



**SUPER (a,d) - \mathcal{H} -ANTIMAGIC TOTAL SELIMUT PADA
GRAF SEMI JAHANGIR**

SKRIPSI

Oleh

Diana Hardiyantik

NIM 111810101048

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2015



**SUPER (a,d) - \mathcal{H} -ANTIMAGIC TOTAL SELIMUT PADA
GRAF SEMI JAHANGIR**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Diana Hardiyantik
NIM 111810101048

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER

2015

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta Sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan suatu kebahagiaan penggalan bait dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:

1. Ayahanda tercinta Heru Hardijanto dan Ibunda tercinta Hartatik yang senantiasa memberikan dorongan, semangat dan kasih sayang berlimpah serta cucuran keringat dan do'a yang tak pernah putus dalam mengiringiku meraih impian;
2. Kakakku Riska Herlinawati Kusuma Wardani dan keluarga besarku yang selalu memberikan motivasi dan *support*;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing I dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Guru-guru sejak taman kanak-kanak sampai perguruan tinggi yang telah membimbing dan memberikan ilmu yang bermanfaat;
5. Almamater Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Janganlah kamu bersikap lemah dan janganlah pula bersedih hati,
Padahal kamu orang-orang yang paling tinggi derajatnya, jika
orang-orang yang beriman ."

(Terjemahan QS. Ali-Imran: 139)*)

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an* dan Terjemahannya.
Bandung. CV Penerbit J-ART.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Diana Hardiyantik

NIM : 111810101048

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Selimut Pada Graf Semi Jahangir adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2015

Yang menyatakan,

Diana Hardiyantik

NIM. 111810101048

SKRIPSI

**SUPER (a,d) - \mathcal{H} -ANTIMAGIC TOTAL SELIMUT PADA
GRAF SEMI JAHANGIR**

Oleh

Diana Hardiyantik
NIM 111810101048

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si
Dosen Pembimbing Anggota : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PERSETUJUAN

SUPER (a,d) - \mathcal{H} -ANTIMAGIC TOTAL SELIMUTG PADA GRAF
SEMI JAHANGIR

SKRIPSI

diajukan guna memenuhi syarat untuk menyelesaikan pendidikan Program
Sarjana Strata Satu Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu
Pengetahuan Alam Universitas Jember

Nama Mahasiswa : Diana Hardiyantik.
NIM : 111810101048
Jurusan : Matematika
Program Studi : Matematika
Angkatan Tahun : 2011
Daerah Asal : Madiun
Tempat, Tanggal Lahir : Madiun, 24 Mei 1993

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si
NIP. 19840801 200801 2 006

Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D.
NIP. 19680802 199303 1 004

PENGESAHAN

Skripsi berjudul Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic Total Selimut pada Graf Semi Jahangir telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

Hari / tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas
Jember

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si
NIP.19840801 200801 2 006

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D.
NIP.19680802 199303 1 004

Anggota I,

Anggota 2,

Kosala Dwidja P, S.Si., M.Si
NIP.19690828 199802 1 001

M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc
NIP.19850111 200812 1 002

Mengesahkan,

Dekan

Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.
NIP. 19610108 198602 1 001

RINGKASAN

Super (a, d) - \mathcal{H} -Antimagic Total Selimut pada Graf Semi Jahangir; Diana Hardiyantik, 111810101048; 2015: 84 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek (1963), Stewart (1967), Kotzig dan Rosa (1970). Pelabelan dikembangkan menjadi pelabelan ajaib dan anti ajaib. Pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut merupakan suatu graf $G = (V(G), E(G))$ dengan H merupakan subgraf dari G dimana untuk setiap sisinya termuat dalam subgraf H dan G yang isomorfik dengan H . Inayah et al. (2009) mengembangkan suatu pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut yaitu bahwa suatu pelabelan selimut (a, d) - \mathcal{H} -antimagic pada graf G merupakan sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat barisan aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d\}$.

Pada penelitian ini mengkaji mengenai super \mathcal{H} -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir tunggal dan gabungan saling lepas. Graf Semi Jahangir adalah graf yang terbentuk dari graf Jahangir dengan menghilangkan satu titik yang berderajat dua. Graf Semi Jahangir dinotasikan dengan SJ_n dengan $n \geq 2$. Himpunan titik graf SJ_n adalah $V = \{p, x_i, y_k; 1 \leq i \leq n + 1; 1 \leq k \leq n\}$ dan himpunan sisinya $E = \{px_i; 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i+1} y_i; 1 \leq i \leq n\}$, sehingga kardinalitas $|V| = 2n + 2$ dan sisi $|E| = 3n + 1$. Adapun graf Semi Jahangir mSJ_n diskonektif didefinisikan sebagai gabungan dari sebanyak m salinan graf Semi Jahangir yang mempunyai himpunan titik $V(mSJ_n) = \{p^j, x_i^j, y_k^j; \text{untuk } 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan sisi $E(mSJ_n) = \{p^j x_i^j; 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i^j y_i^j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_i^j x_{i+1}^j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif. Metode ini digunakan pada pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut pada graf

Semi Jahangir tunggal dan gabungan. Batas atas untuk graf Semi Jahangir tunggal pada penelitian ini adalah $d \leq 20$, sedangkan batas atas untuk gabungan saling lepas graf Semi Jahangir adalah $d \leq 25$. Sehingga, teorema baru yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

Dari hasil penelitian pada beberapa nilai d tersebut diatas, diperoleh 22 teorema baru tentang pelabelan graf Semi Jahangir tunggal SJ_n maupun gabungannya mSJ_n , yaitu:

1. **Teorema 4.1.1** *Ada super $(\frac{31n+42}{2}, 0)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan n genap. Dan ada super $(\frac{31n+41}{2}, 0)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan n ganjil;*
2. **Teorema 4.1.2** *Ada super $(15n + 21, 1)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$;*
3. **Teorema 4.1.3** *Ada super $(\frac{29n+44}{2}, 2)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan n genap. Dan ada super $(\frac{29n+43}{2}, 2)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan n ganjil;*
4. **Teorema 4.1.4** *Ada super $(15n + 21, 3)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$;*
5. **Teorema 4.1.5** *Ada super $(\frac{27n+46}{2}, 4)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan n genap. Dan ada super $(\frac{27n+45}{2}, 4)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan n ganjil;*
6. **Teorema 4.1.6** *Ada super $(13n + 23, 5)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$;*
7. **Teorema 4.1.7** *Ada super $(\frac{25n+48}{2}, 6)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan n genap. Dan ada super $(\frac{25n+47}{2}, 6)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan n ganjil;*

8. **Teorema 4.1.8** *Ada super $(14n + 22, 7)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$;*
9. **Teorema 4.1.9** *Ada super $(\frac{23n+50}{2}, 8)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan n genap. Dan ada super $(\frac{23n+49}{2}, 8)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan n ganjil;*
10. **Teorema 4.1.10** *Ada super $(11n + 25, 9)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$;*
11. **Teorema 4.1.11** *Ada super $(13n+23, 10)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$;*
12. **Teorema 4.1.12** *Ada super $(\frac{21n+52}{2}, 11)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan n genap. Dan ada super $(\frac{21n+51}{2}, 11)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan n ganjil;*
13. **Teorema 4.1.13** *Ada super $(10n+26, 12)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$;*
14. **Teorema 4.1.14** *Ada super $(11n+25, 13)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$;*
15. **Teorema 4.1.15** *Ada super $(\frac{19n+54}{2}, 14)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan n genap. Dan ada super $(\frac{19n+53}{2}, 14)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan n ganjil;*
16. **Teorema 4.1.16** *Ada super $(9n + 27, 15)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$;*
17. **Teorema 4.1.17** *Ada super $(8n + 28, 18)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$;*

18. **Teorema 4.2.1** *Ada super $(18mn+14m+4, 0)-(C_4)$ antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$;*
19. **Teorema 4.2.2** *Ada super $(17mn+14m+5, 2)-(C_4)$ antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$;*
20. **Teorema 4.2.3** *Ada super $(16mn+14m+6, 4)-(C_4)$ antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$;*
21. **Teorema 4.2.4** *Ada super $(15mn+14m+7, 6)-(C_4)$ antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$;*
22. **Teorema 4.2.5** *Ada super $(\frac{23mn+34m+16}{2}, 8)-(C_4)$ antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n untuk $n \geq 2$, $m \geq 2$ dan n genap. dan ada super $(\frac{23mn+33m+16}{2}, 8)-(C_4)$ antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n untuk $n \geq 2$, $m \geq 2$ dan n ganjil.*

Dari kajian diatas ada beberapa pelabelan yang belum ditemukan oleh peneliti sehingga dalam penelitian ini diajukan open problem.

Masalah terbuka 0.0.1. *Pelabelan super $(a, d)-\mathcal{H}$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n dengan $n \geq 2$ untuk $d \leq 20$ selain $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18\}$.*

Masalah terbuka 0.0.2. *Pelabelan super $(a, d)-\mathcal{H}$ antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ untuk $d \leq 24$ selain $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.*

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic Total Selimut pada Graf Semi Jahangir. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing I dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Kosala Dwidja P, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji I dan M. Ziaul Arif, S.Si., M.Si selaku Dosen Penguji II;
5. Dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. Ayahanda tercinta Heru Hardijanto dan Ibunda Hartatik yang senantiasa memberikan dorongan, semangat dan kasih sayang berlimpah serta cucuran keringat dan do'a yang tak pernah putus dalam mengiringiku meraih impianku;
7. Kakakku Riska Herlinawati Kusuma Wardani dan keluarga besarku yang selalu memberi motivasi dan *support*;

8. Sahabat-sahabatku Diah, Emil, Pia yang selalu membantu, yang selalu ada menemani senang, susah, maupun sedih dan kebersamaan kita adalah kenangan yang tak terlupakan
9. teman - teman seperjuangan graf: (mbak cepa, mbak rida, mbak ipe, mbak sari, mbak icha, hendri, mas anang, mbak misi, mbak chenul dan semuanya yang berkecimpung dalam dunia graf), terima kasih atas dorongan semangat dan bantuannya selama masa proses penyelesaian skripsiku;
10. keluarga besar KRAMAT'11, terima kasih telah menjadi keluarga bagiku;
11. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PEMBIMBING	v
HALAMAN PERSETUJUAN	vi
HALAMAN PENGESAHAN	vii
RINGKASAN	viii
PRAKATA	xii
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xviii
DAFTAR LAMBANG	xix
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
2 TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf	4
2.2 Graf Khusus	8
2.3 Fungsi dan Barisan Aritmatika	12
2.4 Pelabelan Graf	14
2.4.1 Definisi Pelabelan Graf	14
2.4.2 Pelabelan Selimut- \mathcal{H} -Antimagic	16
2.5 Lemma Batas Atas	16
2.6 Aplikasi Graf	18
2.7 Hasil - hasil Penelitian Pelabelan Selimut \mathcal{H} -Antimagic	19

3 METODE PENELITIAN	22
3.1 Metode Penelitian	22
3.2 Rancangan Penelitian	22
3.3 Teknik Penelitian	25
4 HASIL DAN PEMBAHASAN	27
4.1 Super (a,d) - \mathcal{H} Antimagic Total Selimut pada Graf Semi Jahangir Konektif	27
4.2 Super (a,d) - \mathcal{H} Antimagic Total Selimut pada Graf Semi Jahangir Diskonektif	63
4.3 Hasil dan Pembahasan	78
5 KESIMPULAN DAN SARAN	81
5.1 Kesimpulan	81
5.2 Saran	82
DAFTAR PUSTAKA	83

DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh Graf G	4
2.2	Contoh Subgraf dan Spanning Subgraf	6
2.3	Contoh Graf Isomorfik	7
2.4	Graf dengan Matriks Ketetanggaannya	7
2.5	Contoh <i>Disjoint union of disconnected graph</i>	8
2.6	<i>Shackle</i> Graf <i>Triangular Book</i> SBt_3	9
2.7	Contoh Graf <i>Triangular Ladder</i> L_4	9
2.8	Contoh <i>Joint</i> Graf Lintasan dan Graf Lingkaran $(C_6 + P_3)$	10
2.9	Contoh Amalgamasi Graf Bintang $Amal(S_8, 1, 3)$	11
2.10	Contoh Graf Jahangir J_8	11
2.11	Contoh Graf Semi Jahangir SJ_6	12
2.12	(a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif	13
2.13	(a) pelabelan titik, (b) pelabelan sisi, (c) pelabelan total	15
2.14	Graf Semi Jahangir SJ_6 dengan $d = 9$	18
2.15	Graf <i>tree</i>	19
3.1	Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir konektif SJ_6	23
3.2	Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir diskonektif SJ_6	24
3.3	<i>Flowchart</i> super (a, d) - \mathcal{H} total selimut	26
4.1	Jumlah titik dan sisi graf pada (a) SJ_2 , (b) SJ_3 , dan (c) SJ_4	29
4.2	Super $(114, 0)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_6	32
4.3	Super $(98, 0)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_5	33
4.4	Super $(111, 1)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_6	34
4.5	Super $(109, 2)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_6	36
4.6	Super $(94, 2)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_5	37
4.7	Super $(111, 3)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_6	38
4.8	Super $(104, 4)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_6	40

4.9	Super $(90, 4)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_5	41
4.10	Super $(101, 5)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6	42
4.11	Super $(99, 6)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6	44
4.12	Super $(86, 6)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_5	45
4.13	Super $(106, 7)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6	46
4.14	Super $(94, 8)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6	48
4.15	Super $(82, 8)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_5	49
4.16	Super $(91, 9)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6	50
4.17	Super $(101, 10)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6	52
4.18	Super $(89, 11)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6	54
4.19	Super $(78, 11)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_5	54
4.20	Super $(86, 12)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6	55
4.21	Super $(91, 13)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6	57
4.22	Super $(84, 14)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6	60
4.23	Super $(74, 14)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_5	60
4.24	Super $(81, 15)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6	61
4.25	Super $(76, 18)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6	63
4.26	Super $(370, 0)-(C_4)$ antimagic total selimut pada $3SJ_6$	67
4.27	Super $(353, 2)-(C_4)$ antimagic total selimut pada $3SJ_6$	69
4.28	Super $(336, 4)-(C_4)$ antimagic total selimut pada $3SJ_6$	71
4.29	Super $(319, 6)-(C_4)$ antimagic total selimut pada $3SJ_6$	73
4.30	Super $(230, 8)-(C_4)$ antimagic total selimut pada $3SJ_5$	76
4.31	Super $(266, 8)-(C_4)$ antimagic total selimut pada $3SJ_6$	77

DAFTAR TABEL

2.1 Hasil pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic. 20

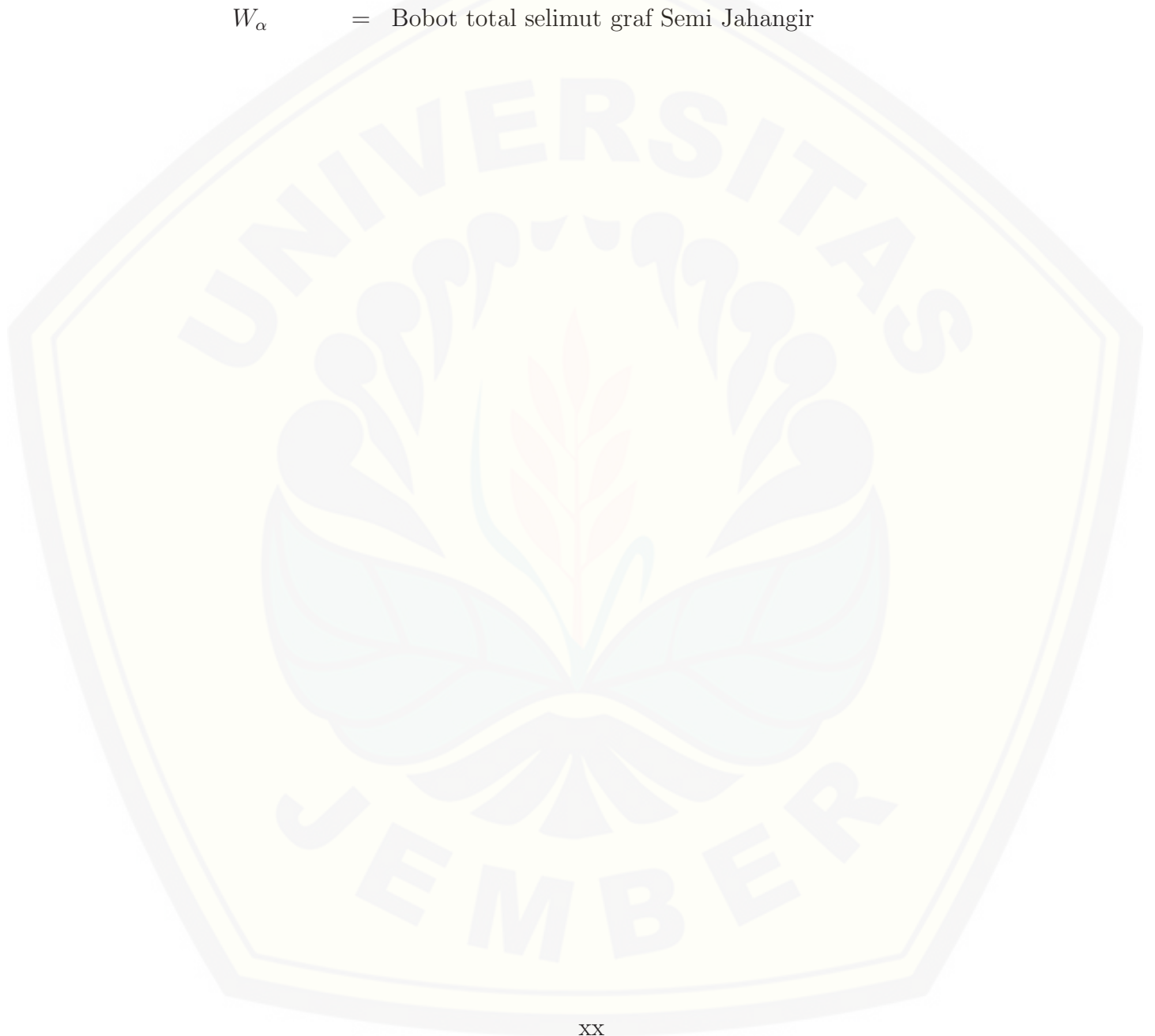


DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
v_n	=	Titik ke- n pada suatu graf
e_n	=	Sisi ke- n dari suatu graf
$ V(G) $	=	Himpunan titik dari graf G yang disebut <i>order</i>
$ E(G) $	=	Himpunan sisi dari graf G yang disebut ukuran (<i>size</i>)
$\mathcal{H}AVC$	=	\mathcal{H} antimagic vertex covering atau pelabelan titik \mathcal{H} antiajaib selimut
$SHATC$	=	<i>Super \mathcal{H} antimagic total covering</i> atau super (a, d) - \mathcal{H} antiajaib total selimut
d	=	Nilai beda barisan bobot total selimut pada $SHATC$
a	=	Bobot total selimut terkecil yang merupakan suku pertama barisan
J_n	=	Lambang untuk graf Jahangir
SJ_n	=	Lambang untuk graf Semi Jahangir
mSJ_n	=	Lambang untuk gabungan saling lepas graf Semi Jahangir
n	=	Banyaknya titik pada bagian badan graf Semi Jahangir
m	=	Banyaknya gabungan saling lepas pada graf Semi Jahangir
p	=	Titik pusat pada graf SJ_n
x_i	=	Titik ke- i pada bagian ujung jahangir graf SJ_n
y_i	=	Titik ke- i pada bagian jahangir graf SJ_n
p^j	=	Titik pusat dalam komponen ke- j pada graf mSJ_n
x_i^j	=	Titik ke- i dalam komponen ke- j pada bagian ujung jahangir graf mSJ_n
y_i^j	=	Titik ke- i dalam komponen ke- j pada bagian jahangir graf mSJ_n

Digital Repository Universitas Jember

- $\alpha(p)$ = Fungsi bijektif pelabelan titik p untuk graf Semi Jahangir
 $\alpha(x_i)$ = Fungsi bijektif pelabelan titik x untuk graf Semi Jahangir
 $\alpha(y_i)$ = Fungsi bijektif pelabelan titik y untuk graf Semi Jahangir
 w_α = Bobot selimut graf Semi Jahangir
 $\alpha(px_i)$ = Fungsi bijektif pelabelan sisi p ke x untuk graf Semi Jahangir
 $\alpha(x_iy_i)$ = Fungsi bijektif pelabelan sisi x ke y untuk graf Semi Jahangir
 $\alpha(y_ix_{i+1})$ = Fungsi bijektif pelabelan sisi y ke x untuk graf Semi Jahangir
 W_α = Bobot total selimut graf Semi Jahangir



BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf ditemukan pada abad ke-18 dan aplikasinya banyak ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang ahli matematikawan Swiss Leonhard Euler pada tahun 1736, yang berawal dari masalah jembatan Königsberg. Leonhard Euler mengungkapkan bahwa tidak ada yang pernah berhasil melakukan hal ini, masalahnya adalah bagaimana cara melewati setiap jembatan dari ketujuh jembatan dengan tepat satu kali dari satu tempat dan kembali lagi ketempat semula. Kemudian Euler mampu memecahkan permasalahan ini dengan memodelkan masalah ini ke dalam graf. Daratan dinyatakan sebagai titik (*vertex*), dan jembatan dinyatakan sebagai sisi (*edge*). Kemudian graf ini disebut dengan graf Eulerian. Sejak saat itu graf berkembang sangat pesat. Beberapa teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah pelabelan, dominating set, coloring, rainbow connection, dan lain-lain. Beberapa contoh aplikasi graf adalah jaringan komunikasi, jaringan lalu lintas, pencarian rute terpendek dan lain-lain.

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah pelabelan. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek (1963), Stewart (1967), Kotzig dan Rosa (1970). Suatu pelabelan adalah pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf pada bilangan bulat positif dan membentuk barisan aritmatika yang disebut label. Berdasarkan elemen-elemen yang dilabeli maka pelabelan dibagi kedalam tiga jenis, yaitu pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*), dan pelabelan total (*total labeling*). Pelabelan titik adalah pelabelan dengan daerah asalnya berupa himpunan titik yang memenuhi sifat tertentu. Pelabelan sisi adalah pelabelan dengan daerah asalnya berupa himpunan sisi yang memenuhi sifat tertentu. Sedangkan pelabelan total adalah pelabelan dengan daerah asalnya berupa himpunan titik dan sisi yang memenuhi sifat tertentu (Kotzig and Rosa, 1970).

Pelabelan dikembangkan menjadi pelabelan ajaib dan anti ajaib. Pelabelan ajaib (*magic*) pertama kali diperkenalkan oleh Kotzig dan Rosa, yaitu jika jumlah label sisi di sekitar titik mempunyai bobot yang sama. Sedangkan pelabelan anti ajaib (*antimagic*) adalah pengembangan dari pelabelan ajaib (*magic*) yaitu label yang mempunyai bobot sisi yang berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan a sebagai suku pertama dan d sebagai nilai bedanya, dengan a, d adalah bilangan bulat tak negatif dan $a \neq 0$. Pada setiap pelabelan sebuah graf, kemungkinan nilai beda untuk barisan aritmatikanya adalah $d \leq t$, dimana t merupakan batas atas untuk nilai beda dan t bilangan bulat positif. Setiap pelabelan graf memiliki nilai batas atas d yang berbeda (Dafik, 2009). Tujuan dari menentukan batas atas adalah untuk mengetahui nilai beda maksimum pada suatu pelabelan.

Pelabelan super adalah bila $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ dan $f(E) = \{p+1, \dots, p+q\}$. Pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut merupakan suatu graf $G = (V(G), E(G))$ dengan H merupakan subgraf dari G dimana untuk setiap sisinya termuat dalam subgraf H dan G isomorfik dengan H . Inayah et al. (2009) mengembangkan suatu pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut yaitu bahwa suatu pelabelan selimut (a, d) - \mathcal{H} -antimagic pada graf G merupakan fungsi bijektif sehingga terdapat barisan aritmatika $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(t-1)d\}$.

Hasil-hasil pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut yang sudah ditemukan antara lain pelabelan selimut (a, d) - \mathcal{H} -anti ajaib super pada graf sun, fun, dan generalized Petersen oleh Karyanti (2012). Inayah (2013) meneliti suatu pelabelan selimut (a, d) - \mathcal{H} -antimagic covering pada graf roda W_n . Keantimagikan Super Total Selimut pada Gabungan Saling Lepas Graf Shackle Triangular Book oleh Agustin et al. (2014). Pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada shackle graf triangular book oleh Pudyaningrum (2014). Selanjutnya, pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total covering pada graf triangular ladder oleh Jamil (2014). Berdasarkan pada penelitian sebelumnya, peneliti akan mengembangkan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir, dengan menentukan batas atas dan fungsi bijektif. Graf Semi Jahangir tunggal dinotasikan dengan SJ_n . Sedangkan untuk gabungan saling lepas graf Semi Jahangir dinotasikan dengan ${}_mSJ_n$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

- berapa batas atas d super (a,d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir tunggal (*konektif*) dan gabungan saling lepas (*diskonektif*)?
- bagaimana fungsi bijektif super (a,d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir tunggal (*konektif*) dan gabungan saling lepas (*diskonektif*)?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penelitian ini antara lain:

- graf yang dilabeli merupakan graf yang terhubung, graf sederhana dan tidak berarah;
- super (a,d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir gabungan saling lepas disimbolkan dengan mSJ_n , dengan $m \geq 2$, $n \geq 2$ dan m, n adalah bilangan asli.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini meliputi:

- menentukan batas atas d super (a,d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir tunggal (*konektif*) dan gabungan saling lepas (*diskonektif*);
- menentukan fungsi bijektif super (a,d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir tunggal (*konektif*) dan gabungan saling lepas (*diskonektif*).

1.5 Manfaat Penelitian

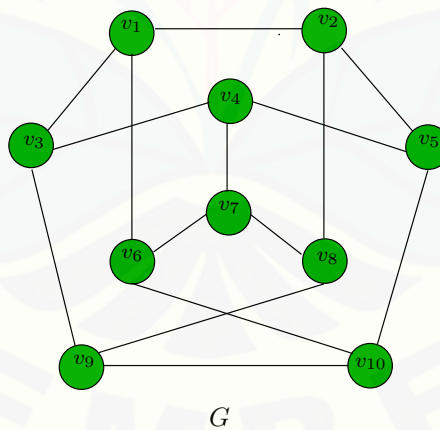
Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini, yaitu:

- menambahkan pengetahuan baru dalam bidang teori graf mengenai fungsi bijektif super (a,d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir *konektif* dan *diskonektif*;
- memberi motivasi pada peneliti lain untuk meneliti super (a,d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada jenis graf yang lainnya;
- hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah super (a,d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar dan Terminologi Graf

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ yang berarti V merupakan himpunan tak kosong dari titik-titik (*vertex*) dan E merupakan himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang titik. Himpunan titik di graf G dinyatakan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi di graf G dinyatakan dengan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ atau $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$ dimana $e = (v_i, v_j)$ yang berarti sisi yang menghubungkan titik v_i dan v_j . Definisi diatas menyatakan bahwa V tidak boleh kosong sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf yang hanya memiliki satu buah titik tanpa sebuah sisi dinamakan graf trivial (Munir, 2010). Banyaknya titik di G dinotasikan dengan $|V(G)|$ sedangkan banyaknya sisi pada graf G disebut size dari G , sering dinotasikan dengan $|E(G)|$. Gambar 2.1, G adalah graf dengan $|V(G)| = 10$ dan $|E(G)| = 15$, memiliki himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}\}$.



Gambar 2.1 Contoh Graf G

Dua buah titik pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika (u, v) adalah sebuah sisi pada graf G (Purwanto et al., 2006). Pada graf G , v_4 bertetangga dengan v_3, v_5, v_7 . Sedangkan jika ada sebuah sisi yang menghubungkan dua titik, maka dapat dikatakan titik tersebut bersisihan (*incident*) dengan sisi tersebut. Pada graf G , v_6 bersisihan dengan $(v_1, v_6), (v_6, v_{10}), (v_6, v_7)$

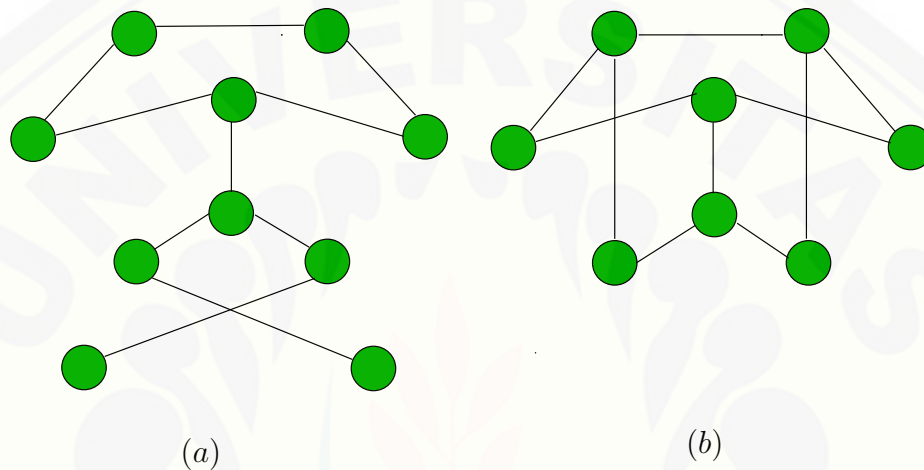
Derajat (*degree*) suatu titik adalah jumlah sisi yang bersisihan dengan titik tersebut, dinotasikan dengan $d(v)$. Derajat minimum dan derajat maksimum titik-titik di G berturut-turut dinyatakan dengan $\delta(G)$ dan $\Delta(G)$. Pada gambar 2.1, derajat minimum ($\delta(G)$) = 3 dan derajat maksimum ($\Delta(G)$) = 3. Untuk graf yang setiap titiknya mempunyai nilai derajat sama maka biasanya dinamakan graf reguler. Graf G pada gambar 2.1 merupakan graf reguler karena memiliki derajat yang sama yaitu 3. Dan titik yang tidak mempunyai sisi yang bersisihan dengannya, atau dapat dinyatakan titik yang berderajat 0 dinamakan titik terisolasi (*isolated vertex*). Ketika sisi $(v_1, v_2), (v_1, v_6),$ dan (v_1, v_3) pada graf G dihapus maka titik v_1 menjadi titik terisolasi.

Jalan (*walk*) dari suatu graf dinotasikan dengan $W(G)$ adalah barisan hingga yang diawali dan diakhiri dengan titik dimana unsur-unsurnya saling bergantian antara titik dan sisi, sedemikian hingga $v_i v_{j+1}$ adalah sisi di G untuk setiap $i = 0, 1, 2, n-1$, yaitu $W(G) = v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$. Jika jalan $W(G)$ berlaku $v_1 = v_n$ maka $W(G)$ dikatakan jalan tertutup dan dikatakan jalan terbuka jika $v_1 \neq v_n$. Sebuah jalan dikatakan lintasan (*path*) jika semua titiknya berbeda sedangkan jika semua sisinya berbeda maka dikatakan jejak (*trail*), dengan kata lain *path* merupakan *trail* yang tidak memiliki titik yang berulang. Panjang sebuah jalan (*walk*) dihitung dari banyaknya sisi yang dilintasi oleh jalan tersebut. Sikel didefinisikan suatu lintasan yang tertutup. Pada gambar 2.1, $v_1, v_6, v_7, v_8, v_2, v_1$ merupakan sikel, v_1, v_6, v_{10} merupakan path (lintasan).

Jarak atau *distance* dari titik u ke v , dinotasikan dengan $\delta(u, v)$ dan didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v . Diameter dari sebuah graf G adalah jarak maksimum dari sebarang dua titik di G yang dino-

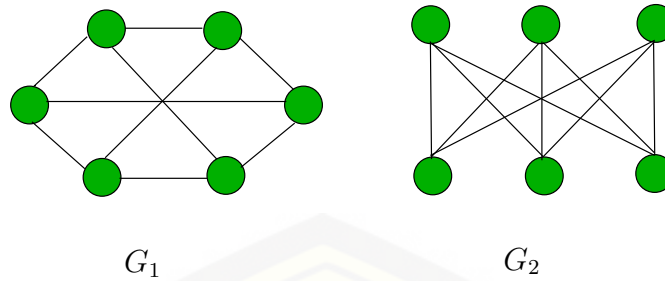
tasikan dengan $diamG = \max\{e(v) : v \in V\}$ dan $girth$ dari sebuah graf G adalah panjang siklus terpendek dari graf G . Sebagai contoh pada gambar 2.1 jarak dari titik v_1 ke v_{10} adalah 2. Diameter dari graf G adalah 2 dan $girth$ 5.

Sebuah graf H adalah sebuah subgraph dari G jika setiap titik pada H adalah titik dari G , dan setiap sisi dari H adalah sisi dari G . Dengan kata lain, $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Hartsfield and Ringel (1994) mengungkapkan bahwa subgraph H adalah sebuah spanning subgraph dari G jika H mengandung semua titik dari graf G , atau $V(H) \subseteq V(G)$. Pada gambar 2.2 (a) merupakan contoh spanning subgraph dari G dan (b) subgraf dari G .



Gambar 2.2 Contoh Subgraf dan Spanning Subgraf

Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik dan sisi-sisi kedua graf tersebut sedemikian sehingga jika sisi e bersisian dengan titik u dan v di G_1 , maka sisi e' yang berkorespondensi di G_2 juga harus bersisian dengan titik u' dan v' di G_2 . Dari definisi diatas kita dapat menyederhanakan bahwa dua buah graf isomorfik adalah dua buah graf yang sama, hanya tampilan secara geometrik kedua graf terlihat berbeda. Contoh graf isomorfik dapat dilihat pada gambar 2.3 yaitu G_1 isomorfik dengan G_2 .

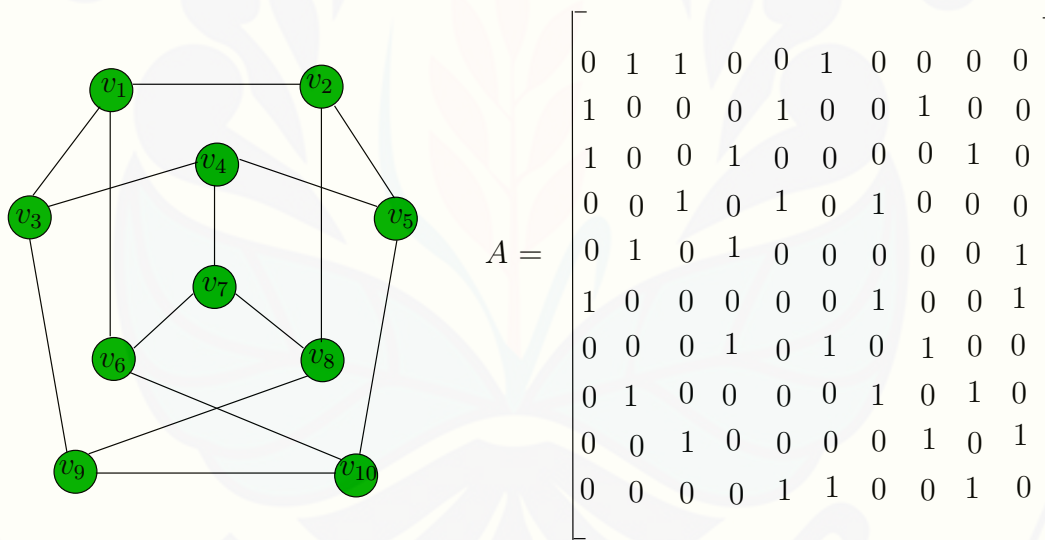


Gambar 2.3 Contoh Graf Isomorfik

Matriks ketetangaan (*adjacency matrix*) adalah matriks yang berordo $n \times n$. Sebuah matriks ketetangaan disimbolkan dengan $A(G) = [a_{ij}]$ dari graf G didefinisikan dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Gambar 2.4 memperlihatkan graf 10 titik dengan matriks ketetangaannya.

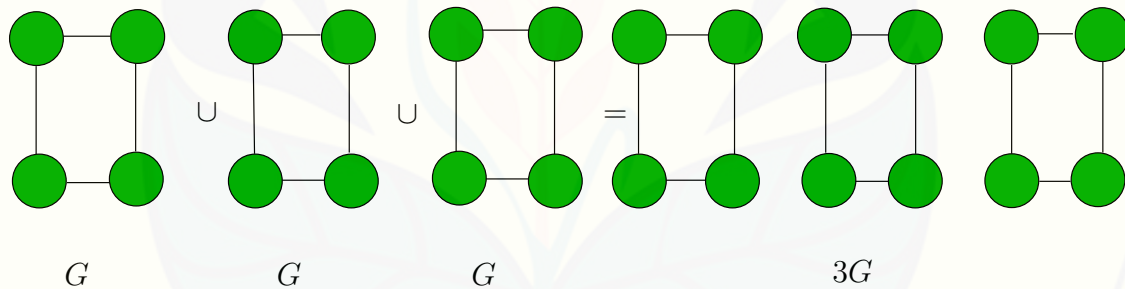


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 2.4 Graf dengan Matriks Ketetangaannya

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis yaitu graf sederhana (*simple graph*), graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda. Sedangkan graf tak sederhana (*un-simple graph*), graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas dua jenis yaitu graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak berarah (*undirected graph*), sedangkan graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah (*directed graph*). Sebuah graf G disebut terhubung (*connected*) jika untuk sembarang dua titik u dan v pada G terdapat sebuah *path* antara u dan v , sedangkan jika yang terjadi adalah sebaliknya maka G disebut tidak terhubung (*disconnected*).

Disjoint union of disconnected graph mG didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari m buah salinan graf G , atau dapat juga dikatakan sebagai graf dengan m komponen, dimana setiap komponennya adalah graf G . Dengan kata lain $mG = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_m$, dengan $G_1 = G_2 = G_3 = \dots = G_m = G$. Wijaya (2001) menjelaskan misal graf G mempunyai p titik dan q sisi, maka graf mG mempunyai mp titik dan mq sisi. Pada Gambar 2.5 dapat dilihat contoh graf gabungan $3G$ yang mempunyai 3 salinan graf G .



Gambar 2.5 Contoh *Disjoint union of disconnected graph*

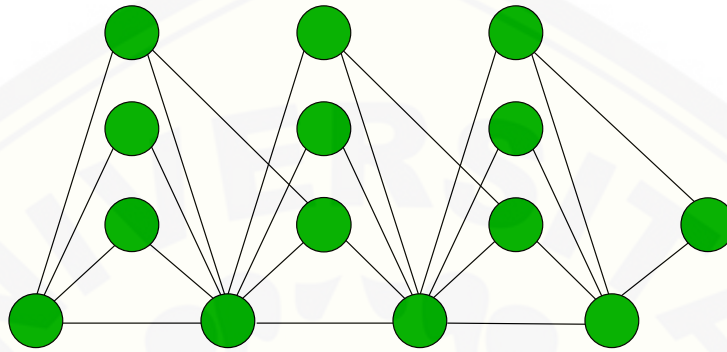
2.2 Graf Khusus

Suatu graf disebut graf khusus karena memiliki ciri-ciri tertentu yang mudah dikenali dan mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Berikut akan dijelaskan

beberapa contoh graf khusus.

1. *Shackle Graf Triangular Book*

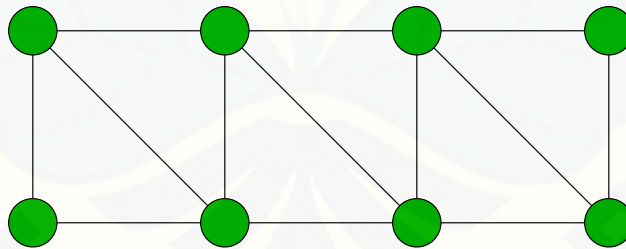
Shackle Graf triangular book merupakan graf yang terbentuk dari beberapa Graf *triangular book* dimana mempunyai tepat satu titik yang sama. *Shackle graf triangular book* adalah graf SBt_n . Contoh *shackle graf triangular book* pada gambar 2.6 (Pudyaningrum, 2014)



Gambar 2.6 *Shackle Graf Triangular Book* SBt_3

2. *Graf Triangular Ladder*

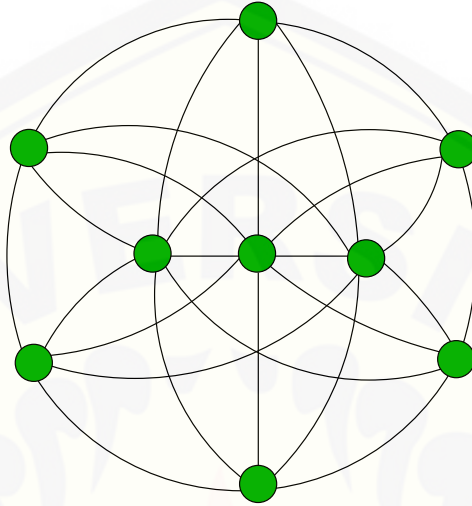
Graf *triangular ladder* dinotasikan L_n , $n \geq 2$ adalah sebuah graf yang diperoleh dengan melengkapi graf *ladder* dengan menambahkan sisi $u_i v_{i+1}$ untuk $1 \leq i \leq n - 1$ (Sugeng, 2005). Pada Gambar 2.7 merupakan contoh dari graf *triangular ladder* dengan $n = 4$ (Jamil, 2014)



Gambar 2.7 Contoh Graf *Triangular Ladder* L_4

3. *Joint* Graf Lintasan dan Graf Lingkaran

Joint graf merupakan salah satu operasi graf, joint graf $(G_1 + G_2)$ merupakan joint dari graf G_1 dan G_2 , dinotasikan dengan $G = (G_1 + G_2)$. Gambar 2.8 merupakan *joint* graf dari graf lintasan dan graf lingkaran (Harsya, 2015).



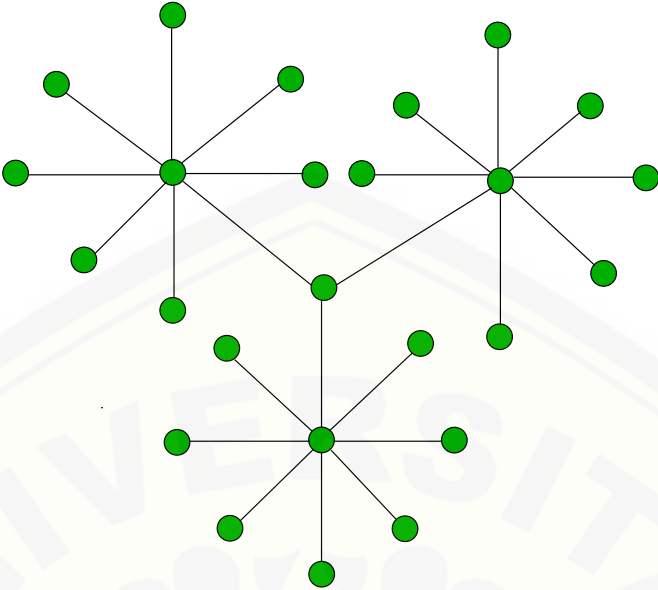
Gambar 2.8 Contoh *Joint* Graf Lintasan dan Graf Lingkaran $(C_6 + P_3)$

4. Amalgamasi Graf Bintang

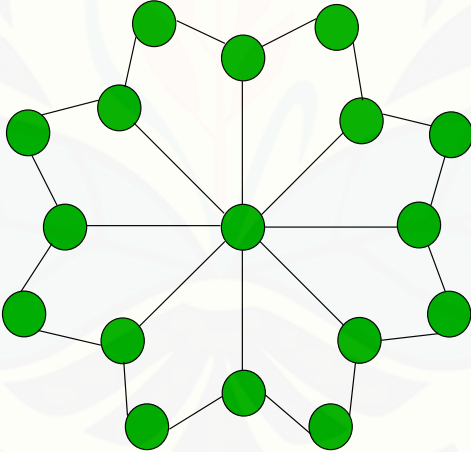
Amalgamasi dinotasikan dengan $Amal(H_i, v_i)$. Misalkan H_i adalah suatu graf berhingga dan setiap H_1 mempunyai suatu titik v_i yang disebut titik pusat. Contoh amalgamasi graf bintang dapat dilihat pada gambar 2.9 (Harsya, 2015).

5. Graf Jahangir

Graf Jahangir adalah generalisasi dari graf roda dengan menambahkan satu titik diantara dua titik yang bertetangga (kecuali titik pusat). Graf Jahangir dinotasikan dengan J_n . Berikut contoh graf Jahangir dapat dilihat pada gambar 2.10 (K. Ali and Tomescu, 2007).



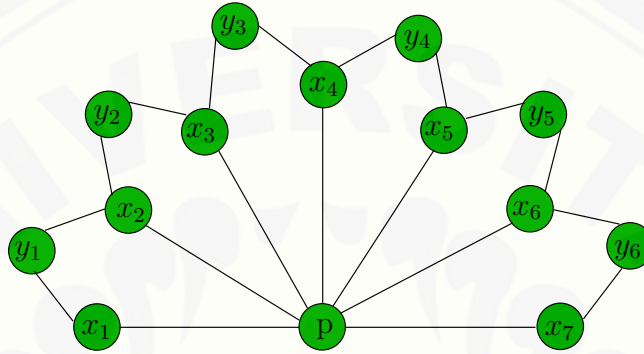
Gambar 2.9 Contoh Amalgamasi Graf Bintang $Amal(S_8, 1, 3)$



Gambar 2.10 Contoh Graf Jahangir J_8

6. Graf Semi Jahangir

Graf Semi Jahangir adalah graf yang terbentuk dari graf Jahangir dengan menghilangkan satu titik yang berderajat dua. Graf Semi Jahangir dinotasikan dengan SJ_n dengan $n \geq 2$. Himpunan titik graf SJ_n adalah $V = \{p, x_i, y_k; 1 \leq i \leq n + 1; 1 \leq k \leq n\}$ dan himpunan sisinya $E = \{px_i; 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i+1} y_i; 1 \leq i \leq n\}$, sehingga kardinalitas $|V| = 2n + 2$ dan sisi $|E| = 3n + 1$. Berikut contoh graf Semi Jahangir dapat dilihat pada gambar 2.11.

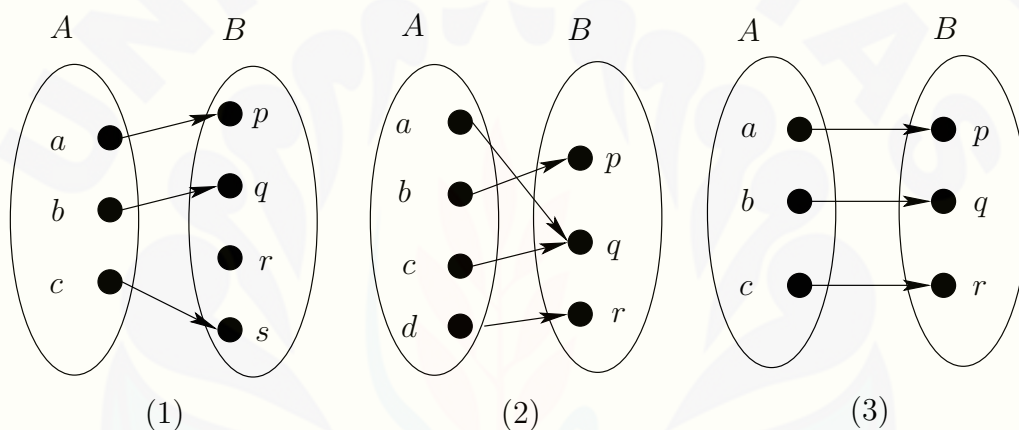
Gambar 2.11 Contoh Graf Semi Jahangir SJ_6

2.3 Fungsi dan Barisan Aritmatika

Fungsi adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B yang memasangkan setiap anggota himpunan A tepat satu dengan anggota himpunan B . Fungsi dinotasikan dengan $f : A \rightarrow B$ adalah aturan korespondensi yang menghubungkan setiap $x \in A$ dengan tepat satu anggota B . Himpunan A yaitu himpunan yang memuat elemen pertama dari elemen-elemen dalam f , disebut *domain* f dan dapat dinyatakan sebagai D_f . Himpunan B yaitu himpunan yang memuat elemen kedua dari elemen-elemen dalam f , disebut *range* f dan dinyatakan sebagai R_f . Notasi $f : A \rightarrow B$ menunjukkan bahwa f merupakan fungsi dari A ke B , yang sering juga dibaca " f adalah pemetaan dari A ke B ", atau " f memetakan A ke B ". Jika (a, b) anggota dari f , maka $b = f(a)$ untuk $(a, b) \in f$. Secara umum, fungsi dapat dibedakan menjadi 3, yaitu:

1. Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi satu-satu (injektif) jika dan hanya jika untuk sebarang x_1 dan x_2 anggota himpunan A , diman x_1 tidak sama dengan x_2 maka berlaku $f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi kepada atau fungsi surjektif jika dan hanya jika range $f(R_f)$ sama dengan B atau $f : A \rightarrow B$ merupakan fungsi onto jika $R_f = B, \forall x \in A$. Dengan kata lain, suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan range atau daerah hasil.
3. Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus fungsi surjektif.

Gambar 2.12 menunjukkan fungsi injektif, surjektif dan bijektif.



Gambar 2.12 (a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif

Barisan aritmatika adalah suatu barisan yang teratur, dengan a adalah suku pertama dan selisih bilangan-bilangan berurutan pada barisan aritmatika disebut beda $b = U_n - U_{n-1}$ yang selalu bernilai sama untuk membentuk suatu deret $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$ dimana $U_1 - U_2 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1} = \text{konstanta}$

7, 10, 13, 16, 19, ...

Barisan diatas memiliki selisih yang sama yaitu 3. Jika suku pertama $U_1 = a$ untuk menentukan nilai suku ke-n, perhatikan penurunan rumus berikut:

$$U_2 - U_1 = b \Rightarrow U_2 = U_1 + b = a + b$$

$$U_3 - U_2 = b \Rightarrow U_3 = U_2 + b = a + b + b = a + 2b$$

$$U_4 - U_3 = b \Rightarrow U_4 = U_3 + b = a + 2b + b = a + 3b$$

...

$$U_n - U_{n-1} = b \Rightarrow U_n = U_{n-1} + b = a + (n - 1)b$$

Sehingga rumus suku ke-n dari suatu deret aritmatika adalah $a + (n - 1)b$.

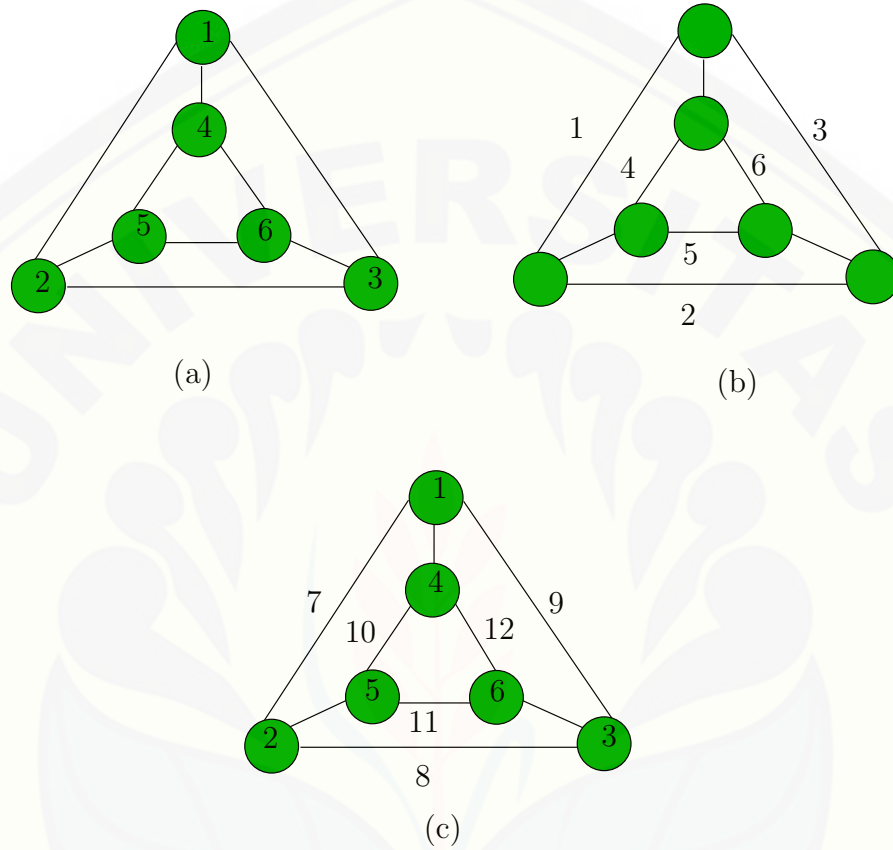
2.4 Pelabelan Graf

2.4.1 Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur-unsur titik dan sisi dengan bilangan bulat positif. Fungsi yang memetakan himpunan elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif disebut fungsi bijektif jika ada dua buah elemen yang berbeda dan semua elemen pada graf dinomori dengan bilangan bulat positif yang berbeda. Pelabelan titik (*vertex labelling*) adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, jika domainnya himpunan sisi disebut pelabelan sisi (*edge labelling*) dan jika domainnya gabungan himpunan titik dan sisi, maka pelabelannya disebut pelabelan total (*total labellings*) (Wallis, 2001). Gambar 2.13 menunjukkan pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Secara matematis, definisi pelabelan dapat dituliskan sebagai berikut:

Pelabelan graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan $D \rightarrow N$, dimana D : domain dan N : himpunan label graf G , jika :

- a. $D = V$ adalah pelabelan titik
- b. $D = E$ adalah pelabelan sisi
- c. $D = V \cup E$ adalah pelabelan total



Gambar 2.13 (a) pelabelan titik, (b) pelabelan sisi, (c) pelabelan total

Misalkan G graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E . Pelabelan titik, jumlah label dua titik yang menempel pada sisi disebut *bobot sisi*. Jika semua jumlah label dua titik mempunyai bobot sisi sama maka disebut pelabelan titik sisi ajaib (*edge magic vertex labelling*). Jika semua jumlah label dua titik mempunyai bobot sisi yang berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan a suku pertama dan d sebagai nilai bedanya maka disebut pelabelan sisi anti ajaib (*edge antimagic vertex labelling*). Pelabelan total, jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada suatu sisi disebut *bobot sisi*. Pelabelan total sisi ajaib adalah jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama. Sedangkan jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama a dan nilai beda d maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total sisi anti ajaib (pelabelan total sisi antimagic) (Dafik et al., 2008).

2.4.2 Pelabelan Selimut- \mathcal{H} -Antimagic

Pelabelan selimut- \mathcal{H} anti ajaib (*antimagic*) super pada graf G dengan v titik dan e sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik-titik dan sisi-sisi pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi, secara matematis ditulis dalam bentuk $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ dengan sifat bahwa setiap subgraf dari G yang isomorfik dengan H dimana H juga subgraf dari G mempunyai total label $\omega(H)$ yang berbeda, $\omega(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$. Graf G dikatakan memiliki pelabelan \mathcal{H} anti ajaib super jika himpunan titik $V(G)$ merupakan pemetaan bijektif f ke himpunan $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$ (Gutierrez and Llado, 2005)

2.5 Lemma Batas Atas

Lemma 2.5.1. *Jika sebuah graf $G(V, E)$ adalah pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total covering maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

untuk $s = |H_i|$, $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$

Bukti. $f(V) = 1, 2, 3, \dots, p_G$ dan $f(E) = p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, \dots, p_G + q_G$. Misalkan graf (p_G, q_G) mempunyai pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total dengan fungsi total $f(\text{total}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (s - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned} a + (s - 1)d &\leq p_G + (p_G - 1) + (p_G - 2) + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\ &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H q_G \\ &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (s - 1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\ &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\ &\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H q_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\ &= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\ &= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\ &= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\ d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s - 1)} \end{aligned}$$

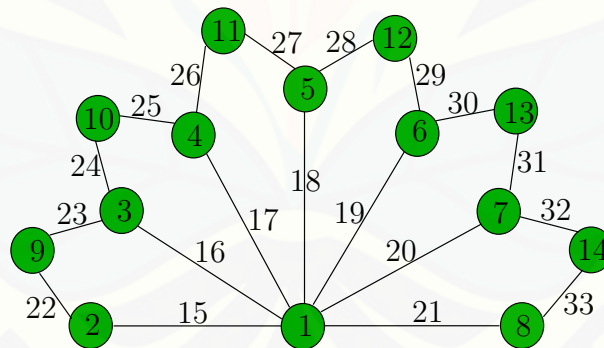
Dari persamaan diatas terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$ jika graf G memiliki super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total covering dari berbagai famili graf (Dafik, 2007) \square

2.6 Aplikasi Graf

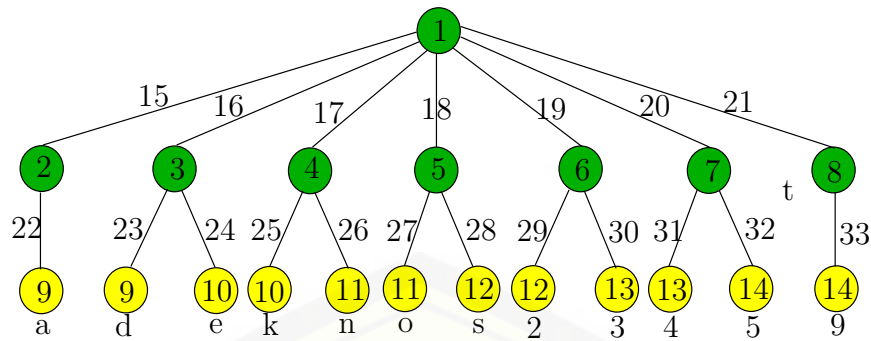
Dafik (2015) memberikan contoh aplikasi dari super (a, d) -*edge antimagic graph labeling*. Aplikasi tersebut digunakan untuk membangun kalimat sandi dari sebuah pesan yang dikeluarkan oleh perbankan ke kepada suatu perusahaan, agar mempermudah melakukan kerja sama dan pesan tersebut bersifat rahasia. Pesan dalam kalimat tersebut adalah: **"kode akses anda 24593"**. Kalimat rahasia dari pesan di atas akan dikembangkan melalui teknik pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut.

Pertama kali harus didata huruf dan angka yang digunakan dalam pesan di atas yaitu a, d, e, k, n, o, s, 2, 3, 4, 5, 9 (spasi dan tanda baca diabaikan). Setelah mengetahui huruf dan angka yang digunakan dibangunlah diagram pohon yang berakar di label 1, kemudian lengkapi label sisinya hingga bobot total membentuk dengan $d=9$, pelabelan *antimagic* selimut pada graf Semi Jahangir.

Gambar 2.14 menunjukkan pelabelan pada graf Semi Jahangir SJ_6 dengan $d = 9$ dan gambar 2.15 adalah graf *tree* dengan pelabelan yang sama pada graf SJ_6 dengan $d = 9$.



Gambar 2.14 Graf Semi Jahangir SJ_6 dengan $d = 9$

Gambar 2.15 Graf *tree*

Kemudian letakkan huruf-huruf yang digunakan sesuai urutan abjad, dan urutkan label sisinya, maka terlihat bahwa ciphertext dari huruf $a=1522$, $d=1623$, $e=1624$, $k=1725$, $n=1726$, $o=1827$, $s=1828$, $2=1929$, $3=1930$, $4=2031$, $5=2032$, $9=2133$.

Dengan demikian pesan rahasia tanpa spasi dan tanda baca menjadi: 172518271623162415221725182816241828152217261623152219292031203221331930.

Agar lebih efisien, kombinasikan label sisi tadi dengan cara menerapkan teknik cryptosystem modulo 26 terhadap masing-masing hurufnya $a=\text{mod}(1522,26)=14$, $d=\text{mod}(1623,26)=11$, $e=\text{mod}(1624,26)=12$, $k=\text{mod}(1725,26)=9$, $n=\text{mod}(1726,26)=10$, $o=\text{mod}(1827,26)=7$, $s=\text{mod}(1828,26)=8$, $2=\text{mod}(1929,26)=5$, $3=\text{mod}(1930,26)=6$, $4=\text{mod}(2031,26)=3$, $5=\text{mod}(2032,26)=4$, $9=\text{mod}(2133,26)=1$. Berdasarkan pengkodean *polyalphabetic* dimana $0=a$, $1=b$, $2=c$, $3=d$, $4=e$, $5=f$, $6=g$, $7=h$, $8=i$, $9=j$, $10=k$, $11=l$, $12=m$, $13=n$, $14=o$, $15=p$, $16=q$, $17=r$, $18=s$, $19=t$, $20=u$, $21=v$, $22=w$, $23=x$, $24=y$, dan $25=z$, maka hasil konversinya yaitu $a=o$, $d=l$, $e=m$, $k=j$, $n=k$, $o=h$, $s=i$, $2=f$, $3=g$, $4=d$, $5=e$, $9=a$. Sehingga dihasilkan pesan rahasia sebagai berikut: $jhlm\ ojimi\ oklo\ fdeag$.

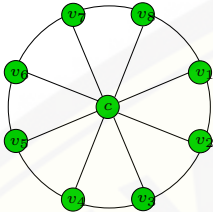
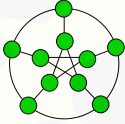
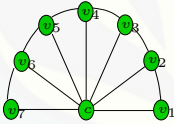
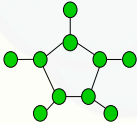
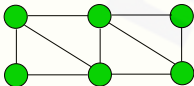
Apabila pesan rahasia tersebut dikembalikan ke pesan semula menjadi "kode akses anda 24593"

2.7 Hasil - hasil Penelitian Pelabelan Selimut \mathcal{H} -Antimagic

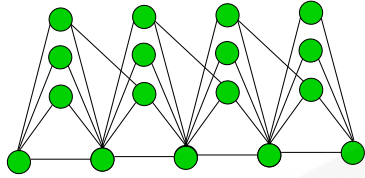
Beberapa ringkasan hasil penelitian pelabelan selimut \mathcal{H} -Antimagic yang juga dapat digunakan sebagai rujukan dalam penelitian ini akan disajikan sebagai

berikut :

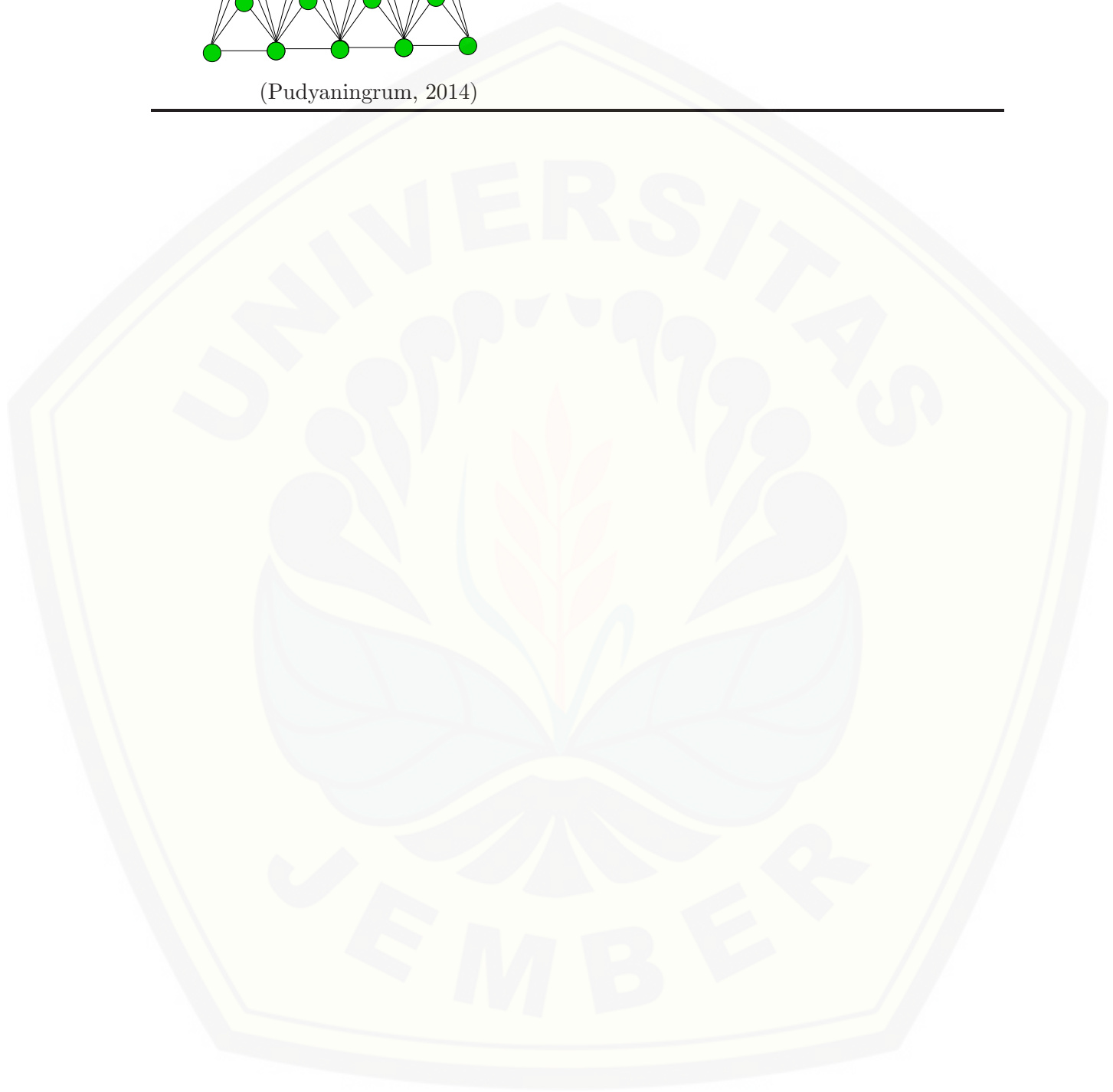
Tabel 2.1: Hasil pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic.

Graf	a	d	Hasil
 <p>W_n (<i>Wheel</i>)</p> <p>(Inayah, 2013)</p>	$3hn + 5$ $2hn + 3h + n$	$d = 3$ $d = 1$	$\mathcal{H} = C_3$
 <p>$GP_{n,k}$ (<i>Generalized Petersen</i>)</p> <p>(Karyanti, 2012)</p>	$3 + 14n - 3\lfloor n/2 \rfloor$	$d = 2$	$\mathcal{H} = K_{1,3}$
 <p>F_n (<i>Fan</i>)</p> <p>(Karyanti, 2012)</p>	$12 + 4n + \lfloor n/2 \rfloor$ $8 + 6n + \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 4$ $d = 2$	$\mathcal{H} = C_3$
 <p>S_n (<i>Sun</i>)</p> <p>(Karyanti, 2012)</p>	$13n + 4$ $12n + 5 + \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 1$ $d = 2$	$\mathcal{H} = K_{1,3}$
 <p>L_n (<i>Triangular Ladder</i>)</p> <p>(Jamil, 2014)</p>	$16n - 3$ $15n - 1$	$d = 0$ $d = 1$	$\mathcal{H} = C_3$

Graf	a	d	Hasil
SBt_n (Shackle Graf Triangular book)	$36n + 84$	$d = 96$	$\mathcal{H} = Bt_3 + 2e$
	$73n + 47$	$d = 15$	



(Pudyaningrum, 2014)



BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif. Langkah-langkah dalam metode deduktif yaitu memilih graf, lalu mencari kardinalitas dari elemen graf beserta batas atasnya, melabeli sampai terbentuk pola. Setelah itu dicari pelabelan sisi pada graf sedemikian hingga menghasilkan bobot total yang membentuk barisan aritmatika. Langkah akhir dalam metode ini adalah menentukan fungsi bijektif untuk pelabelan total graf. Metode ini digunakan pada pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir tunggal dan gabungan.

3.2 Rancangan Penelitian

Adapun rancangan penelitian ini digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Rancangan penelitian yang dimaksud adalah sebagai berikut:

1. Penotasian Titik dan Sisi

Graf semi jahangir adalah graf SJ_n dengan $2n + 2$ titik $V(SJ_n) = \{p, x_i, y_k; 1 \leq i \leq n + 1; 1 \leq k \leq n\}$ dan $3n + 1$ sisi $E(SJ_n) = \{px_i; 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i+1} y_i; 1 \leq i \leq n\}$. Adapun gabungan graf Semi Jahangir mSJ_n didefinisikan sebagai gabungan dari sebanyak m graf Semi Jahangir yang mempunyai titik $V(mSJ_n) = \{p^j, x_i^j, y_k^j; 1 \leq i \leq n + 1; 1 \leq k \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan sisi $E(mSJ_n) = \{p^j x_i^j; 1 \leq i \leq n + 1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i^j y_i^j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i+1}^j y_i^j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$.

2. Indikator Pelabelan

Indikator pelabelan selimut super H antimagic pada graf Semi Jahangir dalam penelitian ini adalah:

(a) Label titik berbeda semua

Label titik pada pelabelan selimut super SJ_n -antimagic pada graf

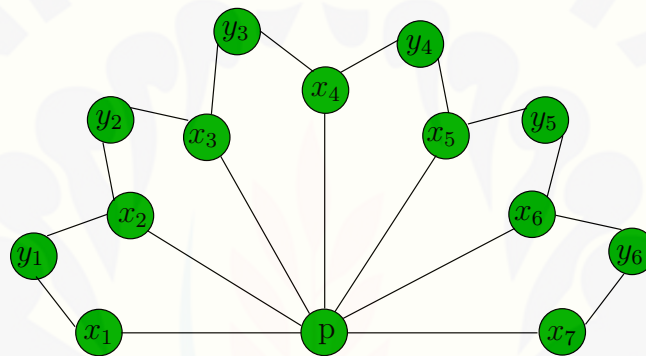
Semi Jahangir merupakan fungsi bijektif dari himpunan titik pada graf Semi Jahangir ke bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik.

(b) Label sisi berbeda semua

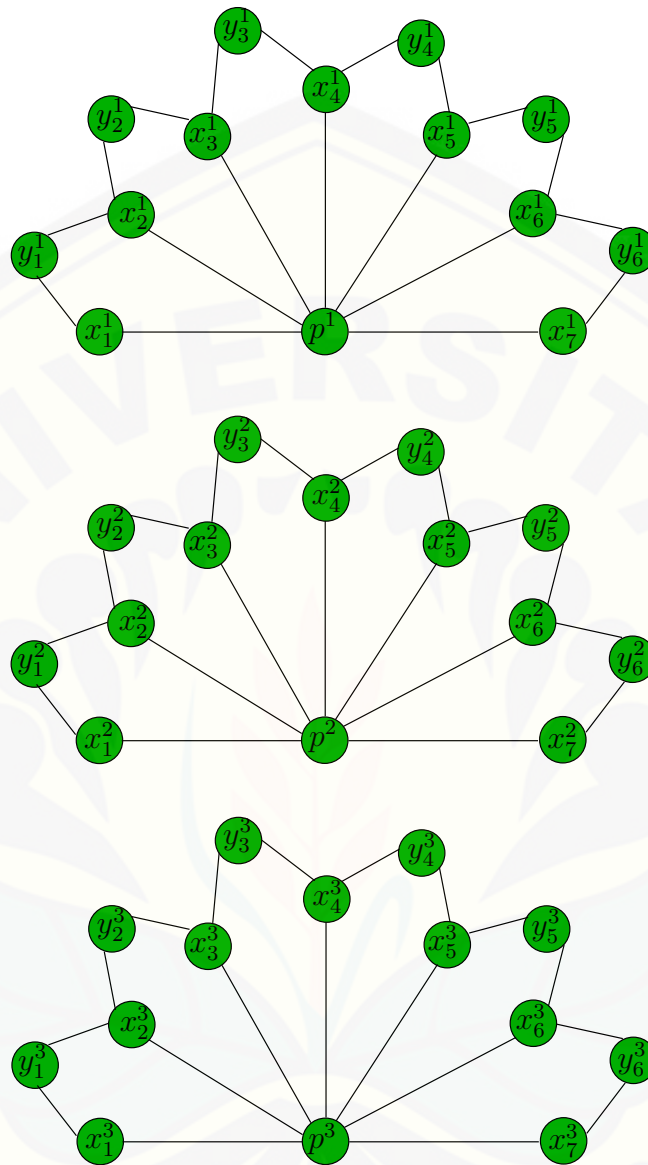
Label sisi untuk pelabelan selimut super SJ_n -antimagic pada graf Semi Jahangir merupakan fungsi bijektif dari himpunan sisi pada graf Semi Jahangir ke bilangan bulat dari banyaknya titik ditambah 1 sampai sejumlah titik dan sisi.

(c) Total label selimut SJ_n sebagai subgraf pada graf Semi Jahangir mempunyai nilai konstan untuk subgrafnya.

Gambar 3.1 dan 3.2 merupakan contoh graf Semi Jahangir tunggal dan gabungan saling lepas dengan penotasian titik dan sisinya.



Gambar 3.1 Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir konektif SJ_6



Gambar 3.2 Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir diskonektif SJ_6

3.3 Teknik Penelitian

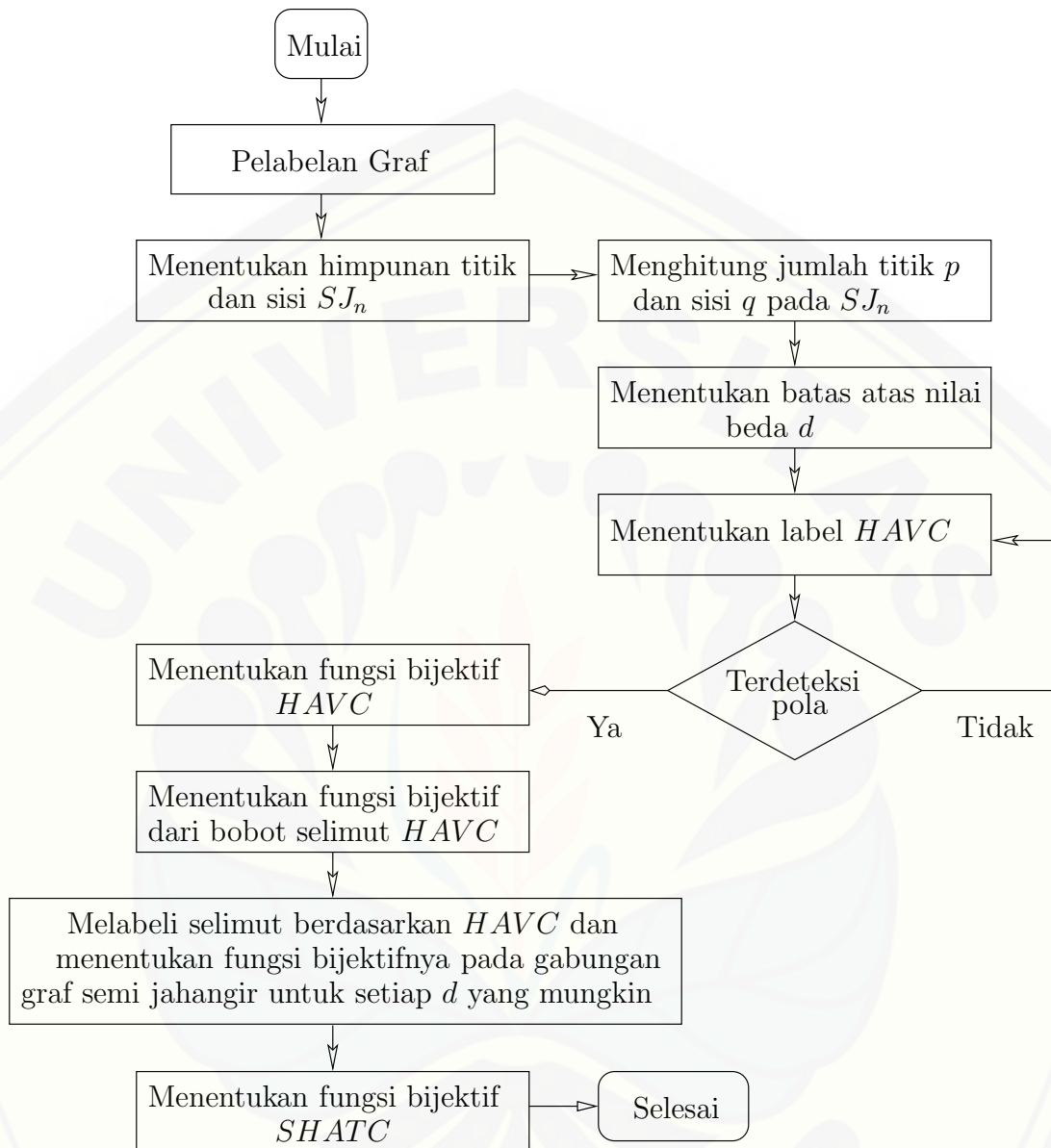
Penelitian ini dilakukan pada graf Semi Jahangir SJ_n dan gabungan graf Semi Jahangir mSJ_n . Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

1. Menghitung jumlah titik pG dan sisi qG pada graf Semi Jahangir SJ_n
2. Menentukan batas atas nilai beda d pada graf Semi Jahangir SJ_n
3. Menentukan label HAVC (\mathcal{H} Antimagic Vertex Covering) atau pelabelan titik (a, d) -selimut antimagic pada graf Semi Jahangir SJ_n
4. Apabila label HAVC berlaku untuk beberapa graf maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan menentukan fungsi bijektif dari HAVC pada graf Semi Jahangir SJ_n
5. Menentukan fungsi bijektif HAVC pada graf Semi Jahangir SJ_n
6. Melabeli gabungan graf Semi Jahangir mSJ_n dengan SHATC (Super \mathcal{H} Antimagic Total Covering) atau pelabelan total super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic covering dengan nilai beda d yang *feasible*
7. Menentukan fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic covering gabungan graf Semi Jahangir mSJ_n .

Penelitian ini akan menemukan berbagai pola pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut dengan berbagai nilai awal a serta nilai beda d . Sehingga penelitian ini juga dapat dinyatakan dalam pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir.

Teknik penelitian yang dilakukan pada gabungan saling lepas dari graf Semi Jahangir juga sama dengan teknik penelitian seperti yang telah disebutkan diatas namun teknik tersebut diterapkan pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir. Dalam penelitian selanjutnya, graf konektif maupun diskonektif dari graf Semi Jahangir di atas akan dilakukan untuk order n

Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam bagan alir pada Gambar 3.3

Gambar 3.3 Flowchart super (a, d) - \mathcal{H} total selimut

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan diberikan penjelasan terkait dengan hasil penelitian pelabelan super \mathcal{H} antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir dengan hasil akhir berupa teorema baru pelabelan super \mathcal{H} antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir. Penelitian ini diawali dengan menentukan nilai batas atas (d), menentukan $\mathcal{H}AV$ dan bobot selimut $\mathcal{H}AV$ kemudian menentukan $SHATC$ dan selanjutnya bobot selimut total $SHATC$ untuk membuktikan bahwa gabungan graf ini merupakan $SHATC$.

Hasil utama dari penelitian yang akan dibahas terkait dengan pelabelan super \mathcal{H} antimagic total selimut pada graf SJ_n adalah lemma dan teorema. Terdapat 1 lemma yang akan digunakan untuk menentukan batas atas dan 22 teorema baru yang terdiri dari 17 teorema untuk konektif dan 5 teorema untuk diskonektif. Untuk konektif terdapat 4 formasi label titik. Formasi pertama terdiri dari 11 permutasi, formasi kedua terdiri dari 4 permutasi, formasi ketiga terdiri dari 1 permutasi, dan formasi keempat terdiri dari 1 permutasi. Dan untuk diskonektif terdapat 2 formasi label titik. Formasi pertama terdiri dari 4 permutasi dan formasi kedua terdiri dari 1 permutasi. Format penyajian temuan penelitian dalam bab ini diawali dengan pernyataan teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema. Berikut ini akan dijelaskan tahap-tahap bagaimana teorema tersebut ditemukan sekaligus menjawab rumusan masalah yang telah disajikan sebelumnya.

4.1 Super (a,d) - \mathcal{H} Antimagic Total Selimut pada Graf Semi Jahangir Konektif

Penentuan batas atas d merupakan hal yang penting dalam penelitian ini. Batas atas ini adalah titik penting yang mengisyaratkan seberapa banyak nilai beda yang mungkin dimiliki oleh graf Semi Jahangir maupun gabungan saling lepasnya dalam pelabelan super antimagic total selimut. Untuk menentukan nilai-

nilai d tersebut, perlu diketahui jumlah titik (p_G) dan jumlah sisi (q_G), serta jumlah titik (p_H) dan jumlah sisi (q_H) pada subgraf atau pada selimut graf Semi Jahangir tunggal maupun gabungannya beserta jumlah selimutnya (s).

Berdasarkan definisi, graf Semi Jahangir adalah graf SJ_n dengan titik $V(SJ_n) = \{p, x_i, y_k; \text{ untuk } 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq k \leq n\}$ dan sisi $E(SJ_n) = \{px_i; 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$. Nilai n yang dimaksudkan adalah banyaknya *expand* graf Semi Jahangir dari samping kiri ke kanan.

Graf Semi Jahangir dengan n yang berbeda, didapatkan rumusan jumlah titik pada graf Semi Jahangir SJ_n adalah $p_G = 2n + 2$. Sedangkan jumlah sisi pada graf Semi Jahangir SJ_n adalah $q_G = 3n + 1$. Selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n berupa subgraf dari graf Semi Jahangir yaitu C_4 , maka jumlah titik selimut $p_H = 4$, sedangkan jumlah sisi selimut $q_H = 4$ dan rumusan jumlah selimut Semi Jahangir SJ_n adalah n . Gambar 4.1 merupakan ilustrasi dari penentuan jumlah titik dan jumlah sisi pada graf Semi Jahangir.

Batas atas d graf Semi Jahangir SJ_n dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 2.5.1 yaitu sebagai berikut:

Observasi 4.1.1. *Jika graf Semi Jahangir SJ_n memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut maka $d \leq 20$.*

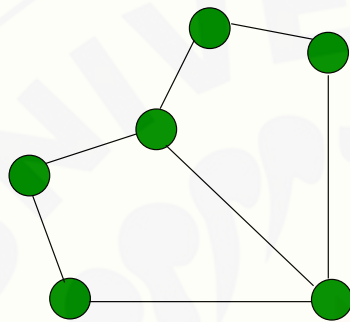
Bukti. Graf Semi Jahangir SJ_n memiliki himpunan titik $V(SJ_n) = \{p, x_i, y_k; \text{ untuk } 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq k \leq n\}$ dan sisi $E(SJ_n) = \{px_i; 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$. Sedangkan jumlah titik $p_G = 2n + 2$ dan sisi $q_G = 3n + 1$, dan jumlah titik selimut adalah $p_H = 4$ serta jumlah sisi selimut $q_H = 4$ dengan jumlah selimut n . Sesuai dengan Lemma 2.5.1, batas atas nilai beda d adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1} \\ &= \frac{(2n + 2 - 4)4 + (3n + 1 - 4)4}{n - 1} \\ &= \frac{(2n - 2)4 + (3n - 3)4}{n - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{20n - 20}{n - 1} \\
 &= \frac{20(n - 1)}{n - 1} \\
 d &\leq 20
 \end{aligned}$$

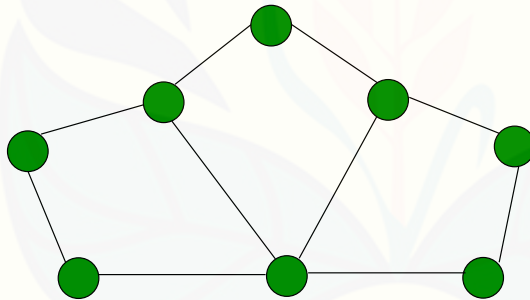
Karena pelabelan $S\mathcal{H}AT$ selalu menggunakan bilangan bulat tak negatif, maka nilai $d \geq 0$ dan d adalah bilangan bulat tak negatif, sehingga $d \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 20\}$.

□



(a)

$n = 2$
 jumlah titik = 6
 jumlah sisi = 7



(b)

$n = 3$
 jumlah titik = 8
 jumlah sisi = 10

Gambar 4.1 Jumlah titik dan sisi graf pada (a) SJ_2 , (b) SJ_3 , dan (c) SJ_4

Selanjutnya penentuan fungsi bijektif pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -anti-magic akan disesuaikan dengan nilai d yang telah ditetapkan. Untuk menentukan pelabelan selimut super \mathcal{H} antimagic pada graf Semi Jahangir digunakan

metode yang terdiri dari beberapa langkah. Metode ini diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku pada batas i yang telah ditemukan. Untuk penentuan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi barisan aritmatika, fungsi ini pada akhirnya merupakan fungsi bijektif pada graf yang diteliti. Setelah fungsi bijektif diketahui selanjutnya dilakukan pembuktian secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema yang didapat. Sebagai catatan, teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Berdasarkan hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Setelah mengetahui batas atas nilai d , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan super \mathcal{H} antimagic total selimut dengan terlebih dahulu menentukan fungsi bijektif melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika dari titik dan sisi graf Semi Jahangir SJ_n , dimana titik $V(SJ_n) = \{p, x_i, y_k; \text{ untuk } 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq k \leq n\}$ dan sisi $E(SJ_n) = \{px_i; 1 \leq i \leq n+1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ untuk $n \geq 2$.

◇ **Teorema 4.1.1.** *Ada pelabelan super $(\frac{31n+42}{2}, 0)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n genap. Dan super $(\frac{31n+41}{2}, 0)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil.*

Bukti. Labeli titik graf Semi Jahangir SJ_n dengan fungsi bijektif α_1 . Fungsi titik dari α_1 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha_1(p) &= 1, \\ \alpha_1(x_i) &= i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n + 1 \\ \alpha_1(y_i) &= n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa α_1 adalah fungsi bijektif yang memetakan SJ_n ke himpunan bilangan asli $\{1, 2, \dots, 2n+2\}$. Jika w_{α_1} didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada graf Semi Jahangir dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 4 label titik dari $\mathcal{H} = C_4$ sebagai selimutnya, maka fungsi bijektif w_{α_1} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{\alpha_1} &= \alpha_1(p) + \alpha_1(x_i) + \alpha_1(x_{i+1}) + \alpha_1(y_i) \\ &= (1) + (i + 1) + (i + 1 + 1) + (n + i + 2) \\ &= n + 3i + 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Labeli sisi graf Semi Jahangir SJ_n dengan fungsi bijektif α_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_1(px_i) &= \begin{cases} \frac{4n+i+5}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1, i \text{ ganjil} \\ \frac{5n+i+6}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i < n+1, i \text{ genap, } n \text{ genap} \\ \frac{5n+i+5}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i < n+1, i \text{ genap, } n \text{ ganjil} \end{cases} \\ \alpha_1(x_i y_i) &= \frac{10n - 4i + 8}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ \alpha_1(y_i x_{i+1}) &= \frac{10n - 4i + 10}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

Jika W_{α_1} didefinisikan sebagai bobot total selimut graf Semi Jahangir, maka W_{α_1} didapatkan dari penjumlahan bobot selimut w_{α_1} dengan fungsi label sisinya. Fungsi bobot total untuk n genap :

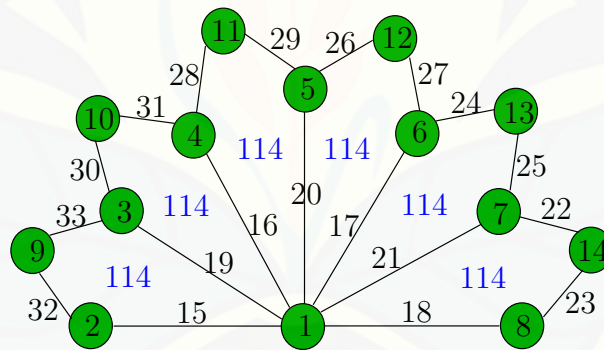
$$\begin{aligned} W_{\alpha_1} &= w_{\alpha_1} + \alpha_1(px_i) + \alpha_1(px_{i+1}) + \alpha_1(x_i y_i) + \alpha_1(y_i x_{i+1}) \\ &= (n + 3i + 6) + \left(\frac{4n + i + 5}{2}\right) + \left(\frac{5n + i + 1 + 6}{2}\right) + \left(\frac{10n - 4i + 8}{2}\right) + \\ &\quad \left(\frac{10n - 4i + 10}{2}\right) \\ &= \frac{31n + 42}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Fungsi bobot total untuk n ganjil :

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_1} &= w_{\alpha_1} + \alpha_1(px_i) + \alpha_1(px_{i+1}) + \alpha_1(x_iy_i) + \alpha_1(y_ix_{i+1}) \\
 &= (n + 3i + 6) + \left(\frac{4n + i + 5}{2}\right) + \left(\frac{5n + i + 1 + 5}{2}\right) + \left(\frac{10n - 4i + 8}{2}\right) + \\
 &\quad \left(\frac{10n - 4i + 10}{2}\right) \\
 &= \frac{31n + 41}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

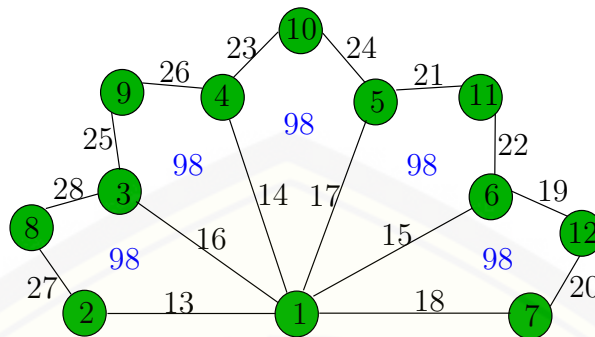
Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_1} = \left\{\frac{31n+42}{2}, \frac{31n+42}{2}, \dots, \frac{31n+42}{2}\right\}$ untuk n genap. Karena $U_n = a + (n - 1)b = \frac{31n+42}{2} + (n - 1)0 = \frac{31n+42}{2}$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(\frac{31n+42}{2}, 0)-(C_4)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n genap. Dan untuk n ganjil barisan aritmatika dari $W_{\alpha_1} = \left\{\frac{31n+41}{2}, \frac{31n+41}{2}, \dots, \frac{31n+41}{2}\right\}$. Karena $U_n = a + (n - 1)b = \frac{31n+41}{2} + (n - 1)0 = \frac{31n+41}{2}$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(\frac{31n+41}{2}, 0)-(C_4)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil. \square

Gambar 4.2 merupakan contoh super $(114, 0)-(C_4)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 untuk $n \geq 2$ dengan n genap.



Gambar 4.2 Super $(114, 0)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6

Gambar 4.3 merupakan contoh super $(98, 0)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_5 untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil.



Gambar 4.3 Super $(98, 0)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_5

Pada Gambar 4.2 merupakan graf SJ_n dengan $n = 6$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_1} = \{114, 114, 114, 114, 114, 114\}$ dengan $d = 0$ dan $a = 114$. Sedangkan pada Gambar 4.3 merupakan graf SJ_n dengan $n = 5$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_1} = \{98, 98, 98, 98, 98\}$ dengan $d = 0$ dan $a = 98$.

◇ **Teorema 4.1.2.** *Ada pelabelan super $(15n + 21, 1)$ - (C_4) antimagic total selimut \mathcal{SHATC} pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Melabeli setiap titik pada graf Semi Jahangir dengan himpunan bilangan asli sama seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga untuk fungsi titiknya $\alpha_2(p) = \alpha_1(p)$, $\alpha_2(x_i) = \alpha_1(x_i)$, $\alpha_2(y_i) = \alpha_1(y_i)$. Maka untuk fungsi bobot selimutnya $w_{\alpha_2} = w_{\alpha_1}$. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Labeli sisi graf Semi Jahangir SJ_n dengan fungsi bijektif α_2 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_2(px_i) &= 2n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n + 1, \\ \alpha_2(x_iy_i) &= 5n - 2i + 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ \alpha_2(y_ix_{i+1}) &= 5n - 2i + 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

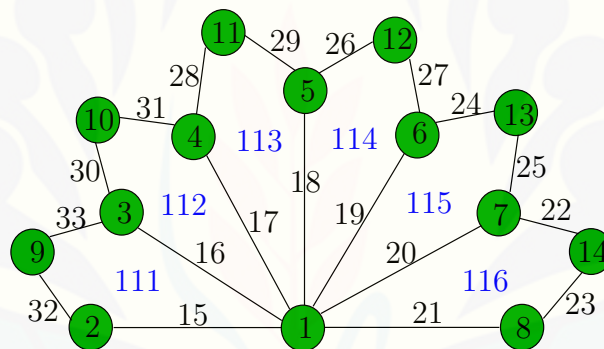
Jika W_{α_2} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Semi Jahangir,

maka W_{α_2} dapat diperoleh dari penjumlahan bobot selimut w_{α_2} dengan fungsi label sisi, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2} &= w_{\alpha_2} + \alpha_2(px_i) + \alpha_2(px_{i+1}) + \alpha_2(x_iy_i) + \alpha_2(y_ix_{i+1}), \\ &= (n + 3i + 6) + (2n + i + 2) + (2n + i + 1 + 2) + (5n - 2i + 4) \\ &\quad + (5n - 2i + 5) \\ &= 15n + i + 20, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_2} = \{15n+21, 15n+22, \dots, 16n+20\}$. Karena $U_n = a + (n - 1)b = 15n + 21 + (n - 1)1 = 16n + 20$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(15n + 21, 1)-(C_4)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.4 merupakan contoh super $(111, 1)-(C_4)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 .



Gambar 4.4 Super $(111, 1)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6

Pada Gambar 4.4 merupakan graf SJ_n dengan $n = 6$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_2} = \{111, 112, 113, 114, 115, 116\}$ dengan $d = 1$ dan $a = 111$.

\diamond **Teorema 4.1.3.** *Ada pelabelan super $(\frac{29n+44}{2}, 2)-(C_4)$ -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n genap. Dan super $(\frac{29n+43}{2}, 2)-(C_4)$ -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil.*

Bukti. Melabeli setiap titik pada graf Semi Jahangir dengan himpunan bilangan asli sama seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga untuk fungsi titiknya $\alpha_3(p) = \alpha_1(p)$, $\alpha_3(x_i) = \alpha_1(x_i)$, $\alpha_3(y_i) = \alpha_1(y_i)$. Maka untuk fungsi bobot selimutnya $w_{\alpha_3} = w_{\alpha_1}$. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Labeli sisi graf Semi Jahangir SJ_n dengan fungsi bijektif α_3 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\alpha_3(px_i) = \begin{cases} \frac{5n-i+7}{2}, & \text{untuk } i \text{ ganjil dan } n \text{ genap, } i \text{ genap dan } n \text{ ganjil} \\ \frac{6n-i+8}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i < n+1, i \text{ genap, } n \text{ genap} \\ \frac{6n-i+7}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i < n+1, i \text{ ganjil, } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\alpha_3(x_i y_i) = \frac{10n - 4i + 8}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n,$$

$$\alpha_3(y_i x_{i+1}) = \frac{6n + 4i + 6}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n,$$

Jika W_{α_3} didefinisikan sebagai bobot total selimut graf Semi Jahangir, maka W_{α_3} didapatkan dari penjumlahan bobot selimut w_{α_3} dengan fungsi label sisinya. Fungsi bobot total untuk n genap :

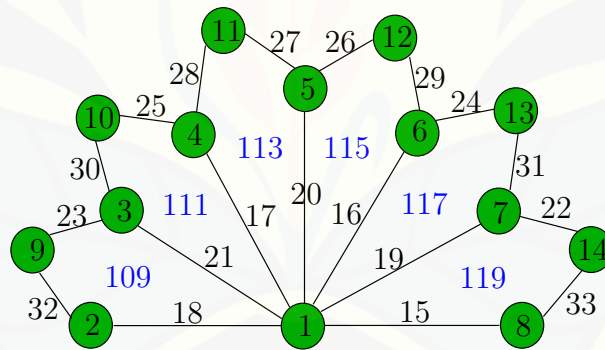
$$\begin{aligned} W_{\alpha_3} &= w_{\alpha_3} + \alpha_3(px_i) + \alpha_3(px_{i+1}) + \alpha_3(x_i y_i) + \alpha_3(y_i x_{i+1}) \\ &= (n + 3i + 6) + \left(\frac{5n - i + 7}{2}\right) + \left(\frac{6n - (i + 1) + 8}{2}\right) + \left(\frac{10n - 4i + 8}{2}\right) + \\ &\quad \left(\frac{6n + 4i + 6}{2}\right) \\ &= \frac{29n + 4i + 40}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Fungsi bobot total untuk n ganjil :

$$\begin{aligned} W_{\alpha_3} &= w_{\alpha_3} + \alpha_3(px_i) + \alpha_3(px_{i+1}) + \alpha_3(x_iy_i) + \alpha_3(y_ix_{i+1}) \\ &= (n + 3i + 6) + \left(\frac{6n - i + 7}{2}\right) + \left(\frac{5n - (i + 1) + 7}{2}\right) + \left(\frac{10n - 4i + 8}{2}\right) + \\ &\quad \left(\frac{6n + 4i + 6}{2}\right) \\ &= \frac{29n + 4i + 39}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

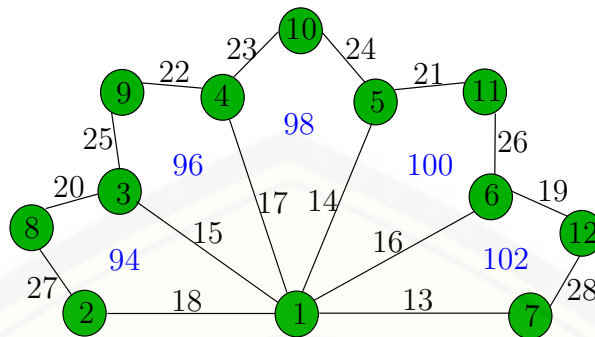
Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_3} = \left\{ \frac{29n+44}{2}, \frac{29n+48}{2}, \dots, \frac{33n+40}{2} \right\}$ untuk n genap. Karena $U_n = a + (n - 1)b = \frac{29n+44}{2} + (n - 1)2 = \frac{33n+40}{2}$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(\frac{29n+44}{2}, 2)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n genap. Dan untuk n ganjil barisan aritmatika dari $W_{\alpha_1} = \left\{ \frac{29n+43}{2}, \frac{29n+47}{2}, \dots, \frac{33n+39}{2} \right\}$. Karena $U_n = a + (n - 1)b = \frac{29n+43}{2} + (n - 1)2 = \frac{33n+39}{2}$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(\frac{29n+43}{2}, 2)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil. \square

Gambar 4.5 merupakan contoh super $(109, 2)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 untuk $n \geq 2$ dengan n genap.



Gambar 4.5 Super $(109, 2)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_6

Gambar 4.6 merupakan contoh super $(94, 2)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_5 untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil.



Gambar 4.6 Super $(94, 2)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_5

Pada Gambar 4.5 merupakan graf SJ_n dengan $n = 6$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_3} = \{109, 111, 113, 115, 117, 119\}$ dengan $d = 2$ dan $a = 109$. Sedangkan pada Gambar 4.6 merupakan graf SJ_n dengan $n = 5$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_3} = \{94, 96, 98, 100, 102\}$ dengan $d = 2$ dan $a = 94$.

◇ **Teorema 4.1.4.** *Ada pelabelan super $(15n + 21, 3)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Melabeli setiap titik pada graf Semi Jahangir dengan himpunan bilangan asli sama seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga untuk fungsi titiknya $\alpha_4(p) = \alpha_1(p)$, $\alpha_4(x_i) = \alpha_1(x_i)$, $\alpha_4(y_i) = \alpha_1(y_i)$. Maka untuk fungsi bobot selimutnya $w_{\alpha_4} = w_{\alpha_1}$. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Labeli sisi graf Semi Jahangir SJ_n dengan fungsi bijektif α_4 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_4(px_i) &= 5n - 3i + 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n + 1, \\ \alpha_4(x_iy_i) &= 2n + 3i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ \alpha_4(y_ix_{i+1}) &= 2n + 3i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

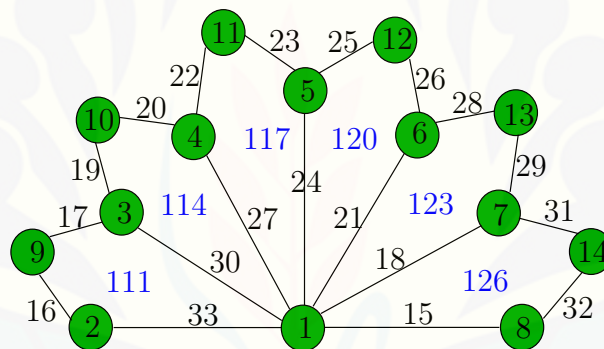
Jika W_{α_4} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Semi Jahangir,

maka W_{α_4} dapat diperoleh dari penjumlahan bobot selimut w_{α_4} dengan fungsi label sisi, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_4} &= w_{\alpha_4} + \alpha_4(px_i) + \alpha_4(px_{i+1}) + \alpha_4(x_iy_i) + \alpha_4(y_ix_{i+1}), \\ &= (n + 3i + 6) + (5n - 3i + 6) + (5n - 3(i + 1) + 6) + (2n + 3i + 1) \\ &\quad + (2n + 3i + 2) \\ &= 15n + 3i + 18, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_4} = \{15n+21, 15n+24, \dots, 18n+18\}$. Karena $U_n = a + (n - 1)b = 15n + 21 + (n - 1)3 = 18n + 18$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(15n + 21, 3)-(C_4)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.7 merupakan contoh super $(111, 3)-(C_4)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 .



Gambar 4.7 Super $(111, 3)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6

Pada Gambar 4.7 merupakan graf SJ_n dengan $n = 6$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_4} = \{111, 114, 117, 120, 123, 126\}$ dengan $d = 3$ dan $a = 111$.

\diamond **Teorema 4.1.5.** *Ada pelabelan super $(\frac{27n+46}{2}, 4)-(C_4)$ -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n genap. Dan super $(\frac{27n+45}{2}, 4)-(C_4)$ -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil.*

Bukti. Melabeli setiap titik pada graf Semi Jahangir dengan himpunan bilangan asli sama seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga untuk fungsi titiknya $\alpha_5(p) = \alpha_1(p)$, $\alpha_5(x_i) = \alpha_1(x_i)$, $\alpha_5(y_i) = \alpha_1(y_i)$. Maka untuk fungsi bobot selimutnya $w_{\alpha_5} = w_{\alpha_1}$. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Labeli sisi graf Semi Jahangir SJ_n dengan fungsi bijektif α_5 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\alpha_5(px_i) = \begin{cases} \frac{4n+i+5}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i < n+1, i \text{ ganjil} \\ \frac{5n+i+6}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i < n+1, i \text{ genap, } n \text{ genap} \\ \frac{5n+i+5}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i < n+1, i \text{ genap, } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\alpha_5(x_i y_i) = \frac{10n - 4i + 8}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n,$$

$$\alpha_5(y_i x_{i+1}) = \frac{6n + 4i + 6}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n,$$

Jika W_{α_5} didefinisikan sebagai bobot total selimut graf Semi Jahangir, maka W_{α_5} didapatkan dari penjumlahan bobot selimut w_{α_5} dengan fungsi label sisinya. Fungsi bobot total untuk n genap :

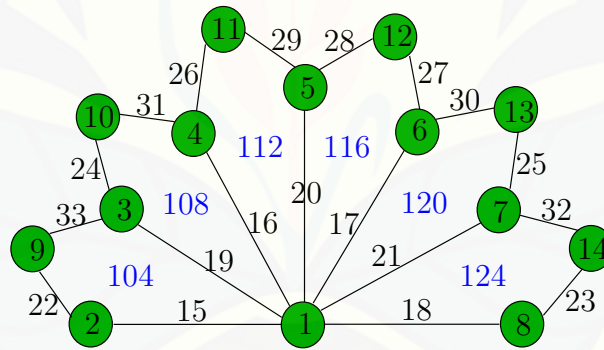
$$\begin{aligned} W_{\alpha_5} &= w_{\alpha_5} + \alpha_5(px_i) + \alpha_5(px_{i+1}) + \alpha_5(x_i y_i) + \alpha_5(y_i x_{i+1}) \\ &= (n + 3i + 6) + \left(\frac{4n + i + 5}{2}\right) + \left(\frac{5n + i + 1 + 6}{2}\right) + \left(\frac{10n - 4i + 8}{2}\right) + \\ &\quad \left(\frac{6n + 4i + 6}{2}\right) \\ &= \frac{27n + 8i + 38}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Fungsi bobot total untuk n ganjil :

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_5} &= w_{\alpha_5} + \alpha_1(px_i) + \alpha_5(px_{i+1}) + \alpha_5(x_iy_i) + \alpha_5(y_ix_{i+1}) \\
 &= (n + 3i + 6) + \left(\frac{4n + i + 5}{2}\right) + \left(\frac{5n + i + 1 + 5}{2}\right) + \left(\frac{10n - 4i + 8}{2}\right) + \\
 &\quad \left(\frac{6n + 4i + 6}{2}\right) \\
 &= \frac{27n + 8i + 37}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_5} = \{\frac{27n+46}{2}, \frac{27n+54}{2}, \dots, \frac{35n+38}{2}\}$ untuk n genap. Karena $U_n = a + (n - 1)b = \frac{27n+46}{2} + (n - 1)4 = \frac{35n+38}{2}$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(\frac{27n+46}{2}, 4)-(C_4)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n genap. Dan untuk n ganjil barisan aritmatika dari $W_{\alpha_5} = \{\frac{27n+45}{2}, \frac{27n+53}{2}, \dots, \frac{35n+37}{2}\}$. Karena $U_n = a + (n - 1)b = \frac{27n+45}{2} + (n - 1)4 = \frac{35n+37}{2}$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(\frac{27n+45}{2}, 4)-(C_4)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil. \square

Gambar 4.8 merupakan contoh super $(104, 4)-(C_4)$ -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 untuk $n \geq 2$ dengan n genap.



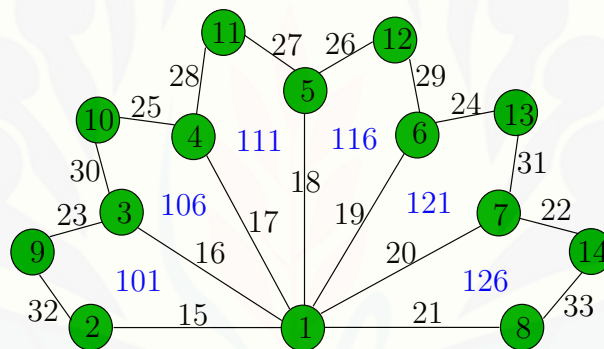
Gambar 4.8 Super $(104, 4)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6

maka W_{α_6} dapat diperoleh dari penjumlahan bobot selimut w_{α_6} dengan fungsi label sisi, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6} &= w_{\alpha_6} + \alpha_6(px_i) + \alpha_6(px_{i+1}) + \alpha_6(x_iy_i) + \alpha_6(y_ix_{i+1}), \\ &= (n + 3i + 6) + (2n + i + 2) + (2n + i + 1 + 2) + (5n - 2i + 4) \\ &\quad + (3n + 2i + 3) \\ &= 13n + 5i + 18, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_6} = \{13n+23, 13n+28, \dots, 18n+18\}$. Karena $U_n = a + (n - 1)b = 13n + 23 + (n - 1)5 = 18n + 18$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(13n + 23, 5)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.10 merupakan contoh super $(101, 5)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 .



Gambar 4.10 Super $(101, 5)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_6

Pada Gambar 4.10 Pada Gambar 4.7 merupakan graf SJ_n dengan $n = 6$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_6} = \{101, 106, 111, 116, 121, 126\}$ dengan $d = 5$ dan $a = 101$.

\diamond **Teorema 4.1.7.** *Ada pelabelan super $(\frac{25n+48}{2}, 6)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n genap. Dan super $(\frac{25n+47}{2}, 6)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil.*

Bukti. Melabeli setiap titik pada graf Semi Jahangir dengan himpunan bilangan asli sama seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga untuk fungsi titiknya $\alpha_7(p) = \alpha_1(p)$, $\alpha_7(x_i) = \alpha_1(x_i)$, $\alpha_7(y_i) = \alpha_1(y_i)$. Maka untuk fungsi bobot selimutnya $w_{\alpha_7} = w_{\alpha_1}$. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Labeli sisi graf Semi Jahangir SJ_n dengan fungsi bijektif α_7 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\alpha_7(px_i) = \begin{cases} \frac{5n-i+7}{2}, & \text{untuk } i \text{ ganjil dan } n \text{ genap, } i \text{ genap dan } n \text{ ganjil} \\ \frac{6n-i+8}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1, i \text{ genap, } n \text{ genap} \\ \frac{6n-i+7}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1, i \text{ ganjil, } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\alpha_7(x_i y_i) = \frac{6n+4i+4}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n,$$

$$\alpha_7(y_i x_{i+1}) = \frac{6n+4i+6}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n,$$

Jika W_{α_7} didefinisikan sebagai bobot total selimut graf Semi Jahangir, maka W_{α_7} didapatkan dari penjumlahan bobot selimut w_{α_7} dengan fungsi label sisinya. Fungsi bobot total untuk n genap :

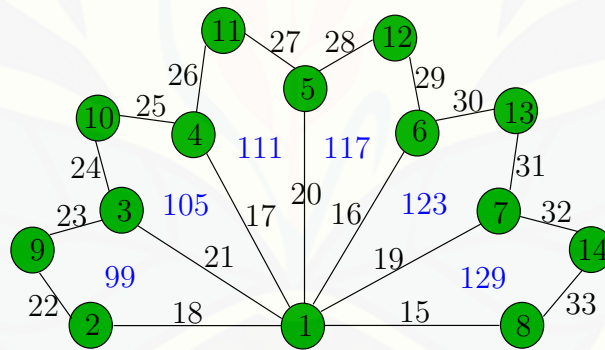
$$\begin{aligned} W_{\alpha_7} &= w_{\alpha_7} + \alpha_7(px_i) + \alpha_7(px_{i+1}) + \alpha_7(x_i y_i) + \alpha_7(y_i x_{i+1}) \\ &= (n+3i+6) + \left(\frac{5n-i+7}{2}\right) + \left(\frac{6n-(i+1)+8}{2}\right) + \left(\frac{6n+4i+4}{2}\right) + \\ &\quad \left(\frac{6n+4i+6}{2}\right) \\ &= \frac{25n+12i+36}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Fungsi bobot total untuk n ganjil :

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_7} &= w_{\alpha_7} + \alpha_7(px_i) + \alpha_7(px_{i+1}) + \alpha_7(x_iy_i) + \alpha_7(y_ix_{i+1}) \\
 &= (n + 3i + 6) + \left(\frac{6n - i + 7}{2}\right) + \left(\frac{5n - (i + 1) + 7}{2}\right) + \left(\frac{6n + 4i + 4}{2}\right) + \\
 &\quad \left(\frac{6n + 4i + 6}{2}\right) \\
 &= \frac{25n + 12i + 35}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

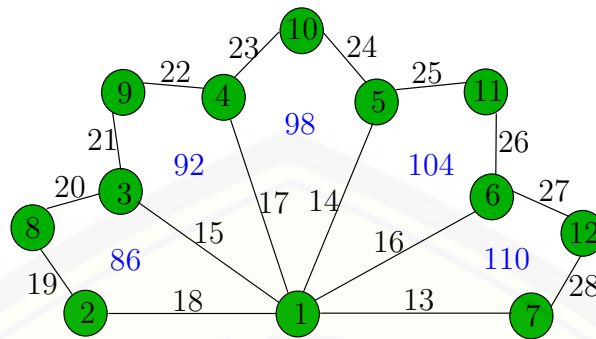
Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_7} = \left\{ \frac{25n+48}{2}, \frac{25n+60}{2}, \dots, \frac{37n+36}{2} \right\}$ untuk n genap. Karena $U_n = a + (n - 1)b = \frac{25n+48}{2} + (n - 1)6 = \frac{37n+36}{2}$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(\frac{25n+48}{2}, 6)-(C_4)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n genap. Dan untuk n ganjil barisan aritmatika dari $W_{\alpha_1} = \left\{ \frac{25n+47}{2}, \frac{25n+59}{2}, \dots, \frac{37n+35}{2} \right\}$. Karena $U_n = a + (n - 1)b = \frac{25n+47}{2} + (n - 1)6 = \frac{37n+35}{2}$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(\frac{25n+47}{2}, 6)-(C_4)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil. \square

Gambar 4.11 merupakan contoh super $(99, 6)-(C_4)$ -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 untuk $n \geq 2$ dengan n genap.



Gambar 4.11 Super $(99, 6)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6

Gambar 4.12 merupakan contoh super $(86, 6)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_5 untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil.



Gambar 4.12 Super $(86, 6)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_5

Pada Gambar 4.11 merupakan graf SJ_n dengan $n = 6$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_7} = \{99, 105, 111, 117, 123, 129\}$ dengan $d = 6$ dan $a = 99$. Sedangkan pada Gambar 4.12 merupakan graf SJ_n dengan $n = 5$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_7} = \{86, 92, 98, 104, 110\}$ dengan $d = 6$ dan $a = 86$.

◇ **Teorema 4.1.8.** *Ada pelabelan super $(14n + 22, 7)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Melabeli setiap titik pada graf Semi Jahangir dengan himpunan bilangan asli sama seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga untuk fungsi titiknya $\alpha_8(p) = \alpha_1(p)$, $\alpha_8(x_i) = \alpha_1(x_i)$, $\alpha_8(y_i) = \alpha_1(y_i)$. Maka untuk fungsi bobot selimutnya $w_{\alpha_8} = w_{\alpha_1}$. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Labeli sisi graf Semi Jahangir SJ_n dengan fungsi bijektif α_8 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_8(px_i) &= 4n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n + 1, \\ \alpha_8(x_iy_i) &= 2n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ \alpha_8(y_ix_{i+1}) &= 3n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

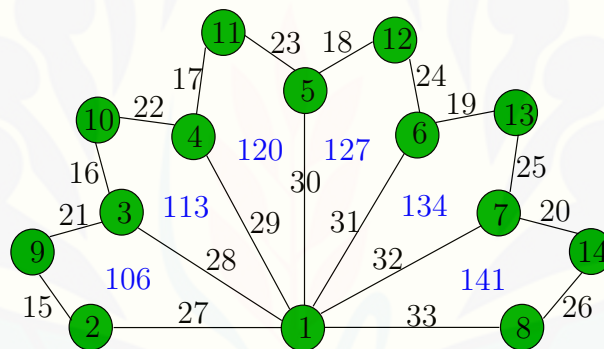
Jika W_{α_8} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Semi Jahangir,

maka W_{α_8} dapat diperoleh penjumlahan bobot selimut w_{α_8} dan fungsi label sisi, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_8} &= w_{\alpha_8} + \alpha_8(px_i) + \alpha_8(px_{i+1}) + \alpha_8(x_iy_i) + \alpha_8(y_ix_{i+1}), \\ &= (n + 3i + 6) + (4n + i + 2) + (4n + i + 1 + 2) + (2n + i + 2) \\ &\quad + (3n + i + 2) \\ &= 14n + 7i + 15, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_8} = \{14n+22, 14n+29, \dots, 21n+15\}$. Karena $U_n = a + (n - 1)b = 14n + 22 + (n - 1)7 = 21n + 15$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(14n + 22, 7)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.13 merupakan contoh super $(106, 7)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 .



Gambar 4.13 Super $(106, 7)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_6

Pada Gambar 4.13 merupakan graf SJ_n dengan $n = 6$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_8} = \{106, 113, 120, 127, 134, 141\}$ dengan $d = 7$ dan $a = 106$.

\diamond **Teorema 4.1.9.** *Ada pelabelan super $(\frac{23n+50}{2}, 8)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n genap. Dan super $(\frac{23n+49}{2}, 8)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil.*

Bukti. Melabeli setiap titik pada graf Semi Jahangir dengan himpunan bilangan asli sama seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga untuk fungsi titiknya $\alpha_9(p) = \alpha_1(p)$, $\alpha_9(x_i) = \alpha_1(x_i)$, $\alpha_9(y_i) = \alpha_1(y_i)$. Maka untuk fungsi bobot selimutnya $w_{\alpha_9} = w_{\alpha_1}$. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Labeli sisi graf Semi Jahangir SJ_n dengan fungsi bijektif α_9 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha_9(px_i) &= \begin{cases} \frac{4n+i+5}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1, i \text{ ganjil} \\ \frac{5n+i+6}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1, i \text{ genap, } n, \text{ genap} \\ \frac{5n+i+5}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1, i \text{ genap, } n, \text{ ganjil} \end{cases} \\ \alpha_9(x_i y_i) &= \frac{6n+4i+4}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ \alpha_9(y_i x_{i+1}) &= \frac{6n+4i+6}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n,\end{aligned}$$

Jika W_{α_9} didefinisikan sebagai bobot total selimut graf Semi Jahangir, maka W_{α_9} didapatkan dari penjumlahan bobot selimut w_{α_9} dengan fungsi label sisinya. Fungsi bobot total untuk n genap :

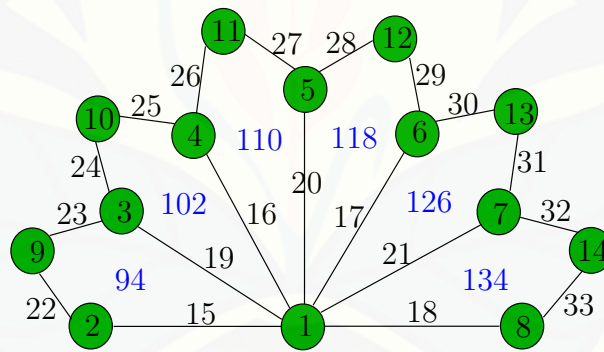
$$\begin{aligned}W_{\alpha_9} &= w_{\alpha_9} + \alpha_9(px_i) + \alpha_9(px_{i+1}) + \alpha_9(x_i y_i) + \alpha_9(y_i x_{i+1}) \\ &= (n+3i+6) + \left(\frac{4n+i+5}{2}\right) + \left(\frac{5n+i+1+6}{2}\right) + \left(\frac{6n+4i+4}{2}\right) + \\ &\quad \left(\frac{6n+4i+6}{2}\right) \\ &= \frac{23n+16i+34}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Fungsi bobot total untuk n ganjil :

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_9} &= w_{\alpha_9} + \alpha_9(px_i) + \alpha_9(px_{i+1}) + \alpha_9(x_iy_i) + \alpha_9(y_ix_{i+1}) \\
 &= (n + 3i + 6) + \left(\frac{4n + i + 5}{2}\right) + \left(\frac{5n + i + 1 + 5}{2}\right) + \left(\frac{6n + 4i + 4}{2}\right) + \\
 &\quad \left(\frac{6n + 4i + 6}{2}\right) \\
 &= \frac{23n + 16i + 33}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

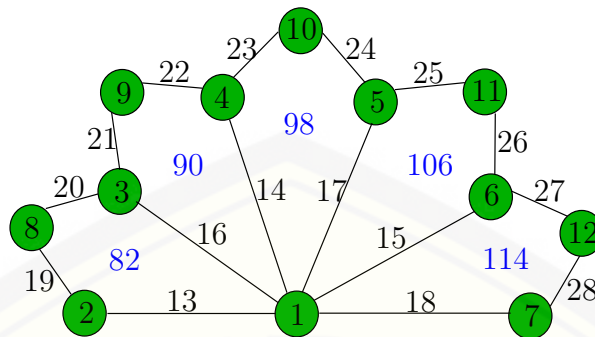
Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_9} = \left\{ \frac{23n+50}{2}, \frac{23n+66}{2}, \dots, \frac{39n+34}{2} \right\}$ untuk n genap. Karena $U_n = a + (n - 1)b = \frac{23n+50}{2} + (n - 1)8 = \frac{39n+34}{2}$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(\frac{23n+50}{2}, 8)-(C_4)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n genap. Dan untuk n ganjil barisan aritmatika dari $W_{\alpha_9} = \left\{ \frac{23n+49}{2}, \frac{23n+65}{2}, \dots, \frac{39n+33}{2} \right\}$. Karena $U_n = a + (n - 1)b = \frac{23n+49}{2} + (n - 1)8 = \frac{39n+33}{2}$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(\frac{23n+49}{2}, 8)-(C_4)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil. \square

Gambar 4.14 merupakan contoh super $(94, 8)-(C_4)$ -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 untuk $n \geq 2$ dengan n genap.



Gambar 4.14 Super $(94, 8)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6

Gambar 4.15 merupakan contoh super $(82, 8)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_5 untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil.



Gambar 4.15 Super $(82, 8)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_5

Pada Gambar 4.14 merupakan graf SJ_n dengan $n = 6$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_9} = \{94, 102, 110, 118, 126, 134\}$ dengan $d = 8$ dan $a = 94$. Sedangkan pada Gambar 4.15 merupakan graf SJ_n dengan $n = 5$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_9} = \{82, 90, 98, 106, 114\}$ dengan $d = 8$ dan $a = 82$.

◇ **Teorema 4.1.10.** *Ada pelabelan super $(11n+25, 9)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Melabeli setiap titik pada graf Semi Jahangir dengan himpunan bilangan asli sama seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga untuk fungsi titiknya $\alpha_{10}(p) = \alpha_1(p)$, $\alpha_{10}(x_i) = \alpha_1(x_i)$, $\alpha_{10}(y_i) = \alpha_1(y_i)$. Maka untuk fungsi bobot selimutnya $w_{\alpha_{10}} = w_{\alpha_1}$. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Labeli sisi graf Semi Jahangir SJ_n dengan fungsi bijektif α_{10} dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_{10}(px_i) &= 2n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n + 1, \\ \alpha_{10}(x_iy_i) &= 3n + 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ \alpha_{10}(y_ix_{i+1}) &= 3n + 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

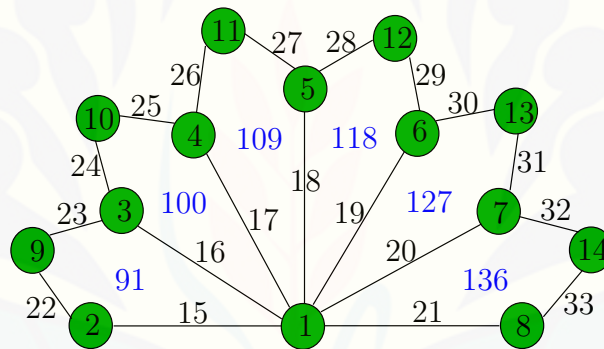
Jika $W_{\alpha_{10}}$ didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Semi Jahangir,

maka $W_{\alpha_{10}}$ dapat diperoleh penjumlahan bobot selimut $w_{\alpha_{10}}$ dengan fungsi label sisi, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_{10}} &= w_{\alpha_{10}} + \alpha_{10}(px_i) + \alpha_{10}(px_{i+1}) + \alpha_{10}(x_iy_i) + \alpha_{10}(y_ix_{i+1}), \\ &= (n + 3i + 6) + (2n + i + 2) + (2n + i + 1 + 2) + (3n + 2i + 2) \\ &\quad + (3n + 2i + 3) \\ &= 11n + 9i + 16, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_{10}} = \{11n+25, 11n+34, \dots, 20n+16\}$. Karena $U_n = a + (n - 1)b = 11n + 25 + (n - 1)9 = 20n + 16$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(11n + 25, 9)-(C_4)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.16 merupakan contoh super $(91, 9)-(C_4)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 .



Gambar 4.16 Super $(91, 9)-(C_4)$ antimagic total selimut pada SJ_6

Pada Gambar 4.16 merupakan graf SJ_n dengan $n = 6$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_{10}} = \{91, 100, 109, 118, 127, 136\}$ dengan $d = 9$ dan $a = 91$.

\diamond **Teorema 4.1.11.** *Ada pelabelan super $(13n + 23, 10)-(C_4)$ -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf Semi Jahangir SJ_n dengan fungsi bijektif α_{11} . Fungsi

titik α_{11} adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha_{11}(p) &= 1, \\ \alpha_{11}(x_i) &= 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n+1 \\ \alpha_{11}(y_i) &= 2i+1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa α_{11} adalah fungsi bijektif yang memetakan SJ_n ke himpunan bilangan asli $\{1, 2, \dots, 2n+2\}$. Jika $w_{\alpha_{11}}$ didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada graf Semi Jahangir dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 4 label titik dari $\mathcal{H} = C_4$ yang menjadi selimut pada graf Semi Jahangir, maka fungsi bijektif $w_{\alpha_{11}}$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}w_{\alpha_{11}} &= \alpha_{11}(p) + \alpha_{11}(x_i) + \alpha_{11}(x_{i+1}) + \alpha_{11}(y_i) \\ &= (1) + (2i) + (2(i+1)) + (2i+1) \\ &= 6i+4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Untuk labeli sisi graf Semi Jahangir sama seperti pada teorema 4.1.8, sehingga fungsi sisi $\alpha_{11}(px_i) = \alpha_8(px_i)$, $\alpha_{11}(x_iy_i) = \alpha_8(x_iy_i)$, $\alpha_{11}(x_iy_i) = \alpha_8(x_iy_i)$.

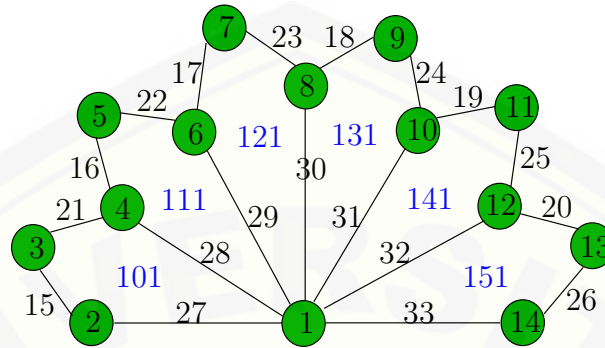
Jika $W_{\alpha_{11}}$ didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Semi Jahangir, maka $W_{\alpha_{11}}$ dapat diperoleh dari penjumlah bobot selimut $w_{\alpha_{11}}$ dengan fungsi label sisi, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}W_{\alpha_{11}} &= w_{\alpha_{11}} + \alpha_{11}(px_i) + \alpha_{11}(px_{i+1}) + \alpha_{11}(x_iy_i) + \alpha_{11}(y_ix_{i+1}), \\ &= (6i+4) + (4n+i+2) + (4n+i+1+2) + (2n+i+2) \\ &\quad + (3n+i+2) \\ &= 13n+10i+13, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_{11}} = \{13n+23, 13n+33, \dots, 23n+13\}$. Karena $U_n = a + (n-1)b = 13n+23 + (n-1)10 = 23n+13$ maka terbukti

bahwa ada pelabelan super $(13n + 23, 10)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.17 merupakan contoh super $(101, 10)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 .



Gambar 4.17 Super $(101, 10)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_6

Pada Gambar 4.17 merupakan graf SJ_n dengan $n = 6$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_{11}} = \{101, 111, 121, 131, 141, 151\}$ dengan $d = 10$ dan $a = 101$.

\diamond **Teorema 4.1.12.** *Ada pelabelan super $(\frac{21n+52}{2}, 11)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n genap. Dan super $(\frac{21n+51}{2}, 11)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil.*

Bukti. Melabeli setiap titik pada graf Semi Jahangir dengan himpunan bilangan asli sama seperti pada teorema 4.1.11. Sehingga untuk fungsi titiknya $\alpha_{12}(p) = \alpha_{11}(p)$, $\alpha_{12}(x_i) = \alpha_{11}(x_i)$, $\alpha_{12}(y_i) = \alpha_{11}(y_i)$. Maka untuk fungsi bobot selimutnya $w_{\alpha_{12}} = w_{\alpha_{11}}$. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Untuk label sisi graf Semi Jahangir sama seperti pada teorema 4.1.9, sehingga fungsi sisi $\alpha_{12}(px_i) = \alpha_9(px_i)$, $\alpha_{12}(x_iy_i) = \alpha_9(x_iy_i)$, $\alpha_{12}(x_iy_i) = \alpha_9(x_iy_i)$.

Jika $W_{\alpha_{12}}$ didefinisikan sebagai bobot total selimut graf Semi Jahangir, maka $W_{\alpha_{12}}$ didapatkan dari penjumlahan bobot selimut $w_{\alpha_{12}}$ dengan fungsi label sisinya.

Fungsi bobot total untuk n genap :

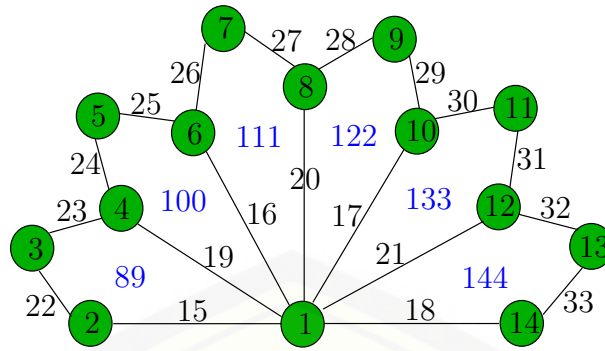
$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_{12}} &= w_{\alpha_{12}} + \alpha_{12}(px_i) + \alpha_{12}(px_{i+1}) + \alpha_7(x_i y_i) + \alpha_{12}(y_i x_{i+1}) \\
 &= (6i + 4) + \left(\frac{4n + i + 5}{2}\right) + \left(\frac{5n + i + 1 + 6}{2}\right) + \left(\frac{6n + 4i + 4}{2}\right) + \\
 &\quad \left(\frac{6n + 4i + 6}{2}\right) \\
 &= \frac{21n + 22i + 30}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Fungsi bobot total untuk n ganjil :

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_{12}} &= w_{\alpha_{12}} + \alpha_{12}(px_i) + \alpha_{12}(px_{i+1}) + \alpha_7(x_i y_i) + \alpha_{12}(y_i x_{i+1}) \\
 &= (6i + 4) + \left(\frac{4n + i + 5}{2}\right) + \left(\frac{5n + i + 1 + 5}{2}\right) + \left(\frac{6n + 4i + 4}{2}\right) + \\
 &\quad \left(\frac{6n + 4i + 6}{2}\right) \\
 &= \frac{21n + 22i + 29}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

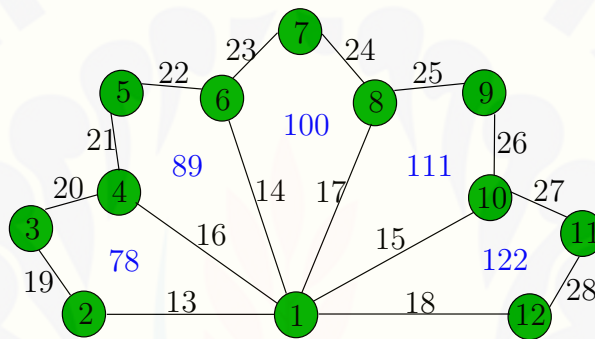
Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_{12}} = \left\{ \frac{21n+52}{2}, \frac{21n+74}{2}, \dots, \frac{43n+30}{2} \right\}$ untuk n genap. Karena $U_n = a + (n - 1)b = \frac{21n+52}{2} + (n - 1)11 = \frac{43n+30}{2}$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(\frac{21n+52}{2}, 11)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n genap. Dan untuk n ganjil barisan aritmatika dari $W_{\alpha_{12}} = \left\{ \frac{21n+51}{2}, \frac{21n+73}{2}, \dots, \frac{43n+29}{2} \right\}$. Karena $U_n = a + (n - 1)b = \frac{21n+51}{2} + (n - 1)11 = \frac{43n+29}{2}$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(\frac{21n+51}{2}, 11)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil. \square

Gambar 4.18 merupakan contoh super $(89, 11)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 untuk $n \geq 2$ dengan n genap.



Gambar 4.18 Super $(89, 11)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_6

Gambar 4.19 merupakan contoh super $(78, 11)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_5 untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil.



Gambar 4.19 Super $(78, 11)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_5

Pada Gambar 4.18 merupakan graf SJ_n dengan $n = 6$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_{12}} = \{89, 100, 111, 122, 133, 144\}$ dengan $d = 11$ dan $a = 89$. Sedangkan pada Gambar 4.19 merupakan graf SJ_n dengan $n = 5$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_{12}} = \{78, 89, 100, 111, 122\}$ dengan $d = 11$ dan $a = 78$.

◇ **Teorema 4.1.13.** *Ada pelabelan super $(10n + 26, 12)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Melabeli setiap titik pada graf Semi Jahangir dengan himpunan bilangan asli sama seperti pada teorema 4.1.11. Sehingga untuk fungsi titiknya

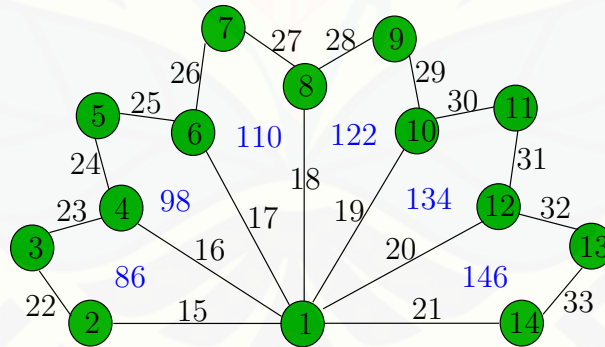
$\alpha_{13}(p) = \alpha_{11}(p)$, $\alpha_{13}(x_i) = \alpha_{11}(x_i)$, $\alpha_{13}(y_i) = \alpha_{11}(y_i)$. Maka untuk fungsi bobot selimutnya $w_{\alpha_{13}} = w_{\alpha_{11}}$. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Untuk label sisi graf Semi Jahangir sama seperti pada teorema 4.1.10, sehingga fungsi sisi $\alpha_{13}(px_i) = \alpha_{10}(px_i)$, $\alpha_{13}(x_iy_i) = \alpha_{10}(x_iy_i)$, $\alpha_{13}(x_iy_i) = \alpha_{10}(x_iy_i)$.

Jika $W_{\alpha_{13}}$ didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Semi Jahangir, maka $W_{\alpha_{13}}$ dapat diperoleh dari penjumlahan bobot selimut $w_{\alpha_{13}}$ dan fungsi label sisi, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_{13}} &= w_{\alpha_{13}} + \alpha_{13}(px_i) + \alpha_{13}(px_{i+1}) + \alpha_{13}(x_iy_i) + \alpha_{13}(y_ix_{i+1}), \\ &= (6i + 4) + (2n + i + 2) + (2n + i + 1 + 2) + (3n + 2i + 2) \\ &\quad + (3n + 2i + 3) \\ &= 10n + 12i + 14, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_{13}} = \{10n+26, 10n+38, \dots, 22n+14\}$. Karena $U_n = a + (n-1)b = 10n + 26 + (n-1)12 = 22n + 14$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(10n + 26, 12)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.20 merupakan contoh super $(86, 12)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 .



Gambar 4.20 Super $(86, 12)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_6

Pada Gambar 4.20 merupakan graf SJ_n dengan $n = 6$, pelabelan total se-

limut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_{13}} = \{86, 98, 110, 122, 134, 146\}$ dengan $d = 12$ dan $a = 86$.

◇ **Teorema 4.1.14.** *Ada pelabelan super $(11n + 25, 13)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf Semi Jahangir SJ_n dengan fungsi bijektif α_{14} . Fungsi titik α_{14} adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha_{14}(p) &= 1, \\ \alpha_{14}(x_i) &= n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n + 1 \\ \alpha_{14}(y_i) &= n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa α_{14} adalah fungsi bijektif yang memetakan SJ_n ke himpunan bilangan asli $\{1, 2, \dots, 2n + 2\}$. Jika $w_{\alpha_{14}}$ didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada graf Semi Jahangir dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 4 label titik dari $\mathcal{H} = C_4$ yang menjadi selimut pada graf Semi Jahangir, maka fungsi bijektif $w_{\alpha_{14}}$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}w_{\alpha_{14}} &= \alpha_{14}(p) + \alpha_{14}(x_i) + \alpha_{14}(x_{i+1}) + \alpha_{14}(y_i) \\ &= (1) + (n + i + 1) + (n + i + 1 + 1) + (n - i + 2) \\ &= 3n + i + 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Labeli sisi graf Semi Jahangir SJ_n dengan fungsi bijektif α_{14} dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha_{14}(px_i) &= 2n + 3i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n + 1, \\ \alpha_{14}(x_i y_i) &= 2n + 3i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ \alpha_{14}(y_i x_{i+1}) &= 2n + 3i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n,\end{aligned}$$

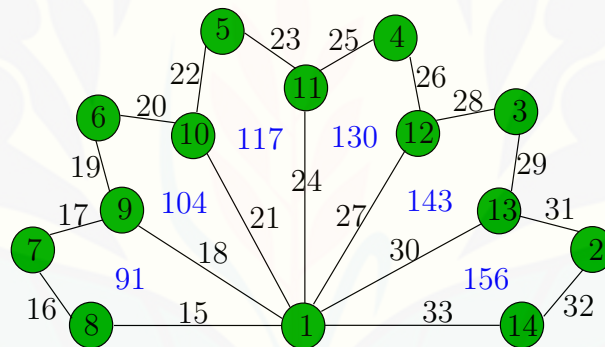
Jika $W_{\alpha_{14}}$ didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Semi Jahangir,

maka $W_{\alpha_{14}}$ dapat diperoleh dari penjumlahan bobot selimut $w_{\alpha_{14}}$ dengan fungsi label sisi, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_{14}} &= w_{\alpha_{14}} + \alpha_{14}(px_i) + \alpha_{14}(px_{i+1}) + \alpha_{14}(x_iy_i) + \alpha_{14}(y_ix_{i+1}), \\ &= (3n + i + 6) + (2n + 3i) + (2n + 3(i + 1)) + (2n + 3i + 1) \\ &\quad + (2n + 3i + 2) \\ &= 11n + 13i + 12, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_{14}} = \{11n+25, 11n+38, \dots, 24n+12\}$. Karena $U_n = a + (n - 1)b = 11n + 25 + (n - 1)13 = 24n + 12$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(11n + 25, 13)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.21 merupakan contoh super $(91, 13)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6



Gambar 4.21 Super $(91, 13)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_6

Pada Gambar 4.21 merupakan graf SJ_n dengan $n = 6$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_{14}} = \{91, 104, 117, 130, 143, 156\}$ dengan $d = 13$ dan $a = 91$.

\diamond **Teorema 4.1.15.** *Ada pelabelan super $(\frac{19n+54}{2}, 14)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n genap. Dan su-*

per $(\frac{19n+53}{2}, 14)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil.

Bukti. Labeli titik graf Semi Jahangir SJ_n dengan fungsi bijektif α_{15} . Fungsi titik α_{15} adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha_{15}(p) &= 1 \\ \alpha_{15}(x_i) &= \begin{cases} \frac{i+3}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1, i \text{ ganjil} \\ \frac{n+i+4}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1, i \text{ genap, } n \text{ genap} \\ \frac{n+i+3}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1, i \text{ genap, } n \text{ ganjil} \end{cases} \\ \alpha_{15}(y_i) &= 2n+2i+4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa α_{15} adalah fungsi bijektif yang memetakan SJ_n ke himpunan bilangan asli $\{1, 2, \dots, 2n+2\}$. Jika $w_{\alpha_{15}}$ didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada graf Semi Jahangir dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 4 label titik dari $\mathcal{H} = C_4$ yang menjadi selimut pada graf Semi Jahangir, maka fungsi bijektif $w_{\alpha_{15}}$ dapat ditentukan sebagai berikut.

Fungsi bobot selimut untuk n genap :

$$\begin{aligned}w_{\alpha_{15}} &= \alpha_{15}(p) + \alpha_{15}(x_i) + \alpha_{15}(x_{i+1}) + \alpha_{15}(y_i) \\ &= (1) + \left(\frac{i+3}{2}\right) + \left(\frac{n+i+1+4}{2}\right) + (2n+2i+4) \\ &= \frac{3n+4i+14}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Fungsi bobot selimut untuk n ganjil :

$$\begin{aligned}w_{\alpha_{15}} &= \alpha_{15}(p) + \alpha_{15}(x_i) + \alpha_{15}(x_{i+1}) + \alpha_{15}(y_i) \\ &= (1) + \left(\frac{i+3}{2}\right) + \left(\frac{n+i+1+3}{2}\right) + (2n+2i+4) \\ &= \frac{3n+4i+13}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label

sisi. Untuk label sisi graf Semi Jahangir sama seperti pada teorema 4.1.14, sehingga fungsi sisi $\alpha_{15}(px_i) = \alpha_{14}(px_i)$, $\alpha_{15}(x_iy_i) = \alpha_{14}(x_iy_i)$, $\alpha_{15}(x_iy_i) = \alpha_{14}(x_iy_i)$.

Jika $W_{\alpha_{15}}$ didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Semi Jahangir, maka $W_{\alpha_{15}}$ dapat diperoleh dari penjumlahan bobot selimut $w_{\alpha_{15}}$ dengan fungsi label sisi, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

Fungsi bobot selimut untuk n genap :

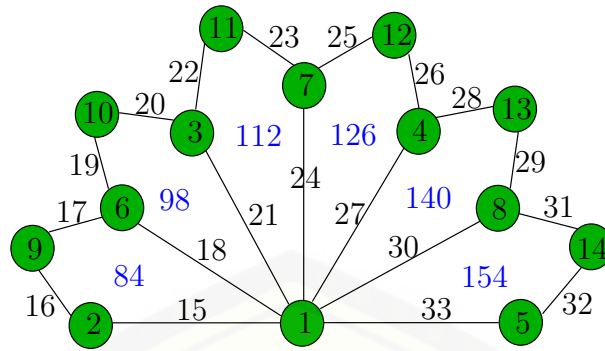
$$\begin{aligned} W_{\alpha_{15}} &= w_{\alpha_{15}} + \alpha_{15}(px_i) + \alpha_{15}(px_{i+1}) + \alpha_{15}(x_iy_i) + \alpha_{15}(y_ix_{i+1}), \\ &= \left(\frac{3n + 4i + 14}{2}\right) + (2n + 3i) + (2n + 3(i + 1)) + (2n + 3i + 1) \\ &\quad + (2n + 3i + 2) \\ &= \frac{19n + 28i + 26}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Fungsi bobot selimut untuk n ganjil :

$$\begin{aligned} W_{\alpha_{15}} &= w_{\alpha_{15}} + \alpha_{15}(px_i) + \alpha_{15}(px_{i+1}) + \alpha_{15}(x_iy_i) + \alpha_{15}(y_ix_{i+1}), \\ &= \left(\frac{3n + 4i + 13}{2}\right) + (2n + 3i) + (2n + 3(i + 1)) + (2n + 3i + 1) \\ &\quad + (2n + 3i + 2) \\ &= \frac{19n + 28i + 25}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

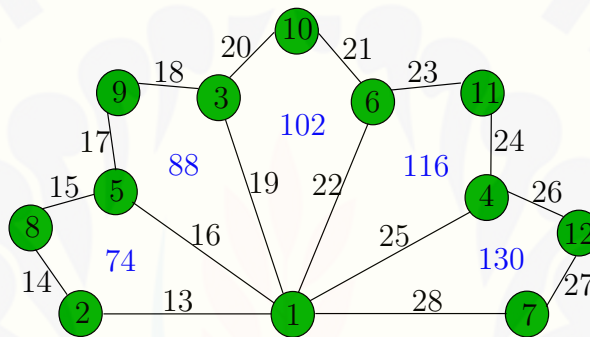
Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_{15}} = \left\{\frac{19n+54}{2}, \frac{19n+82}{2}, \dots, \frac{47n+26}{2}\right\}$ untuk n genap. Karena $U_n = a + (n - 1)b = \frac{19n+54}{2} + (n - 1)14 = \frac{47n+26}{2}$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(\frac{19n+54}{2}, 14)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n genap. Dan untuk n ganjil barisan aritmatika dari $W_{\alpha_{15}} = \left\{\frac{19n+53}{2}, \frac{19n+81}{2}, \dots, \frac{47n+25}{2}\right\}$. Karena $U_n = a + (n - 1)b = \frac{19n+53}{2} + (n - 1)14 = \frac{47n+25}{2}$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(\frac{19n+53}{2}, 14)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dengan n ganjil. \square

Gambar 4.22 merupakan contoh super $(84, 14)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 untuk $n \geq 2$ dengan n genap.



Gambar 4.22 Super $(84, 14)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_6

Gambar 4.23 merupakan contoh super $(74, 14)$ antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_5 untuk $n \geq 2$ dengan n genap.



Gambar 4.23 Super $(74, 14)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_5

Pada Gambar 4.22 merupakan graf SJ_n dengan $n = 6$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_{15}} = \{84, 98, 112, 126, 140, 154\}$ dengan $d = 14$ dan $a = 84$. Sedangkan pada Gambar 4.23 merupakan graf SJ_n dengan $n = 5$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_{15}} = \{74, 88, 102, 116, 130\}$ dengan $d = 14$ dan $a = 74$.

◇ **Teorema 4.1.16.** *Ada pelabelan super $(9n+27, 15)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Melabeli setiap titik pada graf Semi Jahangir dengan himpunan bilangan asli sama seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga untuk fungsi titiknya

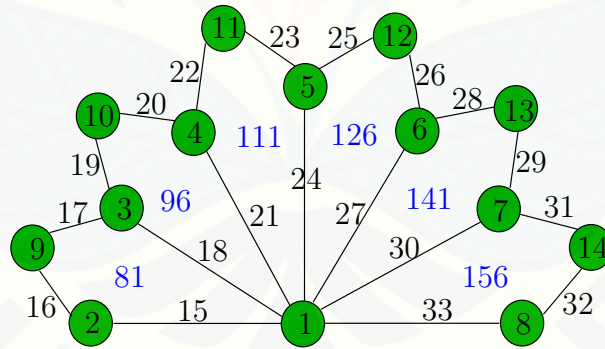
$\alpha_{16}(p) = \alpha_1(p)$, $\alpha_{16}(x_i) = \alpha_1(x_i)$, $\alpha_{16}(y_i) = \alpha_1(y_i)$. Maka untuk fungsi bobot selimutnya $w_{\alpha_{16}} = w_{\alpha_1}$. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Untuk labeli sisi graf Semi Jahangir sama seperti pada teorema 4.1.14, sehingga fungsi sisi $\alpha_{16}(px_i) = \alpha_{14}(px_i)$, $\alpha_{16}(x_iy_i) = \alpha_{14}(x_iy_i)$, $\alpha_{16}(x_iy_i) = \alpha_{14}(x_iy_i)$.

Jika $W_{\alpha_{16}}$ didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Semi Jahangir, maka $W_{\alpha_{16}}$ dapat diperoleh dari penjumlahan bobot selimut $w_{\alpha_{16}}$ dengan fungsi label sisi, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_{16}} &= w_{\alpha_{16}} + \alpha_{16}(px_i) + \alpha_{16}(px_{i+1}) + \alpha_{16}(x_iy_i) + \alpha_{16}(y_ix_{i+1}), \\ &= (n + 3i + 6) + (2n + 3i) + (2n + 3(i + 1)) + (2n + 3i + 1) \\ &\quad + (2n + 3i + 2) \\ &= 9n + 15i + 12, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_{16}} = \{9n+27, 9n+42, \dots, 24n+12\}$. Karena $U_n = a + (n - 1)b = 9n + 27 + (n - 1)15 = 24n + 12$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(9n + 27, 16)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.24 merupakan contoh super $(81, 16)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 .



Gambar 4.24 Super $(81, 15)$ - (C_4) antimagic total selimut pada SJ_6

Pada Gambar 4.24 merupakan graf SJ_n dengan $n = 6$, pelabelan total se-

limit pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_{16}} = \{81, 96, 111, 126, 141, 156\}$ dengan $d = 15$ dan $a = 81$.

◇ **Teorema 4.1.17.** *Ada pelabelan super $(8n+28, 18)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$.*

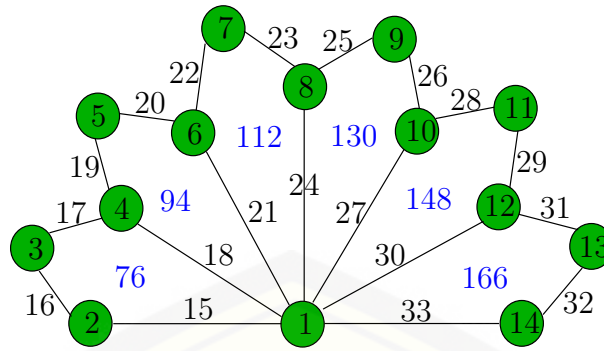
Bukti. Melabeli setiap titik pada graf Semi Jahangir dengan himpunan bilangan asli sama seperti pada teorema 4.1.11. Sehingga untuk fungsi titiknya $\alpha_{17}(p) = \alpha_{11}(p)$, $\alpha_{17}(x_i) = \alpha_{11}(x_i)$, $\alpha_{17}(y_i) = \alpha_{11}(y_i)$. Maka untuk fungsi bobot selimutnya $w_{\alpha_{17}} = w_{\alpha_{11}}$. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Untuk labeli sisi graf Semi Jahangir sama seperti pada teorema 4.1.14, sehingga fungsi sisi $\alpha_{17}(px_i) = \alpha_{14}(px_i)$, $\alpha_{17}(x_iy_i) = \alpha_{14}(x_iy_i)$, $\alpha_{17}(x_iy_i) = \alpha_{14}(x_iy_i)$.

Jika $W_{\alpha_{17}}$ didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Semi Jahangir, maka $W_{\alpha_{17}}$ dapat diperoleh dari penjumlahan bobot selimut $w_{\alpha_{17}}$ dan fungsi label sisi, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_{17}} &= w_{\alpha_{17}} + \alpha_{17}(px_i) + \alpha_{17}(px_{i+1}) + \alpha_{17}(x_iy_i) + \alpha_{17}(y_ix_{i+1}), \\ &= (6i + 4) + (2n + 3i) + (2n + 3(i + 1)) + (2n + 3i + 1) \\ &\quad + (2n + 3i + 2) \\ &= 8n + 18i + 10, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{\alpha_{17}} = \{8n+28, 8n+46, \dots, 26n+10\}$. Karena $U_n = a + (n-1)b = 8n+28 + (n-1)18 = 26n+10$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(8n+28, 18)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.25 merupakan contoh super $(76, 18)$ - (C_4) antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_6 .



Gambar 4.25 Super (76, 18)- (C_4) antimagic total selimut pada SJ_6

Pada Gambar 4.25 merupakan graf SJ_n dengan $n = 6$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{\alpha_{17}} = \{76, 94, 112, 130, 148, 166\}$ dengan $d = 18$ dan $a = 76$.

4.2 Super (a, d) - \mathcal{H} Antimagic Total Selimut pada Graf Semi Jahangir Diskonektif

Selanjutnya peneliti melakukan penelitian terkait dengan gabungan saling lepas pada super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir. Gabungan saling lepas graf Semi Jahangir merupakan graf Semi Jahangir dengan salinan sebanyak m . Salinan dari graf Semi Jahangir diletakkan sejajar ke arah bawah sebanyak m . Gabungan graf Semi Jahangir mSJ_n didefinisikan sebagai gabungan dari sebanyak m graf Semi Jahangir yang mempunyai titik $V(mSJ_n) = \{p^j, x_i^j, y_k^j; \text{ untuk } 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan sisi $E(mSJ_n) = \{p^j x_i^j; 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i^j y_i^j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_i^j x_{i+1}^j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$.

Sama seperti penelitian pada graf Semi Jahangir, ditentukan terlebih dahulu rumusan jumlah titik (p_G) dan jumlah sisi (q_G) pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir. Jumlah titik dan jumlah sisi pada graf Semi Jahangir dapat ditentukan terlebih dahulu dengan mencermati definisi gabungan saling lepas pada suatu graf. Gabungan m graf Semi Jahangir yang dinotasikan mSJ_n didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari m buah salinan graf Semi Jahangir mSJ_n

dengan $1 \leq j \leq m$, ditulis: $SJ_n^1 \cup SJ_n^2 \cup SJ_n^3 \cup \dots \cup SJ_n^j$. Sehingga jumlah titik graf mSJ_n adalah m kali jumlah titik graf SJ_n dapat dituliskan sebagai $p_G = m(2n + 2) = 2mn + 2m$. Dan jumlah sisi graf mSJ_n adalah m kali jumlah sisi graf SJ_n dituliskan dengan $q_G = m(3n + 1) = 3mn + m$. Sedangkan jumlah titik pada selimut graf mSJ_n yaitu $p_H = 4$. Dan jumlah sisi pada selimut graf mSJ_n adalah $q_H = 4$. Serta jumlah selimut graf mSJ_n adalah m kali jumlah selimut graf SJ_n , dapat dituliskan $s = m(n) = mn$.

Untuk menentukan batas atas d gabungan saling lepas graf Semi Jahangir sesuai dengan Lemma 2.5.1 adalah sebagai berikut:

Observasi 4.2.1. *Jika gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut maka $d < 26$.*

Bukti. Gabungan graf Semi Jahangir SJ_n memiliki himpunan titik $V(mSJ_n) = \{p^j, x_i^j, y_k^j; \text{ untuk } 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan sisi $E(mSJ_n) = \{p^j x_i^j; 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i^j y_i^j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_i^j x_{i+1}^j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$. Sedangkan jumlah titik $p_G = 2mn + 2m$ dan sisi $q_G = 3mn + m$, dan jumlah titik selimut adalah $p_H = 4$ serta jumlah sisi selimut adalah $q_H = 4$ dengan jumlah selimut $s = mn$. Sesuai dengan Lemma 2.5.1, batas atas nilai beda d adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s - 1)} \\
 &= \frac{(2mn + 2m - 4)4 + (3mn + m - 4)4}{(mn - 1)} \\
 &= \frac{8mn + 8m - 16 + 12mn + 4m - 16}{mn - 1} \\
 &= \frac{20mn + 12m - 32}{mn - 1} \\
 &= \frac{20(mn - 1) + 12m - 12}{mn - 1} \\
 &= 20 + \frac{12m - 12}{mn - 1}
 \end{aligned}$$

$$= 20 + \frac{12(m-1)}{mn-1}$$

karena $0 < \frac{12(m-1)}{mn-1} < 6$, maka

$$d \leq 25$$

Selanjutnya penentuan fungsi bijektif pelabelan selimut super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic akan disesuaikan dengan nilai d yang telah ditetapkan. Sama seperti graf Semi Jahangir tunggal, metode yang digunakan dalam menemukan pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n terdiri dari beberapa langkah yang diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas i, j dan k yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Setelah fungsi bijektif diketahui maka harus dibuktikan secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema tersebut.

Perlu diketahui bahwa teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang biimplikatif atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah. Dari hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*). Langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan total super \mathcal{H} antimagic selimut pada graf Semi Jahangir diskonektif dengan terlebih dahulu menentukan fungsi bijektif melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika.

◇ **Teorema 4.2.1.** *Ada pelabelan super $(18mn + 14m + 4, 0)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$.*

Bukti. Labeli setiap titik gabungan graf Semi Jahangir mSJ_n dengan fungsi bijektif f_1 . Fungsi titik f_1 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(p^j) &= j, 1 \leq j \leq m \\ f_1(x_i^j) &= 2mi + j - m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq j \leq m \\ f_1(y_i^j) &= 2mn - 2mi + 3m - j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada gabungan graf Semi Jahangir dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 4 label titik dari $\mathcal{H} = C_4$ yang menjadi selimut pada graf Semi Jahangir, maka fungsi bijektif w_{f_1} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_1} &= f_1(p^j) + f_1(x_i^j) + f_1(x_{i+1}^j) + f_1(y_i^j) \\ &= (j) + (2mi + j - m) + (2m(i + 1) + j - m) + (2mn - 2mi + 3m - j + 1) \\ &= 2mn + 2mi + 3m + 2j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya labeli sisi gabungan graf Semi Jahangir dengan fungsi bijektif f_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

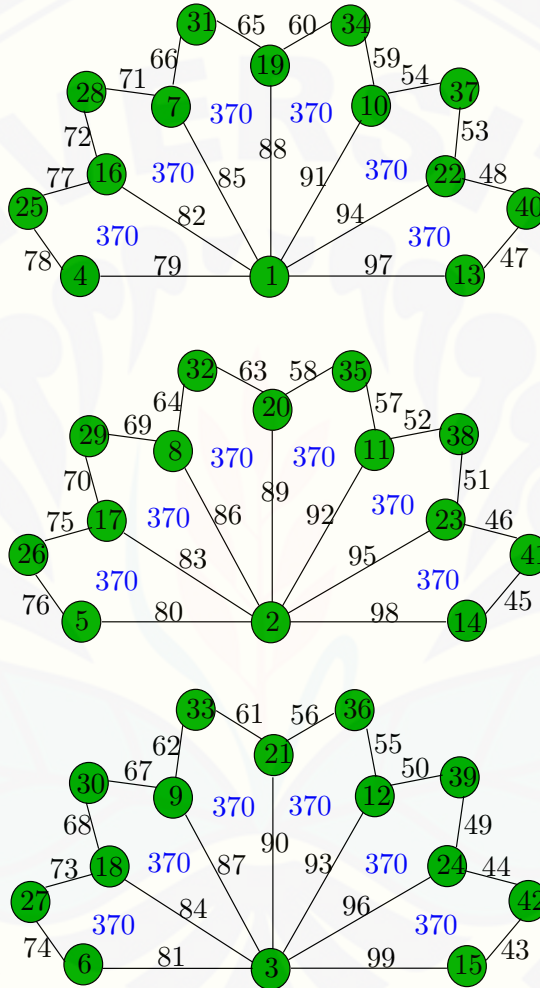
$$\begin{aligned} f_1(p^j x_i^j) &= 4mn + mi + m + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq j \leq m \\ f_1(x_i^j y_i^j) &= 4mn - 2mi + 4m - 2j + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_1(y_i^j x_{i+1}^j) &= 4mn - 2mi + 4m - 2j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Jika W_{f_1} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada gabungan graf Semi Jahangir, maka W_{f_1} dapat diperoleh dari penjumlahan bobot selimut w_{f_1} dengan fungsi label sisi, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_1} &= w_{f_1} + f_1(p^j x_i^j) + f_1(p^j x_{i+1}^j) + f_1(x_i^j y_i^j) + f_1(y_i^j x_{i+1}^j), \\ &= (2mn + 2mi + 3m + 2j + 1) + (4mn + mi + m + j) + (4mn + m(i + 1) \\ &\quad + m + j) + (4mn - 2mi + 4m - 2j + 2) + (4mn - 2mi + 4m - 2j + 1) \\ &= 18mn + 14m + 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_1} = \{18mn + 14m + 4, 18mn + 14m + 4, \dots, 18mn + 14m + 4\}$. Karena $U_n = a + (s - 1)b = 18mn + 14m + 4 + (mn - 1)0 = 18mn + 14m + 4$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(18mn + 14m + 4, 0)$ - (C_4) antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. \square

Gambar 4.26 merupakan contoh super $(370, 0)$ - (C_4) antimagic total selimut $SHATC$ pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir $3SJ_6$.



Gambar 4.26 Super $(370, 0)$ - (C_4) antimagic total selimut pada $3SJ_6$

Pada Gambar 4.26 merupakan gabungan graf mSJ_n dengan $n = 6$ dan $m = 3$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{f_1} = \{370, 370, 370, \dots, 370\}$ dengan $d = 0$ dan $a = 370$.

◇ **Teorema 4.2.2.** *Ada pelabelan super $(17mn + 14m + 5, 2)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$.*

Bukti. Melabeli setiap titik pada gabungan graf Semi Jahangir dengan himpunan bilangan asli sama seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga untuk fungsi titiknya $f_2(p^j) = f_1(p^j)$, $f_2(x_i^j) = f_1(x_i^j)$, $f_2(y_i^j) = f_1(y_i^j)$, dan untuk fungsi bobot selimutnya $w_{f_2} = w_{f_1}$. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Labeli sisi pada gabungan graf Semi Jahangir dengan fungsi bijektif f_2 dapat dituliskan sebagai berikut:

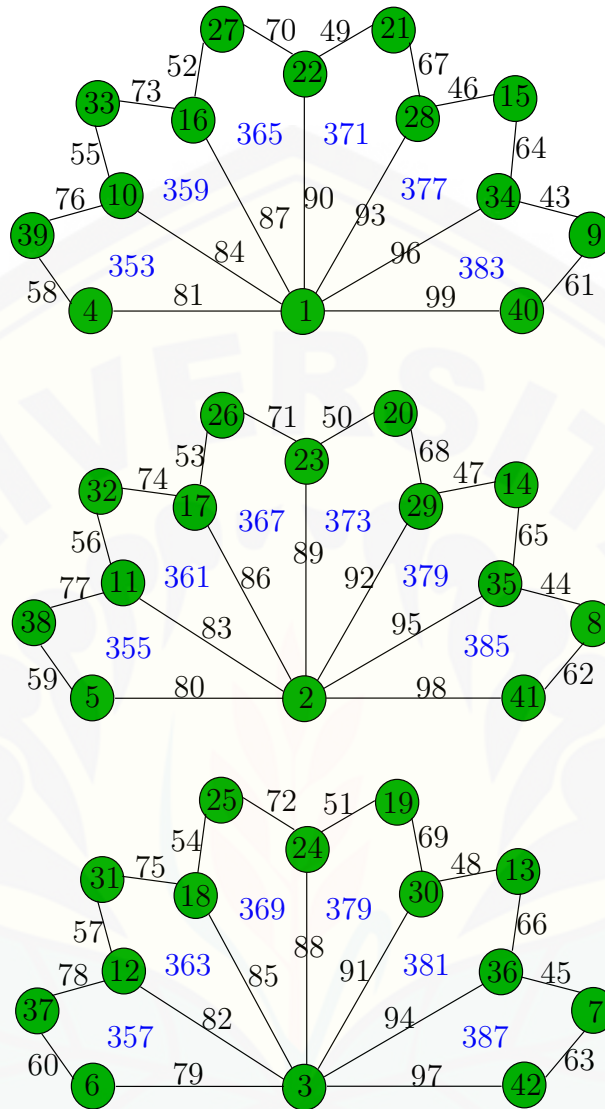
$$\begin{aligned} f_2(px_i^j) &= 4mn + mi + 2m - j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq j \leq m \\ f_2(x_i y_i^j) &= 3mn - mi + 2m + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_2(y_i x_{i+1}^j) &= 4mn - mi + 2m + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Jika W_{f_2} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada gabungan graf Semi Jahangir, maka W_{f_2} dapat diperoleh dari penjumlahan bobot selimut w_{f_2} dengan fungsi label sisi, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_2} &= w_{f_2} + f_2(px_i^j) + f_2(px_{i+1}^j) + f_2(x_i y_i^j) + f_2(y_i x_{i+1}^j), \\ &= (2mn + 2mi + 3m + 2j + 1) + (4mn + mi + 2m - j + 1) + (4mn + m \\ &\quad (i + 1) + 2m - j + 1) + (3mn - mi + 2m + j) + (4mn - mi + 2m + j) \\ &= 17mn + 2mi + 12m + 2j + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_2} = \{17mn + 14m + 5, 17mn + 14m + 7, \dots, 19mn + 14m + 3\}$. Karena $U_n = a + (s - 1)b = 17mn + 14m + 5 + (mn - 1)2 = 19mn + 14m + 3$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(17mn + 14m + 5, 2)$ - (C_4) antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. \square

Gambar 4.27 merupakan contoh super $(353, 2)-(C_4)$ antimagic total selimut \mathcal{SHATC} pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir $3SJ_6$



Gambar 4.27 Super $(353, 2)-(C_4)$ antimagic total selimut pada $3SJ_6$

Pada Gambar 4.27 merupakan gabungan graf mSJ_n dengan $n = 6$ dan $m = 3$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{f_2} = \{353, 355, 357, \dots, 387\}$ dengan $d = 2$ dan $a = 353$.

◇ **Teorema 4.2.3.** *Ada pelabelan super $(16mn + 14m + 6, 4)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$.*

Bukti. Melabeli setiap titik pada gabungan graf Semi Jahangir dengan himpunan bilangan asli sama seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga untuk fungsi titiknya $f_3(p^j) = f_1(p^j)$, $f_3(x_i^j) = f_1(x_i^j)$, $f_3(y_i^j) = f_1(y_i^j)$, dan untuk fungsi bobot selimutnya $w_{f_3} = w_{f_1}$. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Labeli sisi pada gabungan graf Semi Jahangir dengan fungsi bijektif f_3 dapat dituliskan sebagai berikut:

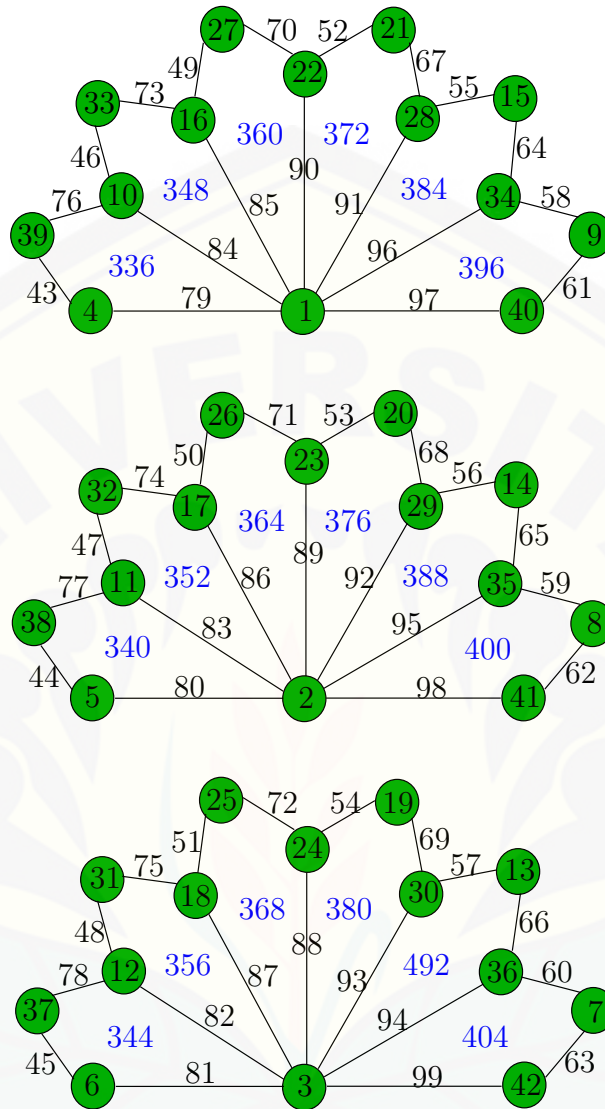
$$\begin{aligned} f_3(px_i^j) &= 4mn + mi + m + j, \quad 1 \leq i \leq n + 1, \quad 1 \leq j \leq m, \quad \text{dan } i \text{ ganjil,} \\ f_3(px_i^j) &= 4mn + mi + 2m - j + 1, \quad 1 \leq i \leq n + 1, \quad 1 \leq j \leq m, \quad \text{dan } i \text{ genap,} \\ f_3(x_i y_i^j) &= 2mn + mi + m + j, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m \\ f_3(y_i x_{i+1}^j) &= 4mn - mi + 2m + j, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Jika W_{f_3} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada gabungan graf Semi Jahangir, maka W_{f_3} dapat diperoleh dari penjumlahan bobot selimut w_{f_3} dengan fungsi label sisi, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_3} &= w_{f_3} + f_3(px_i^j) + f_3(px_{i+1}^j) + f_3(x_i y_i^j) + f_3(y_i x_{i+1}^j), \\ &= (2mn + 2mi + 3m + 2j + 1) + (4mn + mi + m + j) + (4mn + m \\ &\quad (i + 1) + 2m - j + 1) + (2mn + mi + m + j) + (4mn - mi + 2m + j) \\ &= 16mn + 4mi + 10m + 4j + 2, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_3} = \{16mn + 14m + 6, 16mn + 14m + 10, \dots, 20mn + 14m + 2\}$. Karena $U_n = a + (s - 1)b = 16mn + 14m + 6 + (mn - 1)4 = 20mn + 14m + 2$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(16mn + 14m + 6, 4)$ - (C_4) antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. \square

Gambar 4.28 merupakan contoh super $(336, 4)-(C_4)$ antimagic total selimut \mathcal{SHATC} pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir $3SJ_6$



Gambar 4.28 Super $(336, 4)-(C_4)$ antimagic total selimut pada $3SJ_6$

Pada Gambar 4.28 merupakan gabungan graf mSJ_n dengan $n = 6$ dan $m = 3$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{f_3} = \{336, 340, 344 \dots, 404\}$ dengan $d = 4$ dan $a = 336$.

◇ **Teorema 4.2.4.** *Ada pelabelan super $(15mn + 14m + 7, 6)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$.*

Bukti. Melabeli setiap titik pada gabungan graf Semi Jahangir dengan himpunan bilangan asli sama seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga untuk fungsi titiknya $f_4(p^j) = f_1(p^j)$, $f_4(x_i^j) = f_1(x_i^j)$, $f_4(y_i^j) = f_1(y_i^j)$, dan untuk fungsi bobot selimutnya $w_{f_4} = w_{f_1}$. Selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Labeli sisi pada gabungan graf Semi Jahangir dengan fungsi bijektif f_4 dapat dituliskan sebagai berikut:

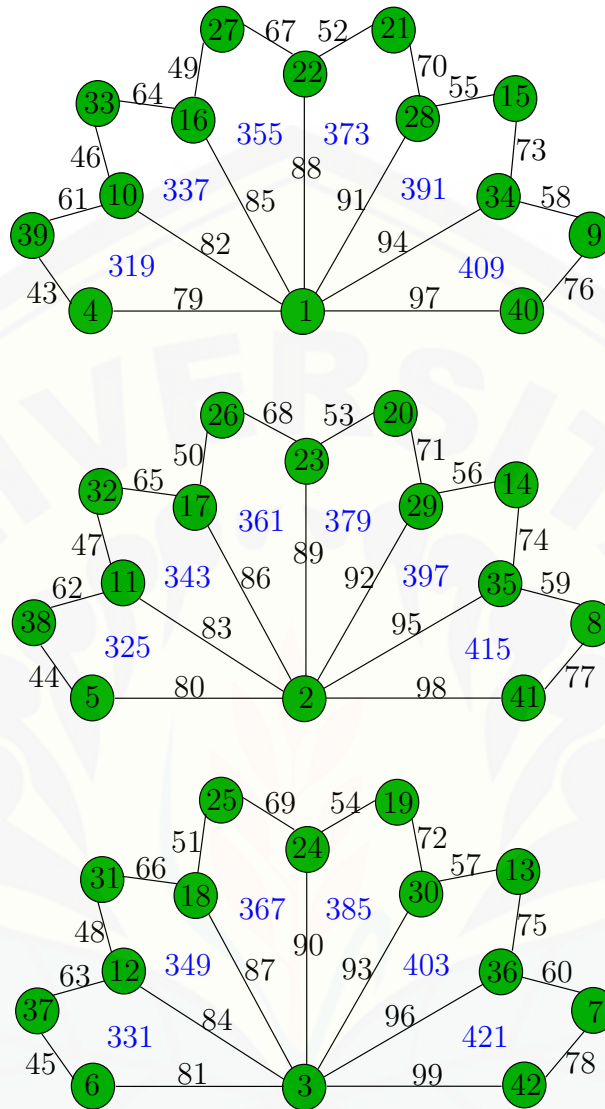
$$\begin{aligned} f_4(px_i^j) &= 4mn + mi + m + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq j \leq m \\ f_4(x_iy_i^j) &= 2mn + mi + m + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_4(y_ix_{i+1}^j) &= 3mn + mi + m + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Jika W_{f_4} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada gabungan graf Semi Jahangir, maka W_{f_4} dapat diperoleh dari penjumlahan bobot selimut w_{f_4} dengan fungsi label sisi, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_4} &= w_{f_4} + f_4(px_i^j) + f_4(px_{i+1}^j) + f_4(x_iy_i^j) + f_4(y_ix_{i+1}^j), \\ &= (2mn + 2mi + 3m + 2j + 1) + (4mn + mi + m + j) + (4mn + m(i + 1) \\ &\quad + m + j) + (2mn + mi + m + j) + (3mn + mi + m + j) \\ &= 15mn + 6mi + 8m + 6j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_4} = \{15mn + 14m + 7, 15mn + 14m + 13, \dots, 21mn + 14m + 1\}$. Karena $U_n = a + (s - 1)b = 15mn + 14m + 7 + (mn - 1)6 = 21mn + 14m + 1$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(15mn + 14m + 7, 6)$ - (C_4) antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. \square

Gambar 4.29 merupakan contoh super $(319, 6)-(C_4)$ antimagic total selimut \mathcal{SHATC} pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir $3SJ_6$



Gambar 4.29 Super $(319, 6)-(C_4)$ antimagic total selimut pada $3SJ_6$

Pada Gambar 4.29 merupakan gabungan graf mSJ_n dengan $n = 6$ dan $m = 3$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{f_4} = \{319, 325, 331 \dots, 421\}$ dengan $d = 6$ dan $a = 319$.

◇ **Teorema 4.2.5.** *Ada pelabelan super $(\frac{23mn+34m+16}{2}, 8)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ dengan n genap. Dan super $(\frac{23mn+33m+16}{2}, 8)$ - (C_4) -antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir SJ_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ dengan n ganjil.*

Bukti. Labeli setiap titik gabungan graf Semi Jahangir mSJ_n dengan fungsi bijektif f_5 . Fungsi titik f_5 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_5(p) &= j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_5(x_i) &= \begin{cases} \frac{mi+m+2j}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1, i \text{ ganjil}, 1 \leq j \leq m \\ \frac{mn+mi+2m+2j}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1, i \text{ genap}, n \text{ genap}, 1 \leq j \leq m \\ \frac{mn+mi+m+2j}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n+1, i \text{ genap}, n \text{ ganjil}, 1 \leq j \leq m \end{cases} \\ f_5(y_i) &= \frac{2mn+2mi+2m+2j}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Jika w_{f_5} didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada gabungan graf Semi Jahangir dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 4 label titik dari $\mathcal{H} = C_4$ yang menjadi selimut pada graf Semi Jahangir, maka fungsi bijektif w_{f_5} dapat ditentukan sebagai berikut.

Fungsi bobot selimut untuk n genap :

$$\begin{aligned} w_{f_5} &= f_5(p^j) + f_5(x_i^j) + f_5(x_{i+1}^j) + f_5(y_i^j) \\ &= j + \frac{mi+m+2j}{2} + \frac{mn+m(i+1)+2m+2j}{2} + \frac{2mn+2mi+2m+2j}{2} \\ &= \frac{3mn+4mi+6m+8j}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Fungsi bobot selimut untuk n ganjil :

$$\begin{aligned} w_{f_5} &= f_5(p^j) + f_5(x_i^j) + f_5(x_{i+1}^j) + f_5(y_i^j) \\ &= j + \frac{mi+m+2j}{2} + \frac{mn+m(i+1)+m+2j}{2} + \frac{2mn+2mi+2m+2j}{2} \\ &= \frac{3mn+4mi+5m+8j}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya untuk membentuk selimut total, maka diperlukan label sisi. Labeli sisi gabungan graf Semi Jahangir mSJ_n dengan fungsi bijektif f_5 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_5(p^j x_i^j) &= \frac{2mn + mi + m + j}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq j \leq m \\ f_5(x_i^j y_i^j) &= \frac{3mn + 2mi + m + j}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_5(y_i^j x_{i+1}^j) &= \frac{3mn + 2mi + 2m + j}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Jika W_{f_5} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada gabungan graf Semi Jahangir, maka W_{f_5} dapat diperoleh dari penjumlahan bobot selimut w_{f_5} dengan fungsi label sisi, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut: Fungsi bobot total untuk n genap :

$$\begin{aligned} W_{f_5} &= w_{f_5} + f_5(px_i^j) + f_5(px_{i+1}^j) + f_5(x_i y_i^j) + f_5(y_i x_{i+1}^j), \\ &= \frac{3mn + 4mi + 6m + 8j}{2} + \frac{2mn + mi + m + j}{2} + \frac{2mn + m(i + 1) + m + j}{2} \\ &\quad + \frac{3mn + 2mi + m + j}{2} + \frac{3mn + 2mi + 2m + j}{2} \\ &= \frac{23mn + 16mi + 18m + 16j}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

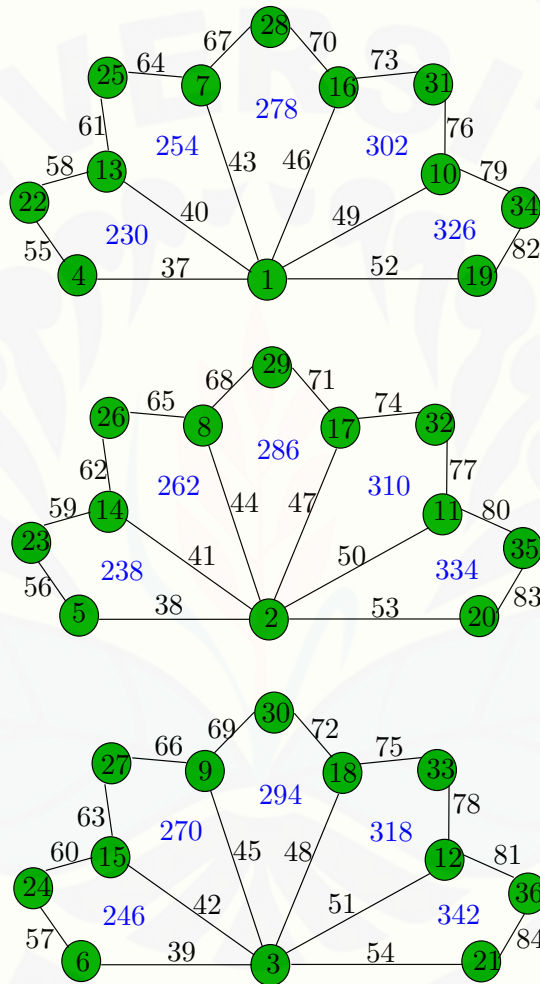
Fungsi bobot total untuk n ganjil :

$$\begin{aligned} W_{f_5} &= w_{f_5} + f_5(px_i^j) + f_5(px_{i+1}^j) + f_5(x_i y_i^j) + f_5(y_i x_{i+1}^j), \\ &= \frac{3mn + 4mi + 5m + 8j}{2} + \frac{2mn + mi + m + j}{2} + \frac{2mn + m(i + 1) + m + j}{2} \\ &\quad + \frac{3mn + 2mi + m + j}{2} + \frac{3mn + 2mi + 2m + j}{2} \\ &= \frac{23mn + 16mi + 17m + 16j}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari $W_{f_5} = \left\{ \frac{23mn+34m+16}{2}, \frac{23mn+34m+32}{2}, \dots, \frac{39mn+34m}{2} \right\}$ untuk n genap. Karena $U_n = a + (s - 1)b = \frac{23mn+34m+16}{2} + (mn - 1)8 = \frac{39mn+34m}{2}$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(\frac{23mn+34m+16}{2}, 8)$ -

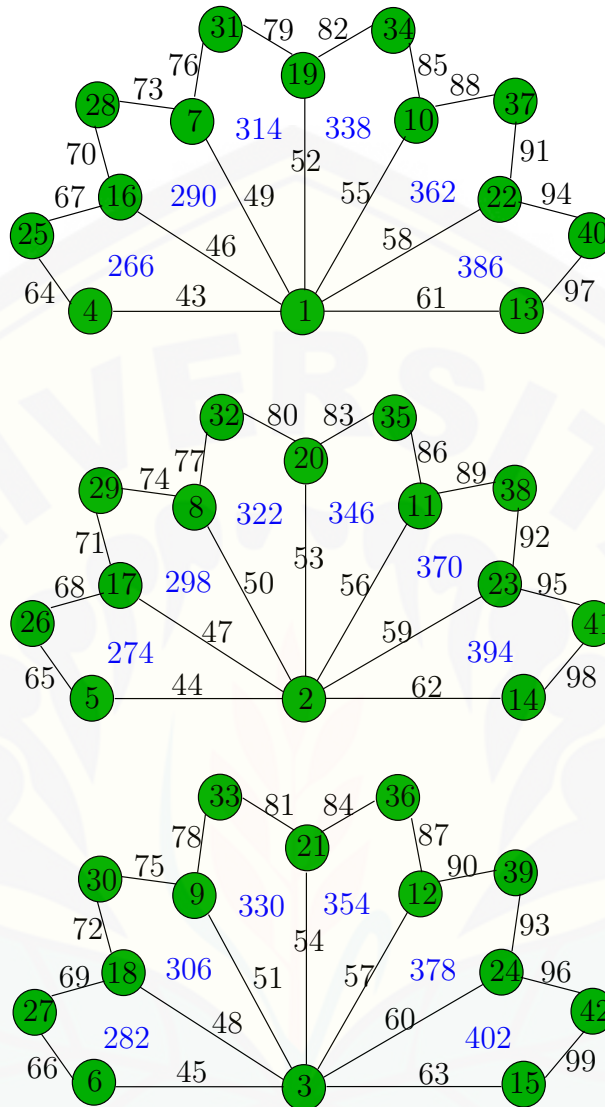
(C_4) antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ dengan n genap. Dan untuk n ganjil barisan aritmatika dari $W_{f_5} = \left\{ \frac{23mn+33m+16}{2}, \frac{23mn+33m+32}{2}, \dots, \frac{39mn+33m}{2} \right\}$. Karena $U_n = a+(s-1)b = \frac{23mn+33m+16}{2} + (mn-1)8 = \frac{39mn+33m}{2}$ maka terbukti bahwa ada pelabelan super $(\frac{23mn+33m+16}{2}, 8)$ - (C_4) antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ dengan n ganjil. \square

Pada Gambar 4.30 merupakan contoh super $(230, 8)$ - (C_4) antimagic total selimut $SHATC$ pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir $3SJ_5$



Gambar 4.30 Super $(230, 8)$ - (C_4) antimagic total selimut pada $3SJ_5$

Pada Gambar 4.31 merupakan contoh super $(266, 8)-(C_4)$ antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir $3SJ_6$



Gambar 4.31 Super $(266, 8)-(C_4)$ antimagic total selimut pada $3SJ_6$

Pada Gambar 4.31 merupakan gabungan graf mSJ_n dengan $n = 5$ dan $m = 3$, pelabelan total selimut pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{f_5} = \{230, 238, 246 \dots, 342\}$ dengan $d = 8$ dan $a = 230$. Sedangkan Gambar 4.30 merupakan gabungan graf mSJ_n dengan $n = 6$ dan $m = 3$, pelabelan total selimut

pada graf tersebut membentuk barisan aritmatika $W_{f_5} = \{266, 274, 282 \dots, 402\}$ dengan $d = 8$ dan $a = 266$.

4.3 Hasil dan Pembahasan

Metode penelitian ini digunakan untuk menentukan kardinalitas, menentukan batas atas nilai d , menentukan fungsi titik, fungsi bobot selimut, fungsi sisi, dan fungsi bobot total selimut pada graf Semi Jahangir tunggal SJ_n maupun gabungan saling lepasnya mSJ_n . Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh nilai d yang mungkin untuk super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir tunggal SJ_n dengan $d \in \{0, 1, 2, \dots, 20\}$ dan gabungan saling lepasnya mSJ_n adalah $d \in \{0, 1, 2, \dots, 25\}$. Hasil dari penelitian ini didapatkan beberapa nilai d dan teorema-teorema baru beserta pembuktiannya terkait dengan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir tunggal maupun gabungan saling lepasnya.

Beberapa nilai d diatas didapatkan dengan mengkombinasikan label titik dan sisi, didapatkan 4 kombinasi label titik dan 11 kombinasi label sisi pada graf Semi Jahangir tunggal. Hasil dari mengkombinasikan label titik dan sisi tersebut maka didapatkan 17 (tujuh belas) teorema . Penggunaan dari label titik yang sama akan menghasilkan bobot selimut yang sama pula. Teorema-teorema yang didapatkan dari mengkombinasikan 4 label titik yang berbeda terbagi beberapa kelompok yaitu pada teorema 4.1.1, teorema 4.1.2, teorema 4.1.3, teorema 4.1.4, teorema 4.1.5, teorema 4.1.6, teorema 4.1.7, teorema 4.1.8, teorema 4.1.9, teorema 4.1.10 dan teorema 4.1.16; teorema 4.1.11, teorema 4.1.12, teorema 4.1.13 dan teorema 4.1.17; teorema 4.1.14; teorema 4.1.15. Sedangkan teorema-teorema yang didapatkan dari mengkombinasikan 11 label sisi yang berbeda terbagi beberapa kelompok yaitu pada teorema 4.1.1; teorema 4.1.2; teorema 4.1.3; teorema 4.1.4; teorema 4.1.5; teorema 4.1.6; teorema 4.1.7; teorema 4.1.8 dan teorema 4.1.11; teorema 4.1.9 dan teorema 4.1.12; teorema 4.1.10 dan teorema 4.1.13; teorema 4.1.14, teorema 4.1.15, teorema 4.1.16 dan teorema 4.1.17.

Sedangkan untuk graf Semi Jahangir pada gabungan saling lepas nilai d diatas didapatkan dengan mengkombinasi 2 label titik dan 5 kombinasi label sisi. Hasil dari mengkombinasikan label titik dan sisi tersebut didapatkan 5 (lima)

teorema. Nilai d yang didapat yaitu $d = 0$, $d = 2$, $d = 4$, $d = 6$ dan $d = 8$. Ada keterkaitan antara graf konektif dengan diskonektif yaitu salah satu label titik pada graf Semi Jahangir konektif dapat diterapkan pada label titik graf Semi Jahangir diskonektif, dapat dilihat pada teorema 4.1.15 dengan teorema 4.2.5.

Nilai batas atas d yang sudah diketahui berbeda dan nilai awal a juga berbeda namun pada penelitian ini terdapat nilai a yang sama yaitu pada teorema 4.1.2 dan teorema 4.1.4; teorema 4.1.6 dan teorema 4.1.11; teorema 4.1.10 dan teorema 4.1.14. Label titik yang digunakan adalah dari 1 hingga p_G dimana p_G adalah jumlah titik pada graf sedangkan label untuk sisi yang digunakan adalah dimulai dari $p_G + 1$ hingga $p_G + q_G$ dimana q_G merupakan jumlah sisi, sehingga $p_G + q_G$ merupakan jumlah titik dan sisi pada graf. Jika kedua label tersebut digunakan untuk melabeli sebuah graf dengan aturan yang diberikan diatas maka pelabelan tersebut disebut sebagai pelabelan total. Pada graf Semi Jahangir tunggal (SJ_n) nilai $d \leq 20$ tersebut berlaku pada syarat yang sama yaitu $n \geq 2$. Dan untuk gabungan graf Semi Jahangir dengan nilai $d < 26$ tersebut berlaku pada syarat yang sama yaitu $n \geq 2$ dan $m \geq 2$.

Menurut hasil penelitian yang telah dilakukan, peneliti telah mendapatkan Super \mathcal{H} -antimagic total selimut graf Semi Jahangir tunggal untuk $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18\}$ dan Super \mathcal{H} -antimagic total selimut untuk gabungan saling lepas pada graf Semi Jahangir $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Berdasarkan hasil penelitian dan perhitungan yang telah dilakukan sebelumnya, terdapat beberapa pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n dan gabungan saling lepas mSJ_n yang belum ditemukan oleh peneliti. Berdasarkan visualisasi contoh-contoh pelabelan dan penerapan fungsi bijektif hasil penelitian yang telah ditemukan, diharapkan dapat membantu peneliti lain yang akan melakukan penelitian sejenis. Beberapa pelabelan dan penerapan fungsi bijektif yang belum ditemukan oleh penulis diberikan pada masalah terbuka berikut:

Masalah terbuka 4.3.1. *Pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n dengan $n \geq 2$ untuk $d \leq 20$ selain $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5,$*

6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18}.

Masalah terbuka 4.3.2. *Pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ untuk $d \leq 24$ selain $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.*



BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Graf Semi Jahangir tunggal SJ_n memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut untuk $d = \{0, 1, 2, 3, \dots, 20\}$. Peneliti telah menemukan $SHATC$ (Super \mathcal{H} Antimagic Total Covering) untuk graf Semi Jahangir tunggal untuk $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18\}$. Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa graf Semi Jahangir SJ_n memiliki fungsi bijektif pelabelan super $(\frac{31n+42}{2}, 0)$ untuk n genap dan $(\frac{31n+41}{2}, 0)$ untuk n ganjil, $(15n + 21, 1)$, $(\frac{29n+44}{2}, 2)$ untuk n genap dan $(\frac{29n+43}{2}, 2)$ untuk n ganjil, $(15n + 21, 3)$, $(\frac{27n+46}{2}, 4)$ untuk n genap dan $(\frac{27n+45}{2}, 4)$ untuk n ganjil, $(13n + 23, 5)$, $(\frac{25n+48}{2}, 6)$ untuk n genap dan $(\frac{25n+47}{2}, 6)$ untuk n ganjil, $(14n + 22, 7)$, $(\frac{23n+50}{2}, 8)$ untuk n genap dan $(\frac{23n+49}{2}, 8)$ untuk n ganjil, $(11n + 25, 9)$, $(13n + 23, 10)$, $(\frac{21n+52}{2}, 11)$ untuk n genap dan $(\frac{21n+51}{2}, 11)$ untuk n ganjil, $(10n + 26, 12)$, $(11n + 25, 13)$, $(\frac{19n+54}{2}, 14)$ untuk n genap dan $(\frac{19n+53}{2}, 14)$ untuk n ganjil, $(9n + 27, 15)$, $(8n + 28, 18)$ - (C_4) antimagic total selimut untuk $n \geq 2$.
2. Gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n memiliki pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut untuk $d = \{0, 1, 2, 3, \dots, 25\}$. Peneliti telah menemukan $SHATC$ (Super \mathcal{H} Antimagic Total Covering) untuk gabungan graf Semi Jahangir $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Hasil penelitian ini dibuktikan bahwa gabungan graf Semi Jahangir mSJ_n terdapat fungsi bijektif pelabelan super $(18mn + 14m + 4, 0)$, $(17mn + 14m + 5, 2)$, $(16mn + 14m + 6, 4)$, $(15mn + 14m + 7, 6)$, dan $(\frac{23mn+34m+16}{2}, 8)$ untuk n genap dan $(\frac{23mn+33m+16}{2}, 8)$ untuk n ganjil antimagic total selimut untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian pada pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut pada graf Semi Jahangir SJ_n dengan $n \geq 2$ untuk $d \leq 20$ selain $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18\}$. Serta untuk pelabelan super (a, d) - \mathcal{H} antimagic total selimut pada gabungan saling lepas graf Semi Jahangir mSJ_n , dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ untuk $d \leq 25$ selain $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.



DAFTAR PUSTAKA

- Agustin, I. H., Pudyaningrum, P. R. H., and Dafik (2014). Super total selimut pada gabungan saling lepas graf shackle triangular book. *Seminar Nasional Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan*.
- Dafik (2007). Structural properties and labeling of graphs. *School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat, Australia*, Ph.D Thesis, November:1–140.
- Dafik (2015). Pidato pengukuhan guru besar. *Universitas Jember*.
- Dafik, Miller, M., Ryan, J., and Bača, M. (2008). Antimagic labeling of union of stars. *The Australasian Journal of Combinatorics*, 42:35–44.
- Dafik, Mirka, M. R. J. B. M. (2009). On super (a, d) -edge-antimagic total labeling of disconnected graphs. *Discrete Mathematics*, 309(15):4909–4915.
- Gutierrez and Llado (2005). Magic coverings. *Of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 55:451–461.
- Harsya, A. Y. (2015). Bilangan kromatik pada pengoperasian graf lintasan dengan graf lingkaran. *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember*.
- Hartsfield, N. and Ringel, G. (1994). *Pearls in Graph Theory*, volume 64. Academic Press, Boston - San Diego - New York - London.
- Inayah, N. (2013). Pelabelan $(a, d) - h$ -anti ajaib pada beberapa kelas graf. *Tidak dipublikasikan (Disertasi)*.
- Inayah, N., Simanjuntak, R., and Salman, A. (2009). On (a, d) - h -antimagic covering of graph. *The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 71:273–281.
- Jamil, N. A. (2014). Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total covering pada graf triangular ladder. *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember*.

- K. Ali, E. T. B. and Tomescu, I. (2007). On the ramzey number of paths and jahangir graph j3. *International Conference on 21st Century Mathematics*.
- Karyanti (2012). Pelabelan selimut (a, d) - h -anti ajaib super pada graf fan, sun, dan generalized petersen. tidak dipublikasikan (skripsi). *Universitas Sebelas Maret*, Vol.1, No.1:1–10.
- Kotzig, A. and Rosa, A. (1970). Magic valuations of finite graphs. *Canad. Math. Bull.*, 13:451–461.
- Munir, R. (2010). Matematika diskrit. *Matematika Diskrit*, 30:356.
- Pudyaningrum, P. R. H. (2014). Super (a, d) - \mathcal{H} -antimagic total covering pada shackle graf triangular book. *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember*.
- Purwanto, H., Indriani, G., and Dayanti, E. (2006). Matematika diskrit. *PT. ERCONTARA RAJAWALI jakarta*, 50:157.
- Sugeng, K. A. (2005). Magic and antimagic labeling og graph. *PhD Thesis, School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat*, 71:98.
- Wallis, W. D. (2001). Magic graphs. *Boston: Birkhäuser*, 80:2.
- Wijaya, K. (2001). Pelabelan total sisi ajaib pada gabungan suns graf. *Tidak dipublikasikan (Skripsi)*.