ANALISIS *RAINBOW CONNECTION NUMBER* PADA GRAF KHUSUS DAN HASIL OPERASINYA

TESIS

Oleh
Randhi Nanang Darmawan
NIM 131820101009

JURUSAN MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2015

ANALISIS *RAINBOW CONNECTION NUMBER* PADA GRAF KHUSUS DAN HASIL OPERASINYA

TESIS

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Magister Matematika (S2)
dan mencapai gelar Magister Sains

Oleh
Randhi Nanang Darmawan
NIM 131820101009

JURUSAN MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2015

PERSEMBAHAN

Tesis ini saya persembahkan untuk:

1. Ibunda Nanik dan Ayahanda Jurin tercinta, yang telah melahirkan dan membesarkan serta atas untaian dzikir dan doa yang mengiringi langkahku selama menuntut ilmu, dukungan dan curahan kasih sayang tanpa batas yang telah diberikan sejak aku kecil, serta pengorbanan selama ini;
2. Kakakku Bambang Setiawan, atas doa dan kasih sayang serta motivasi yang telah diberikan kepada adikmu selama ini;
3. Guru-guru dan dosen-dosenku sejak taman kanak-kanak sampai dengan perguruan tinggi yang telah mendidik dengan penuh kesabaran;
4. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

وَاقْصِدْ فِي مَشْيِكَ وَاغْضُضْ مِنْ صَوْتِكَ

Dan sederhanalah kamu dalam berjalan dan lunakkanlah suaramu.
(Terjemahan Q.S. Luqman: 19)*)

*The ink of the scolar is more sacred than the blood of the martyr.***)

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 1998. *Al Qur'an dan Terjemahannya.* Semarang: PT Kumudasmoro Grafindo.
**) Muhammad SAW. dalam Moris, Z. 2003. *Revelation, Intellectual Intuition and Reason in the Philosophy Of Mulla Sadra.* London: New Fetter Lane.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Randhi Nanang Damawan

NIM : 131820101009

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul ”Analisis *Rainbow Connection Number* pada Graf Khusus dan Hasil Operasinya” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang telah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2015

Yang menyatakan,

Randhi Nanang Darmawan

NIM 131820101009

TESIS

ANALISIS *RAINBOW CONNECTION NUMBER* PADA GRAF KHUSUS DAN HASIL OPERASINYA

Oleh
Randhi Nanang Darmawan
NIM 13182010109

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama	:	Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D.
Dosen Pembimbing Anggota	:	Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

PENGESAHAN

Tesis yang berjudul ”Analisis *Rainbow Connection Number* pada Graf Khusus dan Hasil Operasinya” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Tim Penguji:

Ketua,	Sekretaris,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. NIP. 19680802 199303 1 004	Drs. Rusli Hidayat, M.Sc NIP. 19661012 199303 1 001
Penguji I,	Penguji II,
Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D NIP. 19670420 199201 1 001	Kosala Dwija Purnomo, S.Si, M.Si NIP. 19690828 199802 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.
NIP 19610108 198602 1 001

RINGKASAN

Analisis *Rainbow Connection Number* pada Graf Khusus dan Hasil Operasinya; Randhi Nanang Darmawan, 131820101009; 2015: 86 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Misalkan G adalah graf terhubung *nontrivial* dengan $edge-coloring$ $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., k\}$ dengan $k \in \mathbb{N}$, dan mungkin terdapat pewarnaan sisi yang sama pada dua sisi yang bertetangga. Suatu lintasan $u-v$ di G merupakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di lintasan tersebut diwarnai sama. Graf G disebut *rainbow connected* dengan pewarnaan c jika G memuat suatu *rainbow u-v path* untuk setiap dua titik $u, v \in G$. Dalam hal ini pewarnaan c dikatakan *rainbow c-coloring* di G. Kemudian akan didefinisikan *rainbow connection number* dari graf G dinotasikan dengan $rc(G)$ adalah nilai terkecil yang dibutuhkan untuk mewarnai graf G menjadi *rainbow connected.*

Misalkan c suatu *rainbow coloring* pada suatu graf terhubung G, Untuk sebarang dua titik $u, v \in G$, *rainbow u-v geodesic* di G adalah suatu *rainbow path* dengan panjang $d(u, v)$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara u dan v. Graf G dikatakan *strongly rainbow connected* jika G memuat satu *rainbow u-v geodesic* untuk setiap dua titik u dan v pada G. Pada kasus ini c dikatakan *strong rainbow c-coloring* dari G. Kemudian akan didefiniskan *strong rainbow connection number* dari graf G dinotasikan dengan $src(G)$ adalah nilai terkecil yang dibutuhkan untuk mewarnai graf G menjadi *strong rainbow connected.*

Berdasarkan penelitian pada graf khusus dan hasil operasinya meliputi graf prisma, antiprisma, graf *join*, *cartesian product*, *crown product*, *tensor product*, graf *shackle*, dan graf amalgamasi telah didapatkan 14 teorema baru terkait $rc(G)$ dan $src(G)$ dan juga beberapa analisis yang menghasilkan 3 *conjecture* baru, diantaranya adalah sebagai berikut.

1. **Teorema 4.2.1** *Untuk setiap bilangan bulat $m \geq 2$ dan $n \geq 2$, nilai rainbow connection number dari graf $G = (mP_n + K_1)$ adalah*

$$rc(mP_n + K_1) = 3$$

2. **Teorema 4.2.2** *Untuk setiap bilangan bulat $m \geq 2$ dan $n \geq 2$, nilai strong rainbow connection number dari graf $G = (mP_n + K_1)$ adalah*

$$src(mP_n + K_1) = (\lceil \frac{n}{3} \rceil)m$$

3. **Teorema 4.2.3** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, nilai rainbow connection number dan strong rainbow connection number dari graf $G = S_n \square P_m$ adalah $n + m - 1$*

4. **Teorema 4.2.4** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, nilai rainbow connection number dari graf $G = W_n \square P_m$ adalah*

$$rc(W_n \square P_m) = \begin{cases} m; & \text{untuk}\, n = 3 \\ m + 1; & \text{untuk}\, 4 \leq n \leq 6 \\ m + 2; & \text{untuk}\, n \geq 7. \end{cases}$$

5. **Teorema 4.2.5** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, nilai strong rainbow connection number dari graf $G = W_n \square P_m$ adalah*

$$src(W_n \square P_m) = \begin{cases} rc(W_n \square P_m); & \text{untuk}\, n = 3 \\ rc(W_n \square P_m); & \text{untuk}\, 4 \leq n \leq 6 \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1; & \text{untuk}\, n \geq 7. \end{cases}$$

6. **Teorema 4.2.6** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, nilai rainbow connection number dari graf $G = P_n \odot C_m$ adalah*

$$rc(P_n \odot C_m) = \begin{cases} 2n - 1; & \text{untuk}\, m = 3 \\ 3n - 1; & \text{untuk}\, m \geq 4. \end{cases}$$

7. **Teorema 4.2.7** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 2$ *dan* $m \geq 3$*, nilai strong rainbow connection number dari graf* $G = P_n \odot C_m$ *adalah*

$$src(P_n \odot C_m) = \begin{cases} rc(P_n \odot C_m); & \text{untuk}\, m = 3 \\ rc(P_n \odot C_m); & \text{untuk}\, 4 \leq m \leq 6 \\ n(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + (n-1); & \text{untuk}\, m \geq 7 \end{cases}$$

8. **Teorema 4.2.8** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 2$*, nilai rainbow connection number dan strong rainbow connection number dari graf* $G = shack[(P_2 \otimes W_3), n]$ *adalah* $3n$*.*

9. **Teorema 4.2.9** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 2$*, nilai rainbow connection number dan strong rainbow connection number dari graf* $G = shack[(P_3 \otimes C_3), n]$ *adalah* $4n$*.*

10. **Teorema 4.2.10** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 2$*, nilai rainbow connection number dari graf* $G = Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]$ *adalah* 3*.*

11. **Teorema 4.2.11** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 2$*, nilai strong rainbow connection number dari graf* $G = Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]$ *adalah* $2n$*.*

12. **Teorema 4.2.12** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 2$*, nilai rainbow connection number dan strong rainbow connection number dari graf* $G = Amal[(S_4 \Box P_2), v = 1, n]$ *adalah* $5n$*.*

13. **Teorema 4.2.13** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 1$*, rainbow connection number dan strong rainbow connection number untuk graf prisma* $Pr_{(n,m)}$ *adalah*

$$rc(Pr_{(n,m)}) = src(Pr_{(n,m)}) = \begin{cases} m; & \text{untuk}\, n = 3 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1); & \text{untuk}\, n \geq 4 \end{cases}$$

14. **Teorema 4.2.14** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 1$, *rainbow connection number dan strong rainbow connection number untuk graf antiprisma* AP_n *adalah*

$$rc(AP_n) = src(AP_n) = \begin{cases} 2; & \text{untuk}\, n = 3 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil; & \text{untuk}\, n \geq 4 \end{cases}$$

15. **Dugaan 4.3.1** *Misalkan* G_1 *dan* G_2 *adalah graf terhubung nontrivial, maka nilai* $rc(G_1 + G_2) = 2$ *dengan* G_1, G_2 *bukanlah graf lengkap* K_n *dan graf* disjoin union.

16. **Dugaan 4.3.2** *Misalkan* G *adalah graf terhubung nontrivial maka nilai* $rc(P_n \odot G) = n[rc(G + v)] + (n - 1)$.

17. **Dugaan 4.3.3** *Misalkan* G *adalah graf terhubung nontrivial maka nilai* $rc(shack[G, n]) = n[rc(G)]$.

PRAKATA

Segala puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat meyelesaikan tesis ini yang berjudul "Analisis *Rainbow Connection Number* pada Graf Khusus dan Hasil Operasinya". Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Magister Matematika (S2) dan mencapai gelar Magister Sains.

Penyusunan tesis ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Drs. Rusli Hidayat, M.Sc. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan tesis ini;
2. Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Penguji I dan Kosala Dwija Purnomo, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran demi kebaikan tesis ini;
3. Keluarga di rumah yang telah memberikan doa dan semangat setiap waktu;
4. Gus Nur Hasan (alm.) dan Ust. Khoirul Anam selaku guru spiritualku yang selalu membimbing dan mendoakan dengan penuh keikhlasan;
5. Ilham Saifudin, Tanti Windartini, Agrita Kanty P, Andi Kurniawan, dan seluruh teman-teman Máistir na Matamaitice 2013 yang selalu memberikan dorongan semangat dan motivasi.
6. Semua teman-teman kos 86 yang selalu memberikan kebahagiaan serta dorongan motivasi;
7. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tesis ini. Akhirnya penulis berharap semoga tesis ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2015 — Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan teknologi informasi yang pesat telah memberi peran yang sangat penting untuk menjalin pertukaran/transfer informasi yang cepat sehingga suatu informasi membutuhkan perlindungan. Informasi yang penting temasuk jenis informasi yang terhubung langsung ke security negara perlu dilindungi keamanannya. Departemen Homeland Amerika Serikat yang dibentuk pada 2003 sebagai bentuk respon atas ditemukannya kelemahan transfer informasi yang berakibat terjadinya tindak serangan teroris 11 September 2001. Sehingga keamanan informasi harus terjaga dan diharuskan juga terdapat prosedur yang memberikan ijin untuk mengakses antara agen-agen pemerintahan (X.Li dan Sun, 2012). Setiap jalur transfer informasi diperlukan suatu *password* dan $firewall$ angka (karakter) yang cukup besar untuk melindungi informasi dari serangan pengganggu. Sehingga muncul pertanyaan, berapa angka minimal *password* dan $firewall$ yang dibutuhkan setiap dua orang agen saat melakukan jalur transfer informasi, disamping itu juga tidak terjadi pengulangan *password* dari masing-masing agen.

Permasalahan tersebut dapat diselesaikan secara matematis dengan konsep teori graf, yang merupakan bagian dari matematika diskrit. Diantara konsep teori graf yang muncul karena termotivasi kasus tersebut adalah *rainbow connection*. Konsep *rainbow connection* pada graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 2008 oleh Chartrand, Johns, McKeon and Zhang. Penelitian terkait *rainbow connection* berkembang cukup pesat, Xueliang Li pada beberapa artikel ilmiah yang telah dipubilkasikan diantaranya pada 2010 dan 2011 menghasilkan beberapa teorema yang akan sering digunakan penulis sebagai acuan pembuktian teorema-teorema baru yang didapatkan, penelitian Xueliang Li tersebut diantara lain *Rainbow connection in 3-connected Graph*,*Rainbow connection numbers of complementary graphs*, *Rainbow connections of graphs-A Survey**, dan *Rainbow* *connections of line graphs.*

Syafrizal (2013) pada penelitiannya mendapatkan nilai *rainbow connection numbers* dari graf buku B_n dengan $n \geq 3$ adalah $rc(B_n) = 4$ dan graf gear G_n dengan $n \geq 4$ adalah $rc(G_n) = 4$. Kemudian Yulianti (2013) juga melakukan penelitian terkait *rainbow connection* pada graf kipas (*Fan Graph*) dan graf matahari (*Sun Graph*), pada penelitian tersebut didapatkan nilai $rc(F_n) = 1$ untuk $n = 2$, $rc(F_n) = 2$ untuk $3 \leq n \leq 6$, dan $rc(F_n) = 3$ untuk $n \geq 7$, disamping itu juga didapatkan nilai $src(F_n) = rc(F_n)$ untuk $2 \leq n \leq 6$, dan $src(F_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ untuk $n \geq 7$. Kemudian pada graf matahari S_n didapatkan $rc(S_n) = src(S_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + n$ untuk $n \geq 2$.

Berdasarkan pada beberapa penelitian sebelumnya penulis tertarik untuk mengkaji lebih dalam terkait *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* pada beberapa graf khusus dan hasil operasinya. Operasi graf yang digunakan meliputi *graph join* $((G + H))$, *cartesian product* $((G\Box H))$, *tensor product* $((G \otimes H))$, *crown product* $((G \odot H))$, *shackle*$(shack(G, n))$, dan *amalgamation*$(amal(G, v = 1, n))$. Untuk mempermudah dalam penggambaran hasil operasi graf, penulis menggunakan bantuan *software* MAPLE 12. Kemudian akan ditentukan fungsi $rc(G)$ dan $src(G)$ pada masing-masing hasil operasi tersebut sehingga bisa ditentukan nilai $rc(G)$ dan $src(G)$ selanjutnya akan dilakukan analisis nilai $rc(G)$ dan $src(G)$ untuk operasi dua graf dengan graf yang lebih general.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini adalah:

a. bagaimana menentukan *rainbow connection number* pada graf-graf khusus dan hasil operasinya?

b. bagaimana menentukan *strong rainbow connection number* pada graf-graf khusus dan hasil operasinya?

c. bagaimana analisis *rainbow connection number* pada suatu operasi graf dengan graf yang lebih general?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dari penulisan tugas akhir ini yaitu:

a. graf yang digunakan adalah graf tidak berarah dan terhubung;

b. graf khusus yang digunakan pada operasi graf meliputi graf lintasan P_n, graf lingkaran C_n, graf roda W_n, graf bintang S_n dan graf lengkap K_1,

b. operasi yang digunakan pada pengoperasian graf khusus meliputi *join, cartesian, crown, tensor, shackle* dan *amalgamation*.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang diatas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. menentukan nilai *rainbow connection number* pada graf-graf khusus dan hasil operasinya;

b. menentukan nilai *strong rainbow connection number* pada graf-graf khusus dan hasil operasinya;

c. menganalisis *rainbow connection number* pada suatu operasi graf dengan graf yang lebih general.

1.5 Hal Baru dalam Penelitian

Hal-hal baru yang belum ada pada penelitian sebelumnya adalah jenis graf yang akan digunakan, dan juga penentuan nilai *rainbow connection number* pada suatu operasi graf untuk lebih umum, sebagai contoh adalah menentukan nilai $rc(G_1 + G_2)$, $rc(G_1 \square G_2)$ dengan graf G_1 lebih spesifik dan graf G_2 yang general.

1.6 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

a. memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti mengenai aplikasi yang lain dan teori graf dalam kehidupan sehari-hari;

b. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan teori graf.

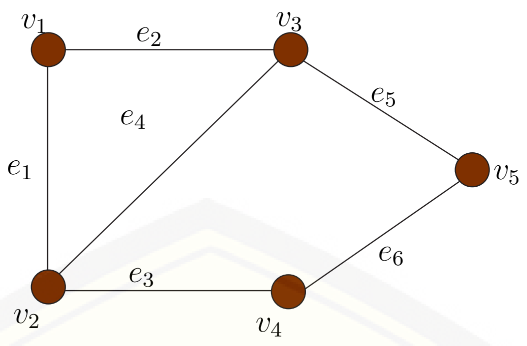
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi dan Terminologi Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*), dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut u, v dari titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi (*edge*).
Pada beberapa literatur pasangan u, v biasa juga dituliskan sebagai uv, jadi dalam penulisannya $uv = vu$, kadang juga untuk menyederhanakan penulisan dapat juga dituliskan $v \in G$ dan $e \in G$ atau juga $v \in V(G)$ dan $e \in E(G)$. Pada definisi suatu graf diatas maka jelaslah bahwa $V(G)$ tidak boleh berupa himpunan kosong minimal memeliki sebuah titik, sedangkan $E(G)$ boleh berupa himpunan kosong. Jadi jika terdapat sebuah graf dengan satu titik dan tidak memiliki sisi disebut dengan *Trivial Graph*.

Untuk sebuah graf G akan dinotasikan $|V(G)|$ dan $|E(G)|$ dimana masing-masing adalah banyaknya anggota dari himpunan titik yang biasa disebut *order* dan banyaknya anggota dari himpunan sisi yang biasa disebut *size* dari graf G. Sebuah graf direpresentasikan dengan gambar berupa titik yang dihubungkan garis (atau kurva) diantara pasangan titik $uv \in G$. Gambar 2.1 representasi graf dengan $V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G)=\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_6, v_4v_6\}$ atau bisa juga dituliskan $E(G)=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ (Harju, 2011:4-5).

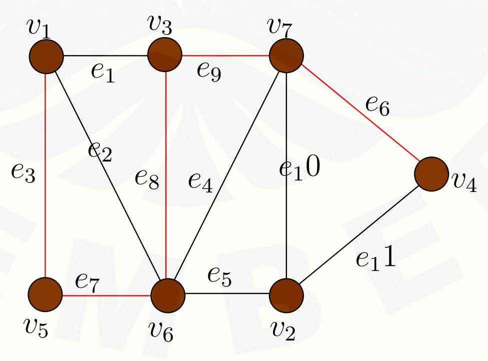
Sebuah titik u pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) pada v jika terdapat sisi e yang menghubungkan pasangan titik (u, v). Dengan kata lain u dan v bersisian (*incident*) dengan sisi e. Pada Gambar 2.1 titik v_1 bertetangga dengan v_2 dan v_3, titik v_3 bertetangga dengan titik v_1, v_2, v_5 dan titik v_5 bertetangga dengan titik v_3 dan v_4. Banyaknya sisi yang bersisian pada titik u disebut derajat (*degree*) titik u pada G. Jika u memiliki derajat 0 artinya tidak mempunyai tetangga dengan titik lain, maka titik u tersebut disebut titik terisolasi (*isolated point*). Titik yang mempunyai derajat satu disebut titik akhir(*end point*) atau



Gambar 2.1 Contoh representasi sebuah graf

daun(*leaf*). Jika semua titik pada G mempunyai derajat yang sama d, dikatan G adalah graf regular d.

Sebuah *walk* (jalan) didefinisikan sebagai barisan alternatif berhingga dari titik-titik dan sisi-sisi yang diawali dan diakhiri dengan titik sedemikian hingga tiap-tiap sisi yang bersisian (*edge incident*) dengan titik yang terdahulu dan dengan titik yang berikutnya. Pada Gambar 2.2 dapat dipilih sebuah *walk* yaitu, $v_1, e_3, v_5, e_7, v_6, e_8, v_3, e_9, v_7, e_6$ dan v_4 Sedangkan sebuah (*open walk*) yang di dalamnya tidak terdapat titik-titik yang muncul lebih dari sekali disebut dengan sebuah *path* (lintasan), pada Gambar 2.2 dapat diambil sebuah *path* yaitu $v_1, v_5, v_6, v_3, v_7, v_4$. Tetapi $v_1, v_5, v_6, v_7, v_3, v_1$ bukan merupakan *path* tetapi merupakan *cycle* karena kembali ke titik awal sehingga membentuk lintasan yang tertutup. Jumlah sisi-sisi dalam sebuah *path* disebut dengan *length* dari *path*.



Gambar 2.2 Contoh representasi *walk* dan *path* pada graf

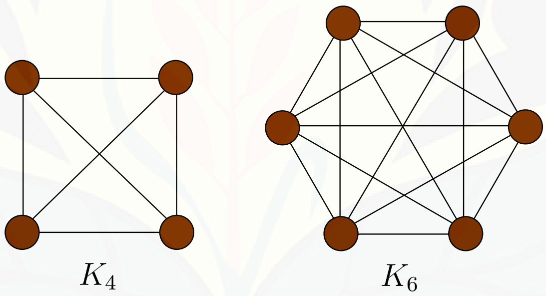
Suatu graf disebut graf terhubung (*connected graph*), jika untuk setiap pasangan titik $(u_i, v_j) \in V$ terdapat lintasan (*path*) dari u_i ke v_j, jika tidak maka G disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*), Gambar 2.2 merupakan salah satu contoh dari graf terhubung.

2.2 Beberapa Graf Khusus dan Operasi Graf

Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Berikut ini adalah beberapa contoh graf khusus.

1. Graf Lengkap *(Complete Graph)*

   Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n. Berdasarkan Gambar 2.3, jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah titik adalah $n(n-1)/2$ sisi. Contoh dari graf lengkap bisa dilihat pada Gambar 2.3.



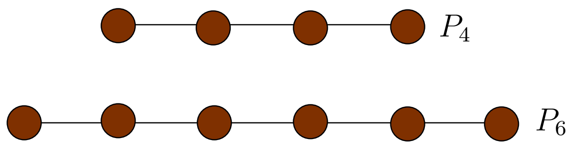
Gambar 2.3 Graf lengkap K_4 dan K_6

2. Graf Lintasan (*Path*)

   Graf lintasan adalah graf sederhana yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n dengan $n \geq 2$. Contoh dari graf lintasan bisa dilihat pada Gambar 2.4.

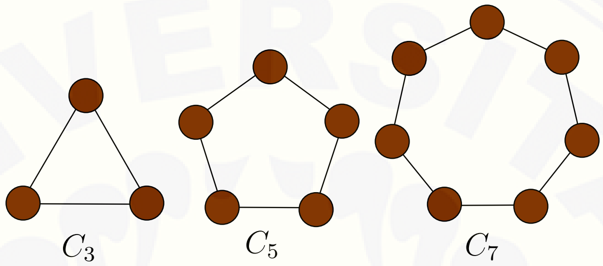
3. Graf Lingkaran (*Cycle*)

   Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua.



Gambar 2.4 Graf lintasan P_4 dan P_6

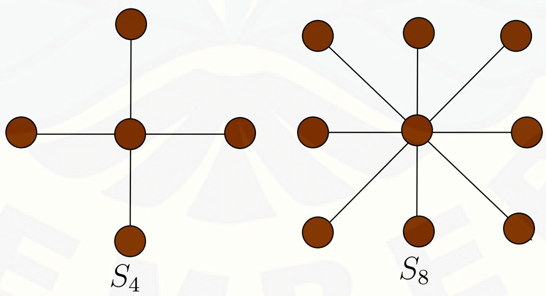
Graf lingkaran dengan n titik dilambangkan dengan C_n. Contoh dari graf lingkaran bisa dilihat pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Graf lingkaran C_3, C_5 dan C_7

4. Graf Bintang (*Star*)

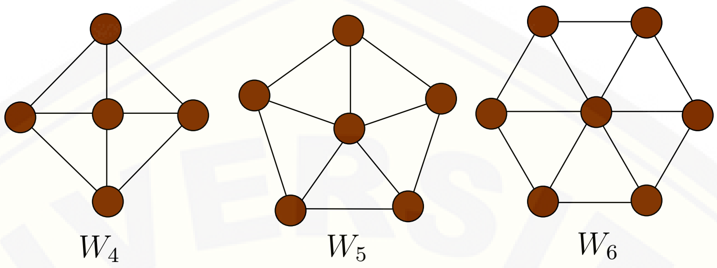
   Graf Bintang adalah graf pohon yang terdiri dari satu titik yang berderajat $n-1$ dan $n-1$ titik yang berderajat 1. Jadi, graf bintang S_n terdiri dari n titik dan $n-1$ sisi dengan $n \geqslant 3$. Sebagai ilustrasi perhatikan contoh pada Gambar 2.6 berikut.



Gambar 2.6 Graf bintang S_4 dan S_8

5. Graf Roda(*Wheel*)

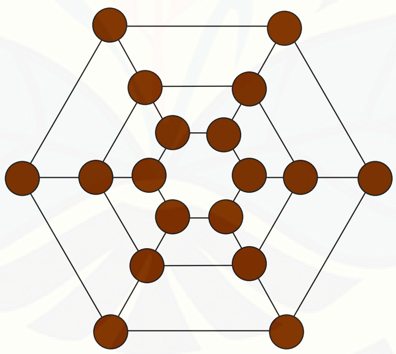
   Graf roda merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik pada graf lingkaran C_n, dan menghubungkan titik baru tersebut dengan semua titik pada graf lingkaran. Berikut ini contoh dari graf roda pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Graf roda W_4, W_5 dan W_6

6. Graf Prisma (*Prism*)

   Graf prisma dinotasikan dengan $Pr_{(n,m)}$ adalah graf yang memiliki $V(P_{n,m}) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(P_{n,m}) = \{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{n,j}x_{1,j}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$. Berikut ini contoh dari graf prisma.

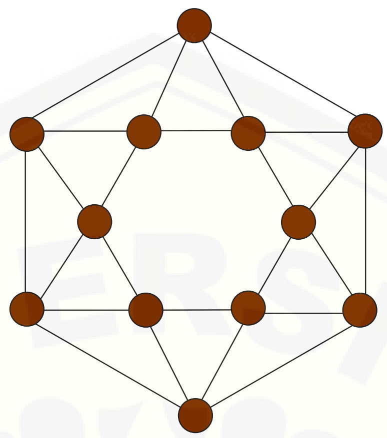


Gambar 2.8 Graf prisma $Pr_{(6,3)}$

7. Graf Antiprisma (*Antiprism*)

   Graf antiprisma dinotasikan dengan AP_n adalah graf yang memiliki $V(AP_n) =$

$\{x_i, y_i; 1 \leq i \leq m\}$, $E(AP_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_m x_1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_m y_1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq m\}$. Berikut ini contoh dari graf antiprisma.



Gambar 2.9 Graf antiprisma AP_6

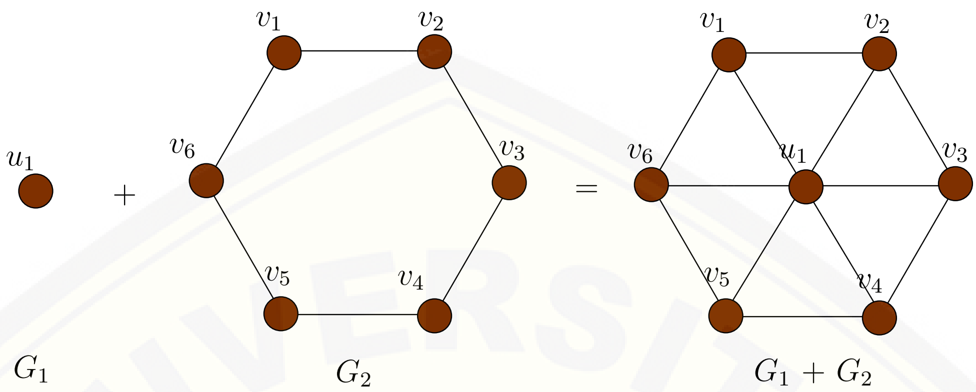
Operasi graf adalah suatu cara untuk mendapatkan graf baru dengan melakukan suatu operasi tertentu terhadap dua atau lebih graf. Berikut ini adalah beberapa operasi graf beserta contohnya.

Definisi 2.2.1. *Graph Join* $(G_1 + G_2)$ *Join dari graf* G_1 *dan* G_2*, dinotasikan dengan* $G = G_1 + G_2$*, adalah graf* G *dimana* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ *dan* $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$*(Harary, 1994).*

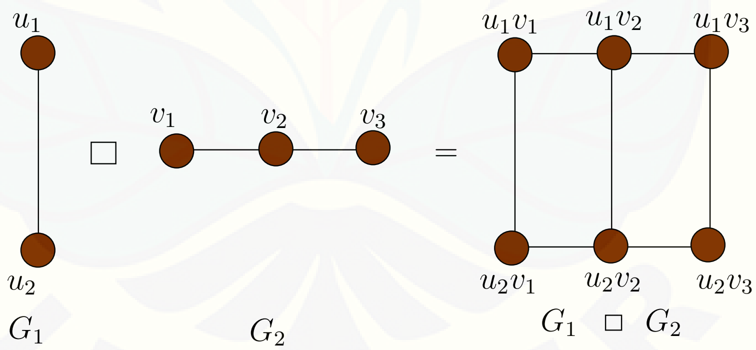
Contoh dari operasi *joint* dapat dilihat pada Gambar 2.10.

Definisi 2.2.2. *Cartesian Product dari graf* $G_1(V_1, E_1)$ *dan* $G_2(V_2, E_2)$ *adalah graf* $G(V, E)$*, ditulis* $G = G_1 \times G_2$*, jika* $V = V_1 \times V_2$*, dan dua titik* $\langle u_1, u_2 \rangle$ *dan* $\langle v_1, v_2 \rangle$ *di* G *bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku:* $u_1 = v_1$ *dan* $(u_2, v_2) \in E_2$ *atau* $u_2 = v_2$ *dan* $(u_1, v_1) \in E_1$ *(Harary, 1994).*

Definisi 2.2.3. *Tensor product dari dua graf* G_1 *dan* G_2 *adalah penggabungan dari dua graf* G_1 *dan* G_2 *yang dinotasikan dengan* $G_1 \otimes G_2$ *mempunyai himpunan titik* $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$*. Jika* $u \in G_1$ *dan* $v \in G_2$ *maka titik-titik pada*

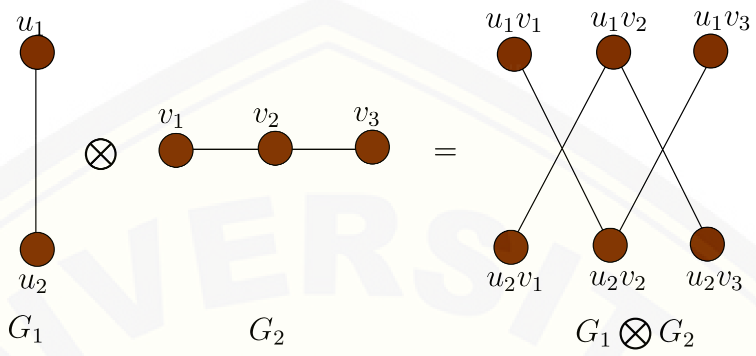


Gambar 2.10 Contoh operasi graf *join*



Gambar 2.11 Contoh operasi *cartesian product*

G akan dilabeli dengan (u, v). Untuk $(u_1, u_2) \in V(G_1)$ dan $(v_1, v_2) \in V(G_2)$, sisi $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in G$ bertetangga jika dan hanya jika u_1 bertetangga dengan u_2 di G_1 dan v_1 bertetangga dengan v_2 di G_2(Moradi, 2012).

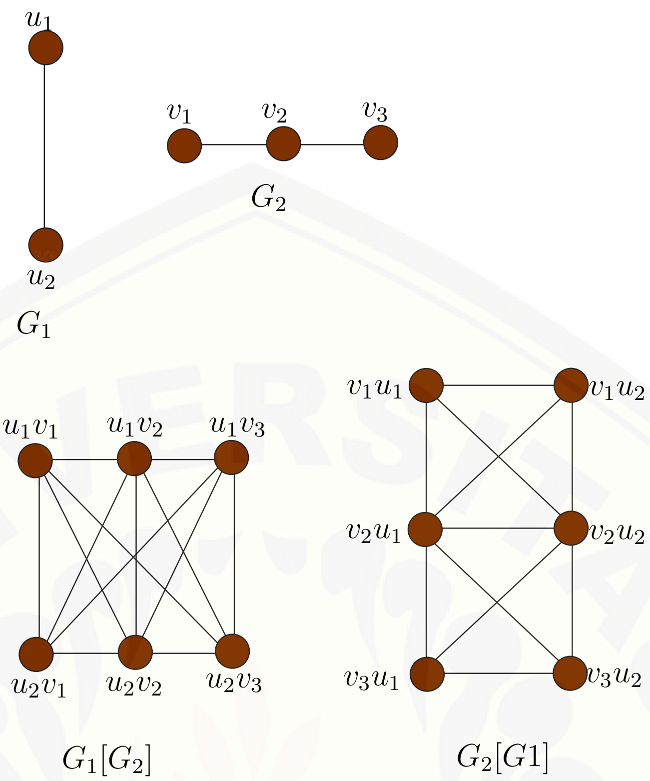


Gambar 2.12 Contoh operasi *tensor product*

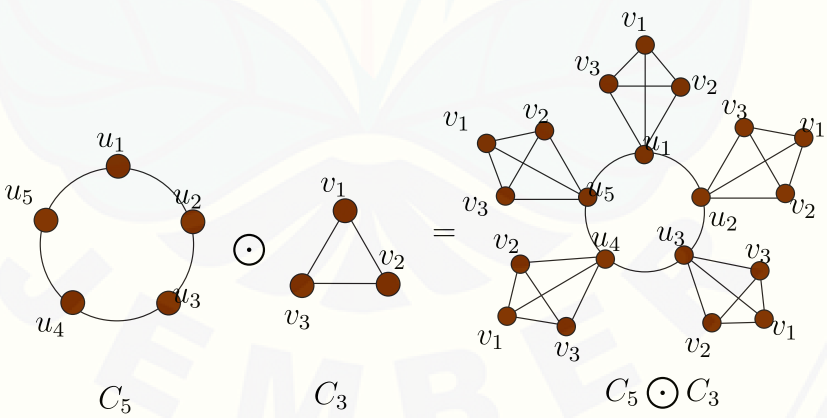
Definisi 2.2.4. *Graph Composition dinotasikan dengan $G = G_1[G_2]$, G_1 dan G_2 dengan disjoint himpunan titik V_1 dan V_2 dan himpunan sisi X_1 dan X_2 adalah graf dengan titik $V_1 \times V_2$ dan $u = (u_1, u_2)$ yang adjacent dengan $v = (v_1, v_2)$ ketika $[u_1$ adj $v_1]$ atau $[u_1 = v_1$ dan u_2 adj $v_2]$ (Harrary, 1994).*

Definisi 2.2.5. *Crown Product $G \odot H$ dari dua graf G dan H didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G dan $|V(G)|$ duplikat $H_1, H_2, ..., H_{|V(G)|}$ dari H, kemudian menghubungkan titik ke-i dari G ke setiap titik di H_i, i = 1,2,3,... , $|V(G)|$ (Figueroa, 2002).*

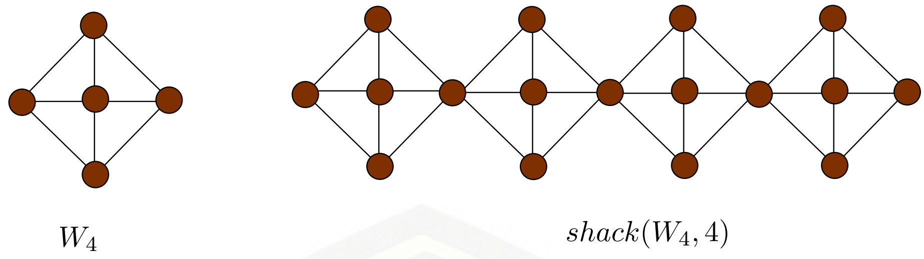
Definisi 2.2.6. *Graph Shackle dari $G_1, G_2, ..., G_k$ dinotasikan dengan Shack(G_1, $G_2, ..., G_k$) merupakan graf yang dibangun dari graf terhubung nontrivial dan order graf $(G_1, G_2, ..., G_k)$ sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq i, j \leq k$ dengan $|i-j| \geq 2$, G_i dan G_j tidak memiliki titik umum, dan untuk setiap $1 \leq i \leq k-1$, G_i dan $G_i + 1$ tepat satu titik yang sama, disebut vertex linkage dimana $k-1$ linkage titik semua berbeda (Maryati, 2010).*



Gambar 2.13 Contoh operasi graf *Composition*

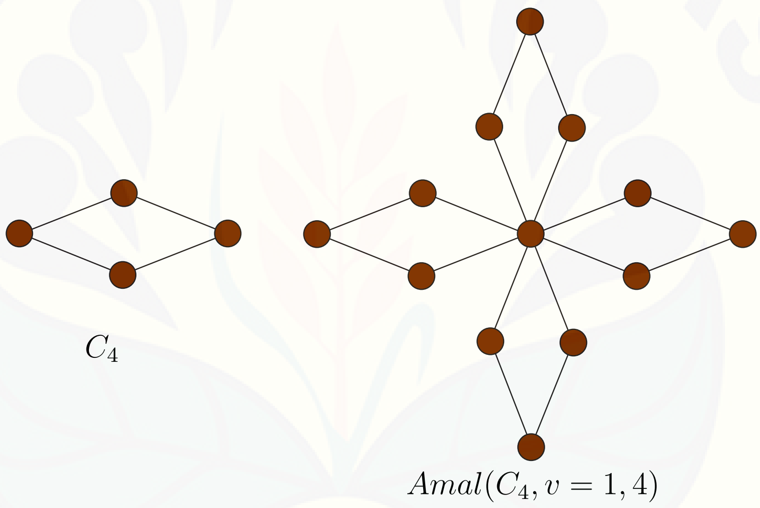


Gambar 2.14 Contoh operasi *crown product*



Gambar 2.15 Contoh operasi graf *shackle*

Definisi 2.2.7. *Amalgamation dinotasikan dengan* $Amal(H_i, v_{0i})$*, misalkan* $\{H_i\}$ *adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap* H_i *mempunyai suatu titik* v_{0i} *yang disebut titik terminal, yang mana graf amalgamasi dibentuk oleh semua* H_i *dengan seluruh titik terminalnya direkatkan menjadi satu titik (Carlson, 2006).*



Gambar 2.16 Contoh operasi graf amalgamasi

2.3 Operasi Graf pada MAPLE

MAPLE merupakan salah satu *software* matematika yang cukup populer dan *powerful* yang berbasis *interactive computer algebra system.* MAPLE digunakan oleh mahasiswa, guru, dosen, matematikawan, statistikawan, ilmuan, dan juga teknisi untuk beberapa pekerjaan terkait perhitungan numerik dan pemodelan komputasi. MAPLE mempunyai beberapa kelebihan diantaranya,

1. dapat melakukan perhitungan nilai eksak secara komputasi;
2. komputasi numerik untuk semua bilangan dengan nilai digit yang spesifik;
3. pemodelan komputasi;
4. dapat membangun bermacam-macam fungsi dan paket untuk menyelesaikan persoalan matematis;
5. mempunyai *worksheet-based interface*;
6. mempunyai fasilitas untuk membuat dokumen teknik; dan
7. MAPLE merupakan bahasa pemrograman sederhana, yang artinya pengguna dapat dengan mudah menuliskan fungsi yang diinginkan beserta paketnya (Garvan, 2002:4).

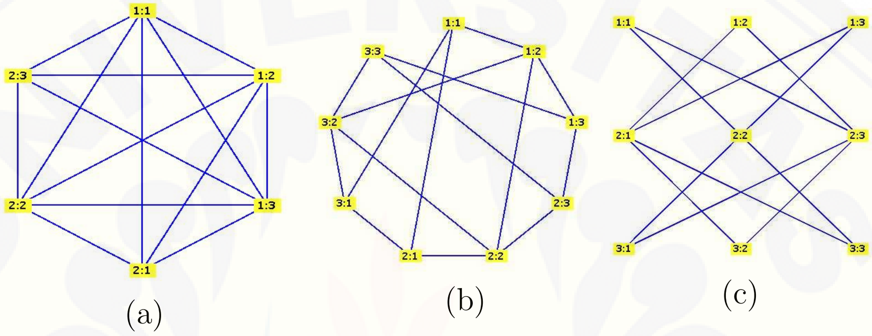
Sampai saat ini MAPLE berkembang sampai versi MAPLE 15, akan tetapi pada penelitian ini penulis menggunakan versi MAPLE 12 untuk mempermudah melakukan pengoperasian pada sebarang graf. Sebagai mana telah diketahui MAPLE dapat menyelesaikan berbagai macam permasalahan matematis tak terkecuali pada teori graf. Maka untuk mengerjakannya kita perlu memanggil paket teori graf pada MAPLE yaitu dengan menuliskan `with(GraphTheory)` dan `with(SpecialGraphs)` pada lembar kerja MAPLE.

Kemudian untuk melakukan pengoperasian maka terlebih dahulu akan didefinisikan masing-masing graf yang akan dibentuk, sebagai contoh akan dilakukan pengoperasian *join*, *tensor product* dan *cartesian product* pada graf lingkaran C_3 dan graf lintasan P_3. Maka pada MAPLE perintah yang akan digunakan sebagai berikut:

```
with(GraphTheory) :
with(SpecialGraph) :
C3 := CycleGraph(3);
P3 := PathGraph(3);
```

```
G1 := GraphJoin(C3, P3);
G2 := CartesianProduct(C3, P3);
G3 := TensorProduct(C3, P3);
DrawGraph(G1);
DrawGraph(G2);
DrawGraph(G3);
```

Maka Gambar2.17 berikut merupakan *output* dari MAPLE hasil dari pengoperasian C_3 dan P_3

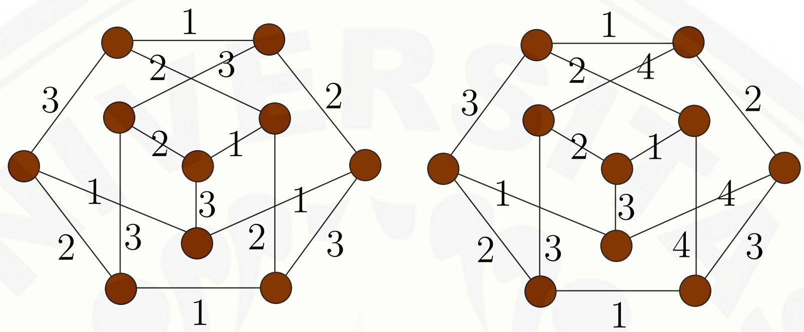


Gambar 2.17 Operasi *join* (a) *cartesian product* (b), dan *tensor product* (c)

2.4 *Rainbow Connection*

Misalkan G adalah graf terhubung *nontrivial* dengan $edge - coloring$ $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., k\}$ dengan $k \in \mathbb{N}$, dan mungkin terdapat pewarnaan sisi yang sama pada dua sisi yang bertetangga. Suatu lintasan $u - v$ di G merupakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di lintasan tersebut diwarnai sama. Graf G disebut *rainbow connected* dengan pewarnaan c jika G memuat suatu *rainbow u-v path* untuk setiap dua titik $u, v \in G$. Dalam hal ini pewarnaan c dikatakan *rainbow c-coloring* di G. Kemudian akan didefinisikan *rainbow connection number* dari graf G dinotasikan dengan $rc(G)$ adalah nilai terkecil yang dibutuhkan untuk mewarnai graf G menjadi *rainbow connected* (Chartrand,dkk,2008:85-89).

Misalkan c suatu *rainbow coloring* pada suatu graf terhubung G, Untuk sebarang dua titik $u, v \in G$, *rainbow u-v geodesic* di G adalah suatu *rainbow path* dengan panjang $d(u,v)$, dimana $d(u,v)$ adalah jarak antara u dan v. Graf G dikatakan *strongly rainbow connected* jika G memuat satu *rainbow u-v geodesic* untuk setiap dua titik u dan v pada G. Pada kasus ini c dikatakan *strong rainbow c-coloring* dari G. Kemudian akan didefiniskan *strong rainbow connection number* dari graf G dinotasikan dengan $src(G)$ adalah nilai terkecil yang dibutuhkan untuk mewarnai graf G menjadi *strong rainbow connected.* Pada Gambar 2.18 diperlihatkan contoh *rainbow connection* pada graf Petersen.



(a) (b)

Gambar 2.18 Graf Petersen dengan $rc(G) = 3$ (a) dan $src(G) = 4$ (b)

Chartrand, dkk (2008) telah melakukan penelitian awal terkait konsep dasar dari *(strong)rainbow connection numbers* pada graf. Pada penelitiannya tersebut didapatkan beberapa nilai *(strong)rainbow connection numbers* dari beberapa kelas graf khusus, seperti graf pohon, graf lingkaran, graf roda, graf bipartit lengkap, dan graf multipartit lengkap. Berikut beberapa teorema yang didapatkan.

Teorema 2.4.1. *Misalkan G adalah graf terhubung nontrivial dengan size m. maka*

- *$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m$, dimana $diam(G)$ adalah diameter G dan m adalah banyak sisi dari G,*
- *$rc(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap, $src(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap;*

- *$rc(G) = 2$ jika dan hanya jika $src(G) = 2$;*
- *$rc(G) = m$ jika dan hanya jika G adalah graf pohon, $src(G) = m$ jika dan hanya jika G adalah graf pohon.*

Teorema 2.4.2. *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 4$, $rc(C_n) = scr(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Teorema 2.4.3. *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$, didapatkan*

$$rc(W_n) = \begin{cases} 1; & \text{jika}\, n = 3 \\ 2; & \text{jka}\, 4 \leq n \leq 4 \\ 3; & \text{untuk}\, n \geq 7 \end{cases}$$

dan $rc(W_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Teorema 2.4.4. *Untuk setiap bilangan bulat s dan t dengan $2 \leq s \leq t$, $rc(K_{s,t}) = min\{\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 4\}$, dan untuk bilangan bulat s dan t dengan $1 \leq s \leq t$, $src(K_{s,t}) = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil$.*

Teorema 2.4.5. *Misalkan $G = K_{n_1,n_2,\dots,n_k}$ adalah graf k-partit lengkap, dengan $k \geq 3$ dan $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$ sedemikian hingga $s = \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ dan $t = n_k$. Maka*

$$rc(G) = \begin{cases} 1; & \text{jika}\, n_k = 1 \\ 2; & \text{jika}\, n_k \geq 2, s > t \\ min\{\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 3\}; & \text{jika}\, s \leq t \end{cases}$$

dan

$$src(G) = \begin{cases} 1; & \text{jika}\, n_k = 1 \\ 2; & \text{jika}\, n_k \geq 2, s > t \\ \lceil \sqrt[s]{t}; & \text{jika}\, s \leq t. \end{cases}$$

Penelitian terkait *lower and upper bound* dari *rainbow connection* berkembang cukup pesat, berikut ini beberapa teorema dari yang akan sering digunakan untuk membuktikan beberapa teorema yang didapatkan penulis terkait penelitian di bidang ini.

Teorema 2.4.6. *(Li dan Sun) Misalkan G adalah sebuah graf terhubung dengan order $n = 3$ dan derajat terkecil $d(G) = 2$. Jika G bukan elemen $\{K_3, C_4, K_4 - e, C_5\}$, maka $rc(G) = n - 3$.*

Teorema 2.4.7. *(Li dan Sun) Misalkan G adalah sebuah graf terhubung dengan $d(G) \geq 2$. Maka*

- *jika G adalah sebuah graf interval, $k(G) = rc(G) = k(G) + 1$, di sisi lain, jika G adalah sebuah unit graf interval, maka $k(G) = rc(G)$;*
- *jika G adalah AT-free, $k(G) = rc(G) = k(G) + 3$;*
- *jika G adalah sebuah threshold graph, maka $k(G) \leq rc(G) \leq 3$;*
- *jika G adalah chain graph, maka $k(G) \leq rc(G) \leq 4$;*
- *jika G adalah sebuah circular arc graph, maka $k(G) \leq rc(G) \leq k(G) + 4$.*

Teorema 2.4.8. *(Syafrizal) Untuk setiap bilangan bulat n, rainbow connection number dari graf G adalah $rc(G) = 4$ dimana $G \cong G_n$ dengan $n \geq 4$, atau $G \cong B_n$ dengan $n \geq 3$.*

Bukti. Kita perhatikan kedua kondisi.
Kondisi 1. Untuk $G \cong G_n$ dengan $n \geq 4$. Misalkan W_n adalah graf yang terdiri atas cycle C_n dengan sebuah titik tambahan yang *adjacent* ke seluruh titik pada C_n. Sebuah graf gear G_n adalah graf roda dengan sebuah titik tambahan diantara setiap pasangan titik yang *adjacent* pada titik graf lingkaran C_n terluar, sehingga G_n memiliki $|V| = 2n + 1$ dan $|E| = 3n$. Maka jelas G_n memiliki diameter $k(G_n) = 4$, sehingga $rc(G) \geq k(G_n) = 4$.
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $rc(G) \leq 4$. Berdasarkan $V(G_n) = V(C_{2n}) \cup \{v\}$ dimana $V(C_{2n} = \{v_1, v_2, ...v_3\}$ adalah himpunan titik di C_{2n}. Kemudian akan didefinisikan pewarnaan sisi pada G_n dengan $c : E(G) \to \{1, 2, 3, 4\}$ sesuai fungsi

berikut:

$$c(e) = \begin{cases} 1, e = vv_{4i-3}; & \text{dengan } 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil, \\ 2, e = vv_{4i-1}; & \text{dengan } 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil, \\ 3, e = v_{4i-3}v_{4i-2}; e = v_{4i}v_{4i+1} & \text{dengan } 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil, \\ 4, e = v_{4i-2}v_{4i-1}; e = v_{4i-1}v_{4i} & \text{dengan } 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil. \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi pewarnaan pada G_n diatas maka jelas didapatkan $rc(G_n) = 4$ untuk $n \geq 4$.
Kondisi 2. Untuk $G \cong B_n$ dengan $n \geq 3$. dengan jelas bahwa $k(B_n) = 3$. Misalkan $P = p_i, p, q, p_{i+1}$ adalah *rainbow path*, dengan memepertimbangkan B_n terdiri atas dua buah graf bintang S_n^1 dan S_n^2 dengan titik pusat p dan q, serta p_i dan q_i adalah daun dengan masing-masing $1 \leq i \leq n$, dan setiap titik p_i adjacent ke q_i. Maka $rc(B_n) \geq 4$ untuk $n \geq 3$. Kemudian akan didefinisikan pewarnaan sisi pada B_n dengan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ sesuai fungsi berikut:

$$c(e) = \begin{cases} 1, e = pq, & \\ 2, e = pp_i; & \text{dengan } 1 \leq i \leq n, \\ 3, e = qq_i; & \text{dengan } 1 \leq i \leq n, \\ 4, e = p_iq_i; & \text{dengan } 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

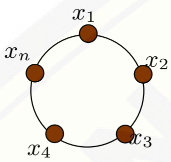
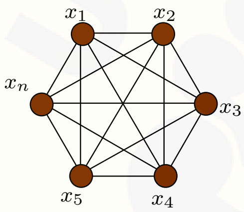
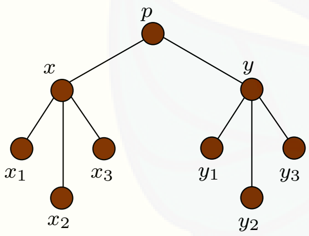
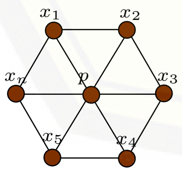
Berdasarkan fungsi pewarnaan pada B_n diatas maka didapatkan $rc(B_n) = 4$ untuk $n \geq 3$. □

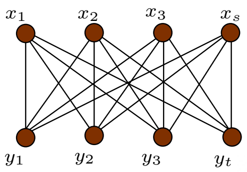
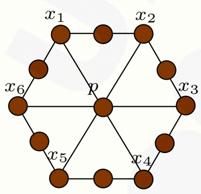
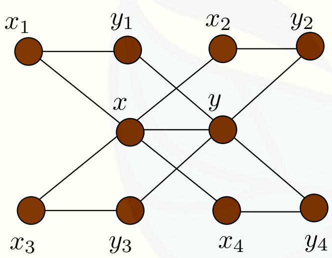
Konsep *rainbow connection* dapat diaplikasikan untuk pengamanan pengiriman informasi rahasia antar lembaga. Selain itu, *rainbow connection* dimotivasi oleh interpretasi menarik di bidang jaringan. Misalkan G diinterpretasikan sebagai suatu jaringan (misalnya, jaringan selular). Akan disampaikan rute pesan antara dua titik penerima, *acceptor*, dengan syarat bahwa rute antara kedua titik (atau dapat dilihat sebagai sisi pada *path*), diberikan suatu saluran yang berbeda (misalnya, frekuensi yang berbeda). Jelas bahwa yang ingin diminimalkan adalah banyaknya saluran berbeda yang digunakan dalam jaringan (Alfarisi, 2015).

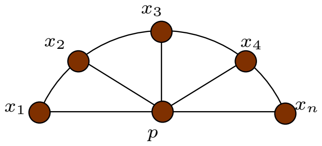
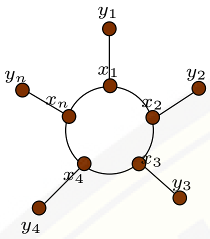
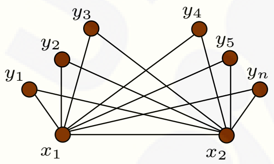
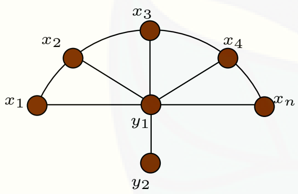
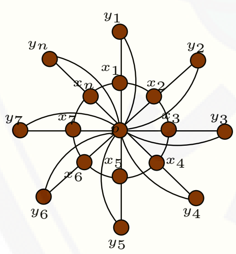
2.5 Hasil Penelitian Terkait *Rainbow Connection*

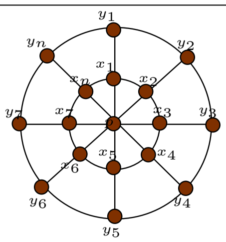
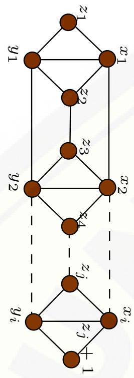
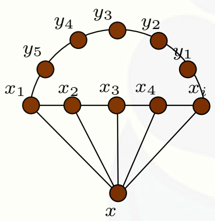
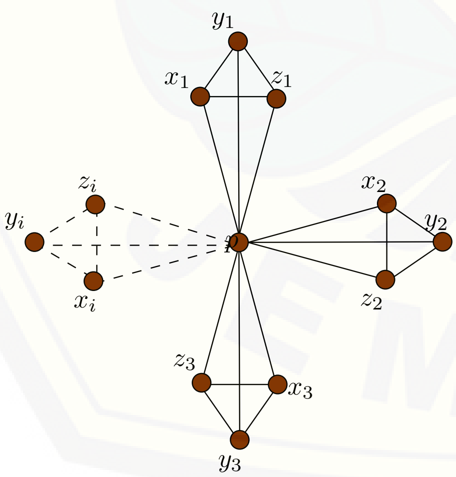
Beberapa hasil penelitian terkaiat *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* yang telah diterbitkan mulai tahun 2008 samapi terkini dapat dilihat dari rangkuman tabel berikut ini.

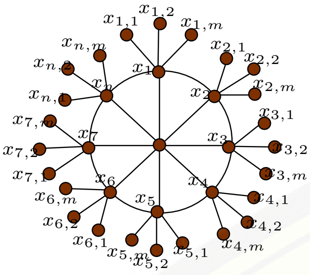
Tabel 2.1: Hasil penelitian $rc(G)$ dan $src(G)$

Graf	Hasil	Keterangan
C_n (*Cycle Graph*); $n \geq 4$ 	$rc(C_n) = src(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$	Chartrand,dkk, 2008
K_n (*Complete Graph*); $n \geq 2$ 	$rc(K_n) = src(K_n) = 1$	Chartrand,dkk, 2008
T_n (*Tree*); $n \geq 2$ 	$rc(T_n) = src(T_n) = m$	Chartrand,dkk, 2008
W_n (*Wheel Graph*); $n \geq 3$ 	$rc(W_n) = 1; n = 3$ $rc(W_n) = 2; 4 \leq n \leq 6$ $rc(W_n) = 3; n \geq 7$ $src(W_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$	Chartrand,dkk, 2008

Graf	Hasil	Keterangan
$K_{s,t}$ (*Complete Bipartit*); $2 \leq s \leq t$  	$rc(K_{s,t}) = min\{\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 4\}$ $src(K_{s,t}) = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil$	Chartrand,dkk, 2008
$G = K_{n_1,n_2,...,n_k}$ (*Complete k-partit*); dengan $k \geq 3$ dan $n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_k$	$rc(G) = 1; n_k = 1$ $rc(G) = 2; n_k \geq 2, s > t$ $rc(G) = min\{\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 3\}; s \leq t$ $src(G) = rc(G); n_k = 1$ dan $n_k \geq 2, s > t$ $src(G) = \lceil \sqrt[s]{t} \rceil; s \leq t$	Chartrand,dkk, 2008
G_n (*Gear Graph*); $n \geq 4$  	$rc(G_n) = 4$	Syafrizal, 2014
B_n (*Book Graph*); $n \geq 3$  	$rc(B_n) = 4$	Syafrizal, 2014
$G \cong (C_1, C_2, ...C_{n_k})$- path $n_i \geq 3$ dan $k \geq 2$	$rc(G) = \lceil \frac{n_1}{2} \rceil + s = \sum_{i=2}^{k} \lceil \frac{n_i}{2} \rceil$	Syafrizal, 2014
F_n (*Fan Graph*); $n \geq 2$	$rc(F_n) = 1; n = 2$ $rc(F_n) = 2; 3 \leq n \leq 6$ $rc(F_n) = 3; n \geq 7$ $src(F_n) = rc(F_n); 2 \leq n \leq 6$ $src(F_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil; n \geq 7$	Syafrizal,dkk, 2014

Graf	Hasil	Keterangan
		
S_n *(Sun Graph)* 	$rc(S_n) = src(S_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + n$	Syafrizal,dkk, 2014
Bt_n *(Triangle Book)*;$n \geq 1$ 	$rc(Bt_n) = 1$;$n = 1$ $rc(Bt_n) = 2$;$n = 2$ $rc(Bt_n) = 3$;$n \geq 3$	Alfarisi,dkk, 2014
Kt_n *(Handle Fan)*;$n \geq 2$ 	$rc(Kt_n) = 2$;$n = 2$ $rc(Kt_n) = 3$;$n \geq 3$	Alfarisi,dkk, 2014
Fl_n *(Flower Graph)*;$n \geq 2$ 	$rc(Fl_n) = 3$	Alfarisi,dkk, 2014
Wb_n *(Spider Web)*;$n \geq 3$	$rc(Wb_n) = 3$;$3 \leq n \leq 6$ $rc(Wb_n) = 4$;$n = 7$ $rc(Wb_n) = 5$;$n \geq 8$	Alfarisi,dkk, 2014

Graf	Hasil	Keterangan
		
Dl_n (*Diamond Ladder*);$n \geq 2$ 	$rc(Dl_n) = n + 1$	Alfarisi,dkk, 2014
PC_n (*Parachute Graph*);$n \geq 2$ 	$rc(PC_n) = n + 1$	Alfarisi,dkk, 2014
W_4^n (*Windmill Graph*);$n \geq 2$ 	$rc(W_4^n) = 3$	Alfarisi,dkk, 2014

<table>
<tr><th>Graf</th><th>Hasil</th><th>Keterangan</th></tr>
<tr><td>$H_{n,m}$ (Helmet Graph);$n \geq 3; m \geq 1$

</td><td>$rc(H_{n,m}) = nm + 3$</td><td>Alfarisi,dkk, 2014</td></tr>
</table>

2.6 Observasi Penelitian

Berdasarkan beberapa penelitian yang telah dilakukan beberapa peneliti di atas maka penulis pada tugas akhir ini tertarik untuk melakukan observasi penelitian terkait $rc(G)$ dan $src(G)$ pada beberapa graf khusus dan hasil operasinya, tidak hanya sekedar menentukan nilai $rc(G)$ dan $src(G)$, selain itu observasi yang akan dilakukan adalah sebagai berikut.

1. Menentukan nilai $rc(G)$ dan $src(G)$ pada operasi dua buah graf dengan graf satu adalah graf khusus dan yang lainnya lebih general;

2. Menentukan keterkaitan nilai $rc(G)$ dan $src(G)$, dalam hal ini akan dikaji proses penentuan nilai $src(G)$ berdasarkan pada nilai $rc(G)$ yang telah didapatkan, sehingga kemungkinan terdapat hal baru yang mempermudah penentuan nilai $src(G)$ saat nilai $rc(G)$ sudah didapatkan.

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan kedalam penelitian eksploratif dan penelitian terapan *(applied research)*.

1. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.

2. Penelitian terapan *(applied research)* merupakan penyelidikan yang hati-hati, sistematik dan terus-menerus terhadap suatu masalah dengan tujuan untuk digunakan dengan segera untuk keperluan tertentu.

3.2 Data Penelitian

Data dalam penelitian ini adalah data sekunder yang didapat dari penelitian sebelumnya. Data yang digunakan berupa graf-graf khusus yang akan dioperasikan. Graf-graf yang digunakan adalah graf prisma $Pr_{(m,n)}$, graf antiprisma AP_n, dan beberapa graf hasil operasi graf-graf khusus seperti graf lintasan P_n, graf lingkaran C_n, graf roda W_n, graf bintang S_n, dan graf lengkap K_1. Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dalam menyelesaikan permasalahan. Metode deduktif menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah.

3.3 Rancangan Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf khusus yaitu graf prisma dan antiprisma serta pengoperasian graf, yaitu pada graf lintasan P_n, graf lingkaran C_n, graf roda W_n, graf bintang S_n, dan graf lengkap K_1. Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

1. menentukan graf-graf khusus sebagai objek penelitian;

2. menerapkan operasi graf pada graf - graf khusus yang telah ditentukan, meliputi graf *join*, *cartesian product*, *crown product* ,*tensor product*, graf *shackle*, dan graf amalgamasi;

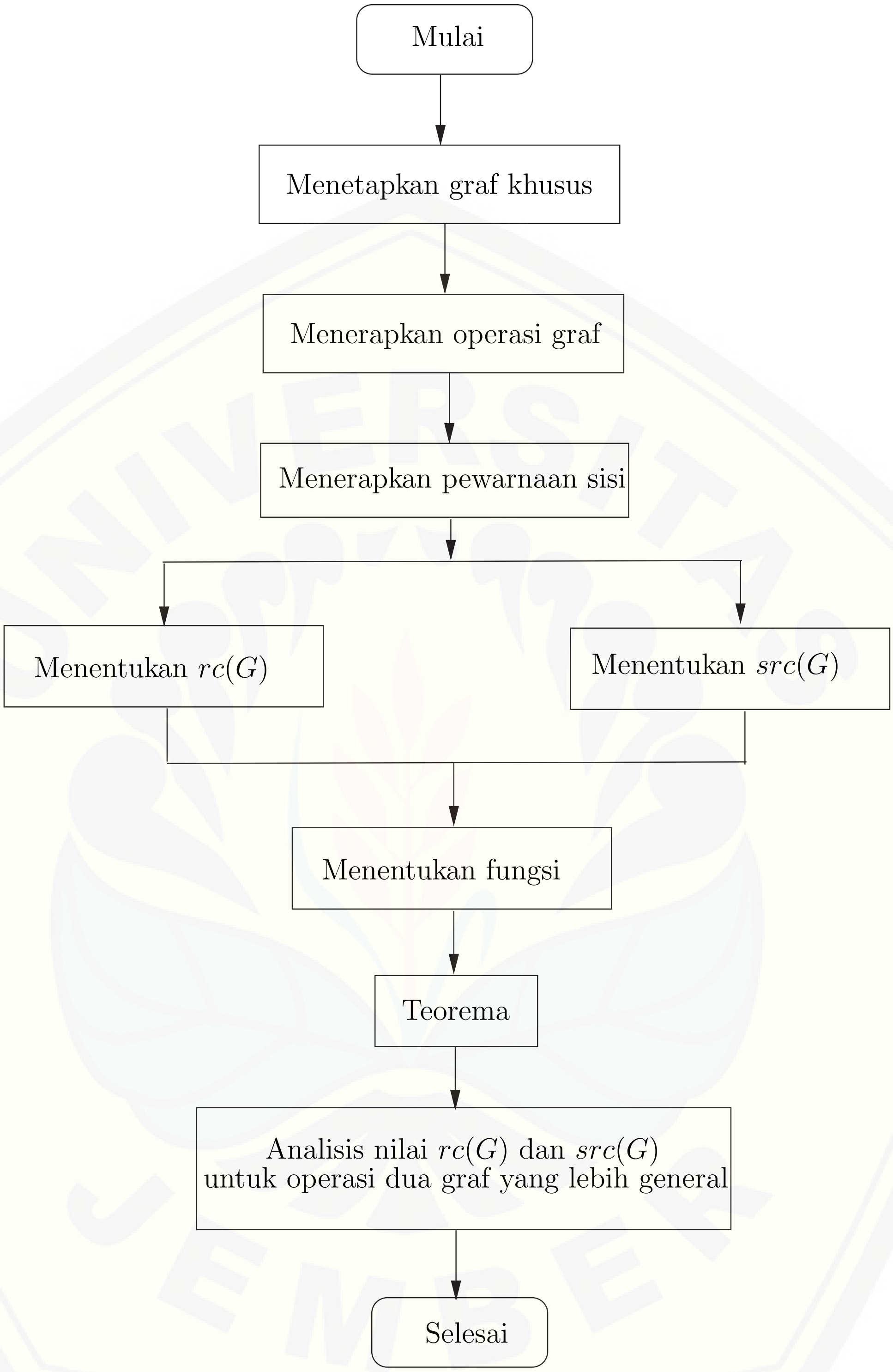
3. menerapkan pewarnaan sisi pada graf - graf khusus yang telah dioperasikan menggunakan teknik *rainbow connection*;

4. memeriksa keoptimalan *rc(G)* dan *src(G)* , apabila sudah optimal dilanjutkan dengan menentukan fungsi, apabila belum optimal akan kembali ke tahap sebelumnya yaitu menerapkan pewarnaan sisi pada graf;

5. menentukan fungsi pewarnaan berdasarkan keteraturan pola dari *rc(G)* dan *src(G)* yang terbentuk;

6. fungsi yang telah didapatkan kemudian digunakan sebagai salah satu pembuktian teorema sehingga didapatkan teorema baru.

7. melakukan analisis terkait nilai $rc(G)$, $src(G)$ dan untuk suatu operasi dua graf dengan graf yang lebih general.



Gambar 3.1 Skema Penelitian

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Hasil Penelitian

Pada bab ini akan diberikan penjelasan hasil penelitian mengenai *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada graf khusus dan hasil operasinya. Hasil utama dari penelitian ini adalah teorema baru tentang *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* beserta fungsi *rainbow coloring*-nya. Penelitian ini diawali dengan menentukan beberapa graf khusus yaitu graf lingkaran (C_n), graf lintasan (P_n), graf lengkap (K_n), graf roda (W_n), dan graf bintang (S_n). Kemudian dilakukan operasi graf meliputi *join graf*, *cartesian product*, *crown product*, *tensor product*, *shackle*, dan *amalgamasi.* Kemudian menerapkan *rainbow coloring* dan menguji apakah *rainbow coloring* sudah minimum dengan menggunakan teorema yang sudah ada, kemudian memeriksa apakah *rainbow coloring* membentuk pola, jika sudah minimum dan membentuk pola maka dilanjutkan dengan penentuan fungsi dari *rainbow coloring*-nya. Selanjutnya dari *rainbow coloring* yang sudah didapatkan dicari *geodesic path* sehingga terbentuk *strong rainbow coloring* sampai terbentuk pola dan dilanjutkan dengan penentuan fungsi *strong rainbow coloring*-nya, dilanjutkan dengen analisis keterkaitan antara *rainbow connection* dan *strong rainbow connection.*

Hasil utama dari penelitian yang akan dibahas terkait analisis *rainbow connection number* pada graf khusus dan hasil operasinya didapatkan 14 teorema baru yang ditemukan secara eksperimental dalam penelitian ini. Format penyajian temuan penelitian dalam bab ini diawali dengan pernyataan teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema. Berikut ini akan dijelaskan tahap-tahap bagaimana teorema tersebut ditemukan sekaligus menjawab rumusan masalah yang telah disajikan sebelumnya.

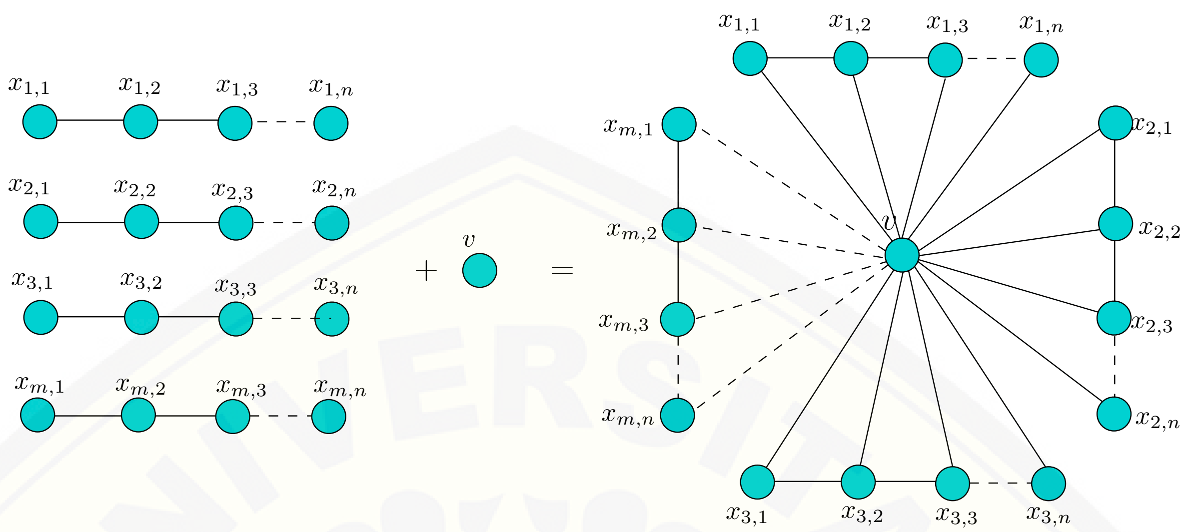
4.2 *Rainbow connection* dan *strong rainbow connection*

Langkah pertama dalam penelitian ini adalah menetapkan beberapa graf khusus yaitu graf lingkaran (C_n), graf lintasan (P_n), graf lengkap (K_n), graf roda (W_n), dan graf bintang (S_n) kemudian menerapkan operasi graf dengan menggunakan observasi terlebih dahulu. Observasi bertujuan untuk mendefinisikan himpunan titik, himpunan sisi, jumlah titik, dan jumlah sisi dari graf hasil operasi. Setelah melakukan observasi didapatkan 14 teorema baru terkait *rainbow connection* dan *strong rainbow connection*. Teorema-teorema tersebut antara lain $rc(G)$ dan $src(G)$ dari graf graf prisma ($C_n \Box P_m$) antiprisma (AP_n), $join[(mP_n + K_1)]$, *cartesian product* dari $[S_n \Box P_m]$ dan $[W_n \Box P_m]$, *crown product* dari $[P_n \odot C_m]$, $shack[(P_3 \otimes W_3), n]$, $shack[(P_3 \otimes C_3), n]$,dan $Amal[(S_4 + K_1), n]$, $Amal[(S_4 \Box P_2), n]$. Berikut hasil observasi dan teorema beserta pembuktiannya.

Observasi 4.2.1. *Misal diketahui graf lintasan* P_n *dengan* $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ *dan* $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ *sebanyak* m *buah graf lintasan, serta graf lengkap* K_1 *dengan* $V(K_1) = \{v\}$ *dan* $E(K_1) = \{\}$*. Join graf* G *dinotasikan dengan* $G = mP_n + K_1 = K_1 + mP_n$*, maka untuk* $n \geq 2$ *memiliki himpunan titik dan sisi yang dapat disajikan dalam* $V(mP_n + K_1) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{v\}$ *dan* $E(mP_n + K_1) = \{vx_{i,j}; i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; i \leq m-1; 1 \leq j \leq n\}$ *serta memiliki* $|V(mP_n + K_1)| = mn + 1$ *dan* $|E(mP_n + K_1)| = m(2n-1)$*.*

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.2.1 dijelaskan bahwa graf $G = mP_n + K_1$ memiliki $V(mP_n + K_1) = V(mP_n) \cup V(K_1)$ dan $E(mP_n + K_1) = E(mP_n) \cup E(K_1) \cup uv|u \in V(mP_n), v \in V(K_1)$. Dengan menggunakan notasi mP_n dan K_1, maka dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.1. Dengan demikian didapatkan $V(mP_n + K_1) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{v\}$ dan $E(mP_n + K_1) = \{vx_{i,j}; i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; i \leq m-1; 1 \leq j \leq n\}$ serta memiliki $|V(mP_n + K_1)| = mn + 1$ dan $|E(mP_n + K_1)| = m(2n-1)$.

Gambar 4.1 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $mP_n + K_1$ diawali dengan menggambar sebuah titik v yang merupakan graf K_1 kemudian menggambar graf lintasan P_n sebanyak m buah mengelilingi titik v, kemudian menghubungkan setiap titik yang ada pada graf lintasan tersebut ke titik v yang menjadi titik pusat graf $mP_n + K_1$. Untuk mengekspannya cukup menambahkan sebuah titik pada graf lintasan dan dmengkopi sebanyak m buah graf lintasan.



Gambar 4.1 Contoh operasi $mP_n + K_1$

Dari Observasi 4.2.1 akan ditentukan *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada graf $G = mP_n + K_1$ yang disajikan dalam teorema berikut.

♢ **Teorema 4.2.1.** *Untuk setiap bilangan bulat $m \geq 2$ dan $n \geq 2$, nilai rainbow connection number dari graf $G = (mP_n + K_1)$ adalah 3.*

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.2.1 didapatkan $V(mP_n + K_1) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{v\}$ dan $E(mP_n + K_1) = \{vx_{i,j}; i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; i \leq m-1; 1 \leq j \leq n\}$ serta memiliki $|V(mP_n + K_1)| = mn + 1$ dan $|E(mP_n + K_1)| = m(2n-1)$.

Graf $mP_n + K_1$ memiliki $diam(mP_n + K_1) = 2$, berdasarkan Teorema **??**, $rc(mP_n + K_1) \geq 2$, tetapi $rc(mP_n + K_1) \geq 3$. Selanjutnya akan dibuktikan $rc(mP_n + K_1) \leq 3$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

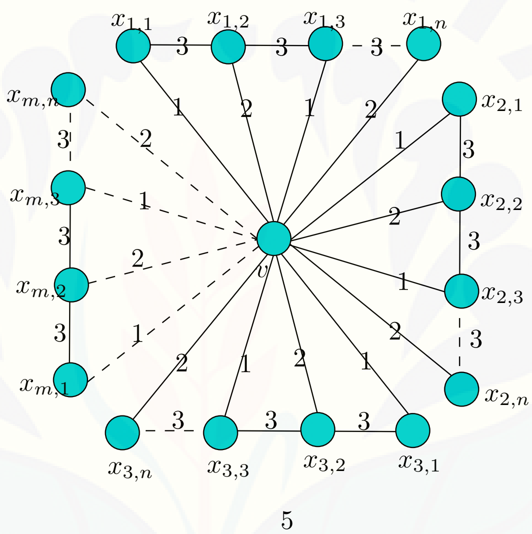
$$c(e) := \begin{cases} 1, & e = vx_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; j = ganjil \\ 2, & e = vx_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; j = genap \\ 3, & e = x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E(mP_n + K_1) \rightarrow \{1,2,3\}$, sehingga $rc(mP_n + K_1) \leq 3$.

Selanjutkan akan dibuktikan $rc(mP_n + K_1) \geq 3$, untuk suatu kontradiksi akan diasumsikan bahwa $rc(mP_n + K_1) = 2$, tanpa mengurangi atau mengubah pola generalisasi yang telah didapatkan, pada graf $mP_n + K_1$ akan terdapat pewarnaan sisi yang sama $x_{i,j} - x_{i+1,j}$ karena $c(x_{i,j} - v) = c(v - x_{i+1,j}) = 1$ dan $c(v - x_{i+1,j+1}) = c(x_{i+1,j+1} - x_{i,j}) = 2$ maka tidak terbentuk *rainbow u-v path*, sehingga terjadi kontradiksi.

Jadi, $rc(mP_n + K_1) = 3$ untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 2$. □

Gambar 4.2 berikut sebagai contoh ilustrasi $rc(mP_n + K_1) = 3$.



Gambar 4.2 *Rainbow 3-coloring* dari graf $mP_n + K_1$

◊ **Teorema 4.2.2.** *Untuk setiap bilangan bulat $m \geq 2$ dan $n \geq 2$, nilai strong rainbow connection number dari graf $G = (mP_n + K_1)$ adalah $(\lceil \frac{n}{3} \rceil)m$.*

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.4.1 $rc(mP_n + K_1) \leq src(mP_n + K_1)$ atau $3 \leq src(mP_n + K_1)$, akan tetapi $src(mP_n + K_1) \geq (\lceil \frac{n}{3} \rceil)m$. Selanjutnya akan dibuktikan $src(mP_n + K_1) \leq (\lceil \frac{n}{3} \rceil)m$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

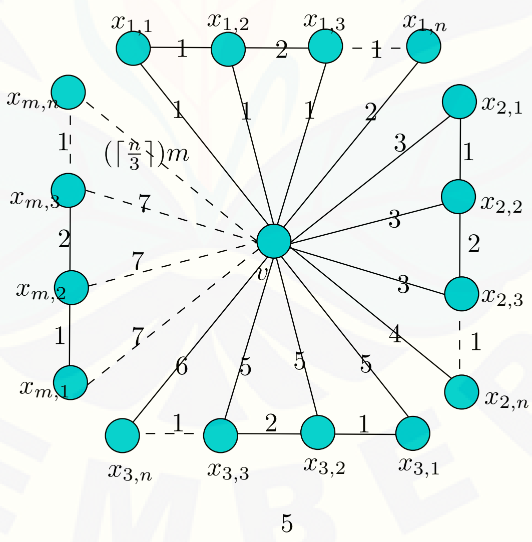
$$c(e) := \begin{cases} 1, & e = x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-1; j = ganjil \\ 2, & e = x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-1; j = genap \\ (\lceil \frac{j}{3} \rceil)i, & e = vx_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E(mP_n + K_1) \rightarrow \{1, 2, ..., (\lceil \frac{n}{3} \rceil)m\}$, sehingga $src(mP_n + K_1) \leq (\lceil \frac{n}{3} \rceil)m$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $src(mP_n+K_1) \geq (\lceil \frac{n}{3} \rceil)m$. Untuk suatu kontradiksi diasumsikan bahwa $src(mP_n + K_1) = (\lceil \frac{n}{3} \rceil)m - 1$, Tanpa mengurangi atau mengubah pola generalisasi yang didapatkan, maka sisi $vx_{i,j}$ semuanya akan diwarnai dengan warna yang sama, misal diambil lintasan $x_{i,1} - x_{i,4}$ bukanlah lintasan *geodesic*, satu-satunya lintasan *geodesic* adalah $x_{i,1}, v, x_{i,4}$ akan tetapi mempunyai warna yang sama yaitu i, hal ini juga berlaku untuk m tangkai pada graf $mP_n + K_1$, oleh karena hal tersebut tidak terdapat lintasan *rainbow u-v geodesic*. Maka terjadi kontradiksi, sehingga $src(mP_n + K_1) \geq k$.

Jadi, $src(mP_n + K_1) = k = (\lceil \frac{n}{3} \rceil)m$ untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 2$. □

Gambar 4.3 berikut sebagai contoh ilustrasi $rc(mP_n + K_1) = 3$.



Gambar 4.3 *Strong rainbow* $(\lceil \frac{n}{3} \rceil)m$*-coloring* dari graf $mP_n + K_1$

Observasi 4.2.2. *Misal diketahui graf bintang S_n dengan $V(S_n) = \{v, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(S_n) = \{vx_i; 1 \leq i \leq n\}$ serta graf lintasan P_m dengan $V(P_m) = \{x_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_m) = \{x_j x_{j+1}; 1 \leq i \leq m-1\}$. Cartesian product dari graf $G = S_n \square P_m$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ memiliki himpunan titik dan sisi yang dapat disajikan dalam $V(S_n \square P_m) = \{v_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}, 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(S_n \square P_m) = \{v_j v_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n\}$ serta memiliki $|V(S_n \square P_m)| = m(n+1)$ dan $|E(S_n \square P_m)| = nm + (m-1)n$.*

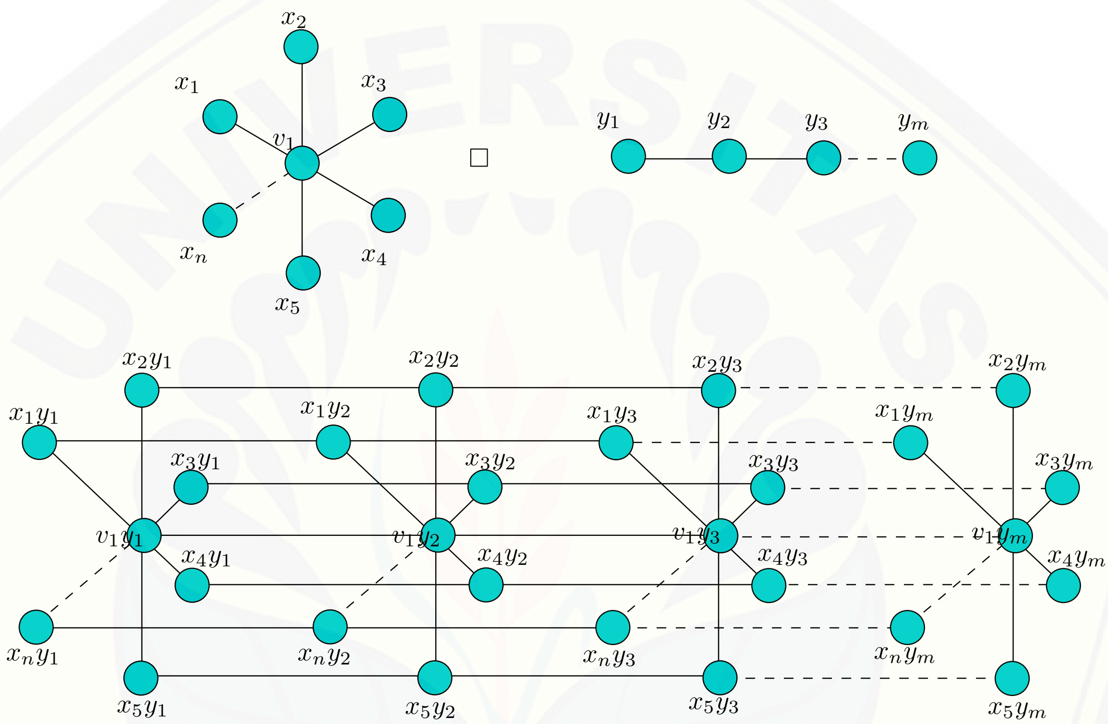
Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.2.2 dijelaskan bahwa graf $G = S_n \square P_m$ jika $V = V_1 \times V_2$, serta dua titik $\langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\langle v_1, v_2 \rangle$ di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku: $u_1 = v_1$ dan $(u_2, v_2) \in E_2$ atau $u_2 = v_2$ dan $(u_1, v_1) \in E_1$. Dengan menggunakan notasi S_n dan P_n, maka dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.4. Dengan demikian didapatkan $V(S_n \square P_m) = \{v_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}, 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(S_n \square P_m) = \{v_j v_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n\}$ serta memiliki $|V(S_n \square P_m)| = m(n+1)$ dan $|E(S_n \square P_m)| = nm + (m-1)n$.

Operasi *cartesian product* merupakan operasi perkalian titik-titik pada graf bintang dikalikan sebanyak titik-titik pada graf lintasan atau sebaliknya. Kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan bentuk graf bintang dan graf lintasan. Gambar 4.4 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $S_n \square P_m$ diawali dengan menggambar graf bintang kemudian diduplikasi sebanyak m kali tergantung pada jumlah titik pada graf lintasan, dan titik-titik yang bersesuaian membentuk graf lintasan. Untuk mengekspannya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.

Dari Observasi 4.2.2 akan ditentukan nilai *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf $G = S_n \square P_m$ yang disajikan dalam teorema berikut.

$\Diamond$ **Teorema 4.2.3.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, nilai rainbow connection number dan strong rainbow connection number dari graf $G = S_n \square P_m$ adalah $n + m - 1$*

Bukti. Sesuai Observasi 4.2.2 didapatkan $V(S_n \square P_m) = \{v_j; 1 \leq j \leq m\} \cup$



Gambar 4.4 Contoh operasi $S_n \square P_m$

$\{x_{i,j}, 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(S_n \Box P_m) = \{v_j v_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n\}$ serta memiliki $|V(S_n \Box P_m)| = m(n+1)$ dan $|E(S_n \Box P_m)| = nm + (m-1)n$.

Graf $S_n \Box P_m$ memiliki $diam(S_n \Box P_m) = m+1$, berdasarkan Teorema **??**, $rc(S_n \Box P_m) \geq m+1$, tetapi $rc(S_n \Box P_m) \geq n+m-1$. Selanjutnya akan dibuktikan $rc(S_n \Box P_m) \leq n+m-1$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

$$c(e) := \begin{cases} 1, & e = v_1 x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; j = 1 \\ i+1, & e = x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-1 \\ i+j-1, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 2 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E(S_n \Box P_m) \rightarrow \{1, 2, ...\text{-}(n+m-1)\}$, sehingga $rc(S_n \Box P_m) \leq n+m-1$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $rc(S_n \Box P_m) \geq n+m-1$. Untuk suatu kontradiksi diasumsikan bahwa $rc(S_n \Box P_m) = n+m-2$. Tanpa mengurangi atau mengubah pola generalisasi yang didapatkan, pada graf $S_n \Box P_m$, pewarnaan pada sisi $x_{1,j} - v_1 - x_{1,j+1}$ akan muncul warna yang sama padahal sisi tersebut merupakan satu-satunya *rainbow u-v path* pada graf bintang, ambil sebuah graf bintang S_6, maka memiliki titik-titik v_1, $x_{1,1}$ sampai $x_{1,6}$ dengan lintasan yang terbentuk dari masing-masing titik dihubungkan oleh titik v_1, jika pewarnaan sisi $c(v_1 x_{1,1}) = 1$ maka sisi $c(v_1 x_{1,1}) = 1$ diwarnai dengan warna yang sama, sebagaimana diketahui bahwa lintasan $x_{1,1} - v_1 x_{1,2}$ adalah *rainbow u-v path*, dengan demikian terjadi kontradiksi. Jadi $rc(S_n \Box P_m) = n+m-1$. □

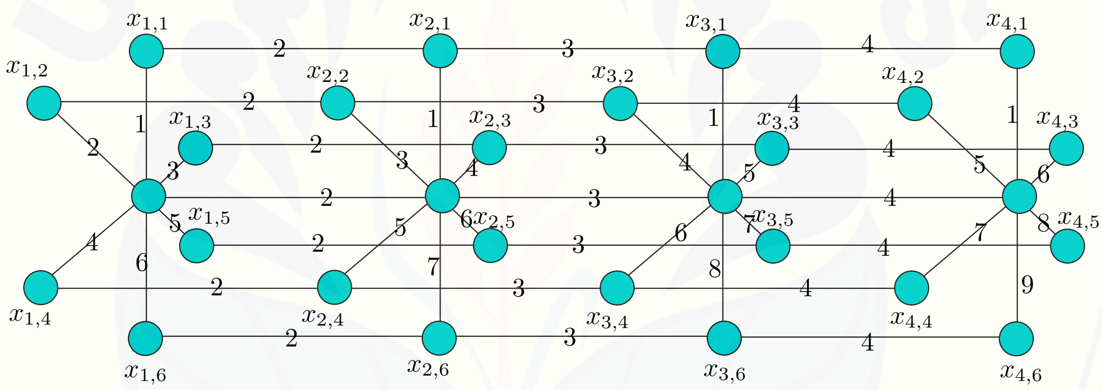
Selanjutnya akan dibuktikan untuk $n+m-1 = rc(S_n \Box P_m) \leq src(S_n \Box P_m)$. Pertama-tama pandang graf dasar pembangun graf $S_n \Box P_m$ adalah graf bintang S_n, berdasarkan Teorema 2.4.1 maka akan dibuktikan $src(S_n \Box P_m) \leq n+m-1$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

$$c(e) := \begin{cases} 1, & e = v_1 x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; j = 1 \\ i+1, & e = x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n-1 \\ i+j-1, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 2 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E(S_n \Box P_m) \rightarrow \{1, 2, ...(n+m-1)\}$, sehingga $src(S_n \Box P_m) \leq n+m-1$.

Setiap titik pada graf bintang pertama sampai ke-m seluruhnya dihubungkan lintasan *geodesic*, misal $d(x_{1,1} - x_{2,1}) = 1)$, $d(x_{1,1} - x_{3,1}) = 2)$, $d(x_{1,1} - x_{m,1}) = m-1)$ dan semuanya berlaku untuk setiap titik $x_{i,j} - x_{i+1,j}$. Disamping itu titik-titik yang tidak bersesuaian juga dihubungkan lintasan *geodesic* melalui sebuah titik penghubung yaitu titik v_i, misal $d(x_{1,1} - x_{2,2} = x_{1,1} - x_{2,3} = x_{1,1} - x_{2,4} = x_{1,1} - x_{2,m} = 3)$, hal tersebut juga berlaku untuk seluruh titik pada graf $S_n \Box P_m$, sehingga setiap linatasan *geodesic* sudah diwarnai dengan *strong rainbow (n+m-1)-coloring* berdasarkan pendefinisian *rainbow (n+m-1)-coloring.* Jadi $rc(S_n \Box P_m) = src(S_n \Box P_m) = n+m-1$. $\square$

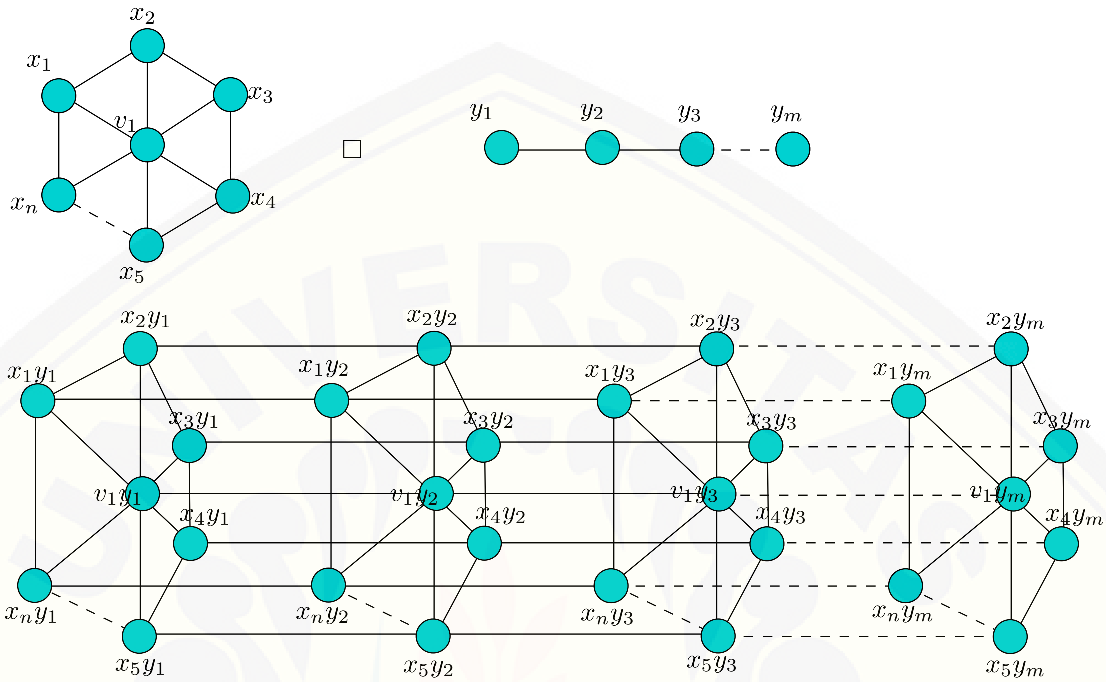
Gambar 4.5 sebagai contoh ilustrasi nilai $rc(S_n \Box P_m) = src(S_n \Box P_m) = n+m-1$.



Gambar 4.5 Contoh nilai $rc(S_6 \Box P_4) = src(S_6 \Box P_4) = 9$

Observasi 4.2.3. *Misal diketahui graf roda W_n dengan $V(W_n) = \{v, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{vx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\}$ serta graf lintasan P_m dengan $V(P_m) = \{x_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_m) = \{x_j x_{j+1}; 1 \leq i \leq m-1\}$. Cartesian product dari graf $G = W_n \Box P_m$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ memiliki himpunan titik dan sisi yang dapat disajikan dalam $V(W_n \Box P_m) = \{v_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}, 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(W_n \Box P_m) = \{v_j v_{j+1}; 1 \leq$*

$j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n\}$ *serta memiliki* $|V(W_n \square P_m)| = m(n+1)$ *dan* $|E(W_n \square P_m)| = 2nm + (m-1)n$.



Gambar 4.6 Contoh operasi $W_n \square P_m$

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.2.2 dijelaskan bahwa graf $G = W_n \square P_m$ jika $V = V_1 \times V_2$, serta dua titik $\langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\langle v_1, v_2 \rangle$ di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku: $u_1 = v_1$ dan $(u_2, v_2) \in E_2$ atau $u_2 = v_2$ dan $(u_1, v_1) \in E_1$. Dengan menggunakan notasi W_n dan P_m, maka dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.6. Dengan demikian didapatkan $V(W_n \square P_m) = \{v_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}, 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(W_n \square P_m) = \{v_jv_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n\}$ serta memiliki $|V(W_n \square P_m)| = m(n+1)$ dan $|E(W_n \square P_m)| = 2nm + (m-1)n$.

Operasi *cartesian product* merupakan operasi perkalian titik-titik pada graf roda dikalikan sebanyak titik-titik pada graf lintasan atau sebaliknya. Kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan bentuk graf bintang dan graf lintasan. Gambar 4.6 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $S_n \square P_m$ diawali dengan menggambar graf roda kemudian diduplikasi sebanyak m kali tergantung pada jumlah titik pada graf lintasan, dan titik-titik yang bersesuaian membentuk graf lintasan. Untuk mengekspannya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.

Dari Observasi 4.2.3 akan ditentukan nilai *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf $G = W_n \Box P_m$ yang disajikan dalam teorema berikut.

◊ **Teorema 4.2.4.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, nilai rainbow connection number dari graf $G = W_n \Box P_m$ adalah*

$$rc(W_n \Box P_m) = \begin{cases} m; & \text{untuk}\, n = 3 \\ m+1; & \text{untuk}\, 4 \leq n \leq 6 \\ m+2; & \text{untuk}\, n \geq 7. \end{cases}$$

Bukti. Sesuai Observasi 4.2.3 didapatkan $V(W_n \Box P_m) = \{v_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}, 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(W_n \Box P_m) = \{v_j v_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n\}$ serta memiliki $|V(W_n \Box P_m)| = m(n+1)$ dan $|E(W_n \Box P_m)| = 2nm + (m-1)n$.

Untuk $n = 3$, graf $W_n \Box P_m$ memiliki $diam(W_n \Box P_m) = m$, berdasarkan Teorema 2.4.1, $rc(W_n \Box P_m) \geq m$. Akan ditunjukkan $rc(W_n \Box P_m) \leq m$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi $c(v_i x_{i,j}) = i$ untuk $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq 3$ serta $c(x_{i,j} x_{i+1,j})$ untuk $1 \leq i \leq m-1$ dan $1 \leq j \leq 3$. Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E(W_n \Box P_m) \rightarrow \{1, 2, ..., m\}$, sehingga $rc(W_n \Box P_m) = m$.

Untuk $4 \leq n \leq 6$, graf $W_n \Box P_m$ memiliki $diam(W_n \Box P_m) = m+1$, berdasarkan Teorema 2.4.1, $rc(W_n \Box P_m) \geq m+1$. Akan ditunjukkan $rc(W_n \Box P_m) \leq m+1$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut.

Untuk $n = 4$

$$c(e) := \begin{cases} i, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq 2 \\ i, & e = x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m; j = ganjil \\ i+1, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 3 \leq j \leq 4 \\ i+1, & e = x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m; j = genap \\ i+2, & e = x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq m-1; 1 \leq j \leq 6. \end{cases}$$

Untuk $n = 5$

$$c(e) := \begin{cases} i, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq 3 \\ i, & e = x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m; j = ganjil \\ i+1, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 4 \leq j \leq 4 \\ i+1, & e = x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m; j = genap \\ i+2, & e = x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq m-1; 1 \leq j \leq 6. \end{cases}$$

Untuk $n = 6$

$$c(e) := \begin{cases} i, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq 3 \\ i, & e = x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m; j = ganjil \\ i+1, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 4 \leq j \leq 6 \\ i+1, & e = x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m; j = genap \\ i+2, & e = x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq m-1; 1 \leq j \leq 6. \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut aka jelas bahwa $c := E(W_n \Box P_m) \rightarrow \{1, 2, ...,$-$m+1\}$, sehingga $rc(W_n \Box P_m) = m + 1$.

Kemudian untuk $4 \leq n \leq 6$, graf $W_n \Box P_m$ memiliki $diam(W_n \Box P_m) = m+1$, tetapi $rc(W_n \Box P_m) \geq m + 2$. Akan ditunjukkan $rc(W_n \Box P_m) \leq m + 2$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut.

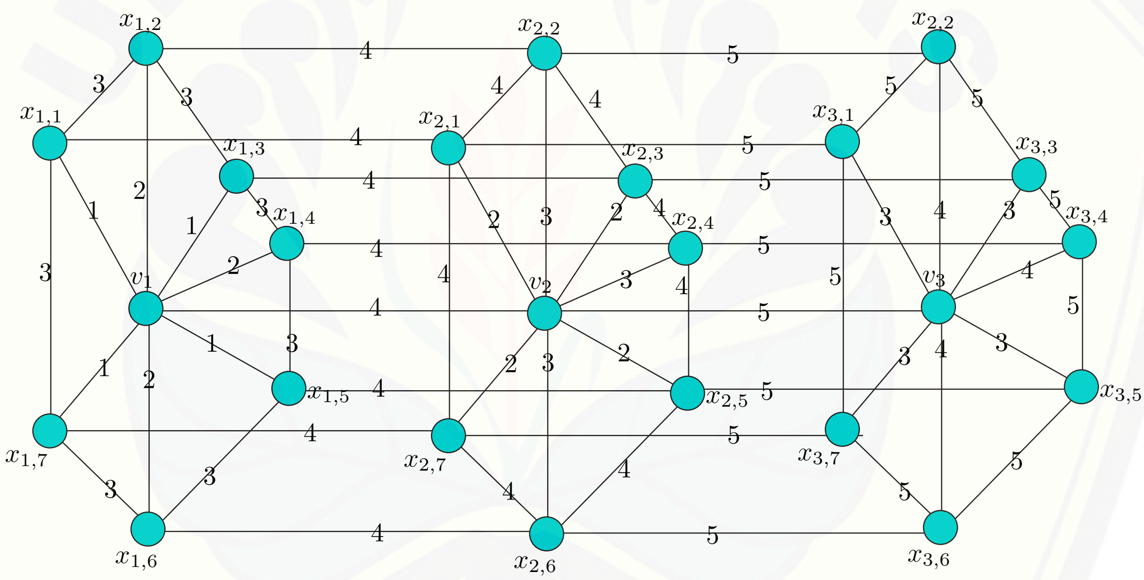
$$c(e) := \begin{cases} i, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; j = ganjil \\ i+1, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; j = genap \\ i+2, & e = x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n \\ i+3, & e = x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq m-1; 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E(W_n \Box P_m) \to \{1, 2, ...,$-$m+2\}$, sehingga $rc(W_n \Box P_m) \leq m+2$.

Selanjutnya akan ditunujkkan $rc(W_n \Box P_m) \geq m+2$. Untuk suatu kontradiksi diasumsikan $rc(W_n \Box P_m) = m+1$, tanpa mengurangi dan mengubah pola generalisasi yang didapatkan maka sisi $c(x_{i,j}x_{i,j+1}) = i+1$ maka akan memiliki warna yang sama dengan sisi $c(v_i x_{i,j}) = i+1$, misalkan diambil graf $W_7 \Box P_2$ dengan graf dasar W_7 yang memliki *rainbow* $u-v$ *path* x_1, v_1, x_2, x_3 akan tetapi terdapat warna yang sama $c(x_1 - v_1) = 1$, $c(v_1 - x_2) = c(x_2 - x_3) = 2$ sehingga tidak terdapat *rainbow* $u-v$ *path*, maka hal ini terjadi kontradiksi. Sehingga $rc(W_n \Box P_m) \geq m+2$.

Jadi, $rc(W_n \Box P_m) = m+2$, untuk $n \geq 7$. $\Box$

Pada Gambar 4.7 berikut ilustrasi nilai $rc(W_7 \Box P_3) = 5$.



Gambar 4.7 *Rainbow 5-coloring* pada graf $W_7 \Box P_3$

$\Diamond$ **Teorema 4.2.5.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, nilai strong* *rainbow connection number dari graf* $G = W_n \square P_m$ *adalah*

$$src(W_n \square P_m) = \begin{cases} rc(W_n \square P_m); & \text{untuk}\, n = 3 \\ rc(W_n \square P_m); & \text{untuk}\, 4 \leq n \leq 6 \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1; & \text{untuk}\, n \geq 7. \end{cases}$$

Bukti. Untuk $n = 3$ maka graf $W_3 \square P_m$ memiliki graf dasar W_3 maka jelaslah bahwa $rc(W_3) = src(W_3) = 1$ sehingga masing-masing titik dari graf roda satu ke graf roda yang lain dihubungkan oleh suatu lintasan dimana mempunyai warna yang berbeda dengan warna pada graf roda awal. Titik-titik pada graf $W_3 \square P_m$ seluruhnya dihubungkan oleh lintasan *geodesic*, seperti $x_{i,j} - x_{i+1,j}$, $v_i - x_{i,j}$, seluruhnya merupakan lintasan *geodesic* yang memuat *strong rainbow m-coloring* dengan konstruksi warna yang telah didefinisikan pada pembuktian $rc(W_3 \square P_m)$, maka jelaslah bahwa $rc(W_3 \square P_m) = src(W_3 \square P_m) = m$.

Untuk $4 \leq n \leq 6$, maka graf $W_{4-6} \square P_m$ memiliki graf dasar W_{4-6} maka jelaslah bahwa $rc(W_{4-6}) = src(W_{4-6}) = 2$ sehingga masing-masing titik dari graf roda satu ke graf roda yang lain dihubungkan oleh suatu lintasan dimana mempunyai warna yang berbeda dengan warna pada graf roda awal. Titik-titik pada graf $W_{4-6} \square P_m$ seluruhnya dihubungkan oleh lintasan *geodesic*, seperti $x_{i,j} - x_{i+1,j}$, $v_i - x_{i,j}$, seluruhnya merupakan lintasan *geodesic* yang memuat *strong rainbow (m+1)-coloring* dengan konstruksi warna yang telah didefinisikan pada pembuktian $rc(W_{4-6} \square P_m)$, maka jelaslah bahwa $rc(W_{4-5} \square P_m) = src(W_{4-6} \square P_m) = m+1$.

Untuk $n \geq 7$, berdasarkan Teorema 2.4.1 $rc(W_n \square P_m) \leq src(W_n \square P_m)$ atau $m+2 \leq src(W_n \square P_m)$, akan tetapi $src(W_n \square P_m) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1$. Selanjutnya akan dibuktikan $src(W_n \square P_m) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

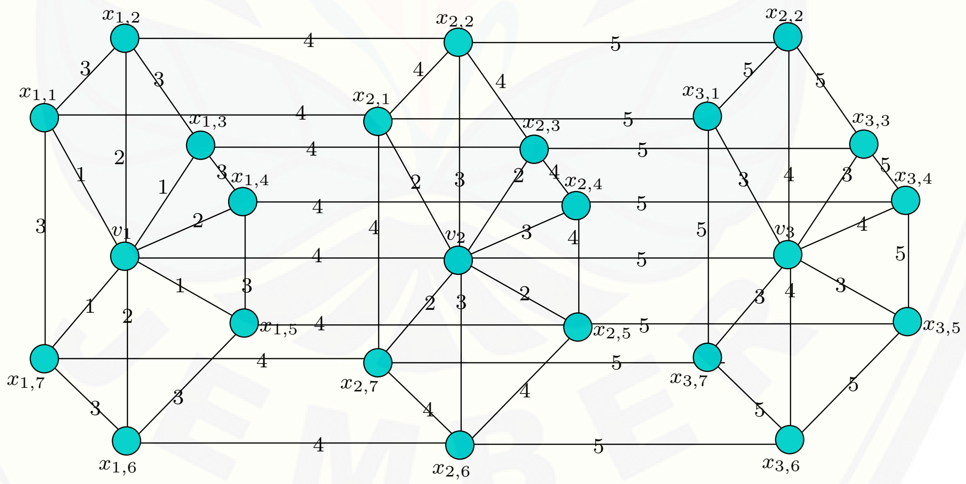
$$c(e) := \begin{cases} i, & e = x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m; j = ganjil \\ i+1, & e = x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m; j = genap \\ \lceil \frac{j}{3} \rceil + i - 1, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n \\ \lceil \frac{j}{3} \rceil + i - 1, & e = x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq m-1; 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisan tersebut maka jelasl bahwa $c := E(W_n \Box P_m) \to \{1, 2, ..., \lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1\}$, sehingga $src(W_n \Box P_m) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $src(W_n \Box P_m) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1$. Untuk suatu kontradiksi diasumsikan bahwa $src(W_n \Box P_m) = \lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 2$, Tanpa mengurangi atau mengubah pola generalisasi yang didapatkan, warna sisi $c(x_{i,j} - x_{i+1,j}) = \lceil \frac{j}{3} \rceil + i - 2$ maka memiliki warna yang sama dengan $c(v_i x_{i,j}) = \lceil \frac{j}{3} \rceil$ untuk $j \geq 7$. Misal ambil pada graf $W_7 \Box P_2$ memiliki *strong rainbow u-v path* $x_{1,7}, v_1, x_{1,2}$ yang merupakan lintasan *geodesic* memiliki warna sama saitu $c(x_{1,7} - v_1) = 3$, $c(v_1 - x_{1,2} = 1)$ dan $x_{1,2} - x_{2,2} = 3$ sehingga tidak terdapat *strong rainbow u-v path*, maka hal ini terjadi kontradiksi. Sehingga $src(W_n \Box P_m) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1$.

Jadi, $src(W_n \Box P_m) = \lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1$ untuk $n \geq 7$. □

Pada Gambar 4.8 berikut ilustrasi nilai $src(W_7 \Box P_3) = 5$.



Gambar 4.8 *Strong rainbow 5-coloring* pada graf $W_7 \Box P_3$

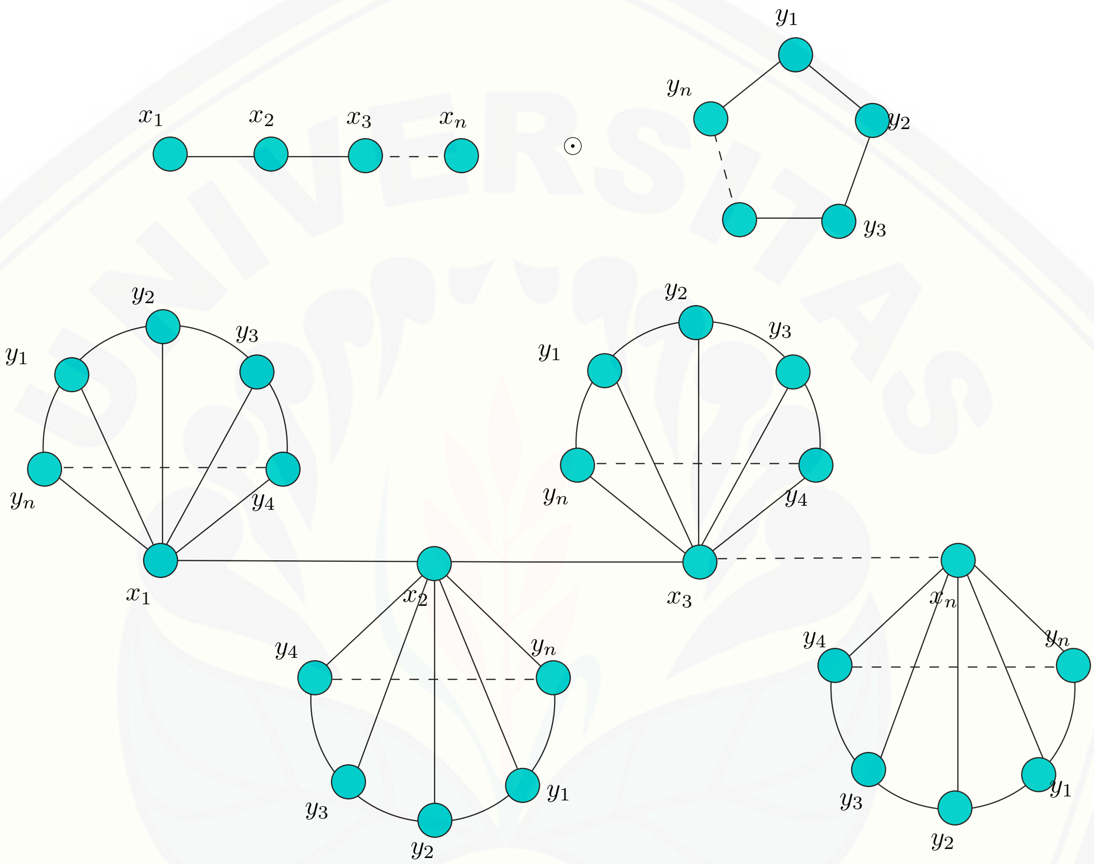
Observasi 4.2.4. *Misal diketahui graf lintasan P_n dengan $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ dan graf lingkaran C_m dengan $V(C_m) = \{x_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(C_m) = \{x_j x_{j+1}; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{x_m x_1\}$. Crown prodoct dari graf $G = P_n \odot C_m$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ memiliki himpunan titik dan sisi yang dapat disajikan dalam $V(G = P_n \odot C_m) = \{v_i, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(G = P_n \odot C_m) = \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,m} x_{i,1}\} \cup \{v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ serta memiliki $|V(G = P_n \odot C_m)| = n + nm$ dan $|E(G = P_n \odot C_m)| = (n-1) + 2nm$.*

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.2.5 dijelaskan bahwa graf $G = P_n \odot C_m$ jika dari dua graf G dan H didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G dan $|V(G)|$ duplikat $H_1, H_2, ..., H_{|V(G)|}$ dari H, kemudian menghubungkan titik ke-i dari G ke setiap titik di H_i, $i = 1,2,3,...\ , V(G)$. Dengan menggunakan notasi P_n dan C_m, maka dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.9. Dengan demikian didapatkan $V(G = P_n \odot C_m) = \{v_i, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(G = P_n \odot C_m) = \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,m} x_{i,1}\} \cup \{v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ serta memiliki $|V(G = P_n \odot C_m)| = n + nm$ dan $|E(G = P_n \odot C_m)| = (n-1) + 2nm$.

Operasi *crown product* merupakan operasi dengan meduplikat graf satu sebanyak titik pada graf lainnya kemudian masing-masing titik pada graf duplikasi tersebut saling terhubung ke sebuah titik pada graf yang lainnya. Gambar 4.9 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $G = P_n \odot C_m$ diawali dengan menggambar graf lintasan kemudian menduplikat graf lingkaran sebanyak titik pada graf lintasan, lalu titik-titik pada graf lingkaran duplikat pertama terhubung ke satu titik pada titik pertama graf lintasan, hal ini berlaku seterusnya untuk duplikat kedua samapi ke-n. Untuk mengekspannya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.

Dari Observasi 4.2.4 akan ditentukan nilai *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf $G = P_n \odot C_m$ yang disajikan dalam teorema berikut.

♢ **Teorema 4.2.6.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, nilai rainbow*



Gambar 4.9 Contoh operasi $G = P_n \odot C_m$

connection number dari graf $G = P_n \odot C_m$ *adalah*

$$rc(P_n \odot C_m) = \begin{cases} 2n-1; & \text{untuk}\, m = 3 \\ 3n-1; & \text{untuk}\, m \geq 4. \end{cases}$$

Bukti. Sesuai Observasi 4.2.4 didapatkan $V(G = P_n \odot C_m) = \{v_i, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(G = P_n \odot C_m) = \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,m} x_{i,1}\} \cup \{v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ serta memiliki $|V(G = P_n \odot C_m)| = n + nm$ dan $|E(G = P_n \odot C_m)| = (n-1) + 2nm$.

Untuk $m = 3$ maka graf $P_n \odot C_m$ memiliki $diam(P_n \odot C_3) = n+1$, berdasarkan Teorema 2.4.1 $rc(P_n \odot C_m) \geq n+1$, tetapi $rc(P_n \odot C_m) \geq 2n-1$ hal ini dikarenakan graf $P_n \odot C_m$ memiliki *pendant* berupa graf C_3 sebanyak n buah dan membentuk graf roda W_3, berdasarkan Teorema 2.4.3 maka $rc(W_3) = 1$. Akan ditunjukkan $rc(P_n \odot C_m) \leq 2n-1$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

$$c(e) := \begin{cases} 1, & e = x_{i,j} x_{i,j+1}; e = x_{i,3} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2 \\ 2i-1, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3 \\ 2i-2, & e = v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E(P_n \odot C_m) \to \{1, 2, ...,\text{-} 2n-1\}$, sehingga $rc(P_n \odot C_m) = 2n-1$.

Untuk $m \geq 4$, maka graf $P_n \odot C_m$ memiliki $diam(P_n \odot C_3) = n+1$, berdasarkan Teorema 2.4.1 $rc(P_n \odot C_m) \geq n+1$, tetapi $rc(P_n \odot C_m) \geq 3n-1$ hal ini dikarenakan graf $P_n \odot C_m$ memiliki *pendant* berupa graf C_{4-m} sebanyak n buah dan membentuk graf roda W_{4-m}. Berdasarkan Teorema 2.4.3 maka $rc(W_4 - 6) = 2$ dan $rc(W_7 - m) = 3$. Akan ditunjukkan $rc(P_n \odot C_m) \leq 3n-1$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

Untuk $4 \leq m \leq 6$

$$c(e) := \begin{cases} 1, & e = x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq 5; j = ganjil \\ 2, & e = x_{i,j}x_{i,j+1}; e = x_{i,6}x_{i,1}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq 5; j = genap \\ 3i-2, & e = v_ix_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 6; j = ganjil \\ 3i-1, & e = v_ix_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 6; j = genap \\ 3i-3, & e = v_iv_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Untuk $m \geq 7$

$$c(e) := \begin{cases} 3, & e = x_{i,j}x_{i,j+1}; e = x_{i,6}x_{i,1} 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq 5 \\ 3i-2, & e = v_ix_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 6; j = ganjil \\ 3i-1, & e = v_ix_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 6; j = genap \\ 3i-3, & e = v_iv_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

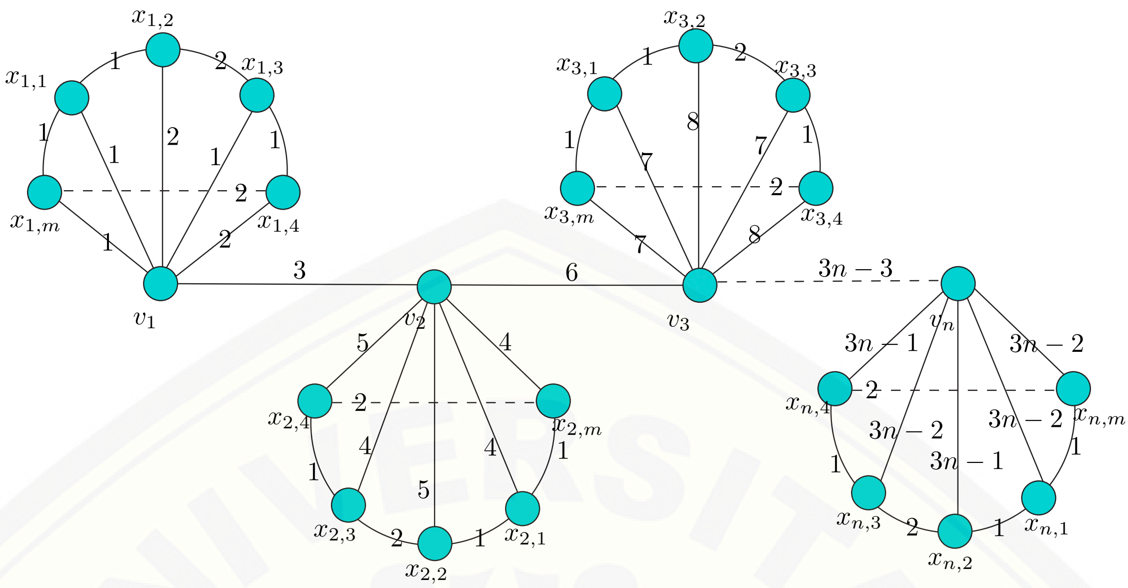
Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E(P_n \odot C_m) \rightarrow \{1, 2, ...,$- $3n-1\}$, sehingga $rc(P_n \odot C_m) \leq 3n-1$.

Selanjutnya akan dibuktikan $rc(P_n \odot C_m) \geq 3n-1$. Untuk suatu kontradiksi diasumsikan bahwa $rc(P_n \odot C_m) = 3n-2$, tanpa mengurangi dan mengubah pola generalisasi yang didapatkan, maka sisi $c(v_ix_{i,j}) = 3i-2$ untuk j ganjil, akan memiliki warna yang sama dengan sisi $c(v_ix_{i,j}) = 3i-2$ untuk j genap, misal ambil graf $P_2 \odot C_7$ maka memiliki *rainbow u-v path* $x_{2,1}, v_2, x_{2,4}, x_{2,5}$, akan tetapi terdapat warna yang sama $c(x_{2,1} - v_2) = 4$, $c(v_2 - x_{2,4}) = 4$, dan $c(x_{2,4} - x_{2,5}) = 2$ sehingga tidak terdapat *rainbow u-v path*, maka hal ini terjadi kontradiksi. Sehingga $rc(P_n \odot C_m) \geq 3n-1$.

Jadi, $rc(P_n \odot C_m) = 3n-1$ untuk $m \geq 4$. $\square$

Pada Gambar 4.10 berikut ilustrasi nilai $rc(P_n \odot C_m) = 3n-1$.

$\diamondsuit$ **Teorema 4.2.7.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, nilai strong*



Gambar 4.10 *Rainbow (3n-1)-coloring* pada graf $P_n \odot C_m$

rainbow connection number dari graf $G = P_n \odot C_m$ *adalah*

$$src(P_n \odot C_m) = \begin{cases} rc(P_n \odot C_m); & \text{untuk } m = 3 \\ rc(P_n \odot C_m); & \text{untuk } 4 \leq m \leq 6 \\ n(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + (n-1); & \text{untuk } m \geq 7 \end{cases}$$

Bukti. Untuk $m = 3$ maka graf $P_n \odot C_m$ memiliki graf dasar C_3 yang terhubung ke setiap titik pada P_n sehingga membentuk graf roda W_3 sebagai *pendant* maka jelaslah bahwa $rc(W_3) = src(W_3) = 1$, dan masing-masing titik pada graf roda yang satu ke graf roda yang lain dihubungkan oleh suatu lintasan dimana mempunyai warna yang berbeda dengan graf roda awal. Kemudian setiap sisi *pendant* akan diwarnai dengan warna yang berbeda. Titik-titik pada graf $P_n \odot C_3$ seluruhnya dihubungkan oleh lintasan *geodesic*, seperti $x_{i,j} - v_i$, $x_{i,j} - x_{i+1,j}$ dengan $j = 3$ dan seluruhnya merupakan lintasan *geodesic* yang memut *strong rainbow (2n-1)-coloring* dengan konstruksi warna yang telah didefiniskan pada pembuktian $rc(P_n \odot C_3)$, maka jelaslah bahwa $rc(P_n \odot C_m) = src(P_n \odot C_m) = 2n - 1$.

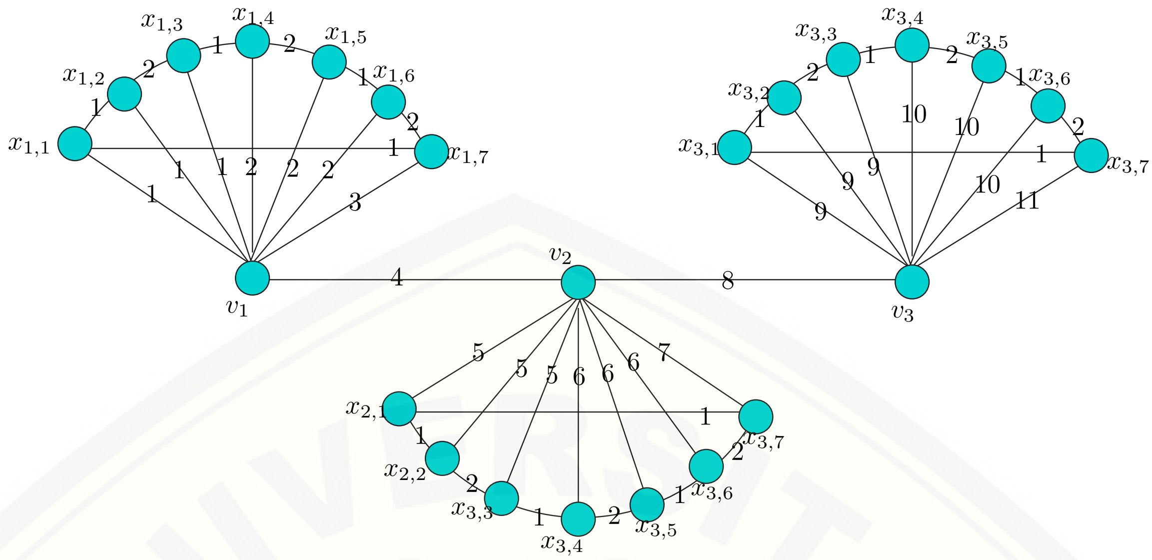
Untuk $4 \leq m \leq 6$ maka graf $P_n \odot C_m$ memiliki graf dasar C_{4-6} yang terhubung ke setiap titik pada P_n sehingga membentuk graf roda W_{4-6} sebagai *pendant* maka jelaslah bahwa $rc(W_{4-6}) = src(W_{4-6}) = 2$, dan masing-masing titik pada graf roda yang satu ke graf roda yang lain dihubungkan oleh suatu lintasan dimana mempunyai warna yang berbeda dengan graf roda awal. Kemudian setiap sisi *pendant* akan diwarnai dengan warna yang berbeda. Titik-titik pada graf $P_n \odot C_{4-6}$ seluruhnya dihubungkan oleh lintasan *geodesic*, seperti $x_{i,j} - v_i$, $x_{i,j} - x_{i+1,j}$ dengan $4 \leq j \leq 6$ dan seluruhnya merupakan lintasan *geodesic* yang memut *strong rainbow (3n-1)-coloring* dengan konstruksi warna yang telah didefiniskan pada pembuktian $rc(P_n \odot C_{4-6})$, maka jelaslah bahwa $rc(P_n \odot C_m) = src(P_n \odot C_m) = 3n - 1$.

Untuk $m \geq 7$, berdasarkan Teorema 2.4.1 $rc(P_n \odot C_m) \leq src(P_n \odot C_m)$ atau $3n-1 \leq src(P_n \odot C_m)$, akan tetapi $src(P_n \odot C_m) \geq n(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + (n-1)$. Selanjutnya akan dibuktikan $src(P_n \odot C_m) \leq n(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + (n-1)$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi $c(v_i v_{i+1}) = i(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + i$, $c(x_{i,j} x_{i,j+1}) = 1$ untuk $j =$ganjil dan $c(x_{i,j} x_{i,j+1}) = 2$ untuk j=genap, serta $c(v_1 x_{1,j}) = \lceil \frac{j}{3} \rceil$ dengan $1 \leq j \leq m$, $c(v_2 x_{2,j}) = 2(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + (i-2)$, $c(v_3 x_{3,j}) = 3(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + (i-1)$, dan seterusnya hingga $n(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + (n-1)$ bergantung pada nilai graf roda yang menjadi *pendant* pada graf $P_n \odot C_m$. Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas $src(P_n \odot C_m) \leq n(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + (n-1)$.

Selanjutnya akan dibuktikan $src(P_n \odot C_m) \geq n(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + (n-1)$. Untuk suatu kontradiksi diasumsikan bahwa $src(P_n \odot C_m) = n(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + (n-2)$. Tanpa mengurangi atau mengubah pola generalisasi yang didapatkan, warna sisi $c(v_i x_{i,m}) = n(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + (n-2)$ akan memiliki warna yang sama dengan sisi $c(v_i x_{i,m-1}) = n(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + (n-2)$. Ambil graf $P_3 \odot C_7$ memiliki *strong rainbow u-v path* $x_{1,4}, v_1, x_{1,7}$, $x_{2,4}, v_2, x_{2,7}$, dan $x_{3,4}, v_3, x_{3,7}$ yang merupakan lintasan *geodesic* memiliki warna yang sama yaitu $c(x_{1,4} - v_1) = 2$, $c(v_1 x_{1,7}) = 2$, dan $c(x_{2,4} - v_2) = 6$, $c(v_2 - x_{2,7}) = 6$, serta $c(x_{3,4} - v_3) = 10$, $c(v_3 - x_{3,7}) = 10$ sehingga tidak terdapat *strong rainbow u-v path*, maka hal ini terjadi kontradkisi. Sehingga $src(P_n \odot C_m) \geq n(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + (n-1)$.

Jadi, $src(P_n \odot C_m) = n(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + (n-1)$. □

Gambar 4.11 berikut ilustrasi nilai $src(P_3 \odot C_7) = 11$.



Gambar 4.11 *Strong rainbow 11-coloring* pada graf $P_3 \odot C_7$

Observasi 4.2.5. *Misal diketahui graf lintasan* P_2 *dengan* $V(P_2) = \{x_1, x_2\}$ *dan* $E(P_3) = \{x_1x_2\}$ *dan graf roda* W_3 *dengan* $V(W_3) = \{v, y_1, y_2, y_3\}$ *dan* $E(W_3) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1\} \cup \{vx_i; 1 \leq i \leq 3\}$. *Tensor product dari graf* $G = P_2 \otimes W_3$ *memiliki himpunan titik dan sisi yang dapat disajikan dalam* $V(P_2 \otimes W_3) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq 4; 1 \leq j \leq 4\}$ *dan* $E(P_2 \otimes W_3) = \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq 3\} \cup \{x_4x_1\} \cup \{y_jy_{j+1}; 1 \leq j \leq 3\} \cup \{y_4y_1\} \cup \{x_iy_j; 1 \leq i \leq 4; 1 \leq j \leq 4\}$. *Dan suatu operasi shackle dari graf* $G = P_2 \otimes W_3$ *yang dinotasikan dengan* $shack[(P_2 \otimes W_3), n]$ *memilki himpunan titik dan sisi yang dapat disajikan dalam* $V(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) = \{v_i, x_{i,j}, y_{i,j}, z_i 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2\}$ *dan* $E(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) = x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{v_ix_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2\} \cup \{v_iy_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2\} \cup \{v_{i+1}x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2\} \cup \{v_{i+1}y_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2\} \cup \{v_iz_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iz_{2i-2}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{y_{i,j}z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{x_{i,j}z_{2i}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{y_{i,j}z_{2i}; 1 \leq i \leq n; j = 1\}$ *serta memiliki* $|V(shack[(P_2 \otimes W_3), n])| = 7n + 1$ *dan* $|E(shack[(P_2 \otimes W_3), n])| = 12n$.

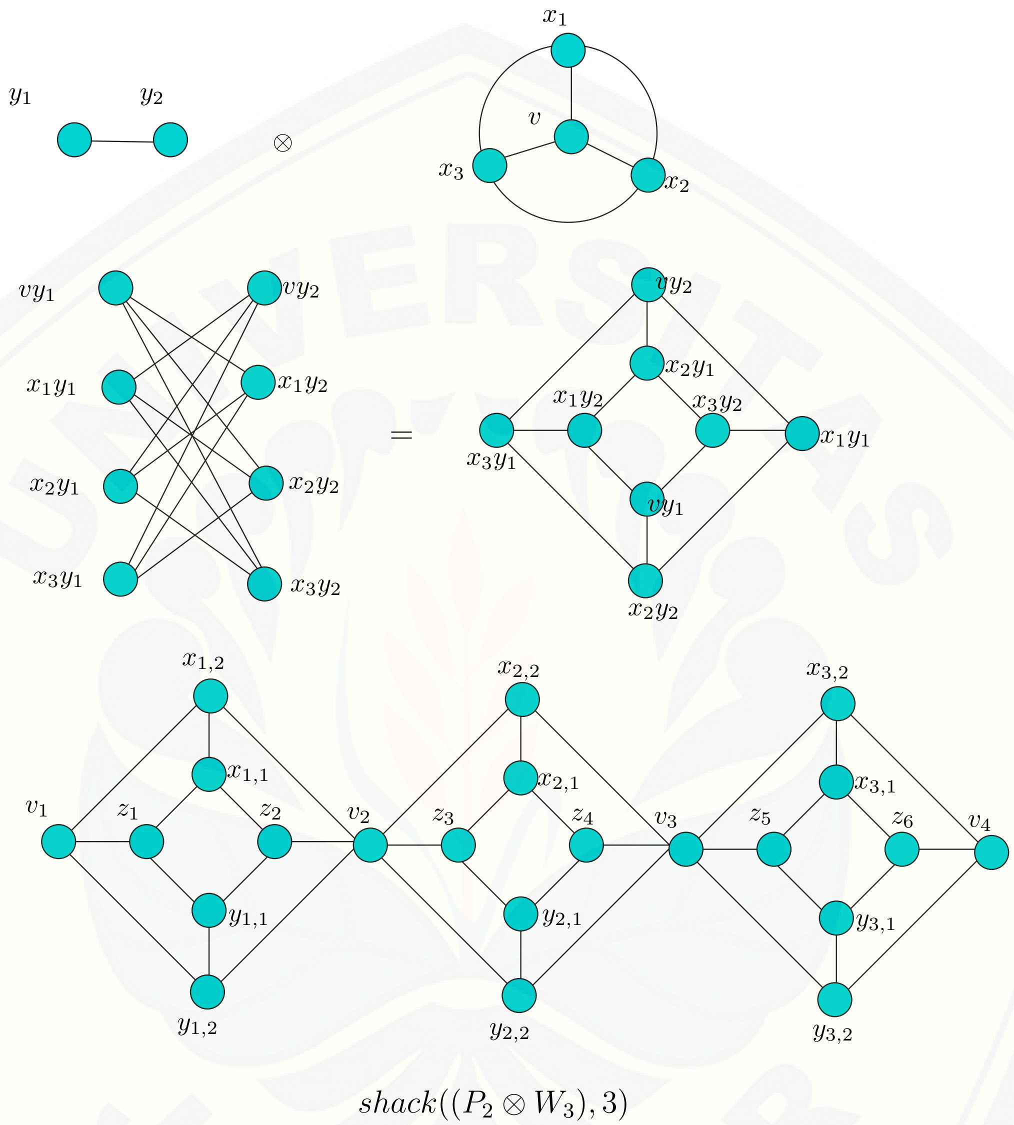
Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.2.3 untuk tensor dan Definisi 2.2.6 dijelaskan bahwa graf $G = shack[(P_3 \otimes W_3), n]$ jika $G_1, G_2, ..., G_k$ dinotasikan dengan $Shack(G_1, G_2, ..., G_k)$ merupakan graf yang dibangun dari graf terhubung nontrivial dan order graf $(G_1, G_2, ..., G_k)$ sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq i, j \leq k$ dengan $|i-j| \geq 2$, G_i dan G_j tidak memiliki titik umum, dan untuk setiap $1 \leq i \leq k-1$, G_i dan $G_i + 1$ tepat satu titik yang sama, disebut vertex linkage dimana $k-1$ linkage titik semua berbeda. Dengan menggunakan notasi P_2 dan W_3, maka dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.12. Dengan demikian didapatkan $V(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) = \{v_i, x_{i,j}, y_{i,j}, z_i 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2\}$ dan $E(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) = x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2\} \cup \{v_i y_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2\} \cup \{v_{i+1}x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2\} \cup \{v_{i+1}y_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2\} \cup \{v_i z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i z_{2i-2}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{y_{i,j}z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{x_{i,j}z_{2i}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{y_{i,j}z_{2i}; 1 \leq i \leq n; j = 1\}$ serta memiliki $|V(shack[(P_2 \otimes W_3), n])| = 7n + 1$ dan $|E(shack[(P_2 \otimes W_3), n])| = 12n$.

Pada operasi ini pertama kali melakukan *tensor product* pada $P_2 \otimes W_3$ dengan menggunakan bantuan MAPLE, kemudian dengan menggunakan *Grin* untuk membantu menghasilkan graf yang lebih menarik dan mudah dilabeli. Selanjutnya operasi *shackle*, pertama-tama menggambar graf $G = P_2 \otimes W_3$ kemudian diduplikat sebanyak n kali dengan sebuah titik pada graf duplikat pertama terhubung dengan sebuah titik ke graf duplikat berikutnya.

Dari Observasi 4.2.5 akan ditentukan nilai *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf $G = shack[(P_2 \otimes W_3), n]$ yang disajikan dalam teorema berikut.

$\Diamond$ **Teorema 4.2.8.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, nilai rainbow connection number dan strong rainbow connection number dari graf $G = shack[(P_2 \otimes W_3), n]$ adalah $3n$.*

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.2.5 didapatkan $V(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) = \{v_i, x_{i,j}, y_{i,j}, z_i 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2\}$ dan $E(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) = x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2\} \cup \{v_i y_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2\} \cup \{v_{i+1}x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2\} \cup \{v_{i+1}y_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2\} \cup \{v_i z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i z_{2i-2}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{y_{i,j}z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{x_{i,j}z_{2i}; 1 \leq i \leq n; j = 1\} \cup \{y_{i,j}z_{2i}; 1 \leq i \leq n; j = 1\}$ serta memiliki $|V(shack[(P_2 \otimes W_3), n])| = 7n + 1$ dan $|E(shack[(P_2 \otimes W_3), n])| =$



Gambar 4.12 Contoh operasi $shack[(P_2 \otimes W_3), 3]$

$12n$.

Graf $shack[(P_2 \otimes W_3), n]$ memiliki $diam(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) = 2n + 1$, berdasarkan Teorema 2.4.1 $rc(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) \geq 2n+1$, tetapi $rc(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) \geq 3n$ karena graf $shack[(P_2 \otimes W_3), n]$ memiliki graf dasar $P_2 \otimes W_3$ dengan $diam(P_2 \otimes W_3) = 3$, berdasarkan Teorema 2.4.1 $rc(P_2 \otimes W_3) \geq 3$, akan ditunjukkan $rc(P_2 \otimes W_3) \leq 3$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

$$c(e) := \begin{cases} 1, & e = v_1 y_{1,2}; e = v_2 x_{1,2}; e = x_{1,1} z_2; e = y_{1,1} z_1 \\ 2, & e = v_1 x_{1,2}; e = v_2 y_{1,2}; e = x_{1,1} z_1; e = y_{1,1} z_2 \\ 3, & e = v_1 z_1; e = v_2 z_2; e = x_{1,1} x_{1,2}; e = y_{1,1} y_{1,2} \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E(P_2 \otimes W_3) \rightarrow \{1, 2, 3\}$, sehingga $rc(P_2 \otimes W_3) = 3$. Sehingga graf $shack[(P_2 \otimes W_3), n]$ yang berarti terdapat n buah graf $P_2 \otimes W_3$ yang saling bergandengan dalam satu kesatuan.

Selanjutnya akan ditunjukkan $rc(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) \leq 3n$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

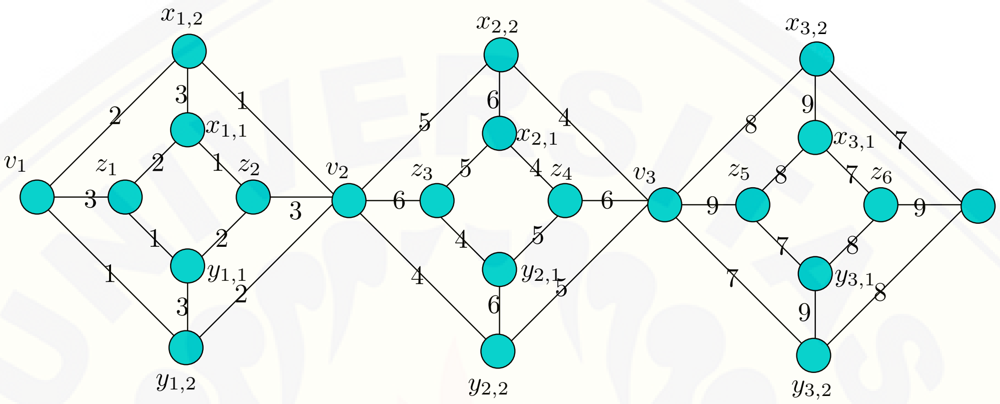
$$c(e) := \begin{cases} 3i-1, & e = v_i x_{i,j}; e = v_{i+1} y_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2 \\ 3i-1, & e = x_{i,j} z_{2i-1}; e = y_{i,j} z_{2i}; 1 \leq i \leq n; j = 1 \\ 3i-2, & e = v_i y_{i,j}; e = v_{i+1} x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2 \\ 3i-2, & e = y_{i,j} z_{2i-1}; e = x_{i,j} z_{2i}; 1 \leq i \leq n; j = 1 \\ 3i, & e = x_{i,j} x_{i,j+1}; e = y_{i,j} y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n \\ 3i, & e = v_i z_{2i-1}; e = v_{i+1} z_{2i}; 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E((shack[(P_2 \otimes W_3), n]))$-$\rightarrow \{1, 2, .., 3n\}$, sehingga $rc(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) \leq 3n$.

Selanjutnya akan dibuktikan $rc(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) \geq 3n$. Untuk suatu kontradiksi diasumsikan bahwa $rc(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) = 3n - 1$. Tanpa mengurangi dan mengubah pola generalisasi yang telah didapatkan, maka sisi $c(x_{i,j} - x_{i,j+1}) = c(y_{i,j} - y_{i,j+1}) = 3i - 1$ dan $c(v_i - z_{2i-1}) = c(v_{i+1} z_{2i}) = 3i - 1$ akan memiliki warna yang sama dengan $c(v_i - x_{i,j}) = c(v_{i+1} - y_{i,j}) = 3i - 1$ dan $c(x_{i,j} - z_{2i-1}) = c(y_{i,j} z_{2i}) = 3i - 1$. Ambil graf $shack[(P_2 \otimes W_3), 2])$ maka memiliki *rainbow u-v path* $v_1, z_1, x_{1,1}, z_2$ akan tetapi terdapat warna yang sama $c(v_1 - z_1) = 2$, $c(z_1 - x_{1,1}) = 2$, dan $c(x_{1,1} - z_2) = 1$ sehingga tidak terdapat *rainbow u-v path*, maka hal ini terjadi kontradiksi. Sehingga $rc(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) \geq 3n$.

Jadi, $rc(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) = 3n$ untuk $n \geq 2$. $\square$

Gambar 4.13 berikut merupakan ilustrasi untuk nilai $rc(shack[(P_2 \otimes W_3), 3]) = 9$.



Gambar 4.13 *Rainbow 9-coloring* pada graf $shack[(P_2 \otimes W_3), 3]$

Seanjutnya akan dibuktuikan $3n = rc(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) \leq src(shack[(P_2 \otimes W_3), n])$. Pertama-tama pandang graf tersebut dibangun dari graf $(P_2 \otimes W_3)$ sebanyak n buah sehingga akan ditunjukkan $src(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) \leq 3n$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi sebagai berikut

$$c(e) := \begin{cases} 3i-1, & e = v_i x_{i,j}; e = v_{i+1} y_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2 \\ 3i-1, & e = x_{i,j} z_{2i-1}; e = y_{i,j} z_{2i}; 1 \leq i \leq n; j = 1 \\ 3i-2, & e = v_i y_{i,j}; e = v_{i+1} x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2 \\ 3i-2, & e = y_{i,j} z_{2i-1}; e = x_{i,j} z_{2i}; 1 \leq i \leq n; j = 1 \\ 3i, & e = x_{i,j} x_{i,j+1}; e = y_{i,j} y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n \\ 3i, & e = v_i z_{2i-1}; e = v_{i+1} z_{2i}; 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E((shack[(P_2 \otimes W_3), n])) \rightarrow$

$\{1, 2, .., 3n\}$, sehingga $src(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) \leq 3n$.

Setiap titik pada graf $(P_2 \otimes W_3)$ seluruhnya dihubungkan oleh lintasan *geodesic* dengan $diam(P_2 \otimes W_3) = 3$ misal $d(x_{1,2} - z_1) = d(x_{1,2} - z_2) = d(x_{1,2} - y_{1,2}) = 2$, $d(x_{1,2} - y_{1,1}) = 3$ hal tersebut juga berlaku untuk seluruh titik pada graf $shack[(P_2 \otimes W_3), n]$, sehingga setiap lintasan *geodesic* sudah diwarnai dengan *strong rainbow 3n-coloring* berdasarkan pendefinisian *rainbow 3n-coloring*. Jadi $rc(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) = src(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) = 3n$. □

Observasi 4.2.6. *Misal diketahui graf lintasan P_3 dengan $V(P_3) = \{x_1, x_2, x_3\}$ dan $E(P_3) = \{x_1x_2, x_2x_3\}$ dan graf lingkaran C_3 dengan $V(C_3) = \{y_1, y_2, y_3\}$ dan $E(C_3) = \{y_1y_2, y_2y_3, y_3y_1\}$. Tensor product dari graf $G = P_3 \otimes C_3$ memiliki himpunan titik dan sisi yang dapat disajikan dalam $V(P_3 \otimes C_3) = \{x_i, y_1, z_i; 1 \leq i \leq 3\}$ dan $E(P_3 \otimes C_3) = \{x_1z_i; i = 1, 3\} \cup \{y_1z_i; i = 1, 3\} \cup \{x_1x_i; i = 2, 3\} \cup \{y_1y_i; i = 2, 3\} \cup \{x_iz_2; i = 2, 3\} \cup \{y_iz_2; i = 2, 3\}$. Dan suatu operasi shackle dari graf $G = P_3 \otimes C_3$ yang dinotasikan dengan $shack[(P_3 \otimes C_3), n]$ memilki himpunan titik dan sisi yang dapat disajikan dalam $V(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) = \{v_i, x_i, y_i, z_i, z_{i,j}\}$ dan $E(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) = \{v_ix_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i+1}x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i+1}y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iz_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2\} \cup \{x_iz_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 3 \leq j \leq 4\} \cup \{z_iz_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\}$ serta memiliki $|V(shack[(P_3 \otimes C_3), n])| = 8n + 1$ dan $|E(shack[(P_3 \otimes C_3), n])| = 12n$.*

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.2.3 untuk tensor dan Definisi 2.2.6 dijelaskan bahwa graf $G = shack[(P_3 \otimes C_3), n]$ jika $G_1, G_2, ..., G_k$ dinotasikan dengan $Shack(G_1, G_2, ..., G_k)$ merupakan graf yang dibangun dari graf terhubung nontrivial dan order graf $(G_1, G_2, ..., G_k)$ sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq i, j \leq k$ dengan $|i - j| \geq 2$, G_i dan G_j tidak memiliki titik umum, dan untuk setiap $1 \leq i \leq k - 1$, G_i dan $G_i + 1$ tepat satu titik yang sama, disebut vertex linkage dimana $k - 1$ linkage titik semua berbeda. Dengan menggunakan notasi P_3 dan C_3, maka dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.14. Dengan demikian didapatkan $V(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) = \{v_i, x_i, y_i, z_i, z_{i,j}\}$ dan $E(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) = \{v_ix_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i+1}x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i+1}y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iz_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2\} \cup \{x_iz_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 3 \leq j \leq 4\} \cup \{z_iz_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\}$ serta memiliki $|V(shack[(P_3 \otimes C_3), n])| = 8n + 1$ dan $|E(shack[(P_3 \otimes C_3), n])| =$

$12n$.

Pada operasi ini pertama kali melakukan *tensor product* pada $P_3 \otimes C_3$ dengan menggunakan bantuan MAPLE, kemudian dengan menggunakan *Grin* untuk membantu menghasilkan graf yang lebih menarik dan mudah dilabeli. Selanjutnya operasi *shackle*, pertama-tama menggambar graf $G = P_3 \otimes C_3$ kemudian diduplikat sebanyak n kali dengan sebuah titik pada graf duplikat pertama terhubung dengan sebuah titik ke graf duplikat berikutnya.

Dari Observasi 4.2.6 akan ditentukan nilai *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf $G = shack[(P_3 \otimes C_3), n]$ yang disajikan dalam teorema berikut.

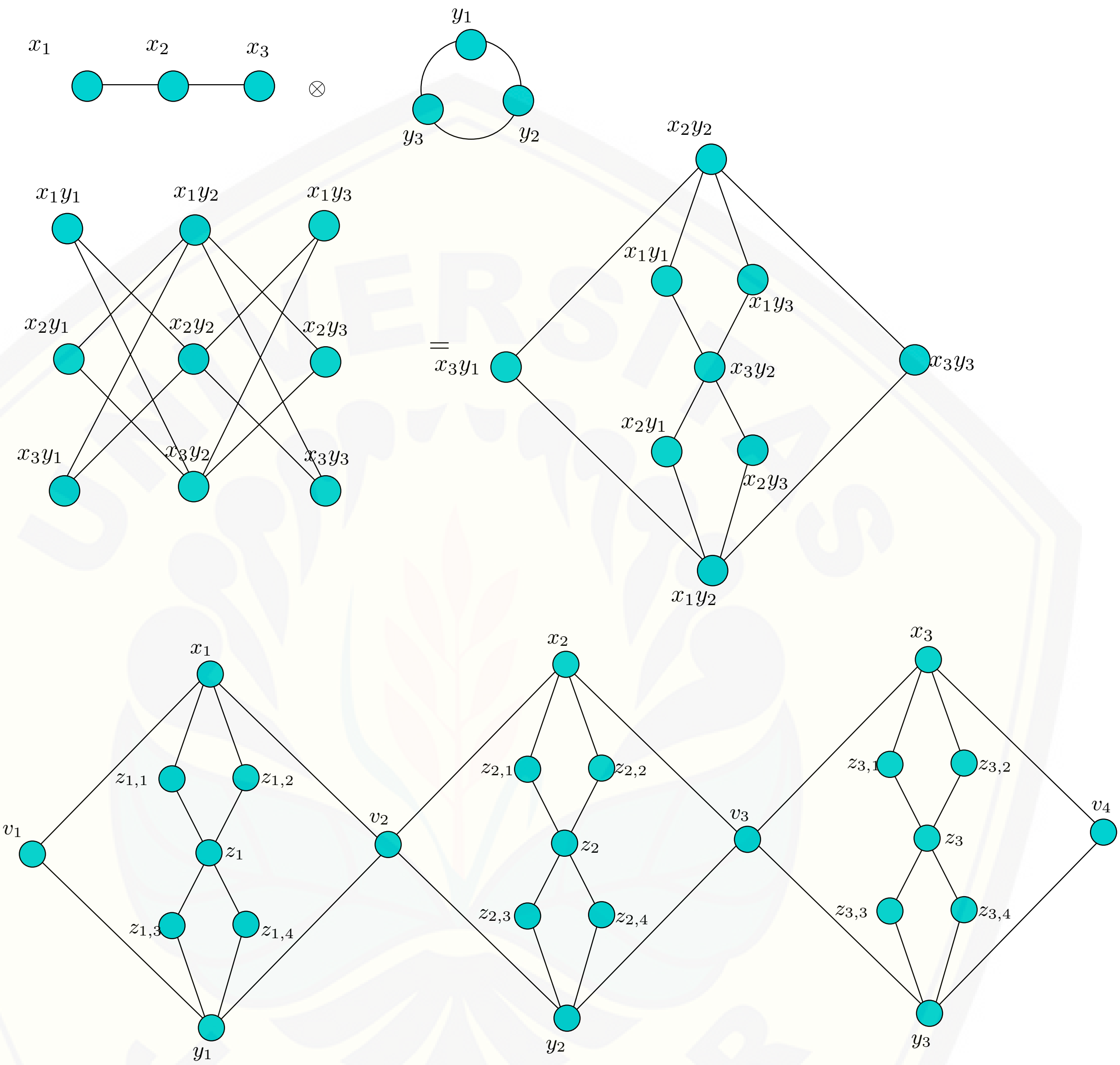
◊ **Teorema 4.2.9.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, nilai rainbow connection number dan strong rainbow connection number dari graf $G = shack[(P_3 \otimes C_3), n]$ adalah $4n$.*

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.2.6 didapatkan $V(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) = \{v_i, x_i, y_i, z_i, z_{i,j}\}$ dan $E(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) = \{v_i x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i+1} x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_{i+1} y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2\} \cup \{x_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 3 \leq j \leq 4\} \cup \{z_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\}$ serta memiliki $|V(shack[(P_3 \otimes C_3), n])| = 8n + 1$ dan $|E(shack[(P_3 \otimes C_3), n])| = 12n$.

Graf $shack[(P_3 \otimes C_3), n]$ memiliki $diam(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) = 2n + 1$, berdasarkan Teorema 2.4.1 $rc(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) \geq 2n+1$, tetapi $rc(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) \geq 4n$ karena graf $shack[(P_3 \otimes C_3), n]$ memiliki graf dasar $P_3 \otimes C_3$ dengan $diam(P_3 \otimes C_3) = 3$, berdasarkan Teorema 2.4.1 tetapi $rc(P_3 \otimes C_3) \geq 4$, akan ditunjukkan $rc(P_3 \otimes C_3) \leq 4$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

$$c(e) := \begin{cases} 1, & e = v_1 x_1; e = v_2 y_2; e = z_1 z_{1,1} \\ 2, & e = v_1 y_1; e = v_2 x_1; e = z_1 z_{1,2} \\ 3, & e = x_1 z_{1,1}; e = x_1 z_{1,2}; e = y_1 z_{1,3}; e = y_1 z_{1,4}; e = z_1 z_{1,3}; \\ 4, & e = z_1 z_{1,4} \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E(P_3 \otimes C_3) \to \{1, 2, 3, 4\}$, sehingga $rc(P_3 \otimes C_3) = 4$.



$shack((P_3 \otimes C_3), 3)$

Gambar 4.14 Contoh operasi $shack[(P_3 \otimes C_3), 3]$

Kemudian untuk graf $shack[(P_3 \otimes C_3), n]$ yang berarti akan terdapat n buah graf $P_3 \otimes C_3$ yang saling bergandengan dalam satu kesatuan.

Selanjutnya akan ditunjukkan $rc(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) \leq 4n$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

$$c(e) := \begin{cases} 4i-3, & e = v_i x_i; e = v_{i+1} y_i; 1 \leq i \leq n \\ 4i-3, & e = z_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 1 \\ 4i-2, & e = v_i y_i; e = v_{i+1} x_1; 1 \leq i \leq n \\ 4i-2, & e = z_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2 \\ 4i-1, & e = x_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2 \\ 4i-1, & e = y_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 3 \leq j \leq 4 \\ 4i-1, & e = z_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 3 \\ 4i, & e = z_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 4 \end{cases}$$

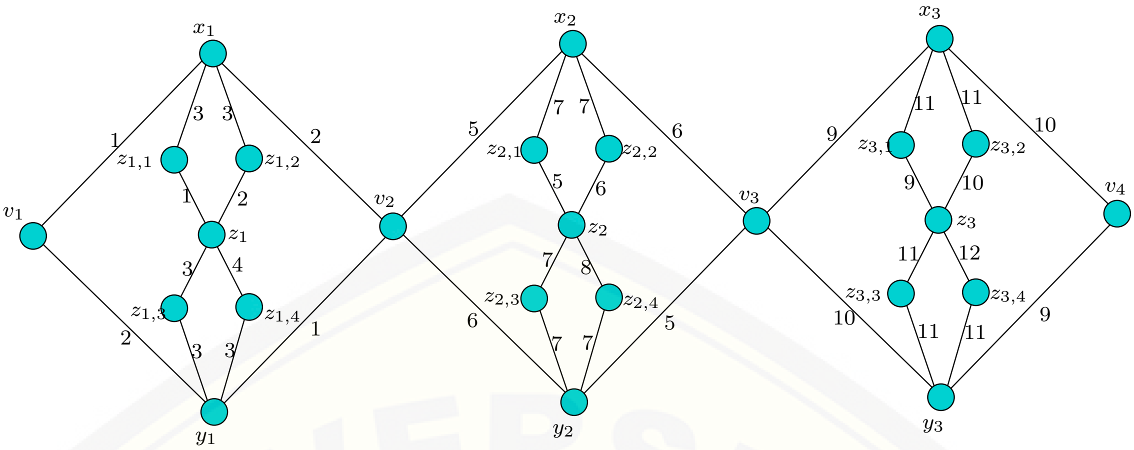
Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) \rightarrow \{1, 2, ..., 4n\}$, sehingga $rc(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) \leq 4n$.

Selanjutnya akan dibuktikan $rc(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) \geq 4n$. Untuk suatu kontradiksi diasumsikan bahwa $rc(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) = 4n - 1$. Tanpa mengurangi dan mengubah pola generalisasi yang telah didapatkan, maka sisi $c(z_i z_{i,j}) = 4i - 1$ untuk j=4 akan memiliki warna yang sama dengan $c(x_i z_{i,j}) = c(y_i z_{i,j}) = 4i - 1$ dan $c(z_i z_{i,j}) = 4i - 1$ untuk j=3. Ambil graf $shack[(P_3 \otimes C_3), 2])$ maka memiliki *rainbow u-v path* $v_1, y_1, x_{1,4}, z_1$ akan tetapi terdapat warna yang sama $c(v_1 - y_1) = 2$, $c(y_1 - x_{1,4}) = 3$, dan $c(x_{1,4} - z_1) = 3$ sehingga tidak terdapat *rainbow u-v path*, maka hal ini terjadi kontradiksi. Sehingga $rc(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) \geq 4n$.

Jadi, $rc(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) = 4n$. untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.15 tersebut merupakan ilustrasi untuk nilai $rc(shack[(P_3 \otimes C_3), 3]) = 12$.

Seanjutnya akan dibuktikan $4n = rc(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) \leq src(shack[(P_3 \otimes C_3), n])$. Pertama-tama pandang graf tersebut dibangun dari graf $(P_3 \otimes C_3)$ sebanyak n buah sehingga akan ditunjukkan $src(shack[(P_3 \otimes C_3), n] \leq 4n)$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut



Gambar 4.15 *Rainbow* $12-$*coloring* pada graf $shack[(P_3 \otimes C_3), 3]$

$$c(e) := \begin{cases} 4i-3, & e = v_i x_i; e = v_{i+1} y_i; 1 \leq i \leq n \\ 4i-3, & e = z_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 1 \\ 4i-2, & e = v_i y_i; e = v_{i+1} x_1; 1 \leq i \leq n \\ 4i-2, & e = z_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2 \\ 4i-1, & e = x_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2 \\ 4i-1, & e = y_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 3 \leq j \leq 4 \\ 4i-1, & e = z_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 3 \\ 4i, & e = z_i z_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 4. \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E((shack[(P_3 \otimes C_3), n])) \rightarrow \{1, 2, .., 4n\}$, sehingga $src(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) \leq 4n$.

Setiap titik pada graf $(P_3 \otimes C_3)$ seluruhnya dihubungkan oleh lintasan *geodesic* dengan $diam(P_3 \otimes C_3) = 3$ misal $d(v_1 - z_1) = d(v_2 - z_1) = 3$ dan $d(x_1 - y_1) = d(v_1 v_2) = 2$ hal tersebut juga berlaku untuk seluruh titik pada graf $shack[(P_3 \otimes C_3), n]$, sehingga setiap lintasan *geodesic* sudah diwarnai dengan *strong rainbow 4n-coloring* berdasarkan pendefinisian *rainbow 4n-coloring*. Jadi $rc(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) = src(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) = 4n$. $\square$

Observasi 4.2.7. *Misal diketahui graf bintang* S_4 *dengan* $V(S_4) = \{v, x_i; 1 \leq i \leq 4\}$ *dan* $E(S_4) = \{vx_i; 1 \leq i \leq 4\}$ *dan graf lengkap* K_1 *dengan* $V(K_1) = \{y\}$

dan $E(K_1) = \{\}$. *Join dari graf* $G = S_4 + K_1$ *memiliki himpunan titik dan sisi yang dapat disajikan dalam* $V(S_4 + K_1) = \{v, x_i, y; 1 \leq i \leq 4\}$ *dan* $E(S_4 + K_1) = \{vx_i; 1 \leq i \leq 4\} \cup \{x_i y; 1 \leq i \leq 4\} \cup \{vy\}$. *Dan suatu operasi Amalgamasi dari graf* $G = S_4 + K_1$ *yang dinotasikan dengan* $Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]$ *memiliki himpunan titik dan sisi yang dapat disajikan dalam* $V(Amal[(S_4+K_1), v = 1, n]) = \{v, x_i, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\}$ *dan* $E(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) = \{vx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{vx_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\} \cup \{x_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq\}$ *serta memiliki* $|V(Amal[(S_4+K_1), v = 1, n])| = 5n+1$ *dan* $|E(Amal[(S_4+K_1), v = 1, n])| = 9n$.

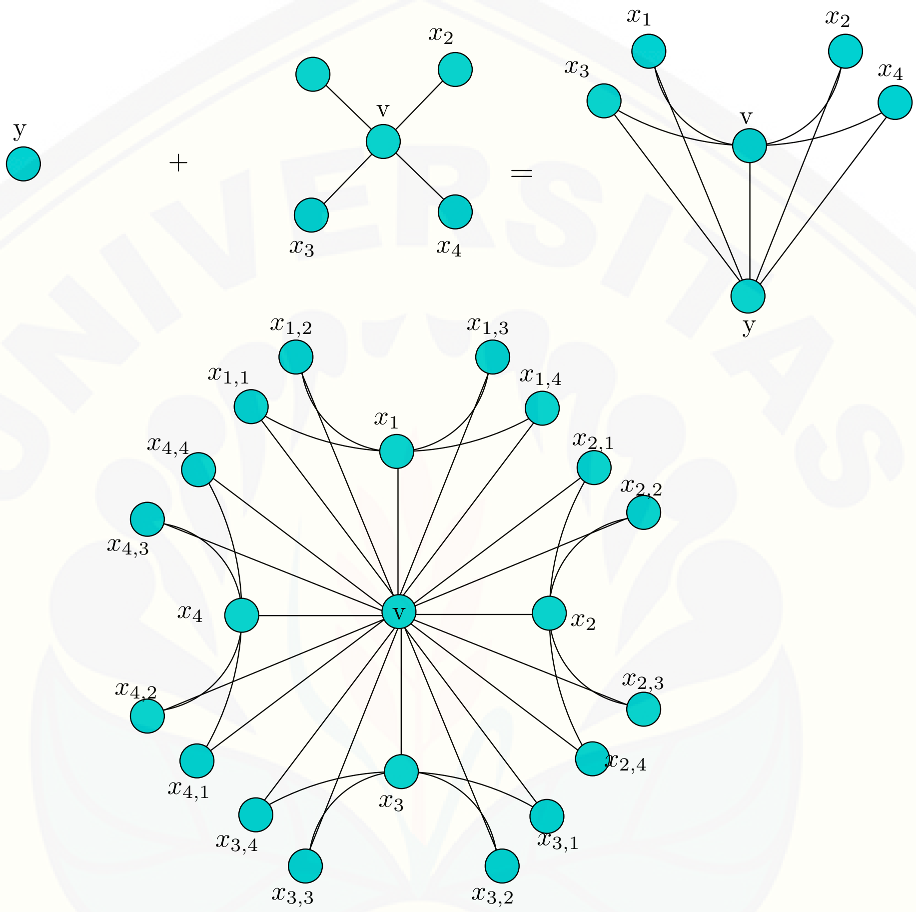
Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.2.1 untuk join dan Definisi 2.2.7 dijelaskan bahwa misalkan $\{H_i\}$ adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap H_i mempunyai suatu titik v_{0i} yang disebut titik terminal, yang mana graf amalgamasi dibentuk oleh semua H_i dengan seluruh titik terminalnya direkatkan menjadi satu titik. Dengan menggunakan notasi notasi S_4 dan K_1 maka dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.16. Dengan demikian didapatkan $V(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) = \{v, x_i, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\}$ dan $E(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) = \{vx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{vx_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\} \cup \{x_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\}$ serta memiliki $|V(Amal[(S_4+K_1), v = 1, n])| = 5n+1$ dan $|E(Amal[(S_4+K_1), v = 1, n])| = 9n$.

Pada operasi ini pertama kali adalah melakukan operasi *join* $S_4 + K_1$ kemudian melakukan duplikasi dari graf dasar sebanyak n disertai menentukan titik terminal dari graf tersebut, lalu merekatkan seluruh titik terminal tersebut menjadi satu titik.

Dari Observasi 4.2.7 akan ditentukan nilai *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf $G = Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]$ yang disajikan dalam teorema berikut.

$\diamondsuit$ **Teorema 4.2.10.** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 2$, *nilai rainbow connection numberd dari* $G = Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]$ *adalah 3.*

Bukti. Sesuai dengan Observasi 4.2.7 didapatkan $V(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) = \{v, x_i, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\}$ dan $E(Amal[(S_4+K_1), v = 1, n]) = \{vx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{vx_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\} \cup \{x_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\}$ serta memiliki $|V(Amal[(S_4+K_1), v = 1, n])| = 5n+1$ dan $|E(Amal[(S_4+K_1), v = 1, n])| = 9n$.



$Amal([S_4 + K_1], v = 1, 4)$

Gambar 4.16 Contoh operasi $Amal[(S_4 + K_1), v = 1, 3]$

Graf $Amal[(S_4+K_1), v=1,n]$ memiliki $diam(Amal[(S_4+K_1), v=1,n]) = 2$, berdasarkan Teorema 2.4.1 $rc(Amal[(S_4+K_1), v=1,n]) \geq 2$, tetapi $rc(Amal[(S_4+K_1), v=1,n]) \geq 3$. Selanjutnya akan ditunjukkan $rc(Amal[(S_4+K_1), v=1,n]) \leq 3$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

$$c(e) := \begin{cases} 1, & e = vx_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4 \\ 2, & e = vx_i; 1 \leq i \leq n \\ 3, & e = x_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E(Amal[(S_4+K_1), v = 1,n]) \rightarrow \{1,2,3\}$, sehingga $rc(Amal[(S_4+K_1), v=1,n]) \leq 3$.

Selanjutnya akan dibuktikan $rc(Amal[(S_4+K_1), v=1,n]) \geq 3$, untuk suatu kontradiksi akan diasumsikan bahwa $rc(Amal[(S_4+K_1), v=1,n]) = 2$, tanpa mengurangi atau mengubah pola generalisasi yang telah didapatkan, pada graf $Amal[(S_4+K_1), v=1,n]$ akan terdapat pewarnaan sisi yang sama $x_{i,j} - x_{i+1,j}$ karena $c(x_{i,j} - v) = c(v - x_{i+1,j}) = 1$ dan $c(v - x_{i+1,j+1}) = c(x_{i+1,j+1} - x_{i,j}) = 2$ maka tidak terbentuk *rainbow u-v path*, sehingga terjandi kontradiksi.

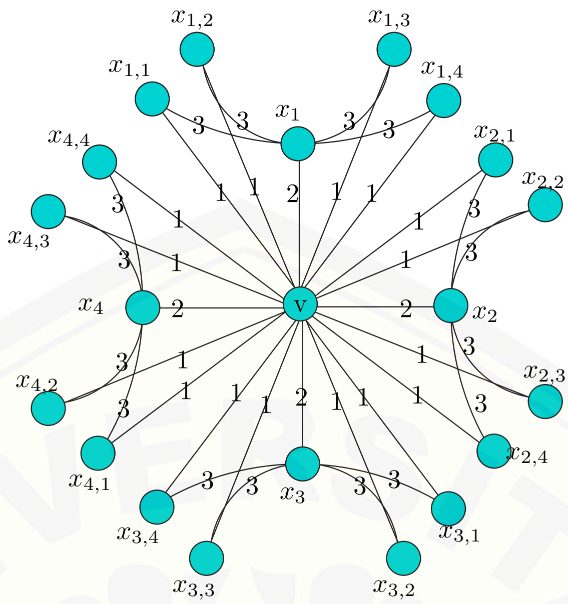
Jadi, $rc(Amal[(S_4+K_1), v=1,n]) = 3$ untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.17 berikut sebagai contoh ilustrasi $rc(Amal[(S_4+K_1), v=1,n]) = 3$.

♢ **Teorema 4.2.11.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, nilai strong rainbow connection numberd dari $G = Amal[(S_4+K_1), v=1,n]$ adalah $2n$.*

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.4.1 maka $rc(Amal[(S_4+K_1), v=1,n]) \leq src(Amal[(S_4+K_1), v=1,n])$ atau $3 \leq src(Amal[(S_4+K_1), v=1,n])$, akan tetapi $src(Amal[(S_4+K_1), v=1,n]) \geq 2n$. Selanjutnya akan dibuktikan $src(Amal[(S_4+K_1), v=1,n]) \leq 2n$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

$$c(e) := \begin{cases} 2i-1, & e = vx_i, e = vx_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 1,4 \\ 2i-1, & e = x_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 1,3 \\ 2i, & e = vx_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2,3 \\ 2i, & e = x_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2,4. \end{cases}$$



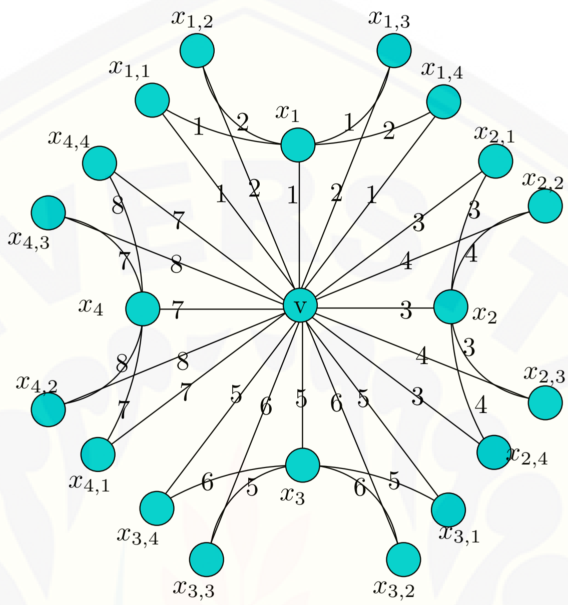
Gambar 4.17 *Rainbow 3-coloring* pada graf $Amal[(S_4 + K_1), v = 1, 4]$

Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E(Amal[(S_4+K_1), v = 1, n]) \rightarrow \{1, 2, ..., 2n\}$, sehingga $src(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) \leq 2n$

Selanjutnya akan dibuktikan $src(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) \geq 2n$. Untuk suatu kontradiksi diasumsikan bahwa $src(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) = 2n - 1$. Tanpa mengurangi dan mengubah pola generalisasi yang didapatkan, maka sisi $c(vx_{i,j}) = 2i - 1$ untuk j=2,3 dan $c(x_i x_{i,j}) = 2i - 1$ untuk j=2,4 akan memiliki warna yang sama dengan $c(vx_i) = (vx_{i,j}) = 2i - 1$ untuk j=1,4 dan $c(x_i x_{i,j}) = 2i - 1$ untuk j=1,3. Ambil graf $Amal[(S_4 + K_1), v = 1, 2]$ maka memiliki *strong rainbow u-v path* $x_{2,1}, x_2, x_{2,4}$ dan $x_{2,2}, x_2, x_{2,3}$ akan tetapi memiliki warna yang sama yaitu $c(x_2, 1 - x_2) = 3$ dan $c(x_2 - x_{2,4}) = 3$ serta $c(x_{2,2} - x_2) = 3$ dan $c(x_2 x_{2,3}) = 3$ sehingga tidak terdapat *rainbow u-v geodesic path*, maka hal ini terjadi kontradiksi. Sehingga $rc(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) \geq 2n$.

Setiap titik pada graf S_4+K_1 seluruhnya dihubungkan oleh lintasan *geodesic* dengan $diam(S_4 + K_1) = 2$ misal $d(v - x_{1,1}) = d(v - x_{1,2}) = d(v - x_{1,3}) = d(v - x1, 4) = (v - x_1) = 1$, $d(x_1 x_{1,1}) = d(x_1 x_{1,2}) = d(x_1 x_{1,3}) = d(x_1 x_{1,4}) = 1$, dan $d(x_{1,1} - x_{1,2}) = d(x_{1,1} - x_{1,3}) = (x_{1,1} - x_{1,4}) = 2$ hal tersebut juga berlaku untuk seluruh titik pada graf $Amal[(S_4+K_1), v = 1, n]$, sehingga lintasan *geodesic* sudah diwarnai dengan *strong rainbow 2n-coloring* berdasarkan pendefinisian *rainbow 2n-coloring*. Jadi, $src(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) = 2n$. □

Pada Gambar 4.18 berikut ilustrasi nilai $src(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) = 8$



Gambar 4.18 *Strong rainbow 8-coloring* pada graf $Amal[(S_4 + K_1), v = 1, 4]$

Observasi 4.2.8. *Misal diketahui graf bintang* S_4 *dengan* $V(S_4) = \{v, x_i; 1 \leq i \leq 4\}$ *dan* $E(S_4) = \{vx_i; 1 \leq i \leq 4\}$ *dan graf lintasan* P_2 *dengan* $V(P_2) = \{y_1, y_2\}$ *dan* $E(P2) = \{y_1y_2\}$. *Cartesian product dari graf* $G = S_4\Box P_2$ *memiliki himpunan titik dan sisi yang dapat disajikan dalam* $V(S_4\Box P_2) = \{v_1, v_2, x_{1,j}, x_{2,j}; 1 \leq j \leq 4\}$ *dan* $E(S_4\Box P_2) = \{v_1x_{1,j}; 1 \leq j \leq 4\} \cup \{v_2x_{2,j}; 1 \leq j \leq 4\} \cup \{x_{1,j}x_{2,j}; 1 \leq j \leq 4\}$. *Dan suatu operasi Amalgamasi dari graf* $G = S_4\Box P_2$ *yang dinotasikan dengan* $Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]$ *memiliki himpunan titik dan sisi yang dapat disajikan dalam* $V(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]) = \{P, v_i, x_{i,j}, y_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\}$ *dan* $E(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]) = \{v_ix_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\} \cup \{Py_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\} \cup \{x_{i,j}y_{1,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\} \cup \{Pv_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\}$ *serta memiliki* $|V(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n])| = 9n+1$ *dan* $|E(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n])| = 13n$.

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.2.2 untuk *cartesian product* dan Definisi 2.2.7 dijelaskan bahwa misalkan $\{H_i\}$ adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap H_i mempunyai suatu titik v_{0i} yang disebut titik terminal, yang mana graf amalgamasi dibentuk oleh semua H_i dengan seluruh titik terminalnya direkatkan menjadi satu titik. Dengan menggunakan notasi notasi S_4 dan P_2 maka dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.19. Dengan demikian didapatkan $V(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]) = \{P, v_i, x_{i,j}, y_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\}$ dan $E(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]) = \{v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\} \cup \{Py_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\} \cup \{x_{i,j}y_{1,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\} \cup \{Pv_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4\}$ serta memiliki $|V(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n])| = 9n + 1$ dan $|E(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n])| = 13n$.

Pada operasi ini pertama kali adalah melakukan operasi *cartesian* $S_4\Box P_2$ kemudian melakukan duplikasi dari graf dasar sebanyak n disertai menentukan titik terminal dari graf tersebut, lalu merekatkan seluruh titik terminal tersebut menjadi satu titik.

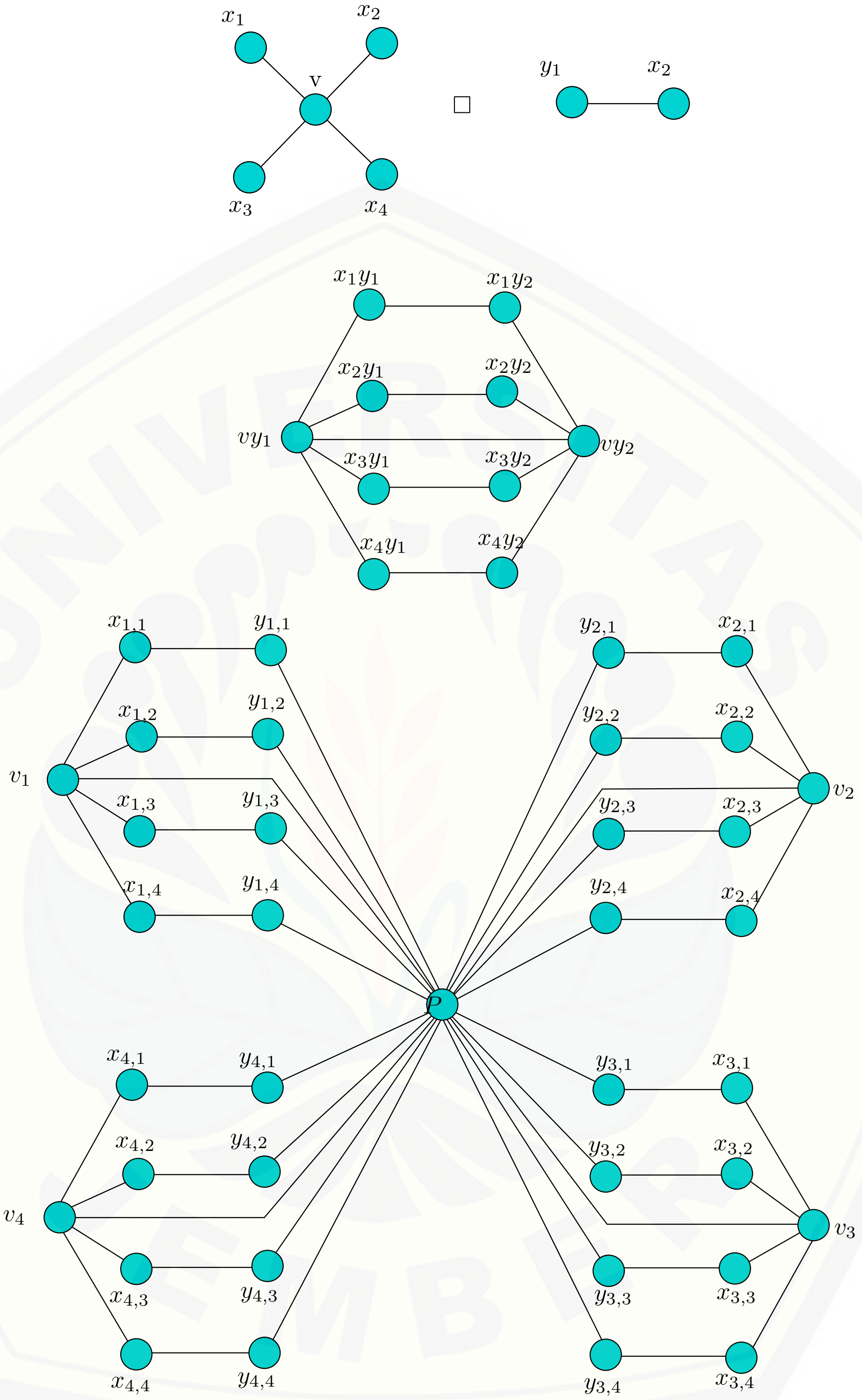
Dari Observasi 4.2.8 akan ditentukan nilai *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf $G = Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]$ yang disajikan dalam teorema berikut.

◊ **Teorema 4.2.12.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, nilai rainbow connection number dan strong rainbow connection number dari graf $G = Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]$ adalah $5n$.*

Bukti. Graf $G = Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]$ memiliki graf dasar $(S_4\Box P_2)$, maka berdasarkan Teorema 2.4.1, $rc(S_4\Box P_2) \geq diam(S_4\Box P_2)$ atau $rc(S_4\Box P_2) \geq 3$. Akan dikonstruksi *rainbow 5-coloring* $c := E(S_4\Box P_2) \to \{1, 2, ..., 5\}$ yang didefiniskan sebagai berikut.

$$c(e) := \begin{cases} 1, & e = v_1x_{1,1}, e = v_2x_{2,1} \\ 2, & e = v_1x_{1,2}, e = x_{1,j}x_{2,j}; 1 \leq j \leq 4 \\ 3, & e = v_1x_{1,3}, e = v_2x_{2,2} \\ 4, & e = v_1x_{1,4}, e = v_2x_{2,3} \\ 5, & e = v_2x_{2,4}. \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelaslah bahwa $rc(S_4\Box P_2) = 5$.



$Amal[(S_4 \square P_2), v = 1, 4]$

Gambar 4.19 Contoh operasi $Amal[(S_4 \square P_2), v = 1, 4]$

Kemudian untuk graf $Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]$ berarti akan memiliki graf $S_4\Box P_2$ sebanyak n yang masing-masing titik terminalnya bertemu di satu titik. Maka akan ditunjukkan $rc(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]) \leq 5n$. Akan dikonstruksi *rainbow 5n-coloring* $c := E(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]) \rightarrow \{1, 2, ..., 5n\}$ yang didefiniskan sebagai berikut.

$$c(e) := \begin{cases} 5i-4, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 1 \\ 5i-4, & e = Py_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 1 \\ 5i-3, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2 \\ 5i-3, & e = Pv_i; 1 \leq i \leq n \\ 5i-3, & e = x_{i,j}y_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4 \\ 5i-2, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 3 \\ 5i-2, & e = Py_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2 \\ 5i-1, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 4 \\ 5i-1, & e = Py_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 3 \\ 5i, & e = Py_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 4 \end{cases}$$

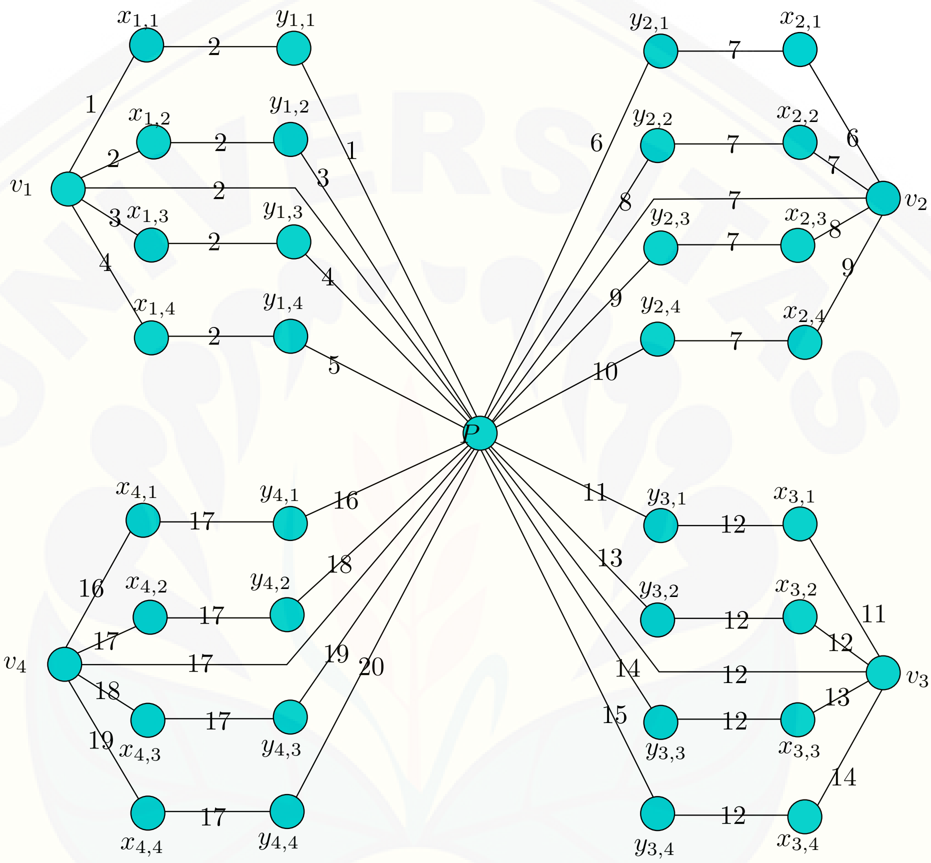
Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelaslah bahwa $rc(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]) \leq 5n$.

Selanjutnya akan dibuktikan $rc(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]) \geq 5n$. Untuk suatu kontradiksi diasumsikan bahwa $rc(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]) = 5n - 1$. Tanpa mengurangi dan mengubah pola generalisasi yang didapatkan, maka sisi $c(Py_{i,4}) = 5i - 1$ akan memiliki warna yang sama dengan $c(v_i x_{i,4}) = c(Py_{i,3}) = 5i - 1$. Ambil graf $Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, 2]$ maka memiliki *rainbow u-v path* $v_1, x_{1,4}, y_{1,4}, P$ memiliki warna yang sama yaitu $c(v_1 - x_{1,4}) = 4$, $c(x_{1,4} - y_{1,4}) = 2$, dan $c(y_{1,4} - P) = 4$ sehingga tidak terdapat *rainbow u-v path*, maka hal ini terjadi kontradiksi. Sehingga $rc(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]) \geq 5n$.

Jadi, $rc(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]) = 5n$.untuk $n \geq 2$. $\Box$

Gambar 4.20 berikut ilustrasi nilai $rc(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, 4]) = 20$.

Selanjutnya akan dibuktikan $rc(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n]) \leq src(Amal[(S_4\Box P_2), v = 1, n])$. Pertama-tama pandang graf tersebut dibangun dari graf $S_4\Box P_2$ sebanyak n buah sehingga akan dikonstruksi *strong rainbow 5n-coloring* $c := E(Amal[(S_4\Box P_2), v =$



Gambar 4.20 *Rainbow* 20 − *coloring* pada graf $Amal[(S_4 \Box P_2), v = 1, 4]$

$1, n]) \rightarrow \{1, 2, ..., 5n\}$ yang didefiniskan sebagai berikut.

$$c(e) := \begin{cases} 5i-4, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 1 \\ 5i-4, & e = Py_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 1 \\ 5i-3, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2 \\ 5i-3, & e = Pv_i; 1 \leq i \leq n \\ 5i-3, & e = x_{i,j} y_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 4 \\ 5i-2, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 3 \\ 5i-2, & e = Py_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 2 \\ 5i-1, & e = v_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 4 \\ 5i-1, & e = Py_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 3 \\ 5i, & e = Py_{i,j}; 1 \leq i \leq n; j = 4 \end{cases}$$

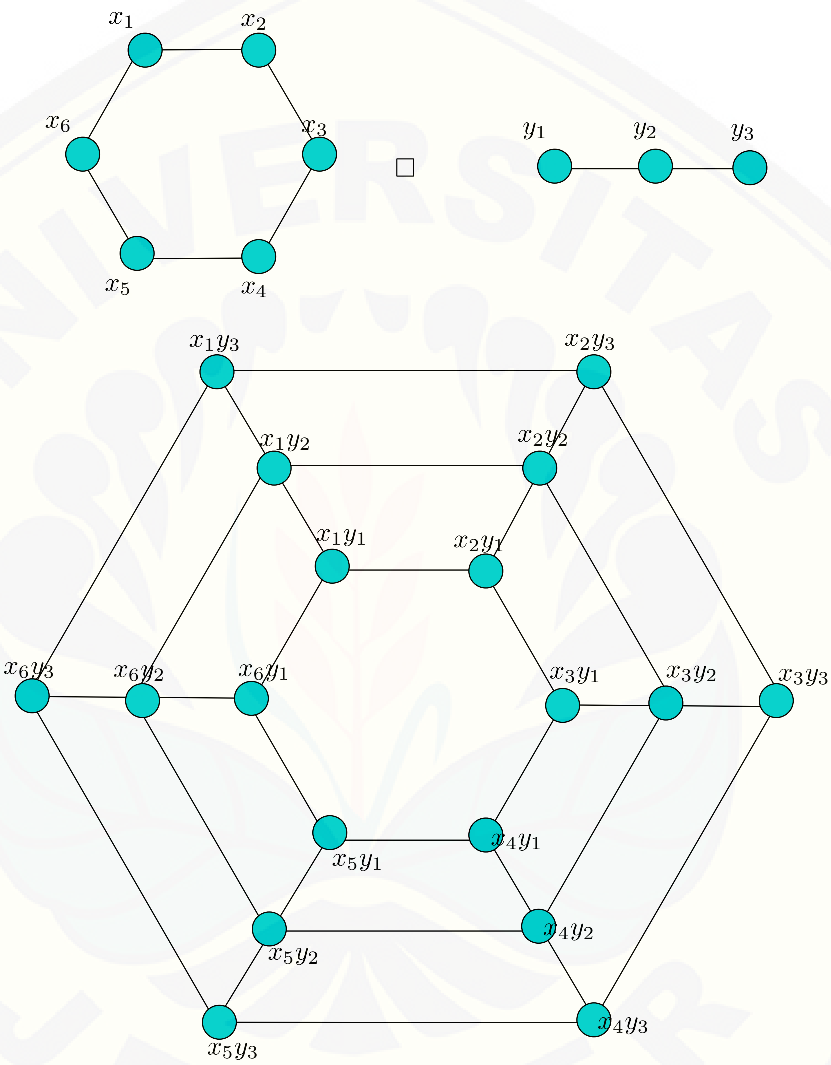
Berdasarkan pendefinisian tersebut jelaslah bahwa $src(Amal[(S_4 \square P_2), v = 1, n]) \leq 5n$.

Setiap titik pada graf $S_4 \square P_2$ seluruhnya dihubungkan oleh lintasan *geodesic* dengan $diam(S_4 \square P_2) = 3$ misal $d(x_{1,1} - x_{2,2}) = d(x_{1,1} - x_{2,3}) = d(x_{1,1} - x_{2,4}) = 3$ dan $d(x_{1,1} - x_{1,2}) = d(x_{1,1} - x_{1,3}) = d(x_{1,1} - x_{1,4}) = 2$, hal tersebut juga berlaku untuk seluruh titik pada graf $Amal[(S_4 \square P_2), v = 1, n]$, sehingga lintasan *geodesic* sudah diwarnai dengan *strong rainbow 5n-coloring* berdasarkan pendefinisian *rainbow 5n-coloring*. Jadi, $rc(Amal[(S_4 \square P_2), v = 1, n]) = src(Amal[(S_4 \square P_2), v = 1,]) = 5n$. $\square$

Observasi 4.2.9. *Misal diketahui graf prisma $Pr_{(n,m)}$ adalah graf yang memiliki $V(Pr_{(n,m)}) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(Pr_{(n,m)}) = \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{n,j} x_{1,j}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $|V(Pr_{(n,m)})| = m.n$ dan $|E(Pr_{(n,m)})| = 2m.n - n$.*

Bukti. Graf prisma $Pr_{(n,m)}$ adalah graf yang diperoleh dari operasi *cartesian* dari graf lingkaran C_n dengan $V(C_n) = \{x_j; 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(C_n) = \{x_j x_{j+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\}$ dan graf lintasan P_m dengan $V(P_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq m\}$ dan $E(P_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq m-1\}$. Sesuai dengan Definisi 2.2.2 dijelaskan bahwa graf $G = C_n \square P_m$ jika $V = V_1 \times V_2$, serta dua titik $\langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\langle v_1, v_2 \rangle$ di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku: $u_1 = v_1$

dan $(u_2, v_2) \in E_2$ atau $u_2 = v_2$ dan $(u_1, v_1) \in E_1$. Dengan menggunakan notasi C_n dan P_m, maka dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.21. Dengan demikian didapatkan $V(Pr_{(n,m)}) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(Pr_{(n,m)}) = \{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{n,j}x_{1,j}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $|V(Pr_{(n,m)})| = m.n$ dan $|E(Pr_{(n,m)})| = 2m.n - n$.



Gambar 4.21 Contoh operasi *cartesian* $C_6 \square P_3$ menghasilkan graf prisma $Pr_{(6,3)}$

Dari Observasi 4.2.9 akan ditentukan nilai *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* dari graf graf prisma $Pr_{(n,m)}$ yang disajikan dalam teorema berikut.

◊ **Teorema 4.2.13.** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 1$, *rainbow connection number dan strong rainbow connection number untuk graf prisma* $Pr_{(n,m)}$ *adalah*

$$rc(Pr_{(n,m)}) = src(Pr_{(n,m)}) = \begin{cases} m; & \text{untuk } n = 3 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1); & \text{untuk } n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti. Berdasarkan Observasi 4.2.9 maka graf prisma $Pr_{(n,m)}$ memiliki $V(Pr_{(n,m)}) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(Pr_{(n,m)}) = \{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\}$ $\cup$ $\{x_{n,j}x_{1,j}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $|V(Pr_{(n,m)})| = m.n$ dan $|E(Pr_{(n,m)})| = 2m.n - n$.

Untuk $n = 3$, graf prisma $Pr_{(n,m)}$ memiliki $diam(Pr_{(n,m)}) = m$ berdasarkan Teorema 2.4.1 $rc(Pr_{(n,m)}) \geq m$. akan dibuktikan $rc(Pr_{(n,m)}) \leq m$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

$$c(e) := \begin{cases} j, & e = x_{i,j}x_{i+1,j}, e = x_{3,j}x_{i,j}; i = 1,2; 1 \leq j \leq m \\ j+1, & e = x_{i,j}x_{i,j+1}, 1 \leq i \leq 3; 1 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut jelas bahwa $rc(Pr_{(3,m)}) \leq m$, sehingga $rc(Pr_{(n,m)}) \leq m$.

Untuk $n \geq 4$, maka graf $Pr_{(n,m)}$ memiliki $diam(rc(Pr_{(n,m)})) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + (m-1)$ berdasarkan Teorema 2.4.1 $rc(Pr_{(n,m)}) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + (m-1)$, tetapi $rc(Pr_{(n,m)}) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1)$. Akan dibuktikan $rc(Pr_{(n,m)}) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1)$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

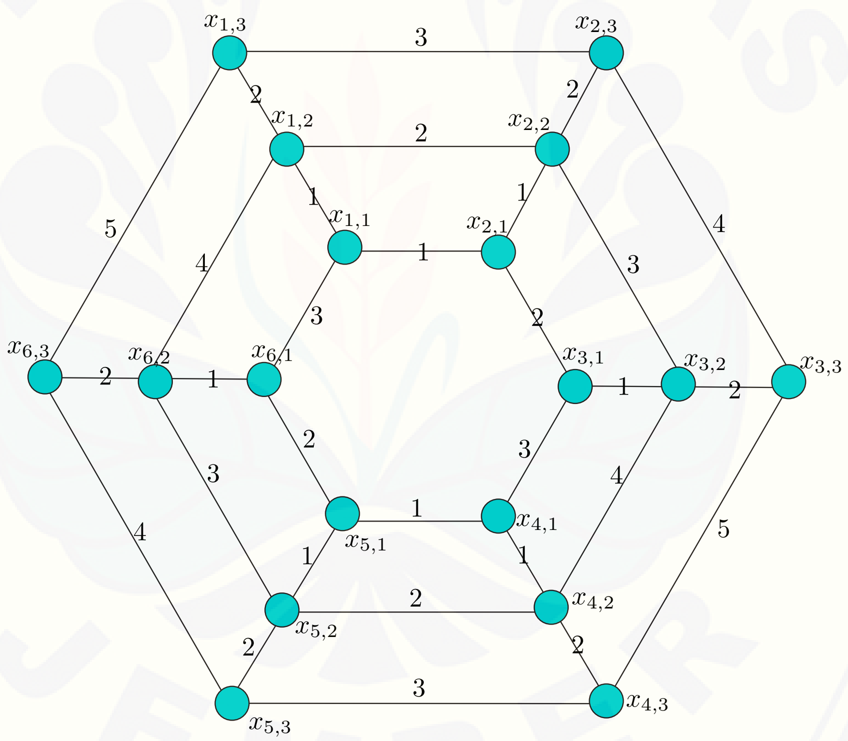
$$c(e) := \begin{cases} i+j-1, & e = x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil; 1 \leq j \leq m \\ i+j-1, & e = x_{i,j}x_{i+1,j}; \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m \\ j, & e = x_{i,j}x_{i,j+1};, 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + j - 1, & e = x_{n,j}x_{1,j}; 1 \leq j \leq m-1. \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E(Pr_{(n,m)}) \rightarrow \{1, 2, ...,\lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1)\}$, sehingga $rc(Pr_{(n,m)}) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1)$.

Selanjutnya akan dibuktikan $rc(Pr_{(n,m)}) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1)$. Untuk suatu kontradiksi diasumsikan bahwa $rc(Pr_{(n,m)}) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-2)$. Tanpa mengurangi dan mengubah pola generalisasi yang didapatkan, maka sisi $c(x_{i,j} - x_{i+1,j}) = i + j - 2$ akan terdapat persamaan warna dengan sisi $(x_{i,j}x_{i,j+1}) = j$. Ambil graf $Pr_{(5,2)}$ memiliki *rainbow u-v path* $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,2}$ atau $x_{1,1}, x_{2,1}, x_{2,2}$ akan tetapi terdapat warna yang sama $c(x_{1,1} - x_{1,2}) = 1$ dan $c(x_{1,2} - x_{2,2}) = 1$, $c(x_{1,1} - x_{2,1}) = 1$ dan $c(x_{2,1} - x_{2,2}) = 1$ sehingga tidak terdapat *rainbow u-v path*, maka hal ini terjadi kontradiksi. Sehingga $rc(Pr_{(n,m)}) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1)$.

Jadi, $rc(Pr_{(n,m)}) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1)$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 1$. □

Gambar 4.22 berikut ilustrasi nilai $rc(Pr_{(6,3)}) = 20$.



Gambar 4.22 *Rainbow* 5 − *coloring* pada graf $Pr_{(6,3)}$

Selanjutnya akan dibuktikan $rc(Pr_{(n,m)}) \leq src(Pr_{(n,m)})$. Pertama-tama pandang graf $Pr_{(n,m)}$ dibangun oleh graf dasar yaitu graf lingkaran C_n sebanyak m buah yang setiap titik yang bersesuaian dihubungkan oleh graf lintasan, sehingga akan dibuktikan $rc(Pr_{(n,m)}) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1)$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

$$c(e) := \begin{cases} i+j-1, & e = x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil; 1 \leq j \leq m \\ i+j-1, & e = x_{i,j}x_{i+1,j}; \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m \\ j, & e = x_{i,j}x_{i,j+1};, 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + j - 1, & e = x_{n,j}x_{1,j}; 1 \leq j \leq m-1. \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut maka jelas bahwa $c := E(Pr_{(n,m)}) \to \{1, 2, ...,\text{-} \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1)\}$, sehingga $src(Pr_{(n,m)}) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1)$.

Setiap titik pada graf $Pr_{(n,m)}$ seluruhnya dihubungkan oleh lintasan *geodesic* dengan $diam(Pr_{(n,m)}) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + (m-1)$, misal $d(x_{1,1} - x_{3,2}) = 3$ $d(x_{1,1} - x_{3,2}) = 3$ $d(x_{1,1} - x_{4,2}) = 3$, $d(x_{1,1} - x_{2,2}) = 3$, dan seterusnya sehingga lintasan *geodesic* sudah diwarnai dengan *strong rainbow* $(\lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1))$*-coloring* berdasarkan pendefinisian *rainbow* $(\lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1))$*-coloring*. Jadi, $rc(Pr_{(n,m)}) = src(Pr_{(n,m)})$. □

◊ **Teorema 4.2.14.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$ dan $m \geq 1$, rainbow connection number dan strong rainbow connection number untuk graf antiprisma AP_n adalah*

$$rc(AP_n) = src(AP_n) = \begin{cases} 2; & \text{untuk } n = 3 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil; & \text{untuk } n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti. Graf antiprisma AP_n adalah graf yang memiliki $V(AP_n) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$, $E(AP_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_n y_1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1 y_n\}$, $|V(AP_n)|$=$2n$ dan $|E(AP_n)|$=$4n$.

Untuk $n = 3$, maka graf AP_n memiliki $diam(AP_n) = 2$ berdasarkan Teorema

2.4.1 $rc(AP_n) \geq 2$, akan dibuktikan $rc(AP_n) \leq 2$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

$$c(e) = \begin{cases} 1, & e = x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq 2, e = x_3 x_1, e = y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq 2, e = y_3 y_1 \\ 2, & e = x_i y_i, e = x_{i+1} y_i, e = x_1 y_3. \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian tersebut jelas bahwa $c := E(AP_n) \rightarrow \{1, 2\}$, sehingga $rc(AP_n) = 2$.

Kemudian untuk $n \geq 4$, maka graf AP_n memiliki $diam(AP_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ berdasarkan Teorema 2.4.1 $rc(AP_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, akan dibuktikan $rc(AP_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ dengan pendefinisian pewarnaan sisi c sebagai berikut

$$c(e) = \begin{cases} i, & e = x_i x_{i+1}, e = x_i y_i; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ i, & e = y_i y_{i+1}, e = x_{i+1} y_i; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ i - \lceil \frac{n}{2} \rceil, & e = x_i x_{i+1}, e = x_i y_i; \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n - 1 \\ i - \lceil \frac{n}{2} \rceil, & e = y_i y_{i+1}, e = x_{i+1} y_i; \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n - 1 \\ n - \lceil \frac{n}{2} \rceil, & e = x_n x_1, e = y_n y_1, e = x_1 y_n. \end{cases}$$

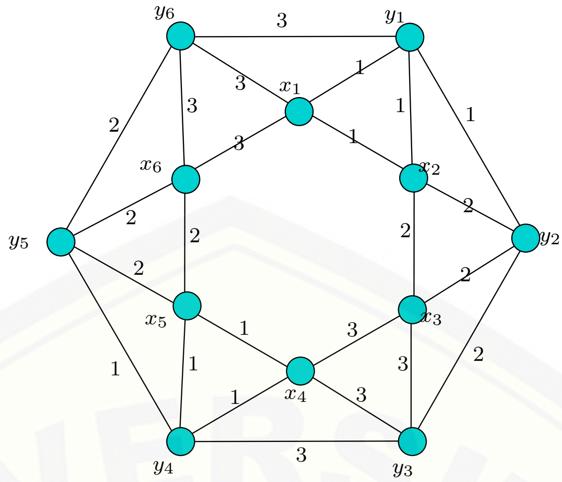
Berdasarkan pendefinisan tersebut maka jelas bahwa $c := E(AP_n) \rightarrow \{1, 2, ..., \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$, sehingga $rc(AP_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Selanjutnya akan dibuktian $rc(AP_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Untuk suatu kontradiksi diasumsikan $rc(AP_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$. Tanpa mengurangi dan mengubah pola generalisasi yang didapatkan, maka sisi $c(x_i - x_{i+1}) = i - 1$ akan terdapat persamaan warna dengan sisi $c(x_{i+1} y_i) = i - 1$. Ambil graf AP_6 meiliki *rainbow u-v path* x_4, x_3, y_2 akan tetapi terdapat warna sama yaitu $c(y_2 - x_3) = 2$ dan $c(x_3 - x_4) = 2$ sehingga tidak terdapat *rainbow u-v path*, maka hal ini terjadi kontradiksi. Sehingga $rc(AP_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Jadi, $rc(AP_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ untuk $n \geq 4$. □

Gambar berikut ilustrasi $rc(AP_6) = 3$.

Selanjutnya akan dibuktikan $\lceil \frac{n}{2} \rceil = rc(AP_n) \leq src(AP_n)$. Pertama-tama



Gambar 4.23 *Rainbow 3-coloring* pada graf AP_6

pandang graf AP_n dibangun oleh graf dasar yaitu graf lingkaran C_n dengan setiap dua buah titik pada graf lingkaran tersebut bertetangga dengan sebuah titik yang ada diluar dan titik-titik yang berada diluar graf lingakaran tersebut membentuk graf lingkaran C_n yang lain. Dengan $diam(AP_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ yang juga sama dengan $src(C_n)$ maka jelaslah bahwa setiap lintasan *geodesic* pada graf AP_n sudah diwarnai dengan *strong rainbow* $(\lceil \frac{n}{2} \rceil)-$*coloring* berdasarkan pendefinisian *rainbow* $(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$*-coloring*. Jadi, $rc(AP_n) \leq src(AP_n)$. $\square$

4.3 Pembahasan dan Analisis

4.3.1 Pembahasan Hasil Penelitian

Dari hasil penelitian tentang *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* dari graf khusus dan hasil operasinya, didapatkan 14 teorema baru, diantaranya dari graf khusus yaitu graf antiprisma AP_n, graf prisma $Pr_{(n,m)}$ dan graf hasil operasi meliputi *graf join, cartesian product, crown, product, graf shackle,* dan graf amalgamasi. Dari masing-masing graf yang diteliti seluruhnya didapatkan nilai *rainbow connection* dan *strong rainbow connection*, dengan rincian terdapat 6 buah graf yang mempunyai nilai $rc(G)$ yang sama dengan $src(G)$, dan sisanya 4 buah graf memiliki nilai $rc(G)$ yang berbeda dengan $src(G)$.

Pada operasi *join* $mP_n + K_1$ didapatkan nilai *rainbow connection number*

$rc(mP_n + K_1) = 3$. Dan nilai *strong rainbow connection number* $src(mP_n + K_1) = (\lceil \frac{n}{3} \rceil)m$.

Graf *join* $mP_n + K_1$ mempunyai graf dasar $P_n + K_1$ sebanyak m buah berbentuk graf kipas F_n pada operasi ini bisa juga dituliskan dengan $Amal(F_n, v = 1, m)$. Operasi *join* menghasilkan graf baru dengan $diam(G) = 2$ akan tetapi tidak ada sebuah jaminan yang mengakibatkan nilai $rc(G)$ akan sama dengan 2, akan tetapi $2 \leq rc(G)$, Pada operasi ini menghasilkan $rc(G)$¿2 yaitu 3.

Untuk nilai $src(mP_n + K_1)$ berbeda dengan $rc(mP_n + K_1)$ dikarenakan nilai graf $P_n + K_1$ atau F_n memiliki $rc(F_n) \leq src(F_n)$ sehingga berpengaruh pada lintasan *geodesic* yang terbentuk dan yang akan diwarnai dengan *strong rainbow coloring*, jadi pada operasi *join* ini dasarnya bergantung pada nilai $rc(F_n)$ dan $src(F_n)$, jika graf dasar pembangunnya mempunyai nilai $rc(G) \leq src(G)$ maka hasil operasi *join* akan menghasilkan $rc(G_1 + G_2) \leq src(G_1 + G_2)$ begitu pula jika graf dasar pembangunnya mempunyai nilai $rc(G) = src(G)$ maka hasil operasi *join* akan menghasilkan $rc(G_1 + G_2) = src(G_1 + G_2)$.

Pada operasi *cartesian product* $S_n \square P_m$ didapatkan nilai *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* adalah $n + m - 1$. Pada operasi *cartesian product* dengan pengoperasian yang telah dijabarkan pada bagian hasil penelitian di atas, maka nilai $rc(G_1 \square G_2) = rc(G_1) + rc(G_2)$ maka jelaslah bahwa graf $S_n \square P_m$ dengan graf dasar pembangunnya adalah graf bintang S_n dengan $rc(S_n) = src(S_n) = n$ dan juga $rc(P_m) = src(P_m) = m - 1$ maka dapat dikatakan bahwa $rc(S_n \square P_m) = rc(S_n) + rc(P_n) = n + m - 1$ dan juga $src(S_n \square P_m) = src(S_n) + src(P_n) = n + m - 1$.

Pada operasi *cartesian product* $W_n \square P_m$ didapatkan nilai *rainbow connection number*:

$$rc(W_n \square P_m) = \begin{cases} m; & \text{untuk}\, n = 3 \\ m + 1; & \text{untuk}\, 4 \leq n \leq 6 \\ m + 2; & \text{untuk}\, n \geq 7. \end{cases}$$

Dan nilai *strong rainbow connection number*:

$$src(W_n \Box P_m) = \begin{cases} rc(W_n \Box P_m); & \text{untuk}\, n = 3 \\ rc(W_n \Box P_m); & \text{untuk}\, 4 \leq n \leq 6 \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1; & \text{untuk}\, n \geq 7. \end{cases}$$

Pada operasi *cartesian product* $W_n \Box P_m$ dengan graf dasar adalah graf roda W_n yang memiliki $rc(W_n) \leq src(W_n)$ maka hasil operasi $W_n \Box P_m$ akan menghasilkan nilai $rc(W_n \Box P_m) \leq src(W_n \Box P_m)$ untuk nilai $n \geq 7$ yaitu $rc(W_n \Box P_m) = rc(W_n) + rc(P_m) = \lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1$ dan juga $src(W_n \Box P_m) = src(W_n) + src(P_m) = \lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1$. Akan tetapi untuk nilai $n = 3$ dan $4 \leq n \leq 6$ nilai $rc(W_n \Box P_m) = src(W_n \Box P_m)$ hal ini dikarenakan $rc(W_n) = src(W_n)$ untuk $n = 3$ dan $4 \leq n \leq 6$.

Pada operasi *crown product* $P_n \otimes C_m$ didapatkan nilai *rainbow connection number*:

$$rc(P_n \odot C_m) = \begin{cases} 2n - 1; & \text{untuk}\, m = 3 \\ 3n - 1; & \text{untuk}\, m \geq 4. \end{cases}$$

Dan nilai *strong rainbow connection number*:

$$src(P_n \odot C_m) = \begin{cases} rc(P_n \odot C_m); & \text{untuk}\, m = 3 \\ rc(P_n \odot C_m); & \text{untuk}\, 4 \leq m \leq 6 \\ n(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + (n - 1); & \text{untuk}\, m \geq 7. \end{cases}$$

Pada operasi *crown product* $P_n \otimes C_m$ dengan graf dasar adalah graf lintasan P_n dan graf lingkaran (C_m), dikarenakan titik-titik pada graf lingkaran C_m terhubung kesetiap titik pada graf lintasan P_n maka akan memiliki *pendant* berbentuk graf $C_m + K_1$ atau graf roda W_n dan *pendant* tersebut haruslah memiliki warna yang berbeda, dan juga berbeda dengan lintasan penghubung dari *pendant* satu ke *pendant* yang lain. Sebagaimana pada pembahasan sebelumnya yang memiliki graf dasar pembangun berupa graf roda W_n maka $rc(W_n) = src(W_n)$ untuk $n = 3$ dan $4 \leq n \leq 6$ serta $rc(W_n) \leq src(W_n)$ untuk $n \geq 7$. Maka jelaslah bahwa

$rc(P_n \otimes C_m) = src(P_n \otimes C_m)$ untuk $n = 3$ dan $4 \leq n \leq 6$ serta $rc(P_n \otimes C_m) \leq src(P_n \otimes C_m)$ untuk $n \geq 7$.

Pada operasi graf *shackle* yang didapatkan dari operasi *tensor product* dua buah graf didapatkan nilai *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number*:

$$rc(shack[G,n]) = src(shack[G,n]) = \begin{cases} 3n; & \text{untuk}\, G = P_2 \otimes W_3 \\ 4n; & \text{untuk}\, G = P_3 \otimes C_3. \end{cases}$$

Pada operasi ini diawali dengan melakukan *tensor product* pada dua graf khusus, kemudian dilakukan operasi *shackle*. Nilai $rc(shack[G,n]) = src(shack[G,n])$ pada operasi ini menghasilkan nilai yang sama hal ini dikarenakan nilai $rc(G) = src(G)$ baik untuk $G = P_2 \otimes W_3$ maupun $G = P_3 \otimes C_3$ yang masing-masing memiliki $rc(P_2 \otimes W_3) = src(P_2 \otimes W_3) = 3$ dan $rc(P_3 \otimes C_3) = src(P_3 \otimes C_3) = 4$ dikarenakan pada operasi *shackle* diekspan sebanyak n buah graf G yang membentuk belenggu maka tinggal mengalikan $rc(G)$ sebanyak graf G yang membentuk belenggu.

Pada operasi graf amalgamasi yang didapatkan dari operasi *join* didapatkan *rainbow connection number* $rc(Amal[(S_4+K_1), v = 1, n]) = 3$ dan *strong rainbow connection number* $src(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) = 2n$. Dan amalgamasi yang didapatkan dari operasi *cartesian* didapatkan *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection* $rc(Amal[(S_4 \square P_2), v = 1, n]) = src(Amal[(S_4 \square P_2), v = 1, n]) = 5n$

Pada operasi ini diawali dengan melakukan *join* dan *cartesian product* pada dua graf khusus, kemudian dilakukan operasi amalgamasi pada sebuah titik, jadi akan membentuk graf baru yang mempunyai tangkai sebanyak n buah yang berbetuk $S_4 + K_1$ dan $S_4 \square P_2$, kurang lebih sama dengan operasi *shackle* maka $rc(Amal[G, v = 1, n]) = src(Amal[G, v = 1, n])$ bergantung pada graf dasar pembangunnya karena $rc(S_4+K_1) = src(S_4+K_1) = 2$ dan $rc(S_4 \square P_2) = src(S_4 \square P_2) = 5$ maka warna pada setiap tangkai haruslah berbeda untuk memenuhi *rainbow u-v geodesic path*, jika tidak maka akan terdapat lintasan yang beri warna yang sama. Dikarenakan pada operasi amalgamasi diekspan sebanyak n buah graf G yang membentuk tangkai maka tinggal mengalikan $src(G)$ sebanyak graf G yang membentuk tangkai tersebut.

Pada graf prisma $Pr_{(m,n)}$ didapatkan nilai *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number*:

$$rc(Pr_{(n,m)}) = src(Pr_{(n,m)}) = \begin{cases} m; & \text{untuk}\, n = 3 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1); & \text{untuk}\, n \geq 4 \end{cases}$$

Graf prisma $Pr_{(m,n)}$ yang merupakan hasil dari *cartesian product* $C_n \Box P_n$, sebagaimana yang telah diuraikan pada pembahasan di atas terkait *cartesian* jelaslah bahwa $rc(Pr_{(m,n)}) = src(Pr_{(m,n)})$ yaitu didapatkan dari $rc(C_n) + rc(P_m) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + m - 1$ dan juga $src(C_n) + src(P_m) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + m - 1$.

Kemudian untuk graf antiprisma AP_n didapatkan nilai *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number*:

$$rc(AP_n) = src(AP_n) = \begin{cases} 2; & \text{untuk}\, n = 3 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil; & \text{untuk}\, n \geq 4 \end{cases}$$

Graf dasar pembangun graf antiprisma adalah graf lingkaran C_n dengan setiap dua buah titik pada graf lingkaran tersebut bertetangga dengan sebuah titik yang ada diluar dan titik-titik yang berada diluar graf lingakaran tersebut membentuk graf lingkaran C_n yang lain. Dengan lintasan-lintasan yang menghubungkan kedua linkaran memiliki warna yang tidak melebihi $rc(C_n)$ maka jelas lah $rc(AP_n) = src(AP_n) = rc(C_n) = src(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ untuk $n \geq 4$ sedangkan untuk $n = 3$ graf dasar berupa $C_3 = K_3$ dengan $rc(C_3) = rc(K_3) = src(C_3) = src(K_3) = 1$ dan lintasan penghubung kedua graf C_3 memiliki warna berbeda yaitu 2.

4.3.2 Analisis Hal Baru dari Penelitian

Pada bagian ini akan dikaji analisis terkait beberapa hal baru yang lebih general dari nilai *rainbow connection number* yang berhubungan dengan operasi dua buah graf.

1. Misalkan G_1 dan G_2 adalah graf terhubung nontrivial, maka nilai $rc(G_1 + G_2) = 2$ dengan G_1, G_2 bukanlah graf lengkap K_n dan graf *disjoin union.*

   Operasi graf *join* $G_1 + G_2$ dalam pengoperasianya diperoleh dengan cara menghubungkan setiap titik pada G_1 ke titik-titik pada G_2 dengan $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup uv|e \in V(G_1), v \in V(G_2)$. Graf $G_1 + G_2$ hasil operasi *join* akan menghasilkan $diam(G_1 + G_2) = 2$, misal $d(u - v) \in G_1 > 2$ dikarenakan ada titik pada G_2 yang bertetangga ke seluruh titik-titik pada G_1 maka $d(u - v) = 2$ karena melewati sebuah titik penghubung pada G_2. Sehingga nilai $rc(G_1 + G_2) = 2$ sebagai contoh $rc(P_n + C_n)$, $rc(C_n + S_n)$, $rc(P_n + W_n)$, $rc(S_n + W_n)$, hal ini juga berlaku untuk sebarang graf G. Akan tetapi $rc(G_1 + G_2) = 3$ untuk $C_n + K_1$ yang membentuk graf roda W_n dan $P_n + K_1$ yang membentuk graf kipas F_n, dengan $n \geq 7$ $rc(C_n + K_1) = rc(P_n + K_1) = 3$ dan juga pada hasil penelitian pada tugas akhir ini untuk $rc(mP_n + K_1) = 3$ untuk $n \geq 4$.

2. Misalkan G adalah graf terhubung nontrivial maka nilai $rc(P_n \odot G) = n[rc(G + v)] + (n - 1)$.

   Operasi *crown product* $P_n \odot G$ didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G sebanyak $|V(P_n)|$ kemudian menghubungkan setiap titik duplikat dari graf G ke setiap titik pada P_n yang bersesuaian. Sehingga jika diambil satu duplikat dari G dan semua titik pada G terhubung ke titik pertama graf P_n maka akan terbentuk graf *join* $(G + v \in P_n)$ operasi *join* ini terbentuk sebanyak $|V(P_n)|$ dengan dihubungkan oleh lintasan dari titik $v_i - v_{i+1} \in P_n$. Jika dipandang graf utama dari $P_n \odot G$ adalah graf lintasan P_n maka terdapat n buah *pendant* yang berbentuk $(G + v)$ dengan demikian setiap *pendant* harus lah memiliki warna yang berbeda dan berbeda pula dengan lintasan $v_i - v_{i+1}$ yang menghubungkan setiap *pendant*. Berdasarkan analisis tersebut maka,
   $rc(P_n \odot G) = |V(P_n)|[rc(G + v)] + rc(P_n)$
   $= n[rc(G + v)] + (n - 1)$

Berdasarkan analisis pada poin pertama, maka
$rc(P_n \odot G) = |V(P_n)|[rc(G+v)] + rc(P_n)$
$= n[rc(G+v)] + (n-1)$
$= n.2 + (n-1)$
$= 3n-1$

3. Misalkan G adalah graf terhubung nontrivial maka nilai $rc(shack[G,n]) = n[rc(G)]$.

   Operasi graf belenggu *shackle* yang dinotasikan $shack(G,n)$ merupakan graf yang dibangun dari graf terhubung nontrivial dan order graf $(G_1, G_2, ..., G_k)$ sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq i, j \leq k$ dengan $|i-j| \geq 2$, G_i dan G_j tidak memiliki titik umum, dan untuk setiap $1 \leq i \leq k-1$, G_i dan $G_i + 1$ tepat satu titik yang sama, disebut *vertex linkage* dimana $k-1$ *linkage* titik semua berbeda. Sehingga nilai $rc(shack[G,n])$ bergantung pada nilai $rc(G)$ graf pembangun, dengan demikian warna pada graf G harus lah berbeda dengan warna graf G duplikasi samapi ke n, jadi berdasarkan analisis ini $rc(shack[G,n]) = n[rc(G)]$.

Berdasarkan analisis-analisis tersebut maka penulis dapat menarik suatu dugaan kuat terkait hal tersebut yang disajikan dalam *conjecture* berikut.

Dugaan 4.3.1. *Misalkan G_1 dan G_2 adalah graf terhubung nontrivial, maka nilai $rc(G_1+G_2) = 2$ dengan G_1, G_2 bukanlah graf lengkap K_n dan graf disjoin union.*

Bukti. *Join* graf $G_1 + G_2$ berdasarkan Definisi 2.2.1 mengakibatkan setiap $u, v \in G_1$ akan saling terhubung ke $u', v' \in G_2$ sehingga graf $G_1 + G_2$ akan memiliki $diam(G_1 + G_2) = 2$.

Kasus 1. $G_1, G_2 \in \{P_n, C_n, W_n, S_n, T_n\}$ dan beberapa graf *well known*. Pada kasus ini G_1+G_2 menghasilkan $diam(G_1+G_2) = 2$ bedasarkan Teorema 2.4.1 maka $rc(G_1+G_2) \geq 2$, akan dikonstruksi *rainbow 2-coloring* $c := E(G_1+G_2) \rightarrow \{1,2\}$, sehingga $rc(G_1+G_2) \leq 2$ maka jelaslah bahwa $rc(G_1+G_2) = 2$.

Kasus 2. $G_1, G_2 \in \{mP_n, mC_n, mW_n, mS_n, mT_n\}$ dan beberapa graf *well known* sebanyak m buah. Pada kasus ini $G_1 + G_2$ juga menghasilkan $diam(G_1 + G_2) = 2$

bedasarkan Teorema 2.4.1 maka $rc(G_1 + G_2) \geq 2$, akan tetapi pada kasus ini menghasilkan $rc(G_1 + G_2) \geq 3$ dikarenakan jika $rc(G_1 + G_2) = 2$ maka akan terdapat sisi yag diwarnai sama, sebagai contoh pada penelitian ini menghailkan $rc(mP_n + K_1) = 3$, contoh sederhana lainnya graf $C_n + K_1$ dan $P_n + K_1$ yang menghasilkan $rc(G_1 + G_2) = 3$ untuk nilai $n \geq 7$. Sehingga akan dikonstruksi *rainbow 3-coloring* $c := E(G_1 + G_2) \rightarrow \{1, 2, 3\}$, sehingga $rc(G_1 + G_2) \leq 3$ maka jelaslah bahwa $rc(G_1 + G_2) = 3$. □

Dugaan 4.3.2. *Misalkan G adalah graf terhubung nontrivial maka nilai $rc(P_n \odot G) = n[rc(G + v)] + (n - 1)$.*

Bukti. Operasi *crown* $P_n \odot G$ berdasarkan Definisi 2.2.5 akan memnghasilkan graf lintasan P_n sebagai graf utama beserta graf $G + v$ dengan $v \in P_n$ dimana graf $G + v$ akan menjadi *pendant* bagi graf P_n. Karena setiap *pendant* harus memiliki warna yang berbeda dengan graf utama dan *pendant* lainnya, maka $rc(P_n \odot G)$ sama dengan penjumlahan nilai $rc(P_n)$ dengan seluruh $rc(pendant)$ dikarenakan *pendant* dibentuk dari graf $G + v$ dengan $v \in P_n$ maka $rc(pendant) = rc(G + v)$ dan sejumlah titik pada P_n yaitu n maka $rc(pendant) = n.rc(G + v)$. Jadi jelas bahwa $rc(P_n \odot G) = rc(pendant) + rc(P_n) = n[rc(G + v)] + (n - 1)$. □

Dugaan 4.3.3. *Misalkan G adalah graf terhubung nontrivial maka nilai $rc(shack\text{-}[G, n]) = n[rc(G)]$.*

Bukti. Operasi *shackle* berdasarkan Definisi 2.2.6 akan menghasilkan graf G sebanyak n buah yang bergandengan pada satu titik penghubung, maka nilai $rc(shack[G, n])$ bergantung pada nilai $rc(G)$. Jika graf G memiliki $diam(G) = r$ bedasarkan Teorema 2.4.1 maka haruslah $rc(G) \geq r$, sehinggu untuk kondisi graf tertentu yang tidak memuat *pendant* dan graf pohon T_n maka jelaslah bahwa $r \leq rc(G) \leq r + 1$ hal ini berdasarkan Teorema 2.4.7, sehingga pada graf $rc(shack[G, n])$ memiliki himpunan graf $\{G_1, G_2, ..., G_n\}$ dengan $G_1 = G_2 = ... = G_n$ dan jika $rc(G_1) = r$ maka $rc(G_1) = rc(G_2) = ... = rc(G_n)$, agar terbentuk *rainbow u-v path* haruslah setiap graf $\{G_1, G_2, ..., G_n\}$ memiliki warna yang berbeda dan menggunakan warna yang belum digunakan pada graf G sebelumnya. Jadi rc $rc(shack[G, n]) = rc(G_1) + rc(G_2) + ... + rc(G_)$ sama dengan

$rc(shack[G,n]) = r + r + r ... + r$ atau bisa dituliskan $rc(shack[G,n]) = n.r$ secara umum menjadi $rc(shack[G,n]) = n[rc(G)]$. $\square$

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan analisis pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada graf khusus dan hasil operasinya didapatkan 13 teorema baru, diantaranya adalah sebagai berikut:

1. $rc(mP_n + K_1) = 3$

2. $src(mP_n + K_1) = (\lceil \frac{n}{3} \rceil)m$

3. $rc(S_n \Box P_m) = src(S_n \Box P_m) = n + m - 1.$

4. $$rc(W_n \Box P_m) = \begin{cases} m; & \text{untuk}\, n = 3 \\ m+1; & \text{untuk}\, 4 \le n \le 6 \\ m+2; & \text{untuk}\, n \ge 7. \end{cases}$$

5. $$src(W_n \Box P_m) = \begin{cases} rc(W_n \Box P_m); & \text{untuk}\, n = 3 \\ rc(W_n \Box P_m); & \text{untuk}\, 4 \le n \le 6 \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + m - 1; & \text{untuk}\, n \ge 7. \end{cases}$$

6. $$rc(P_n \odot C_m) = \begin{cases} 2n-1; & \text{untuk}\, m = 3 \\ 3n-1; & \text{untuk}\, m \ge 4. \end{cases}$$

7. $$src(P_n \odot C_m) = \begin{cases} rc(P_n \odot C_m); & \text{untuk}\, m = 3 \\ rc(P_n \odot C_m); & \text{untuk}\, 4 \le m \le 6 \\ n(\lceil \frac{m}{3} \rceil) + (n-1); & \text{untuk}\, m \ge 7. \end{cases}$$

8. $rc(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) = src(shack[(P_2 \otimes W_3), n]) = 3n.$

9. $rc(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) = src(shack[(P_3 \otimes C_3), n]) = 4n.$

10. $rc(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) = 3.$

11. $src(Amal[(S_4 + K_1), v = 1, n]) = 2n.$

12. $rc(Amal[(S_4 \Box P_2), v = 1, n]) = src(Amal[(S_4 \Box P_2), v = 1,]) = 5n.$

13. $$rc(Pr_{(n,m)}) = src(Pr_{(n,m)}) = \begin{cases} m; & \text{untuk}\, n = 3 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + (m-1); & \text{untuk}\, n \geq 4 \end{cases}$$

14. $$rc(AP_n) = src(AP_n) = \begin{cases} 2; & \text{untuk}\, n = 3 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil; & \text{untuk}\, n \geq 4 \end{cases}$$

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada graf khusus dan hasil operasinya, permasalahan terbuka masih menunggu bagi pembaca yang berminat meneliti di bidang ini, yaitu diantaranya bagaimanakah karakteristik suatu graf yang memiliki $rc(G) = src(G)$. Kemudian untuk operasi *tensor product* masih terbuka untuk dikaji lebih dalam bagaimana nilai $rc(G_1 \otimes G_2)$.

DAFTAR PUSTAKA

Alfarisi, Ridho., Dafik, dan Fatahillah, Arif. 2015. *The Rainbow Connection Number of Special Graphs*. Jurnal: Universitas Jember

Basavaraju, M., L. Sunil Chandran, D. Rajendraprasad, dan A. Ramaswamy. 2011. *Rainbow Connection Number of Graph Power and Graph Products*. Jurnal: Indian Institute of Science, Bangalore -560012, India.

Borgatti, S.P. dan Everett, M.G. 2005. *A Graph-theoretic Perspective on Centrality*. Jurnal: Elsevier B.V. Boston College, Chestnut Hill, MA 01451, USA. SON 499 1-19

Chartrand, G., G.L.Johns, K.A. McKeon, dan P. Zhang. 2008. *Rainbow Connection in Graphs*. Jurnal:*Math. Bohem.*, 133, No. 2, 85–98.

Chakraborty, S., F. Eldar, M. Arie dan Y. Raphael. 2009. *Hardness and algorithms for rainbow connection*. Jurnal: Journal of Combinatorial Optimization, 1-18.

Carlson, K. 2006. *Generalized Books and C_m-snakes Are Prime Graphs*. Jurnal: Ars Combinatoria 80, 215-221.

Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graph*. (Tesis) Australia: University of Ballarat.

Estetikasari, Dewi dan Syafrizal Sy. 2013. *On the Rainbow Connection for Some Corona Graphs*. Jurnal: Applied Mathematical Sciences, Vol. 7, no. 100, 4975–4980.

Figueroa-Conteno, R.M.,Ichisima, R.,Muntaner-Batle, F.A. 2002. *Magical Coronation of Graphs**. Jurnal: Australasian Journal of Combinatorics 26, 199–208

Gallian, Joseph A. 1997. *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. University of Minnesota.

Garvan, Frank. 2002. *The Maple Book*. Florida: A CRC Press Company.

Harju, Tero. 2011. *Graph Theory*. Finlandia: University of Turku .

Harrary, F. 1994. *Graph Theory*. Addison: Wesley.

Klavzar, Sandi. 2012. *On The Rainbow Connection of Cartesian Products and Their Subgraphs*. Jurnal: Discussiones Mathematicae Graph Theory 32, 783-793.

L. Sunil Chandran, Anita Das, D. Rajendraprasad, dan N.M. Varma. 2010. *Rainbow Connection Number and Connected Dominating Sets*. Jurnal: National Institute of Technology, Calicut - 673 601, India.

Maryati, T. K., Salman, A. N. M., Baskoro, E. T., Ryan, J., dan Miller, M. 2010. *On H-supermagic Labelings for Certain Shackles and Amalgamations of a Connected Graph*. Jurnal: Utilitas Mathematica 83, 333-342.

Moradi, Sirous. 2012. *A Note on Tensor Product of Graphs*. Jurnal: Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics Vol. 7, No. 1, 73–81.

Schiermeyer, Ingo. 2011. *On Minimally Rainbow k-Connected Graphs*. Jurnal: Elsevier B.V. All rights reserved.

Syafrizal Sy., Medika, Gema., dan Yulianti, Lyra. 2013. *The Rainbow Connection of Fan and Sun.* Jurnal: Applied Mathematical Sciences, Vol. 7, no. 64, 3155 - 3159.

X. Li dan Y. Sun. 2012. *Rainbow Connection of Graphs.* New York: Springer Briefs in Mathematics