n+3)m+4, 2)$ -sisi antimagic pada graf *Crown String* tunggal untuk $m, n \geq 1$ yang telah dibuktikan pada teorema 4.2.1. Graf *Crown String* $C_{s_{m,n}}$ tunggal juga memiliki pelabelan total super $((2n+3)m+4, 1)$ -sisi antimagic untuk $m, n \geq 1$ yang telah dibuktikan melalui teorema 4.2.2.
3. Gabungan saling lepas graf *Crown String* memiliki pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic yaitu terdapat fungsi bijektif pelabelan titik $(\frac{3p+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *Crown String* $pC_{s_{m,n}}$ jika p ganjil, , yang telah dibuktikan melalui pembuktian lema 4.4.1, terdapat fungsi bijektif pelabelan total super $((6n+9)mp - 2p + \frac{p-1}{2} + 2, 0)$, dan $((2n+3)mp + p + \frac{p-1}{2} + 3, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf $pC_{s_{m,n}}$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.4.1. Dan terdapat fungsi bijektif pelabelan total super $(6mnp - 4mn + 2, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf $pC_{s_{m,n}}$, yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.4.2.
4. Dalam pelabelan total super (a,d) sisi antimagic pada graf *Crown String* telah melalui keenam tahapan pada taksonomi Blooms seperti yang telah dipaparkan pada pembahasan. Keenam tahapan terintegrasi secara berkesinambungan. Sehingga dapat disimpulkan dalam proses pelabelan total (a,d) -sisi antimagic graf *Crown String* telah menerapkan berpikir tinggi berdasarkan taksonomi Blooms ranah kognitif yang telah direvisi.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *Crown String* $pCs_{m,n}$ serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran pembaca dapat melakukan penelitian pada Pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *Crown String* $pCs_{m,n}$, dengan m ganjil untuk $d = 0, 1, 2$.



DAFTAR PUSTAKA

- Aprilia, I. 2011. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Tangga*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Callan, Robert. 1998. *Mathematics for Computing*. Inggris : A Shford Colour Press, Gosport, Hants.
- Chartnand, G & Oellermann, O. R. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. Amerika Serikat: McGraw-Hill, Inc.
- Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graphs*. Tidak dipublikasikan. Tesis. Australia: School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat.
- Dafik,dkk. 2009. *On Super (a,d)-Edge anti magic Total Labeling of Disconnected graphs* Jurnal discrete mathematics jilid 309 (2009): 4909-4915.
- Dafik, Fajriatin,Alvin.,dan Miladiyah,Kunti. 2012. *[3] Super Antimagicness of a Well-defined Graph* Saintifika. Vol. 14 No.1 (2012): 106-118.
- Deviyana, R. 2011. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf E*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Fajriatin, A. 2011. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Gunung*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Gallian, Joseph A. 2013. *Dynamic Survey of Graph Labeling*.The Electronic Journal of Combinatorics 16.
- Grimaldi, Ralph P. 1999. *Discrete and Combinatoric Mathematics an Aplied Introduction (Fourth Edition)*. Amerika Serikat : Addison Wesley Longman, inc.
- Holman dan Basby. 1987. *Discrete Mathematical Structures for Komputer Science (Second Edition)*. Amerika Serikat : Prentice Hall,inc, Englewood Cliffs

- Laelatus, S. 2011. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Gabungan Saling Lepas Graf Tangga Permata*. Tidak dipublikasikan (Skripsi).Jember: Universitas Jember.
- Lipschotz dan Lipson. 2002. *Matematika Diskrit Jilid 2*. Jakarta : Salemba teknika
- Mukhlis, I. 2012. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Kelelawar*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Munir,Rinaldi. 2012. *Matematika Diskrit : Edisi Kelima*. Bandung: Informatika Bandung.
- Miladiyah, Kunti, 2012. *Pelabelan Total Super Sisi Antimagic graf Tangga Tiga Siklus Konektif dan Diskonektif*. Tidak dipublikasikan (Skripsi).Jember: Universitas Jember.
- Rajendran, N. 2008.*Teaching and Acquiring Higher-Order Thinking Skills: Theory and Practice*. Tanjong Malim Perak: Penerbit Universiti Pendidikan Sultan Idris.
- Seputro, Theresia. 1992. *Pengantar Dasar Matematika Logika dan teori Himpunan*. Jakarta : Erlangga
- Slamin. 2009. *Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.
- Truss, John. 1999. *Discrete Mathematics for Computer Scientists (Second Edition)*. Amerika Serikat : Addison Wesley Longman, inc.
- Utari, Retno. 2012. *Taksonomi Blooms dan Bagaimana Menggunakannya?* . Jakarta : Pusdiklat KNKP