DIMENSI PARTISI DARI GRAF KHUSUS DAN OPERASINYA

TESIS

Oleh

ILHAM SAIFUDIN,S.Pd
NIM 131820101004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2015

DIMENSI PARTISI DARI GRAF KHUSUS DAN OPERASINYA

TESIS

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S2)
dan mencapai gelar Magister Sains

Oleh

ILHAM SAIFUDIN,S.Pd
NIM 131820101004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2015

MOTO

وَمَا جَعَلَهُ ٱللَّهُ إِلَّا بُشْرَىٰ لَكُمْ وَلِتَطْمَئِنَّ قُلُوبُكُم بِهِۦ ۗ وَمَا ٱلنَّصْرُ إِلَّا مِنْ
عِندِ ٱللَّهِ ٱلْعَزِيزِ ٱلْحَكِيمِ ﴿١٢٦﴾

"Dan Allah tidak menjadikan pemberian bala bantuan itu melainkan sebagai kabar gembira bagi kemenanganmu, dan agar tentram hatimu karenanya. Dan kemenanganmu itu hanyalah dari Allah yang Maha perkasa lagi Maha bijaksana"

(QS. Ali-Imran 3:126)

"Tetes peluh yang berjatuhan akan menjadi saksi atas usaha yang diperoleh, karena setiap usaha takkan pernah membohongi apa yang kita raih dikemudian hari"

(Ilham Saifudin,S.Pd/Peneliti)

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ilham Saifudin,S.Pd

NIM : 131820101004

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: ”DIMENSI PARTISI DARI GRAF KHUSUS DAN OPERASINYA” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2015

Yang menyatakan,

Ilham Saifudin,S.Pd

NIM. 131820101004

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "DIMENSI PARTISI DARI GRAF KHUSUS DAN OPERASINYA" telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan pada:

hari : ...

tanggal : ...

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua,	Sekretaris,
Prof. Drs.Dafik, M.Sc., Ph.D	Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si
NIP. 19680802 199303 100 4	NIP. 19690828 199802 1 001
Anggota I,	Anggota II,
Prof. Drs.Slamin M.CompSc.,Ph.D	Prof. Drs.I Made Tirta M.Sc., Ph.D
NIP. 19670420 199201 1 001	NIP. 19591220 198503 1 002

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Prof. Drs. Kusno, DEA.,Ph.D

NIP. 19610108 198602 1 001

RINGKASAN

Dimensi partisi dari graf khusus dan operasinya; Ilham Saifudin, S.Pd, 131820101004; 2015: 52 halaman; Jurusan Matematika; Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Graf adalah salah satu pokok bahasan Matematika Diskrit yang telah lama dikenal dan banyak diaplikasikan pada berbagai bidang. Dalam merepresentasikan visual dari suatu graf yaitu dengan menyatakan objek dengan simpul, noktah, bulatan, titik, atau *vertex*, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau *edge*. Teori graf dapat digunakan untuk menyelesaikan beberapa permasalahan suatu bidang. Sebagai contoh, dalam permasalahan *deadlock* atau proses dalam sistem operasi yang tidak berjalan. Salah satu topik yang menarik pada teori graf adalah masalah dimensi partisi *(partition dimension)*. Dimensi partisi sudah ada sejak tahun 1976 dengan jurnal *On the metric dimension of the graph* (Harary,et.al, 1976). Diantaranya dalam penelitian sebelumnya tentang dimensi partisi pada graf roda W_n oleh Tomaseu, I, Javaid, I, dan Slamin.

Dalam menentukan nilai dimensi partisi dapat dilakukan dengan cara menentukan dimensi metrik terlebih dahulu. Secara umumnya dimensi metrik dari graf G atau dinotasikan $dim(G)$ adalah menentukan banyaknya titik pada basis graf G, dimana basis merupakan himpunan pembeda yang mempunyai kardinalitas minimal. Sedangkan dimensi partisi dari graf G adalah menentukan nilai k minimum untuk k-partisi pembeda dari $V(G)$. Untuk setiap vertek v dari graf terhubung dan sebuah subset S dari $V(G)$, jarak antara v dan S adalah $d(v,S)$=min $\{d(v,x)|x \in S\}$. Beberapa keterangan di atas yang menerangkan konsep dimensi metrik dan dimensi partisi. Graf yang digunakan dalam penelitian fokus pada beberapa graf khusus dan operasinya, diantaranya yaitu: graf tangga L_n, graf shackle C_4, v, n, komplemen dari graf $\overline{L_n}$, graf komposisi $P_n[P_1]$, graf tangga tiga-siklus TCL_n, dan graf tangga permata Dl_n.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode pendeteksian pola *(pattern recognition)* dan deduktif aksiomatik. Pada pendektesian pola memiliki tujuan untuk menentukan nilai dimensi partisi (pd) dari sebuah kontruksi

yang diawali mencari dimensi metrik (dim) dari masing-masing graf khusus dan operasinya.

Dari hasil penelitian mengenai nilai dimensi metrik (dim) dan dimensi partisi (pd) pada graf khusus dan operasinya diperoleh sebagai berikut:

1. Nilai dimensi metrik (dim) dari graf khusus dan operasinya diantaranya: dimensi metrik graf tangga L_n dengan $n \geq 2$ adalah 2, dimensi metrik graf shackle C_4, v, n dengan $n \geq 3$ adalah k, dimensi metrik graf komplemen $\overline{L_n}$ dengan $n \geq 2$ adalah 2, dimensi metrik graf komposisi $P_n[P_1]$ dengan $n \geq 3$ adalah k, dimensi metrik graf tangga tiga-siklus TCL_n dengan $n \geq 3$ adalah k, dimensi metrik graf tangga permata Dl_n dengan $n \geq 2$ adalah $\lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 2$. Sedangkan nilai dimensi partisi (pd) dari graf khusus dan operasinya diantaranya: dimensi partisi graf tangga L_n dengan $n \geq 2$ adalah 3, dimensi partisi graf shackle C_4, v, n dengan $n \geq 3$ adalah $k+1$, dimensi partisi graf komplemen $\overline{L_n}$ dengan $n \geq 2$ adalah 3, dimensi partisi graf komposisi $P_n[P_1]$ dengan $n \geq 3$ adalah $k+1$, dimensi partisi graf tangga tiga-siklus TCL_n dengan $n \geq 3$ adalah $k+1$, dimensi partisi graf tangga permata Dl_n dengan $n \geq 2$ adalah $\lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1$.

2. Nilai dimensi partisi (pd) memiliki kesamaan dari graf khusus dan operasinya akibat dari penambahan sisi pada graf khusus dan juga hasil operasinya, kecuali pada graf tangga permata Dl_n. Berikut kesamaan nilai dimensi partisi yang diperoleh:
   $pd(L_n) = pd(\overline{L_n}) = 3$
   $pd(C_4, v, n) = pd(P_n[P_1]) = pd(TCL_n) = k+1$
   $pd(Dl_n) = \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1$

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan konstribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru dalam bidang teori graf dan bisa digunakan sebagai acuan oleh peneliti lain untuk meneliti tentang dimensi metrik (dim) dan dimensi partisi (pd) untuk graf lainnya.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

G	=	Graf G
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
v_n	=	Titik ke-n pada suatu graf
e_n	=	Sisi ke-n dari suatu graf
$V(G)$	=	Himpunan titik pada graf G dan disebut sebagai *order*
$E(G)$	=	Himpunan sisi pada graf G dan disebut sebagai *size*
U_n	=	Suku ke-n barisan aritmetika
W	=	Himpunan pembeda dari graf G
Π	=	partisi pembeda dari graf G
$dim(g)$	=	Dimensi metrik dari graf G
$pd(g)$	=	Dimensi partisi dari graf G
L_n	=	Lambang untuk graf tangga
C_4, v, n	=	Lambang untuk graf shackle
$\overline{L_n}$	=	Lambang untuk graf komplemen
$P_n[P_1]$	=	Lambang untuk graf komposisi
TCL_n	=	Lambang untuk graf tangga tiga-siklus
Dl_n	=	Lambang untuk graf tangga permata
x_i	=	Titik ke-i pada graf G
y_i	=	Titik ke-i pada graf G
z_{i+1}	=	Titik ke-i+1 pada bagian atas graf G
$d(v, W)$	=	Jarak antara titik v terhadap W
$d(v, S)$	=	Jarak antara titik v terhadap S
$r(v\|W)$	=	Representasi titik v terhadap W
$r(v\|\Pi)$	=	Representasi titik v terhadap Π

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Graf adalah salah satu pokok bahasan Matematika Diskrit yang telah lama dikenal dan banyak diaplikasikan pada berbagai bidang. Dalam merepresentasikan visual dari suatu graf yaitu dengan menyatakan objek dengan simpul, noktah, bulatan, titik, atau *vertex*, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau *edge*. Secara umum, graf adalah pasangan himpunan (V, E) di mana V adalah himpunan tidak kosong dari simpulsimpul (*vertex* atau *node*) dengan $V = v_1, v_2, v_3, ..., v_n$; dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul pada graf tersebut yaitu $E = e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ atau $E = (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), ..., (v_{n-1}, v_n)$. Dimana $e = (v_i, v_j)$ yang artinya sisi yang menghubungkan simpul v_i dan v_j.

Teori graf dapat digunakan untuk menyelesaikan beberapa permasalahan suatu bidang. Sebagai contoh, dalam pembuatan game robotik, graf memegang peranan penting terutama pada penggunaan untuk navigasi, dimana robot harus menerjemahkan titik sebagai lokasi dan jarak sebagai sisi. Lalu dalam masalah lain yaitu menyelesaikan permasalahan *deadlock* atau proses dalam sistem operasi yang tidak berjalan karena tidak ada komunikasi lagi dalam proses tersebut, digunakan graf sebagai visualisasi untuk pendeteksian. Demikian, beberapa contoh dari sekian banyak aplikasi graph yang mencangkup disiplin ilmu yang luas.

Salah satu topik yang menarik pada teori graf adalah masalah dimensi partisi *(partition dimension)*. Dimensi partisi sudah ada sejak tahun 1976 dengan jurnal *On the metric dimension of the graph* (Harary,et.al, 1976). Bidang ini memiliki sejarah menarik dan teori-teorinya telah menimbulkan banyak perdebatan pada kalangan matematikawan sehingga sampai saat ini dimensi partisi terus dipelajari dan dikembangkan, diantaranya dalam penelitian sebelumnya tentang dimensi partisi pada graf roda W_n oleh Tomaseu, I, Javaid, I, dan Slamin. Dimensi partisi pada graf roda merupakan $pd(C_n)$ dari graph G terhubung yang dipengaruhi oleh penambahan vertek tunggal. Dimensi partisi W_n untuk $n \geq 3$ maka $pd(C_n) = 3$ ketika $pd(W_3) = 4$ seperti $pd(W_n) = 3$ ketika $4 \leq n \leq 7$ dan $pd(W_n) = 4$ ketika $8 \leq n \leq 19$.

Dalam menentukan nilai dimensi partisi dapat dilakukan dengan cara menentukan dimensi metrik terlebih dahulu. Secara umumnya dimensi metrik dari graf G atau dinotasikan $dim(G)$ adalah menentukan banyaknya titik pada basis graf G, dimana basis merupakan himpunan pembeda yang mempunyai kardinalitas minimal. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$ dari himpunan titik di graf terhubung G dan sebuah titik v di G, k-vektor (k-tuple terurut) $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), ..., (v, w_k))$. Sedangkan dimensi partisi dari graf G adalah menentukan nilai k minimum untuk k-partisi pembeda dari $V(G)$. Untuk setiap vertek v dari graf terhubung dan sebuah subset S dari $V(G)$, jarak antara v dan S adalah $d(v, S)$=min $\{d(v, x)|x \in S\}$. Untuk setiap pasangan k-partisi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_K\}$ dari $V(G)$ dan setiap vertek v dari G merupakan representasi v pada Π didefinisikan sebagai k-vektor $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), ..., d(v, S_k))$. Partisi Π disebut partisi pembeda, jika k-vektor $r(v|\Pi)$, $v \epsilon V(G)$ adalah berbeda. Kardinalitas minimal dari partisi pembeda $V(G)$ adalah dimensi partisi atau dapat dinotasikan $pd(G)$. Graf yang digunakan dalam penelitian fokus pada beberapa graf khusus dan operasinya, diantaranya yaitu: graf tangga L_n, graf shackle (C_4, v, n), komplemen dari graf $\overline{L_n}$, graf komposisi $P_n[P_1]$, graf tangga tiga-siklus TCL_n, dan graf tangga permata Dl_n. Beberapa keterangan di atas yang melatar belakangi penulis untuk melakukan penelitian dengan judul "Dimensi Partisi dari Graf Khusus dan Operasinya".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. berapa nilai dimensi metrik dan dimensi partisi graf-graf khusus?
2. berapa nilai dimensi metrik dan dimensi partisi shackle dari graf?
3. berapa nilai dimensi metrik dan dimensi partisi komplemen dari graf?

4. berapa nilai dimensi metrik dan dimensi partisi komposisi dari graf?

5. bagaimanakah analisis dari nilai dimensi metrik dan dimensi partisi graf khusus dan operasinya?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi pada beberapa graf khusus diantaranya: graf tangga L_n, graf tangga tiga-siklus TCL_n, dan graf tangga permata Dl_n. Sedangkan graf hasil operasinya yaitu: graf shackle (C_4, v, n), komplemen dari graf $\overline{L_n}$, graf komposisi $P_n[P_1]$.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. untuk mengetahui nilai dimensi metrik dan dimensi partisi graf-graf khusus;
2. untuk mengetahui nilai dimensi metrik dan dimensi partisi shackle dari graf;
3. untuk mengetahui nilai dimensi metrik dan dimensi komplemen dari graf;
4. untuk mengetahui nilai dimensi metrik dan dimensi komposisi dari graf;
5. untuk mengetahui analisis dari nilai dimensi metrik dan dimensi partisi graf khusus dan operasinya.

1.5 Hal Baru Dalam Penelitian

Hal-hal baru yang belum ada pada penelitian sebelumnya adalah jenis graf yang akan digunakan yaitu: graf tangga L_n, graf shackle (C_4, v, n), komplemen dari graf $\overline{L_n}$, graf komposisi $P_n[P_1]$, graf tangga tiga-siklus TCL_n, dan graf tangga permata Dl_n.

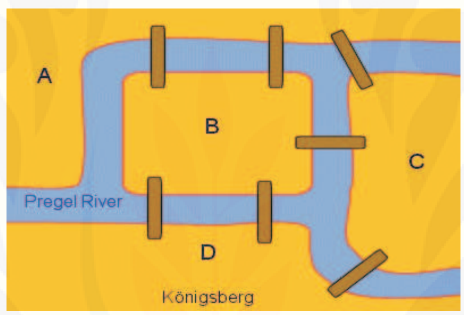
1.6 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

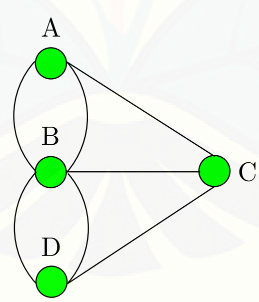
1. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dimensi partisi pada graf khusus beserta operasinya;
2. memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti dimensi partisi pada graf khusus beserta operasinya dengan jenis graf yang lain;
3. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah dimensi partisi.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Sebelum membahas terminologi dasar graf, maka akan dijelaskan sejarah dari teori graf tersebut. Teori graf muncul pertama kali pada tahun 1736, yakni ketika Euler mencoba untuk mencari solusi dari permasalahan yang sangat terkenal yaitu Jembatan Königsberg dan apabila jembatan Königsberg direpresentasikan kedalam graf, maka representasi dari jembatan Königsberg sebagaimana tersaji pada Gambar 2.1 dan Gambar 2.2. Sejak diperkenalkan hingga saat ini teori graf banyak diterapkan dalam berbagai disiplin ilmu maupun kehidupan sehari-hari, misalnya perancangan jadwal, pencarian lintasan terpendek, persoalan tukang pos dan lain-lain.



Gambar 2.1 Jembatan Königsberg (www.infovis.net)



Gambar 2.2 Representasi graf pada permasalahan jembatan Königsberg

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), yang dalam hal ini V adalah himpunan tak kosong dari semua titik ($vertex$)=$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dan E adalah himpunan sisi ($edges$) yang menghubungkan sepasang titik =$\{e_1, e_2,$ $..., e_n\}$. Dalam sebuah graf, harus ada ($vertex$) minimal satu sedangkan sisi ($edge$) tidak ada jumlah minimal sehingga boleh kosong. Jadi satu titik ($vertex$) saja sudah dapat dikatakan sebagai graf.

2.1 Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan hingga tak kosong $V(G)$ yang elemen-elemennya disebut titik dan himpunan (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen e dalam $E(G)$ adalah sebuah pasangan tak berurutan dari titik-titik di $V(G)$. $V(G)$ disebut himpunan titik dari G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G. Misal u dan v adalah titik-titik G dan sisi $e = u, v$ (sering ditulis $e = uv$) adalah sisi dari G. Kita katakan, sisi e menghubungkan titik-titik u dan v dimana titik u dan v berhubungan langsung *(adjacent)* di G, u dan v adalah titik-titik akhir dari sisi e, sisi e terkait *(incident)* dengan titik u atau v. Sejumlah sisi yang menempel pada sebuah titik disebut derajat titik *(degree)*(Munir, 2010).

Sebuah graf G dapat direpresentasikan dalam bentuk diagram, dimana setiap titik G digambarkan dengan sebuah noktah dan setiap sisi yang menghubungkan dua titik di G digambarkan dengan sebuah kurva sederhana (ruas garis) dengan titik-titik akhir di kedua titik tersebut. Sebuah sisi dalam graf G yang menghubungkan sebuah titik v dengan dirinya sendiri disebut gelung *(loop)*. Dalam suatu graf, apabila terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi-sisi tersebut disebut sisi rangkap *(multiple edges)*.

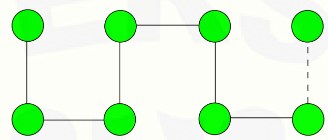
Jalan *(walk)* W dengan panjang n dari titik a ke b pada graf G dinotasikan dengan $v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3...v_{n-1}e_nv_n, (n \in N)$ yang terdiri dari titik dan sisi di G secara bergantian yang diawali dan diakhiri dengan titik, sedemikian hingga (v_i, v_{i+1}) adalah sisi di G untuk setiap $i = 0, 1, 2, ..., n-1$. Jalan ini menghubungkan titik v_0 dan v_n, dan dapat juga dinotasikan sebagai $v_0, v_1, ..., v_n$. Jalan dikatakan tertutup *(closed walk)*, jika $v_0 = v_n$ dan terbuka jika $v_0 = v_n$ (Slamin, 2009).

2.2 Graf-graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Berikut ini adalah beberapa contoh graf khusus.

2.2.1 Graf Lintasan

Graf lintasan adalah graf sederhana yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n dengan $n \geq 2$. Contoh dari graf lintasan bisa dilihat pada Gambar 2.3.



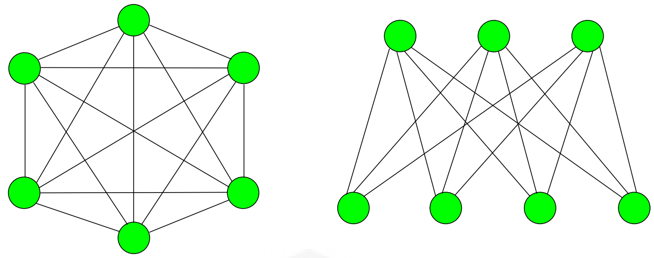
Gambar 2.3 Graf lintasan P_n

2.2.2 Graf Lengkap

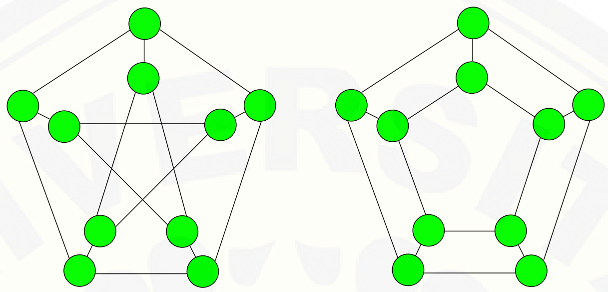
Suatu graf disebut graf lengkap, jika setiap dua titiknya bertetangga. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n. Graf $G(V, E)$ disebut *bipartit* jika $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan V_1 dan V_2 sedemikian sehingga jika $uv \in E(G)$, maka $\{u, v\} \nsubseteq V_i$ untuk setiap $i = 1, 2$. Suatu graf *bipartit* disebut *bipartit* lengkap, dinotasikan $K_{m,n}$ dengan $m = |V_1|$ dan $n = |V_2|$, jika setiap titik di V_1 bertetangga dengan setiap titik di V_2 dan sebaliknya. Gambar 2.4 graf lengkap K_6 dan graf *bipartit* lengkap $K_{3,4}$.

2.2.3 Graf Petersen

Graf *petersen* dilambangkan dengan $P_{n,m}$ atau disebut graf kubik. Jika $m = 1$, graf *petersen* dilambangkan dengan $P(n, 1)$ disebut graf prisma. Biasanya graf prisma dengan $2n$ titik dinotasikan dengan D_n. Graf $P_{5,2}$ dan graf prisma D_5 Ditunjukkan pada Gambar 2.5



Gambar 2.4 Graf lengkap K_6 dan graf *bipartit* lengkap $K_{3,4}$



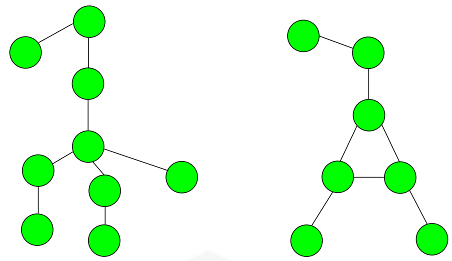
Gambar 2.5 Graf $P_{5,2}$ dan graf prisma D_5

2.2.4 Graf Siklus

Graf siklus C_n adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua dan terhubung dengan n-titik. Suatu graf disebut tanpa siklus (*acyclic*) jika mempunyai subgraf yang isomorfik dengan graf siklus. Graf tanpa siklus yang terhubung disebut *pohon*. Graf tanpa siklus G dengan $k(G) \geq 1$ disebut *hutan*. Suatu graf G disebut *siklus-tunggal* atau *unicyclic* jika G terhubung dan hanya memuat sebuah graf siklus. Berikut Gambar 2.6 merupakan graf pohon, dan graf siklus-tunggal.

2.3 Graf Operasi

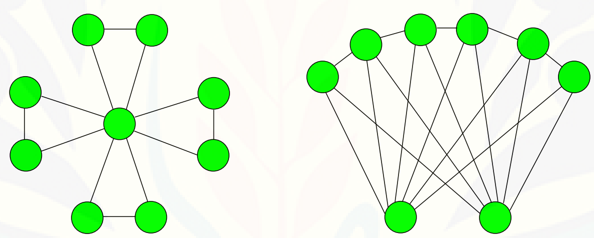
Graf Operasi adalah suatu cara untuk mendapatkan graf baru dengan melakukan suatu operasi tertentu terhadap dua atau lebih graf. Berikut ini beberapa graf operasi diantaranya sebagai berikut:



Gambar 2.6 graf pohon, dan graf siklus-tunggal

2.3.1 Joint Graph

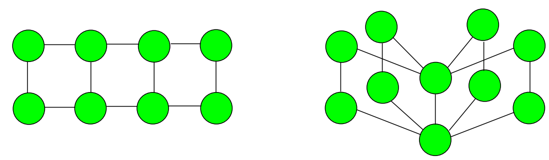
Joint Graph yaitu dari graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$, dimana $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$. Contoh dari *joint graph* yaitu graf roda W_n adalah join dari C_n dan K_1, graf pertemanan *(friendship graph)* C_3^t adalah join dari K_1 dengan tP_2, graf kipas F_n adalah join dari P_n dengan K_1, graf kipas ganda $F_{n,2}$ adalah join dari P_n dengan $2K_1$. Berikut Gambar 2.7 merupakan graf pertemanan *(friendship graph)* C_3^t, dan graf kipas ganda $F_{n,2}$:



Gambar 2.7 Graf pertemanan *(friendship graph)* C_3^t, dan graf kipas ganda $F_{n,2}$

2.3.2 Cartesian Product

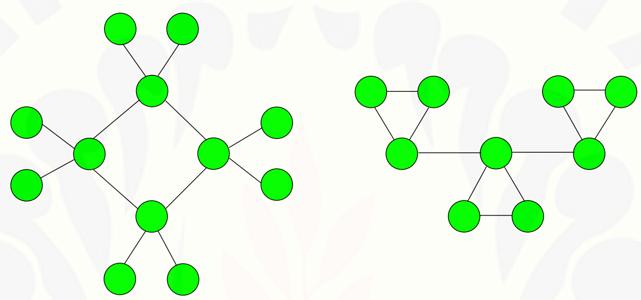
Perkalian graf atau hasil kali dari G_1 dan G_2 adalah graf $G = G_1 \times G_2$ didefinisikan sebagai $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan $(x_1, x_2)(y_1, y_2) \in E(G) \leftrightarrow x_1 = y_1$ dan $x_2y_2 \in E(G_2)$ atau $x_2 = y_2$ dan $x_1y_1 \in E(G_1)$. Contoh dari hasil perkalian graf yaitu graf buku B_n didefinisikan $K_{1,n} \times P_2$, graf tangga L_n didefinisikan $P_n \times P_2$. Sebagai contoh dapat dilihat pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Graf tangga L_4 dan graf buku B_4

2.3.3 Corona

Corona atau dinotasikan $G \odot H$ dari dua graf G dan H didefinisikan graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G dan $|V(G)|$ duplikat $H_1, H_2, ..., H_{|V(G)|}$ dari H, kemudian menghubungkan titik ke-i dari G ke setiap titik di $H_i, i = 1, 2, 3, ..., |V(G)|$. Sebagai contoh lihat Gambar 2.10 berikut yaitu $C_4 \odot 2K_1$ dan $P_3 \odot P_2$.



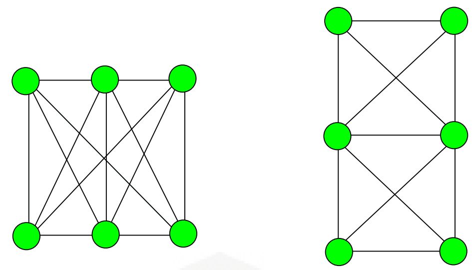
Gambar 2.9 Graf $C_4 \odot 2K_1$ dan $P_3 \odot P_2$

2.3.4 Komposisi Graf

Komposisi Graf dari G_1 dan G_2 adalah $G_1[G_2]$ dapat didefinisikan sebagai $G = (X, E)$ dimana $X = X_1 \times X_2$. Dua buah titik yaitu $u = (u_1, u_2)$ dan $v = (v_1, v_2)$ berhubungan langsung *(adjacent)*, jika (u_1 *adjacent* u_2) atau ($u_1 = v_1$ dan u_1 *adjacent* u_2). Sebagai contoh lihat Gambar 2.10 berikut.

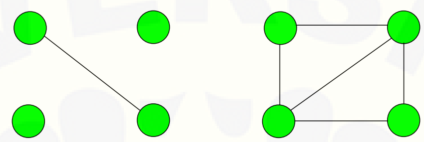
2.3.5 Komplemen Graf

Komplemen suatu graf G atau dinotasikan $\overline{G}$ dengan n titik adalah sebuah graf dengan himpunan titik yang sama seperti dalam G dan dengan sifat bahwa



Gambar 2.10 Contoh Komposisi graf $G_1[G_2]$ dan $G_1[G_2]$

dua titik di G bertetangga jika dan hanya jika dua titik yang sama dalam $\overline{G}$ tidak bertetangga. Sebagai contoh lihat Gambar 2.11 berikut yaitu Graf komplemen $\overline{G}$.



Gambar 2.11 Graf G dan Graf komplemen $\overline{G}$

2.4 Dimensi Partisi

2.4.1 Definsi dasar dan keterkaitan dengan dimensi metrik

Dalam memberikan definisi jarak pada graf (Chartrand,et.al, 2000), dimana untuk titik u dan v di graf terhubung G, jarak $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v di G. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$ dari himpunan titik di graf terhubung G dan sebuah titik v di G, k-vektor (k-tuple terurut) $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), ..., (v, w_k))$, Dimana koordinat metrik dari v terhadap W. Himpunan W disebut himpunan pembeda untuk G memiliki koordinat metrik yang berbeda. Minimum kardinalitas dari himpunan pembeda atau basis dari G disebut dimensi metrik yang dinotasikan dengan $dim(G)$.

Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dengan $V(G)$ adalah himpunan titik-titiknya, S adalah himpunan bagian dari $V(G)$ dan v titik di G, jarak antara v dan S yang dinotasikan $d(v, S)$ didefinisikan sebagai

$$d(v, S) = min\{(d(v, x)|x \epsilon S\}$$

Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dan k buah partisi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_k\}$ dari $V(G)$ dan v titik di G. Koordinat v terhadap Π didefinisikan sebagai

$$r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), ..., d(v, S_k))$$

Partisi Π dikatakan partisi pembeda, jika k-vektor $(r|\Pi)$ untuk setiap $v \in V(G)$ berbeda. Nilai minimum k agar terdapat partisi pembeda dari $V(G)$ adalah dimensi partisi *(partition dimension)* dari G atau dapat dinotasikan $pd(G)$.

Pada dimensi partisi dan dimensi metrik memiliki saling keterkaitan atau hubungan. Hubungan tersebut dapat dilihat pada teorema berikut:

Teorema 2.1. *(Chartrand,et.al, 2000) Jika G adalah graf terhubung tidak trivial, maka $pd(G) \leq dim(G) + 1$.*

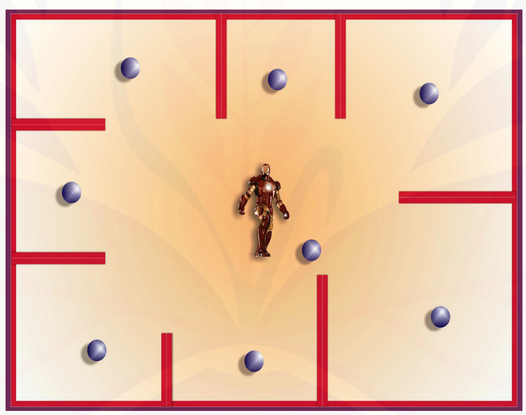
Bukti. Misalkan $dim(G) = k$ dan misal $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$ adalah basis dari G. Anggap partisi terurut $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ...S_{k+1}\}$ dari himpunan titik $V(G)$, dimana $S_i = \{w_i\}$, $(1 \leq i \leq k)$ dan $S_{k+1} = V(G) - W$. Oleh karena $r(v|\Pi) = (d(v, w_1), d(v, w_2), ..., d(v, w_k), 0)$ untuk $v \epsilon V(G) - W$ dan W adalah *resolving set* dari G, hal ini mengakibatkan koordinat $r(v|\Pi)$, untuk $v \epsilon S_{k+1}$ berbeda. Lebih lanjut, hanya koordinat $r(w_i|\Pi)$ untuk $1 \leq i \leq k$, memiliki elemen ke-i sama dengan 0, yang mengakibatkan $r(v|\Pi) \neq r(w_i|\Pi)$ untuk semua $v \epsilon V(G) - W$ dan semua i dengan $1 \leq i \leq k$. Jadi Π adalah sebuah *resolving k+1 partition* dari G dan $pd(G) \leq dim(G) + 1$. □

Nilai batas dari Teorema 2.1 diatas dapat ditemukan pada graf P_n, C_n, K_n, dan $K_{1,k}$. Penelitian dasar yang mereka lakukan tentang dimensi partisi menghasilkan Teorema-Teorema untuk graf P_n, K_n, $K_{1,k}$ dan graf-graf yang berdimensi partisi $(n - 1)$.

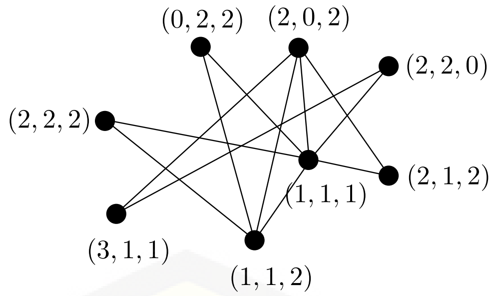
2.4.2 Aplikasi dimensi metrik dan dimensi partisi

Misalkan sebuah propinsi pada suatu negara terdapat berbagai kota. Kemudian kota-kota tersebut dibagi menjadi beberapa kelompok dengan ketentuan dalam sebuah kelompok tersebut tidak terdapat kota yang sama. Hitung jarak minimum dari masing-masing kota terhadap semua kelompok, jika terdapat dua kota yang berjarak sama maka ubah kembali pembagian kelompok tersebut sampai didapatkan jarak minimum tiap kota berbeda. Banyaknya kelompok yang dibuat seminimal mungkin ini dinamakan dengan dimensi partisi.

Pada navigasi robot, sebuah robot bergerak dari satu titik lokasi ke titik lokasi lainnya pada bidang dengan meminimalkan kesalahan yang terjadi dalam menerjemahkan petunjuk (kode) yang didapatkan dari titik-titik lokasi tersebut. Untuk itu setiap titik lokasi pada bidang gerak robot harus memberikan kode yang berbeda dan unik. Jika titik pandang sebagai titik sedangkan lintasan robot dipandang sebagai sebuah sisi, maka pada bidang gerak robot dapat direpresentasikan sebagai graf. Agar robot dapat bergerak secara efisien maka robot harus cepat menerjemahkan kode titik-titik lokasi yang akan dilaluinya. Untuk itu titik lokasi harus mempunyai komponen yang seminimal mungkin. Jika komponen kode titik lokasi menggunakan pengertian jarak maka masalah ini dalam Teori Graf dikenal dengan *dimensi metrik*. Sedangkan jenis lain dan merupakan hasil pengembangan dari dimensi sebuah graf terhubung adalah dimensi partisi (Khuller, 1996). Gambar 2.12 dan 2.13 menunjukkan navigasi gerak robot dalam bidang datar beserta graf representasinya dengan kode titik-titik lokasi berbeda.



Gambar 2.12 Navigasi gerak robot dalam bidang datar



Gambar 2.13 Graf representasi navigasi gerak robot

2.4.3 Hasil-hasil penelitian tentang dimensi metrik dan dimensi partisi

Beberapa hasil penelitian terkaiat dimensi metrik dan dimensi partisi yang telah diterbitkan mulai tahun 2008 sampai terkini dapat dilihat dari rangkuman tabel berikut ini.

1. Dimensi Metrik Graf Sikel C_n

Teorema 2.2. *(Septiani, 2012) Jika G graf sikel dengan n titik dan $n \geq 3$, maka $dim(C_n) = 2$.*

Bukti. Misalkan $(v_1, v_2, ..., v_n)$ sikel dengan n titik dan $n \geq 3$ pada graf G.

Untuk sikel dengan n ganjil. Misalkan $W = v_{n-1}, v_n$, akan dibuktikan W himpunan pembeda. Representasi setiap titik pada G terhadap W adalah

$$\begin{aligned}
r(v_1|W) &= (2,1)\\
r(v_2|W) &= (3,2)\\
r(v_3|W) &= (4,3)\\
&\vdots\\
r(v_{\frac{n-3}{2}}|W) &= (\tfrac{n-1}{2}, \tfrac{n-3}{2})\\
r(v_{\frac{n-1}{2}}|W) &= (\tfrac{n-1}{2}, \tfrac{n-1}{2})\\
r(v_{\frac{n+1}{2}}|W) &= (\tfrac{n-3}{2}, \tfrac{n-1}{2})\\
r(v_{\frac{n+3}{2}}|W) &= (\tfrac{n-5}{2}, \tfrac{n-3}{2})\\
r(v_{n-2}|W) &= (1,2)\\
r(v_{n-1}|W) &= (0,1)
\end{aligned}$$

$r(v_n|W) = (1, 0)$

Karena $\forall u, v \in V(G),\ u \neq v,\ r(u|W) \neq r(v|W)$, maka $W = v_{n-1}, v_n$ himpunan pemisah.

Akan dibuktikan $W = v_{n-1}, v_n$ dengan kardinalitas minimum. Karena G graf sikel, maka tidak ada himpunan pembeda dengan kardinalitas kurang dari 2, maka W merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum. Sehingga $dim(C_n) = 2$ untuk n ganjil.

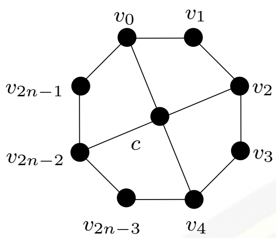
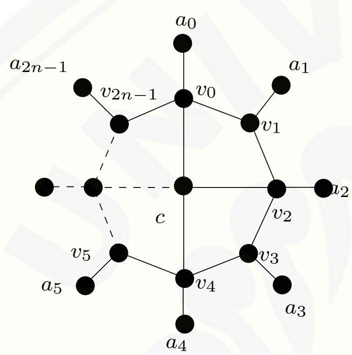
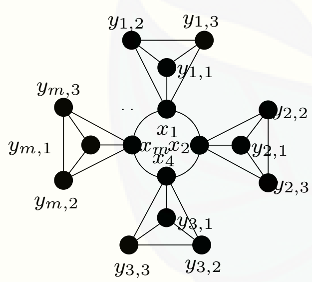
Untuk sikel dengan n genap. Misalkan $W = v_{n-1}, v_n$, akan dibuktikan W himpunan pembeda. Representasi setiap titik pada G terhadap W adalah

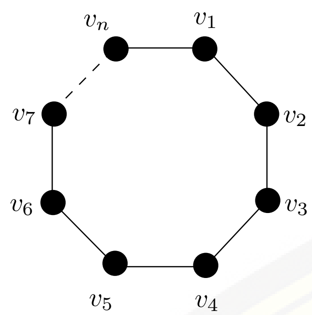
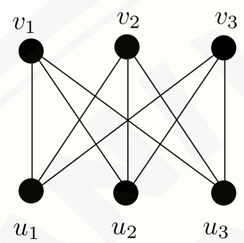
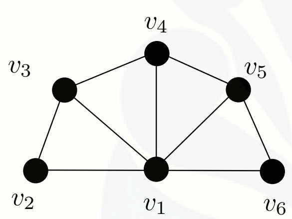
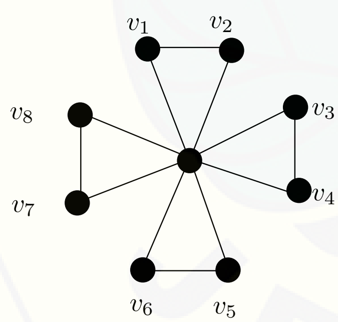
$r(v_1|W) = (2, 1)$
$r(v_2|W) = (3, 2)$
$r(v_3|W) = (4, 3)$
$\vdots$
$r(v_{\frac{n-2}{2}}|W) = (\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2})$
$r(v_{\frac{n}{2}}|W) = (\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2})$
$r(v_{\frac{n+2}{2}}|W) = (\frac{n-3}{2}, \frac{n-1}{2})$
$r(v_{n-2}|W) = (1, 2)$
$r(v_{n-1}|W) = (0, 1)$
$r(v_n|W) = (1, 0)$

Karena $\forall u, v \in V(G),\ u \neq v,\ r(u|W) \neq r(v|W)$, maka $W = v_{n-1}, v_n$ himpunan pemisah.

Akan dibuktikan $W = v_{n-1}, v_n$ dengan kardinalitas minimum. Karena G graf sikel, maka tidak ada himpunan pembeda dengan kardinalitas kurang dari 2, maka W merupakan himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum. Sehingga $dim(C_n) = 2$ untuk n genap. Karena terbukti untuk graf sikel dengan banyak titik ganjil dan genap, maka $dim(C_n) = 2$. $\square$

Tabel 2.1: Hasil penelitian $dim(G)$ dan $pd(G)$

Graf	Hasil	Keterangan
(Graf gir G_{2n}); $n \geq 2$ 	$pd(G_{2n}) = k$	Riza,et.al 2012
(Graf gir + anting G'_{2n}); $n \geq 2$ 	$pd(G'_{2n}) = 3$, untuk $2 \leq n \leq 4$ $pd(G'_{2n}) = k$, untuk $n \geq 4$	Darmaji,et.al 2012
(Graf Korona $C_m \odot K_n$); $m \geq 3, n \geq 1$ 	$pd(C_m \odot K_n) = 3$; untuk $n = 1$ $pd(C_m \odot K_n) = p$; untuk $n \geq 1$	Yogi,et.al 2012

Graf	Hasil	Keterangan
(Graf Sikel C_n); $n \geq 3$ 	$dim(C_n) = 2$; untuk $n \geq 3$	Septiani,et.al 2012
(Graf Bipartit Komplit $K_{m,n}$); 	$dim(K_{m,n}) = n - 2$; untuk $n \geq 4$	Septiani,et.al 2012
(Graf Kipas F_n); $n \geq 3$ 	$pd(F_n) = 3$; untuk $4 \leq n \leq 8$ $pd(F_n) = 4$; untuk $9 \leq n \leq 13$	Noviansyah,et.al 2012
(Graf Kincir $[K_i]n$); $n \geq 2$ 	$pd([K_i]n) = \lceil \frac{1}{2}(1 + \sqrt{8n+1}) \rceil$	Noviansyah,et.al 2012

2.5 Fungsi dan Barisan Aritmatika

Secara umum, fungsi dari himpunan A ke himpunan B didefinisikan sebagai aturan yang memetakan setiap anggota himpunan A(dinamakan sebagai domain) kepada anggota himpunan B(dinamakan sebagai kodomain). Istilah "fungsi", "pemetaan", "peta", "transformasi", dan "operator" biasanya dipakai secara sinonim.

Anggota himpunan yang dipetakan dapat berupa apa saja (kata, orang, atau objek lain), namun biasanya yang dibahas adalah besaran matematika seperti bilangan riil. Untuk mendefinisikan fungsi dapat digunakan notasi berikut.

$$\mathrm{f} : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$$

yang artinya bahwa fungsi f yang memetakan setiap elemen himpunan A kepada B. Jenis-jenis fungsi ada tiga, yaitu fungsi injektif, surjektif dan bijektif.

Fungsi f: A $\rightarrow$ B disebut fungsi satu-satu atau fungsi injektif jika dan hanya jika untuk sebarang a_1 dan $a_2 \in$ A dengan a_1 tidak sama dengan a_2 maka berlaku $f(a_1)$ tidak sama dengan $f(a_2)$.

Fungsi f: A $\rightarrow$ B disebut fungsi kepada atau fungsi surjektif jika dan hanya jika untuk setiap b dalam kodomain B terdapat paling tidak satu a dalam domain A sehingga berlaku $f(a) = b$. Dengan kata lain, suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan kisarannya (range).

Fungsi f: A $\rightarrow$ B disebut disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif.

Secara umum, barisan aritmatika suku ke-n dapat dirumuskan

$U_n = a + b(n-1)$

Barisan aritmetika yang mempunyai beda positif disebut barisan aritmatika naik, sedangkan jika bedanya negatif disebut barisan aritmatika turun. $U_1, U_2, U_3, \ldots,$ U_{n-1}, U_n disebut barisan aritmatika jika $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \ldots = U_n - U_{n-1} =$ konstanta.

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode pendeteksian pola *(pattern recognition)* dan deduktif aksiomatik. Metode pendeteksian pola yaitu mencari pola untuk dilakukan konstruksi himpunan pembeda pada dimensi metrik (dim) dan partisi pembeda pada dimensi partisi (pd) sedemikian hingga nilai koordinat minimum dan berbeda. Sedangkan, deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Kemudian metode tersebut diterapkan dalam dimensi partisi pada graf khusus dan operasinya, diantaranya: graf tangga L_n, graf shackle (C_4, v, n), komplemen dari graf $\overline{L_n}$, graf komposisi $P_n[P_1]$, graf tangga tiga-siklus TCL_n, dan graf tangga permata Dl_n.

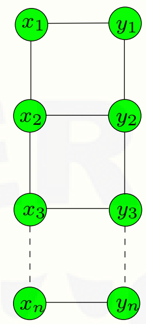
3.2 Definisi Operasional

Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna.

Dalam penelitian ini dilakukan penamaan titik dan sisi yang nantinya berhubungan untuk menentukan nilai dimensi metrik (dim) dari himpunan W atau himpunan pembeda dan dimensi partisi (pd) dari himpunan Π atau partisi pembeda. Koordinat W dan Π memiliki koordinat minimum dan berbeda terhadap masing-masing himpunan titik pada Graf Khusus dan Operasinya. Dalam hal ini graf khusus yang dikaji adalah graf tangga L_n, graf shackle (C_4, v, n), komplemen dari graf $\overline{L_n}$, graf komposisi $P_n[P_1]$, graf tangga tiga-siklus TCL_n, dan graf tangga permata Dl_n. Penamaan graf khusus tersebut dilakukan sebagai berikut:

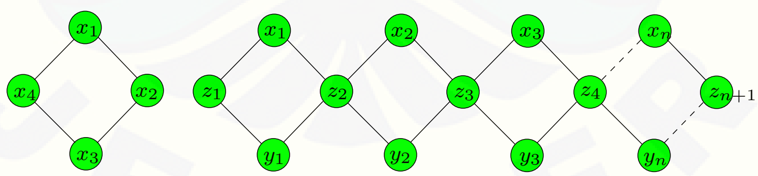
Pada pembahasan dimensi partisi, akan digunakan graf terhubung sederhana dan tak berarah. Terdapat beberapa jenis graf sederhana khusus. Berikut didefinisikan beberapa graf khusus dan operasinya:

1. Graf tangga yang dilambangkan dengan L_n adalah graf yang memiliki $V(L_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\}$, $E(L_n) = \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 1\}$, $p = |V|{=}2.n$ dan $q = |E|{=}n + 2(n-1)$. Gambar 3.1 menunjukkan satu contoh graf tangga L_n.



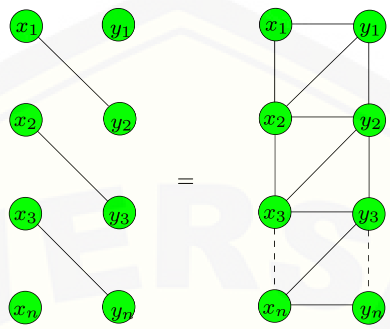
Gambar 3.1 Graf Tangga L_n

2. Graf shackle (C_4, v, n) adalah graf yang dibangun dari graf C_4 dan order graf sedemikian hingga $1 \leq i \leq n$ sehingga bertumpu pada titik yang sama yang disebut titik penghubung. Graf shackle C_4, v, n memiliki $V(shack(C_4, v, n)) = \{x_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{z_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\}$, $E(shack(C_4, v, n)) = \{x_i z_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{x_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 1\} \cup \{y_i z_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 1\} \cup \{y_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 1\}$, $p = |V|{=}3.n + 1$ dan $q = |E|{=}4.n$. Gambar 3.2 menunjukkan satu contoh graf C_4 dan graf shackle C_4, v, n.



Gambar 3.2 Graf C_4 dan Graf Shackle (C_4, v, n)

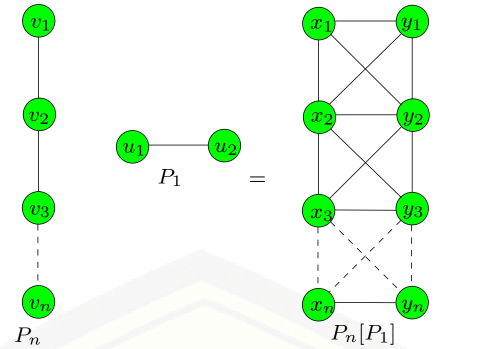
3. Graf komplemen yang dilambangkan dengan $\overline{L_n}$ adalah graf yang memiliki $V(\overline{L_n}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\}$, $E(\overline{G_n}) = \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \cup \{y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{y_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\}$, $p = |V|$=$2.n$ dan $q = |E|$=$4.n - 3$. Gambar 3.3 menunjukkan satu contoh graf komplemen $\overline{L_n}$.



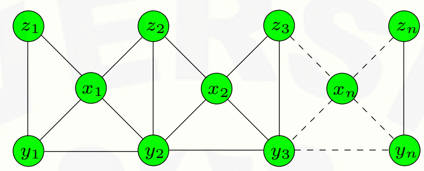
Gambar 3.3 Graf Komplemen $\overline{L_n}$

4. Graf komposisi adalah graf yang dibangun dari graf P_n dan P_1 dengan disjoint himpunan titik $V(P_n)$ dan $V(P_1)$ dan sisi E_1 dan E_2 adalah graf dengan $V(P_n) \times V(P_1)$ dan $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ yang adjacent dengan $u = (u_1, u_2)$ ketika $[v_1 \text{ adj } u_1]$ atau $[v_1 = u_1 \text{ dan } v_2 \text{ adj } u_2]$ dan seterusnya. Graf komposisi tersebut dilambangkan dengan $P_n[P_1]$ adalah graf yang memiliki $V(P_n[P_1]) = \{x_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 3\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 3\}$, $E(P_n[P_1]) = \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{x_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{y_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\}$, $p = |V|$=$2.n$ dan $q = |E|$=$5.n - 4$. Gambar 3.4 menunjukkan satu contoh graf komposisi $P_n[P_1]$.

5. Graf tangga tiga siklus adalah salah satu family dari graf tangga. Graf Tangga Tiga Siklus yang dilambangkan dengan TCL_n dimana memiliki $V(TCL_n) = \{x_i, y_j, z_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n+1\}$, $E(TCL_n) = \{y_jz_j; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{y_iy_{i+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_iy_i; x_iz_i; x_iy_{i+1};\ x_iz_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$, $p = |V|$=$3.n$+2 dan $q = |E|$=$6.n$+1. Gambar 3.5 menunjukkan satu contoh Graf Tangga Tiga-Siklus TCL_n.

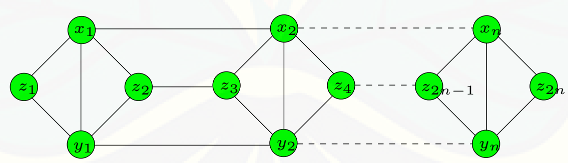


Gambar 3.4 Graf Komposisi $P_n[P_1]$



Gambar 3.5 Graf Tangga Tiga-Siklus TCL_n

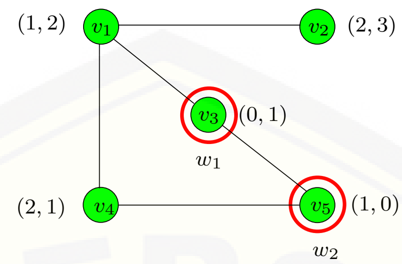
6. Graf tangga permata adalah salah satu famili dari graf tangga. Graf tangga permata yang dilambangkan Dl_n memiliki titik $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2n\}$, dan sisi $E(Dl_n) = \{x_ix_{i+1}, y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_jz_{j+1}; 2 \leq j \leq 2n-2, genap\} \cup \{x_iz_{2i-1}, x_iz_{2i}, y_iz_{2i-1}, y_iz_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$. Graf tangga permata Dl_n mempunyai $p = |V|{=}4.n$ titik, dan $q = |E|{=}8.n - 3$ sisi. Gambar 3.6 menunjukkan satu contoh Graf tangga permata Dl_n.



Gambar 3.6 Graf Tangga Permata Dl_n

3.3 Observasi Penelitian

Sebelum penulis melakukan penelitian, maka penulis tertarik untuk melakukan observasi penelitian terlebih dahulu terkait $dim(G)$ dan $pd(G)$ pada graf khusus dan hasil operasinya. Observasi yang akan dilakukan adalah sebagai berikut.



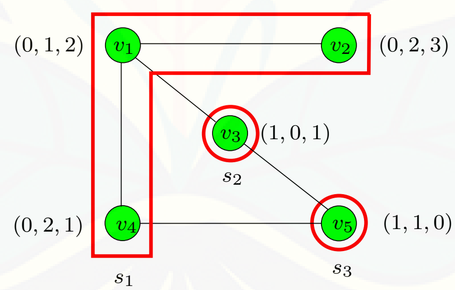
Gambar 3.7 Contoh dimensi metrik graf G_1

Sebagai contoh graf G_1 di atas yang memiliki $W = \{v_3, v_5\}$, sehingga $dim(G_1)$ $= 2$. Koordinat untuk semua titik di G_1 terhadap W adalah

$$r(v_1|W) = (1,2) \quad r(v_3|W) = (0,1) \quad r(v_5|W) = (1,0)$$

$$r(v_2|W) = (2,3) \quad r(v_4|W) = (2,1)$$

Kemudian untuk menentukan dimensi partisi dapat di ilustrasikan sebagai berikut: Misalkan $\Pi_1 = \{S_1, S_2\}$, dengan $S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $S_2 = \{v_4, v_5\}$ maka semua



Gambar 3.8 Contoh dimensi partisi graf G_1

koordinat titik di G_2 terhadap Π_1 adalah

$$r(v_1|\Pi_1) = (0,1) \quad r(v_3|\Pi_1) = (0,1) \quad r(v_5|\Pi_1) = (1,0)$$

$$r(v_2|\Pi_1) = (0,2) \quad r(v_4|\Pi_1) = (1,0)$$

Karena $r(v_1|\Pi_1) = r(v_3|\Pi_1) = (0,1)$ dan $r(v_4|\Pi_1) = r(v_5|\Pi_1) = (1,0)$ maka Π_1 bukan partisi pembeda dari G_1. Kemudian misalkan $\Pi_2 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$, dengan $S_1 = \{v_1\},\ S_2 = \{v_2\},\ S_3 = \{v_3\},\ S_4 = \{v_4\},\ dan\ S_5 = \{v_5\}$ maka semua koordinat titik di G_1 terhadap Π_2 adalah

$$r(v_1|\Pi_2) = (0,1,1,1,2) \quad r(v_3|\Pi_2) = (1,2,0,2,1) \quad r(v_5|\Pi_2) = (2,3,1,1,0)$$

$$r(v_2|\Pi_2) = (1,0,2,2,3) \quad r(v_4|\Pi_2) = (1,2,2,0,1)$$

Karena semua koordinat titik di G_1 terhadap Π_2 berbeda maka Π_2 merupakan partisi pembeda dari G_1. Meskipun demikian, Π_2 bukan minimum partisi pembeda dari G_1. Untuk menunjukkannya lihat Gambar 3.8, misalkan $\Pi_3 = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan $S_1 = \{v_1, v_2, v_4\},\ S_2 = \{v_3\},\ S_3 = \{v_5\}$ maka semua koordinat titik di G terhadap Π_3 adalah

$$r(v_1|\Pi_3) = (0,1,2) \quad r(v_3|\Pi_3) = (1,0,1) \quad r(v_5|\Pi_3) = (1,1,0)$$

$$r(v_2|\Pi_3) = (0,2,3) \quad r(v_4|\Pi_3) = (0,2,1)$$

Sehingga Π_3 merupakan partisi pembeda dari G_1. Lebih lanjut, karena tidak ada 2 partisi dari $V(G_1)$ yang merupakan partisi pembeda dari G_1 maka Π_3 merupakan minimum partisi pembeda dari G_1. Jadi, $pd(G_1) = 3$.

3.4 Rancangan Penelitian

Sebelum penelitian lanjutan pada graf khusus beserta operasinya, diantaranya yaitu: graf tangga L_n, graf shackle C_4, v, n, komplemen dari graf $\overline{L_n}$, graf komposisi $P_n[P_1]$, graf tangga tiga-siklus TCL_n, dan graf tangga permata Dl_n, maka disusunlah rancangan penelitian yang tampak pada Gambar 3.9. Untuk uraian rancangan penelitian akan dijelaskan sebagai berikut:

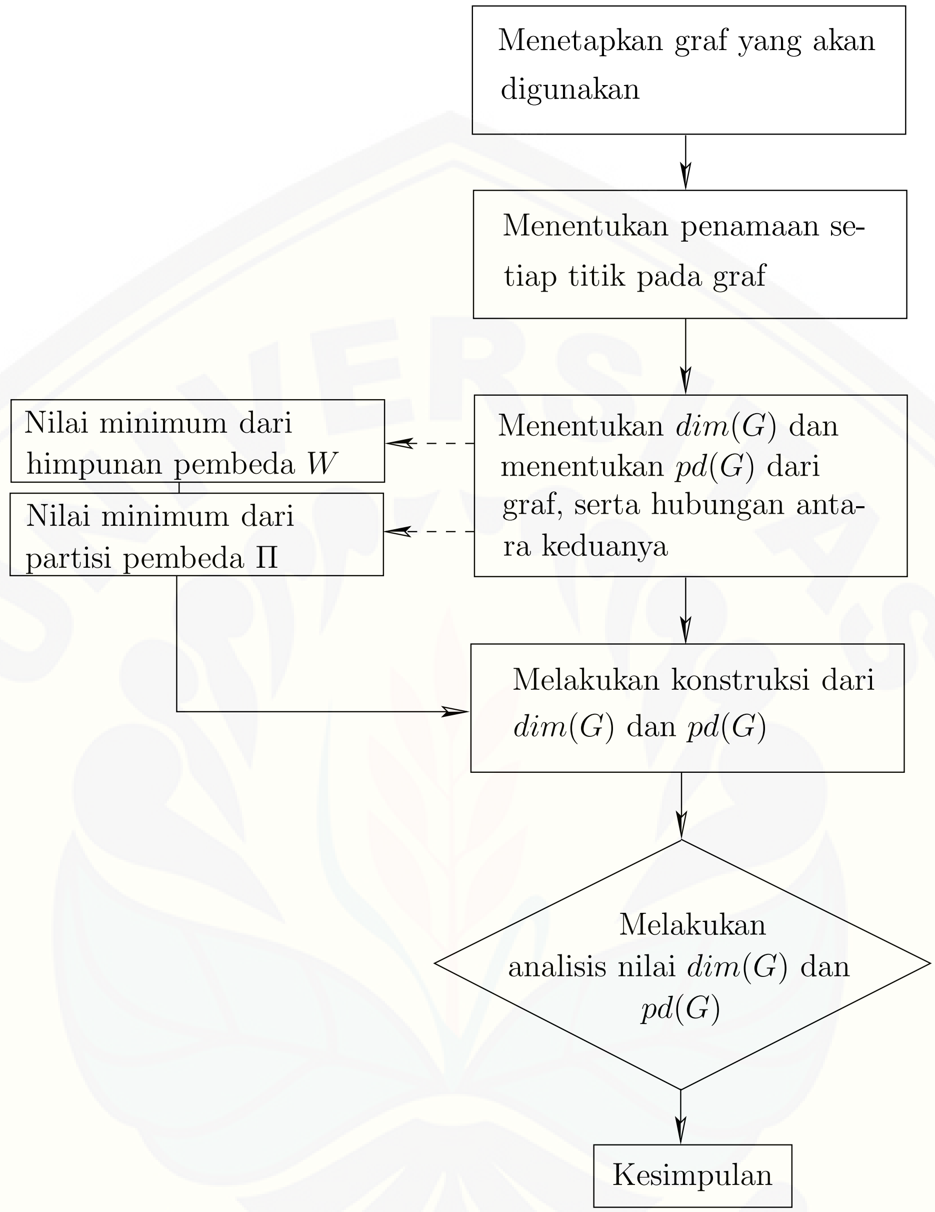
1. menetapkan graf yang akan digunakan untuk dianalisa dimensi partisinya;
2. menentukan penamaan setiap titik sedemikian hingga titiknya berbeda dan menghasilkan formulasi yang memetakan himpunan titik.

3. menentukan dimensi metrik yang dinotasikan dengan $dim(G)$ dan dimensi partisi yang dinotasikan dengan $pd(G)$ pada graf khusus dan operasinya, serta hubungan antara keduanya;

4. melakukan konstruksi terhadap titik koordinat dari $dim(G)$ dan $pd(G)$;

5. melakukan analisis dari nilai dimensi metrik dan dimensi partisi graf khusus dan operasinya;

6. melakukan penyimpulan hasil penelitian dari analisis dimensi partisi pada graf khusus dan operasinya.



Gambar 3.9 Alur Penelitian

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Hasil Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi pada Graf Khusus dan Operasinya

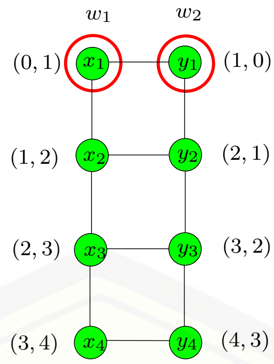
Pada bab ini akan dijelaskan mengenai analisis permasalahan beserta pembahasannya dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini. Penelitian ini fokus pada penentuan nilai dimensi metrik $dim(G)$ dan dimensi partisi $pd(G)$ pada graf khusus dan operasinya. Dimana pada himpunan pembeda dan partisi haruslah memiliki kardinalitas minimum dan berbeda. Graf yang digunakan diantaranya beberapa graf khusus dan graf hasil operasi seperti: graf tangga L_n, graf shackle C_4, v, n, komplemen dari graf $\overline{L_n}$, graf komposisi $P_n[P_1]$, graf tangga tiga-siklus TCL_n, dan graf tangga permata Dl_n. Terdapat lima rumusan masalah yang akan dijawab yaitu berapa nilai dimensi metrik dan dimensi partisi graf-graf khusus, berapa nilai dimensi metrik dan dimensi partisi shackle dari graf, berapa nilai dimensi metrik dan dimensi partisi komplemen dari graf, berapa nilai dimensi metrik dan dimensi partisi komposisi dari graf, bagaimanakah analisis dari nilai dimensi metrik dan dimensi partisi graf khusus dan operasinya. Hasil penelitian ini berupa Teorema, dan analisis nilai dimensi partisi (pd) antar yang satu dengan graf yang lainnya. Format penyajian temuan penelitian dalam bab ini diawali dengan pernyataan Teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran pembuktian Teorema.

4.1.1 Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi pada Graf Tangga L_n

Untuk 4 secara umum diperoleh dimensi metrik dari graf tangga L_4 seperti pada Gambar 4.1 berikut ini.

◊ **Teorema 4.1.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, nilai dimensi metrik dari graf tangga adalah $dim(L_n) = 2$.*

Bukti. Graf tangga yang dilambangkan dengan L_n adalah graf yang memiliki $V(L_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\}$, $E(L_n) = \{x_iy_i; 1 \leq$



Gambar 4.1 Dimensi Metrik Graf tangga L_4

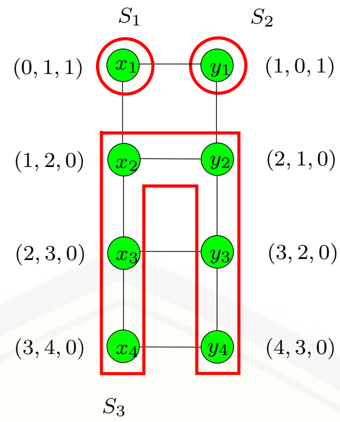
$i \leq n; n \leq 2\} \cup \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 1\} \cup \{y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 1\}$, $p = |V|=2.n$ dan $q = |E|=n+2(n-1)$. Akan dibuktikan bahwa $dim(L_n) \geq 2$. Jika kardinalitas $dim(L_n) = 1$, maka pasti bukan himpunan pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. untuk itu, maka sedikitnya ada 2 titik yaitu $W = \{w_1, w_2\}$, dimana $w_1 = x_1$, $w_2 = y_1$ yang merupakan himpunan pembeda, sehingga $dim(L_n) \geq 2$.

Untuk mengetahui $dim(L_n) \leq 2$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya diambil himpunan pembeda $W = \{w_1, w_2\}$, dimana $w_1 = x_1$, $w_2 = y_1$ atau dapat ditulis $W = \{x_1, y_1\}$, maka diperoleh representasi titik $V(L_n)$ terhadap W:
$r(x_i|W) = (i-1, i)$ untuk $1 \leq i \leq n$
$r(y_i|W) = (i, i-1)$ untuk $1 \leq i \leq n$
Dapat dilihat bahwa setiap titik $V(L_n)$ memiliki koordinat berbeda terhadap W dan memiliki kardinalitas minimal, sehingga $dim(L_n) \leq 2$. Oleh karena $dim(L_n) \geq 2$ dan $dim(L_n) \leq 2$, maka $dim(L_n) = 2$. $\square$

Untuk 4 secara umum diperoleh dimensi partisi dari graf tangga L_4 seperti pada Gambar 4.2 berikut ini.

$\Diamond$ **Teorema 4.2.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, nilai dimensi partisi graf tangga adalah $pd(L_n) = 3$.*

Bukti. Akan ditunjukkan $pd(L_n) \geq 3$. Jika kardinalitas $pd(L_n) = 2$, maka pasti bukan partisi pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan



Gambar 4.2 Dimensi Partisi Graf tangga L_4

representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada 3 partisi yang merupakan partisi pembeda yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dimana $S_1 = \{x_1\}$, $S_2 = \{y_1\}$ dan $S_3 = \{x_2, y_2, x_3, y_3, ..., x_n, y_n\}$ dan jumlah titik $S_3 = 2.n - 2 < |V| = 2.n$. Sehingga $pd(L_n) \geq 3$.

Untuk mengetahui $pd(L_n) \leq 3$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya $dim(L_n) = 2$ dan $W = \{x_1, y_1\}$. Kemudian anggap partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, sedemikian hingga:

$$S_k = \begin{cases} \{x_1\}; & \text{untuk } k = 1 \\ \{y_1\}; & \text{untuk } k = 2 \\ \{x_i, y_i | 2 \leq i \leq n\}; & \text{untuk } k = 3 \end{cases}$$

dimana jumlah titik $s_3 = 2.n - 2 < |V| = 2.n$ diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan titik $V(L_n)$ terhadap Π:

$r(x_1|\Pi) = (0, 1, 1)$

$r(y_1|\Pi) = (1, 0, 1)$

$r(x_i|\Pi) = (i - 1, i, 0)$ untuk $2 \leq i \leq n$

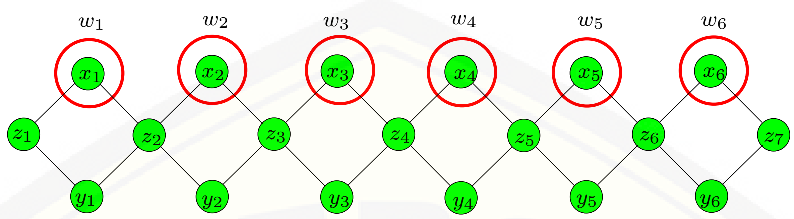
$r(y_i|\Pi) = (i, i - 1, 0)$ untuk $2 \leq i \leq n$

Dapat dilihat bahwa setiap titik $V(L_n)$ memiliki koordinat berbeda terhadap Π dan memiliki kardinalitas minimal, karena berdasarkan Teorema 2.1 dinyatakan bahwa $pd(L_n) \leq dim(L_n) + 1 = 3$, sehingga $pd(L_n) \leq 3$. Oleh karena $pd(L_n) \geq 3$

dan $pd(L_n) \leq 3$, dengan demikian $pd(L_n) = 3$. □

4.1.2 Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi pada Graf Shackle (C_4, v, n)

Untuk $n = 6$ diperoleh dimensi metrik graf shackle (C_4, v, n) seperti pada Gambar 4.7.



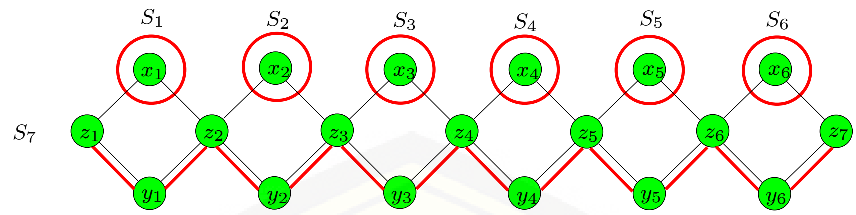
Gambar 4.3 Dimensi Metrik Graf Shackle $C_4, v, 6$

◊ **Teorema 4.3.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$, nilai dimensi metrik graf shackle adalah $dim(C_4, v, n) = k$ dengan $k \geq 3$.*

Bukti. Graf shackle (C_4, v, n) adalah graf yang memiliki $V(shack(C_4, v, n)) = \{x_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{z_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\}$, $E(shack(C_4, v, n)) = \{x_i z_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{x_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 1\} \cup \{y_i z_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 1\} \cup \{y_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 1\}$, $p = |V|$=$3.n + 1$ dan $q = |E|$=$4.n$. Akan dibuktikan bahwa $dim(shack(C_4, v, n)) \geq k$. Jika kardinalitas $dim(shack(C_4, v, n)) = k - 1$, maka pasti bukan himpunan pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada k titik dengan $k \geq 3$ yaitu $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$, dimana $w_1 = x_1$, $w_2 = x_2$,$w_3 = x_3$,...,$w_k = x_n$ yang merupakan himpunan pembeda, sehingga $dim(C_4, v, n) \geq k$.

Sedangkan untuk mengetahui $dim(shack(C_4, v, n)) \leq k$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya diambil himpunan pembeda $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$, dimana $w_1 = x_1$, $w_2 = x_2$,$w_3 = x_3$,...,$w_k = x_n$ atau dapat ditulis $W = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$, maka diperoleh representasi titik $V(C_4, v, n)$ terhadap W memiliki koordinat berbeda dan memiliki kardinalitas minimal, sehingga $dim(shack(C_4, v, n)) \leq k$. Oleh karena $dim(shack(C_4, v, n)) \geq k$ dan $dim(shack(C_4, v, n)) \leq k$, maka $dim(shack(C_4, v, n)) = k$. □

Untuk $n = 6$ diperoleh dimensi partisi graf shackle $C_4, v, 6$ seperti pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4 Dimensi Partisi Graf Shackle $C_4, v, 6$

$\Diamond$ **Teorema 4.4.** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 3$, *nilai dimensi partisi graf shackle adalah* $pd(shack(C_4, v, n)) = k + 1$ *dengan* $k \geq 3$.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $pd(shack(C_4, v, n)) \geq k + 1$. Jika kardinalitas $pd(shack(C_4, v, n)) = k$, maka pasti bukan partisi pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada $k + 1$ partisi dengan $k \geq 3$ yang merupakan partisi pembeda yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{k+1}\}$ dimana $S_1 = \{x_1\}$, $S_2 = \{x_2\}$, $S_3 = \{x_3\}$,..., $S_{k+1} = \{z_1, y_1, z_2, y_2, ..., y_n, z_{n+1}\}$ dan jumlah titik $S_{k+1} = 2.n+1 < |V| = 3.n+1$, sehingga $pd(shack(C_4, v, n)) \geq k + 1$.

Untuk mengetahui $pd(shack(C_4, v, n)) \leq k+1$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya $dim(shack(C_4, v, n)) = k$. Kemudian anggap partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ...,$
$S_{k+1}\}$, sedemikian hingga:

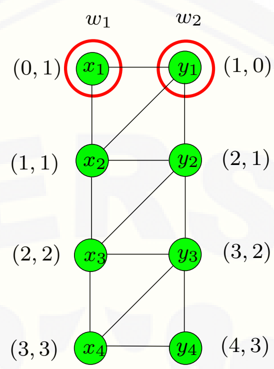
$$S_i = \begin{cases} \{x_j | 1 \leq j \leq n\}; & \text{untuk } 1 \leq i \leq k \\ \{z_j, y_{j+1} | 1 \leq j \leq n+1\}; & \text{untuk } i = k+1 \end{cases}$$

dimana jumlah titik $S_{k+1} = 2.n + 1 < |V| = 3.n + 1$ diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan titik $V(C_4, v, n)$ terhadap Π dan memiliki kardinalitas minimal, karena berdasarkan Teorema 2.1 dinyatakan bahwa $pd(C_4, v, n) \leq dim(shack(C_4, v, n))+1 = k+1$, sehingga $pd(shack(C_4, v, n)) \leq k+1$. Oleh karena

$pd(shack(C_4, v, n)) \geq k + 1$ dan $pd(shack(C_4, v, n)) \leq k + 1$, dengan demikian $pd(shack(C_4, v, n)) = k + 1$ $\square$

4.1.3 Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi pada Graf Komplemen $\overline{L_n}$

Untuk 4 secara umum diperoleh dimensi metrik dari graf komplemen $\overline{L_4}$ seperti pada Gambar 4.5 berikut ini.



Gambar 4.5 Dimensi Metrik Graf Komplemen $\overline{L_4}$

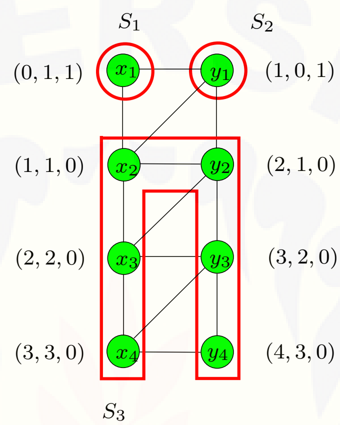
◊ **Teorema 4.5.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, nilai dimensi metrik graf komplemen adalah $dim(\overline{L_n}) = 2$.*

Bukti. Graf komplemen yang dilambangkan dengan $\overline{L_n}$ adalah graf yang memiliki $V(\overline{L_n}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\}$, $E(\overline{G_n}) = \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \cup \{y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{y_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\}$, $p = |V|{=}2.n$ dan $q = |E|{=}4.n - 3$. Akan ditunjukkan bahwa $dim(\overline{L_n}) \geq 2$. Jika kardinalitas $dim(\overline{L_n}) = 1$, maka pasti bukan himpunan pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada 2 titik yaitu $W = \{w_1, w_2\}$, dimana $w_1 = x_1$, $w_2 = y_1$ yang merupakan himpunan pembeda, sehingga $dim(\overline{L_n}) \geq 2$.

Sedangkan untuk mengetahui $dim(\overline{L_n}) = 2$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya diambil himpunan pembeda $W = \{w_1, w_2\}$, dimana $w_1 = x_1$, $w_2 = y_1$ atau dapat ditulis $W = \{x_1, y_1\}$, maka diperoleh representasi titik $V(L_n)$

terhadap W:
$r(x_1|W) = (0,1)$
$r(x_i|W) = (i,i)$ untuk $1 \leq i \leq n$
$r(y_i|W) = (i,i-1)$ untuk $1 \leq i \leq n$
Dapat dilihat bahwa setiap titik $V(\overline{L_n})$ memiliki koordinat berbeda terhadap W dan memiliki kardinalitas minimal, sehingga $dim(\overline{L_n}) \leq 2$. Oleh karena $dim(\overline{L_n}) \geq 2$ dan $dim(\overline{L_n}) \leq 2$, maka $dim(\overline{L_n}) = 2$. $\square$

Untuk 4 secara umum diperoleh dimensi partisi dari graf komplemen $\overline{L_4}$ seperti pada Gambar 4.6 berikut ini.



Gambar 4.6 Dimensi Partisi Graf Komplemen $\overline{L_4}$

◊ **Teorema 4.6.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, nilai dimensi partisi graf komplemen adalah $pd(\overline{L_n}) = 3$.*

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $pd(\overline{L_n}) \geq 3$. Jika kardinalitas $pd(\overline{L_n}) = 2$, maka pasti bukan partisi pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada 3 partisi yang merupakan partisi pembeda yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dimana $S_1 = \{x_1\}$, $S_2 = \{y_1\}$ dan $S_3 = \{x_2, y_2, x_3, y_3, ..., x_n, y_n\}$ dan jumlah titik $S_3 = 2.n - 2 < |V| = 2.n$, sehingga $pd(\overline{L_n}) \geq 3$.

Untuk mengetahui $pd(\overline{L_n}) \leq 3$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya $dim(\overline{L_n}) = 2$. Kemudian anggap partisi pembeda $\Pi = \{s_1, s_2, s_3\}$, sedemikian hingga:

$$S_k = \begin{cases} \{x_1\}; & \text{untuk } k = 1 \\ \{y_1\}; & \text{untuk } k = 2 \\ \{x_i, y_i | 2 \leq i \leq n\}; & \text{untuk } k = 3 \end{cases}$$

dimana jumlah titik $S_3 = 2.n - 2 < |V| = 2.n$ diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan titik $V(\overline{L_n})$ terhadap Π:

$r(x_1|\Pi) = (0, 1, 1)$

$r(x_1|\Pi) = (1, 0, 1)$

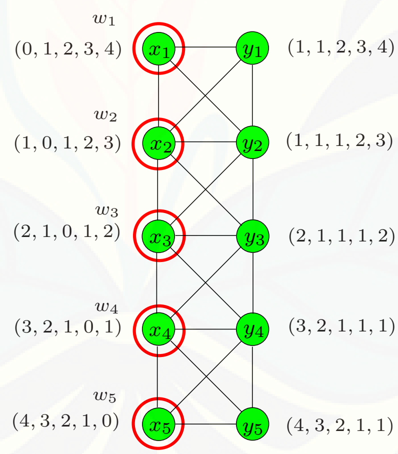
$r(x_i|\Pi) = (i, i, 0)$ untuk $1 \leq i \leq n$

$r(y_i|\Pi) = (i, i-1, 0)$ untuk $2 \leq i \leq n$

Dapat dilihat bahwa setiap titik $V(\overline{L_n})$ memiliki koordinat berbeda terhadap Π dan memiliki kardinalitas minimal, karena berdasarkan Teorema 2.1 dinyatakan bahwa $pd(\overline{L_n}) \leq dim(\overline{L_n}) + 1 = 3$, sehingga $pd(\overline{L_n}) \leq 3$. Oleh karena $pd(\overline{L_n}) \geq 3$ dan $pd(\overline{L_n}) \leq 3$, dengan demikian $pd(\overline{L_n}) = 3$ $\square$

4.1.4 Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi pada Graf Komposisi $P_n[P_1]$

Untuk $n = 5$ diperoleh dimensi metrik graf komposisi $P_5[P_1]$ seperti pada Gambar 4.7.



Gambar 4.7 Dimensi Metrik Graf Komposisi $P_5[P_1]$

$\Diamond$ **Teorema 4.7.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$, nilai dimensi metrik graf* *komposisi adalah* $dim(P_n[P_1]) = k$ *dengan* $k \geq 3$.

Bukti. Graf komposisi yang dilambangkan dengan $P_n[P_1]$ adalah graf yang memiliki $V(P_n[P_1]) = \{x_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 3\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 3\}$, $E(P_n[P_1]) = \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{x_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{y_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\}$, $p = |V|$=$2.n$ dan $q = |E|$=$5.n - 4$. Akan ditunjukkan bahwa $dim(P_n[P_1]) \geq k$. Jika kardinalitas $dim(P_n[P_1]) = k - 1$, maka pasti bukan himpunan pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada k titik dengan $k \geq 3$ yaitu $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$, dimana $w_1 = x_1$, $w_2 = x_2$,$w_3 = x_3$,...,$w_k = x_n$ yang merupakan himpunan pembeda, sehingga $dim(P_n[P_1]) \geq k$.

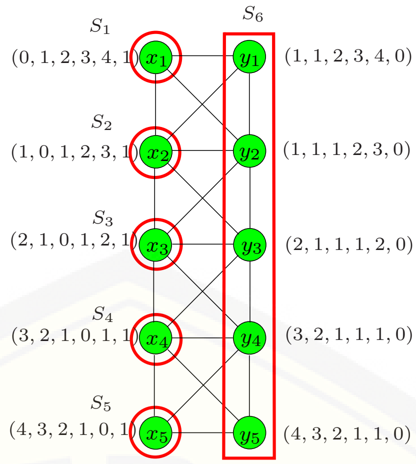
Sedangkan untuk mengetahui $dim(P_n[P_1]) \leq k$ dilakukan sebuah konstruksi, misalnya diambil himpunan pembeda $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$, dimana $w_1 = x_1$, $w_2 = x_2$,$w_3 = x_3$,...,$w_k = x_n$ atau dapat ditulis $W = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$, maka diperoleh representasi titik $V(P_n[P_1])$ terhadap W memiliki koordinat berbeda dan memiliki kardinalitas minimal, sehingga $dim(P_n[P_1]) \leq k$. Oleh karena $dim(P_n[P_1]) \geq k$ dan $dim(P_n[P_1]) \leq k$, maka $dim(P_n[P_1]) = k$. □

Untuk $n = 5$ diperoleh dimensi partisi graf komposisi $P_5[P_1]$ seperti pada Gambar 4.8.

◊ **Teorema 4.8.** *Untuk setiap bilangan bulat* $n \geq 3$*, nilai dimensi partisi graf komposisi adalah* $pd(P_n[P_1]) = k + 1$ *dengan* $k \geq 3$.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $pd(P_n[P_1]) \geq k + 1$. Jika kardinalitas $pd(P_n[P_1]) = k$, maka pasti bukan partisi pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada $k + 1$ partisi dengan $k \geq 3$ yang merupakan partisi pembeda yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{k+1}\}$ dimana $S_1 = \{x_1\}$, $S_2 = \{x_2\}$, $S_3 = \{x_3\}$,..., $S_{k+1} = \{y_1, y_2, y_3, y_4, ..., y_n\}$ dan jumlah titik $S_{k+1} = n < |V| = 2.n$, sehingga $pd(P_n[P_1]) \geq k + 1$.

Untuk mengetahui $pd(P_n[P_1]) \leq k + 1$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya $dim(P_n[P_1]) = k$. Kemudian anggap partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{k+1}\}$,



Gambar 4.8 Dimensi Partisi Graf Komposisi $P_5[P_1]$

sedemikian hingga:

$$S_i = \begin{cases} \{x_j | 1 \leq j \leq n\}; & \text{untuk } 1 \leq i \leq k \\ \{y_j | 1 \leq j \leq n\}; & \text{untuk } i = k+1 \end{cases}$$

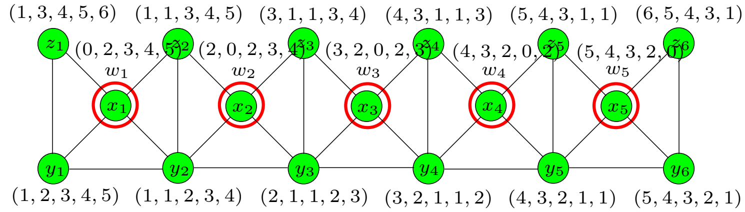
dimana jumlah titik $S_{k+1} = n < |V| = 2.n$ diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan titik $V(P_n[P_1])$ terhadap Π dan memiliki kardinalitas minimal, karena berdasarkan Teorema 2.1 dinyatakan bahwa $pd(P_n[P_1]) \leq dim(P_n[P_1]) + 1 = k+1$, sehingga $pd(P_n[P_1]) \leq k+1$. Oleh karena $pd(P_n[P_1]) \geq k+1$ dan $pd(P_n[P_1]) \leq k+1$, dengan demikian $pd(P_n[P_1]) = k+1$. $\square$

4.1.5 Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi pada Graf Tangga Tiga-Siklus TCL_n

Untuk $n = 5$ diperoleh dimensi metrik graf tangga tiga-siklus TCL_5 seperti pada Gambar 4.9.

$\Diamond$ **Teorema 4.9.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$, nilai dimensi metrik graf tangga tiga siklus adalah $dim(TCL_n) = k$ dengan $k \geq 3$.*

Bukti. Graf tangga tiga siklus adalah salah satu family dari graf tangga. Graf Tangga Tiga Siklus yang dilambangkan dengan TCL_n dimana memiliki

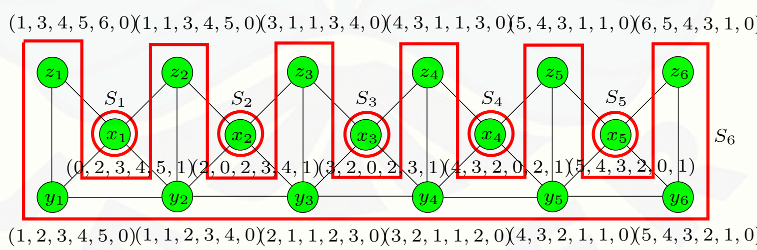


Gambar 4.9 Dimensi Metrik Graf Tangga Tiga-Siklus TCL_5

$V(TCL_n) = \{x_i, y_j, z_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n+1\}$, $E(TCL_n) = \{y_j z_j; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i y_i; x_i z_i; x_i y_{i+1}; x_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$, $p = |V| = 3.n + 2$ dan $q = |E| = 6.n + 1$. Akan ditunjukkan bahwa $dim(TCL_n) \geq k$. Jika kardinalitas $dim(TCL_n) = k - 1$, maka pasti bukan himpunan pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada k titik dengan $k \geq 3$ yaitu $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$, dimana $w_1 = x_1$, $w_2 = x_2$,$w_3 = x_3$,...,$w_k = x_n$ yang merupakan himpunan pembeda, sehingga $dim(TCL_n) \geq k$.

Sedangkan untuk mengetahui $dim(TCL_n) \leq k$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya diambil himpunan pembeda $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$, dimana $w_1 = x_1$, $w_2 = x_2$,$w_3 = x_3$,...,$w_k = x_n$ atau dapat ditulis $W = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$, maka diperoleh representasi titik $V(TCL_n)$ terhadap W memiliki koordinat berbeda dan memiliki kardinalitas minimal, sehingga $dim(TCL_n) \leq k$. Oleh karena $dim(TCL_n) \geq k$ dan $dim(TCL_n) \leq k$, maka $dim(TCL_n) = k$. □

Untuk $n = 5$ diperoleh dimensi partisi graf tangga tiga-siklus TCL_5 seperti pada Gambar 4.10.



Gambar 4.10 Dimensi Partisi graf tangga tiga-siklus TCL_5

◊ **Teorema 4.10.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$, nilai dimensi partisi graf tangga tiga-siklus adalah $pd(TCL_n) = k + 1$ dengan $k \geq 3$.*

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $pd(TCL_n) \geq k + 1$. Jika kardinalitas $pd(TCL_n) = k$, maka pasti bukan partisi pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada $k + 1$ partisi dengan $k \geq 3$ yang merupakan partisi pembeda yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{k+1}\}$ dimana $S_1 = \{x_1\}$, $S_2 = \{x_2\}$, $S_3 = \{x_3\}$,..., $S_{k+1} = \{y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3, ..., y_n, z_n\}$ dan jumlah titik $S_{k+1} = 2.n + 2 < |V| = 3.n + 2$, sehingga $pd(TCL_n) \geq k + 1$. Untuk mengetahui $pd(TCL_n) \leq dim(TCL_n) + 1 = k + 1$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya $dim(TCL_n) = k$ dan $W = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$. Kemudian anggap partisi pembeda $\Pi = \{s_1, s_2, s_3, ..., s_{k+1}\}$, sedemikian hingga:

$$S_i = \begin{cases} \{x_j | 1 \leq j \leq n\}; & \text{untuk } 1 \leq i \leq k \\ \{y_j, z_j | 1 \leq j \leq n\}; & \text{untuk } i = k + 1 \end{cases}$$

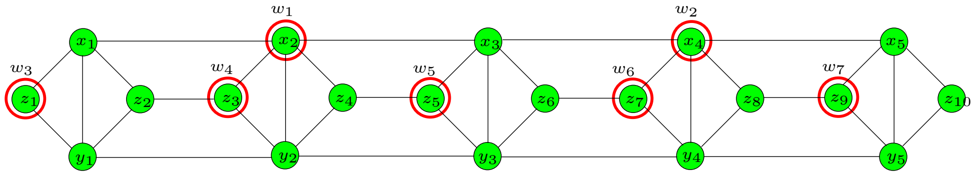
dimana dan jumlah titik $S_{k+1} = 2.n + 2 < |V| = 3.n + 2$ diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan titik $V(TCL_n)$ terhadap Π dan memiliki kardinalitas minimal, karena berdasarkan Teorema 2.1 dinyatakan bahwa $pd(TCL_n) \leq dim(TCL_n) + 1 = k + 1$, sehingga $pd(TCL_n) \leq k + 1$. Oleh karena $pd(TCL_n) \geq k + 1$ dan $pd(TCL_n) \leq k + 1$, dengan demikian $pd(TCL_n) = k + 1$.
□

4.1.6 Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi pada Graf Tangga Permata Dl_n

Untuk $n = 5$ diperoleh dimensi metrik graf tangga permata Dl_5 seperti pada Gambar 4.11.

◊ **Teorema 4.11.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, nilai dimensi metrik graf tangga permata adalah $dim(Dl_n) = \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 2$.*

Bukti. Graf tangga permata adalah salah satu famili dari graf tangga. Graf tangga permata yang dilambangkan Dl_n memiliki titik $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq$

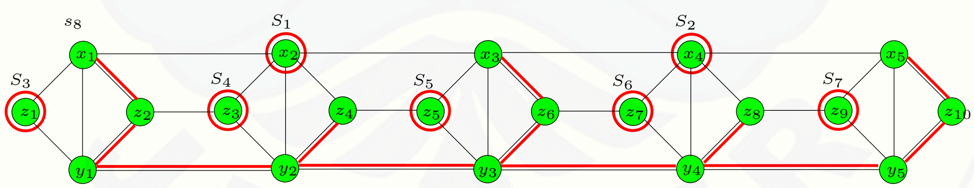


Gambar 4.11 Dimensi Metrik Graf Tangga Permata Dl_5

$i \leq n; 1 \leq j \leq 2n\}$, dan sisi $E(Dl_n) = \{x_ix_{i+1}, y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_jz_{j+1}; 2 \leq j \leq 2n-2, genap\} \cup \{x_iz_{2i-1}, x_iz_{2i}, y_iz_{2i-1}, y_iz_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$, $p = |V|{=}4.n$ dan $q = |E|{=}8.n-3$. Akan ditunjukkan bahwa $dim(Dl_n) \geq \lceil 3(\frac{n+1}{2})\rceil - 2$. Jika kardinalitas $dim(Dl_n) = \lceil 3(\frac{n+1}{2})\rceil - 3$, maka pasti bukan himpunan pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada $\lceil 3(\frac{n+1}{2})\rceil - 2$ titik yaitu $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_{\lceil 3(\frac{n+1}{2})\rceil - 2}\}$, atau dapat ditulis $W = \{x_2, x_4, ..., x_{2.n}, z_1, z_3, z_5, ..., z_{2.n-1}\}$ yang merupakan himpunan pembeda, sehingga $dim(Dl_n) \geq \lceil 3(\frac{n+1}{2})\rceil - 2$.

Sedangkan untuk mengetahui $dim(Dl_n) \leq \lceil 3(\frac{n+1}{2})\rceil - 2$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya diambil himpunan pembeda $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_{\lceil 3(\frac{n+1}{2})\rceil - 2}\}$, atau dapat ditulis $W = \{x_2, x_4, ..., x_{2.n}, z_1, z_3, z_5, ..., z_{2.n-1}\}$, maka diperoleh representasi titik $V(Dl_n)$ terhadap W memiliki koordinat berbeda dan memiliki kardinalitas minimal, sehingga $dim(Dl_n) \leq \lceil 3(\frac{n+1}{2})\rceil - 2$. Oleh karena $dim(Dl_n) \geq \lceil 3(\frac{n+1}{2})\rceil - 2$ dan $dim(Dl_n) \leq \lceil 3(\frac{n+1}{2})\rceil - 2$, maka $dim(Dl_n) = \lceil 3(\frac{n+1}{2})\rceil - 2$. $\square$

Untuk $n = 5$ diperoleh dimensi partisi graf tangga permata Dl_n seperti pada Gambar 4.12.



Gambar 4.12 Dimensi Partisi graf Tangga Permata Dl_n

$\Diamond$ **Teorema 4.12.** *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, nilai dimensi partisi graf tangga permata adalah $pd(Dl_n) = \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1$.*

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $pd(Dl_n) \geq \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1$. Jika kardinalitas $pd(Dl_n) = \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 2$, maka pasti bukan partisi pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada $\lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1$ partisi yang merupakan partisi pembeda yaitu $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{\lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1}\}$ dimana $S_1 = \{x_2\}$, $S_2 = \{x_4\}$,...,$S_3 = \{z_1\}$,$s_4 = \{z_3\}$,$s_5 = \{z_5\}$,..., $S_{\lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1} = \{x_1, y_1, z_2, y_2, z_4, x_3, y_3, z_6, x_5, y_4, z_8 ..., x_{2.n-1}, y_n, z_{2.n}\}$ dan jumlah titik $S_{\lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1} = \lfloor 5(\frac{n+1}{2}) \rfloor - 2 < |V| = 3.n + 2$, sehingga $pd(Dl_n) \geq \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1$.

Untuk mengetahui $pd(Dl_n) \leq dim(Dl_n) + 1 = \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya $dim(Dl_n) = \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 2$ dan $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_{\lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 2}\}$, atau dapat ditulis $W = \{x_2, x_4, ..., x_{2.n}, z_1, z_3, z_5, ..., z_{2.n-1}\}$. Kemudian anggap partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{\lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1}\}$, sedemikian hingga:

$$S_i = \begin{cases} \{x_{2.j} | 1 \leq j \leq n\}; & \text{untuk } 1 \leq i \leq k \\ \{z_{2.j-1} | 1 \leq j \leq n\}; & \text{untuk } 1 \leq i \leq k \\ \{x_{2.j-1}, y_j, z_{2.j} | 1 \leq j \leq n\}; & \text{untuk } i = \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1 \end{cases}$$

dimana jumlah titik $s_{\lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1} = \lfloor 5(\frac{n+1}{2}) \rfloor - 2 < |V| = 3.n + 2$ diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan titik $V(Dl_n)$ terhadap Π dan memiliki kardinalitas minimal, karena berdasarkan Teorema 2.1 dinyatakan bahwa $pd(Dl_n) \leq dim(Dl_n) + 1 = \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1$, sehingga $pd(Dl_n) \leq \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1$. Oleh karena $pd(Dl_n) \geq \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1$ dan $pd(Dl_n) \leq \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1$, dengan demikian $pd(Dl_n) = \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1$. $\square$

4.2 Pembahasan dan Analisis

4.2.1 Pembahasan hasil penelitian

Pada penelitian ini memiliki tujuan untuk menentukan nilai dimensi partisi (pd) dari sebuah konstruksi yang diawali mencari dimensi metrik (dim) dari masing-masing graf khusus dan operasinya. Graf khusus dan operasinya yang digunakan pada penelitian ini, meliputi: graf tangga L_n, graf shackle C_4, v, n, graf komplemen $\overline{L_n}$, graf komposisi $P_n[P_1]$, graf tangga tiga-siklus TCL_n, dan graf tangga permata Dl_n.

Langkah pertama yang dilakukan pada penelitian ini adalah mengetahui berapa sedikitnya titik yang merupakan himpunan pembeda W graf khusus dan operasinya. kemudian, dilakukan kontruksi untuk menentukan apakah himpunan pembeda tersebut memiliki nilai berbeda dan minimal. Dari hasil kontruksi tersebut, didapatkan himpunan pembeda terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$ dari himpunan titik di graf terhubung G dan sebuah titik v di G, k-vektor (k-tuple terurut). Langkah ini dilakukan dengan tujuan untuk menentukan nilai dimensi metrik (dim) dari graf khusus dan operasinya, dan diperoleh beberapa Lema dan Teorema dimensi metrik (dim).

Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai dimensi partisi (pd) dari graf tangga L_n, graf shackle C_4, v, n, graf komplemen $\overline{L_n}$, graf komposisi $P_n[P_1]$, graf tangga tiga-siklus TCL_n, dan graf tangga permata Dl_n. Langkah ini diawali dengan mengetahui kardinalitas dari dimensi partisi misalnya $pd(G) - 1$, maka pasti bukan *resolving* partisi dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Sedangkan untuk mengetahui batas atas dari graf khusus dan operasinya. Untuk mengetahui apakah partisi pembeda tersebut memiliki nilai berbeda dan minimal dengan melakukan konstruksi yaitu dengan memisalkan terdapat sebuah graf terhubung G dan k buah partisi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_k\}$ dimana jumlah titik pada $S_k < |V|$ dari $V(G)$ dan v titik di G. Koordinat v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), ..., d(v, S_k))$. Partisi Π dikatakan partisi pembeda jika k-vektor $(r|\Pi)$ untuk setiap $v \in V(G)$ berbeda. Nilai minimum k agar terdapat k-partisi pembeda dari $V(G)$ adalah dimensi partisi dari $pd(G)$, karena berdasarkan Teorema 2.1 dinyatakan bahwa $pd(G) \leq dim(G) + 1$. Jika nilai dimensi partisi berbeda terhadap Π dan memiliki kardinalitas minimal, maka nilai dimensi partisi (pd).

Dari hasil penelitian diperoleh nilai dimensi metrik (dim) dan dimensi partisi (pd) pada graf khusus dan operasinya sebagai berikut:

Jika graf tangga L_n dengan $n \geq 2$, maka nilai dimensi metriknya adalah $dim(L_n) = 2$

Jika graf tangga L_n dengan $n \geq 2$, maka nilai dimensi partisinya adalah $pd(L_n) = 3$

Jika graf shackle C_4, v, n dengan $n \geq 3$, maka nilai dimensi metriknya adalah $dim(C_4, v, n) = k$ dengan $k \geq 3$

Jika graf shackle C_4, v, n dengan $n \geq 3$, maka nilai dimensi partisinya adalah $pd(C_4, v, n) = k + 1$ dengan $k \geq 3$

Jika graf komplemen $\overline{L_n}$ dengan $n \geq 2$, maka nilai dimensi metriknya adalah $dim(\overline{L_n}) = 2$

Jika graf komplemen $\overline{L_n}$ dengan $n \geq 2$, maka nilai dimensi partisinya adalah $pd(\overline{L_n}) = 3$

Jika graf komposisi $P_n[P_1]$ dengan $n \geq 3$, maka nilai dimensi metriknya adalah $dim(P_n[P_1]) = k$ dengan $k \geq 3$

Jika graf komposisi $P_n[P_1]$ dengan $n \geq 3$, maka nilai dimensi partisinya adalah $pd(P_n[P_1]) = k + 1$ dengan $k \geq 3$

Jika graf tangga tiga-siklus TCL_n dengan $n \geq 3$, maka nilai dimensi metriknya adalah $dim(TCL_n) = k$ dengan $k \geq 3$

Jika graf tangga tiga-siklus TCL_n dengan $n \geq 3$, maka nilai dimensi partisinya adalah $pd(TCL_n) = k + 1$ dengan $k \geq 3$

Jika graf tangga permata Dl_n dengan $n \geq 3$, maka nilai dimensi metriknya adalah $dim(Dl_n) = \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 2$

Jika graf tangga permata Dl_n dengan $n \geq 3$, maka nilai dimensi partisinya adalah $pd(Dl_n) = \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1$

4.2.2 Analisis nilai dimensi metrik dan dimensi partisi

Dalam Analisis nilai dimensi metrik dan dimensi partisi (pd) graf khusus dan operasinya dilakukan dengan tujuan untuk mengetahui pengaruh dari penambahan atau pengurangan terhadap sisi dari tiap-tiap graf yang digunakan. Selain itu, adakah kesamaan nilai dari nilai dimensi metrik dan dimensi partisi yang telah ditemukan, karena pada dasarnya graf yang digunakan tergolong graf yang simetris. Berikut merupakan penjelasan mengenai keterkaitannya:

Pada graf tangga L_n yang merupakan graf khusus memiliki nilai dimensi metrik $dim(L_n) = 2$ dan dimensi partisi $pd(L_n) = 3$ dengan tidak mengurangi atau menambah sisi yang ada. Posisi atau cara menempatkan Π dalam menentukan dimensi partisi graf tangga L_n yaitu dapat menggunakan Π_1, dan Π_2.

Pada graf shackle C_4, v, n diperoleh nilai dimensi metrik $dim(C_4, v, n) = k$ de-ngan $k \geq 3$ dan dimensi partisi $pd(C_4, v, n) = k+1$. hal itu disebabkan, karena sisi pada graf shackle C_4, v, n mengalami penambahan 1 sisi untuk $n \geq 3$ yang bertumpu pada 1 titik sebagai penghubung, sehingga koordinat v terhadap Π memiliki nilai yang berbeda, dimana $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{k+1}\}$ dimana $S_1 = \{x_1\}$, $S_2 = \{x_2\}$, $S_3 = \{x_3\}$,..., $S_{k+1} = \{z_1, y_1, z_2, y_2, ..., y_n, z_{n+1}\}$ dan jumlah titik $S_{k+1} = 2.n + 1 < 3.n + 1$. Graf shackle C_4, v, n terdapat 2 posisi atau cara menempatkan Π dalam menentukan dimensi partisi yaitu dapat menggunakan Π_1, dan Π_2. Berikut adalah representasi titik $V(C_4, v, n)$ terhadap Π berbeda dan memiliki kardinalitas minimal:

$$r(x_i|\Pi) = \begin{cases} (2.i|i = 0,1,2,3,4,5,6,...,i-1,1) \\ (2.i|i = 1,0,1,2,3,4,5,...,i-2,1) \\ (2.i|i = 2,1,0,1,2,3,4,...,i-3,1) \\ (2.i|i = 3,2,1,0,1,2,3,...,i-4,1) \\ (2.i|i = 4,3,2,1,0,1,2,...,i-5,1) \\ (2.i|i = 5,4,3,2,1,0,1,...,i-6,1) \\ \quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ (2.i|i = i-1,...,6,5,4,3,2,1,0,1) & ;\quad \text{untuk}\, 3 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$r(y_i|\Pi) = \begin{cases} (2.i|i = 1,1,2,3,4,5,6,...,i-1,0) \\ (2.i|i = 1,1,1,2,3,4,5,...,i-2,0) \\ (2.i|i = 2,1,1,1,2,3,4,...,i-3,0) \\ (2.i|i = 3,2,1,1,1,2,3,...,i-4,0) \\ (2.i|i = 4,3,2,1,1,1,2,...,i-5,0) \\ (2.i|i = 5,4,3,2,1,1,1,...,i-6,0) \\ \quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ (2.i|i = i-1,...,6,5,4,3,2,1,1,0) & ;\quad \text{untuk}\, 3 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$r(z_i|\Pi) = \begin{cases} (2.i-1|i = 1,2,3,4,5,6,7,...,i-1,0) \\ (2.i-1|i = 1,1,2,3,4,5,6,...,i-2,0) \\ (2.i-1|i = 2,1,1,2,3,4,5,...,i-3,0) \\ (2.i-1|i = 3,2,1,1,2,3,4,...,i-4,0) \\ (2.i-1|i = 4,3,2,1,1,2,3,...,i-5,0) \\ (2.i-1|i = 5,4,3,2,1,1,2,...,i-6,0) \\ (2.i-1|i = 6,5,4,3,2,1,1,...,i-7,0) \\ \quad\vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ (2.i-1|i = i-1,...,7,6,5,4,3,2,1,0) & ; \text{ untuk } 3 \le i \le n \end{cases}$$

Untuk graf hasil operasi yaitu graf komplemen $\overline{L_n}$ diperoleh nilai nilai dimensi metrik $dim(\overline{L_n}) = 2$ dan dimensi partisi $pd(\overline{L_n}) = 3$. Pada graf tersebut dilakukan penambahan 1 sisi dari graf tangga L_n yang menghubungkan kedua titik, ambil $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, dimana $S_1 = \{x_1\}$, $S_2 = \{y_1\}$ dan $S_3 = \{x_2, y_2, x_3, y_3, .., x_n, y_n\}$ dan jumlah titik $S_3 = 2.n - 2 < 2.n$. Nilai dimensi graf komplemen $\overline{L_n}$ memiliki nilai yang sama dengan nilai dimensi partisi graf tangga L_n dan posisi atau cara menempatkan Π dalam menentukan dimensi partisi graf kompisisi $\overline{L_n}$ yaitu dapat menggunakan Π_1, dan Π_2.

Pada graf komposisi $P_n[P_1]$ dilakukan penambahan 2 sisi pada setiap titik dari graf tangga L_n, sehingga semua titik saling terhubung. Agar koordinat v terhadap Π memiliki nilai yang berbeda, maka dilakukan konstruksi, dimana $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{k+1}\}$ dimana $S_1 = \{x_1\}$, $S_2 = \{x_2\}$, $S_3 = \{x_3\}$,..., $S_{k+1} = \{y_1, y_2, y_3, y_4, ..., y_n\}$ dan jumlah titik $S_{k+1} = n < 2.n$. Nilai dimensi partisi graf komposisi $P_n[P_1]$ memiliki nilai yang sama dengan nilai dimensi metrik dan nilai dimensi partisi graf shackle C_4, v, n. Graf komposisi $P_n[P_1]$ terdapat 4 posisi atau cara menempatkan Π dalam menentukan dimensi partisi yaitu dapat menggunakan Π_1, Π_2, Π_3 dan Π_4. Berikut adalah representasi titik $P_n[P_1]$ berbeda terhadap Π dan memiliki kardinalitas minimal:

$$r(x_i|\Pi) = \begin{cases} (i|i = 0, 1, 2, 3, 4, ..., i-1, 1) \\ (i|i = 1, 0, 1, 2, 3, ..., i-2, 1) \\ (i|i = 2, 1, 0, 1, 2, ..., i-3, 1) \\ (i|i = 3, 2, 1, 0, 1, ..., i-4, 1) \\ \quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ (i|i = i-1, ..., 4, 3, 2, 1, 0, 1) & ; \quad \text{untuk } 3 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$r(y_i|\Pi) = \begin{cases} (i|i = 1, 1, 2, 3, 4, ..., i-1, 0) \\ (i|i = 1, 1, 1, 2, 3, ..., i-2, 0) \\ (i|i = 2, 1, 1, 1, 2, ..., i-3, 0) \\ (i|i = 3, 2, 1, 1, 1, ..., i-4, 0) \\ \quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ (i|i = i-1, ..., 4, 3, 2, 1, 1, 0) & ; \quad \text{untuk } 3 \leq i \leq n \end{cases}$$

Pada graf tangga tiga-siklus TCL_n dilakukan penambahan 1 titik dan 3 sisi pada setiap titik dari graf tangga L_n, sehingga membentuk graf tangga yang memiliki tiga-siklus di dalamnya. Agar koordinat v terhadap Π memiliki nilai yang berbeda, maka dilakukan konstruksi, dengan memisalkan $\Pi = \{S_1, S_2, s_3, ..., S_{k+1}\}$ dimana $S_1 = \{x_1\}$, $S_2 = \{x_2\}$, $S_3 = \{x_3\}$,..., $S_{k+1} = \{y_1, z_1, y_2, z_2, y_3, z_3, ..., y_n, z_n\}$ dan jumlah titik $S_{k+1} = 2.n+2 < 3.n+2$. Dari hasil konstruksi tersebut diperoleh nilai dimensi partisi $pd(TCL_n) = k + 1$ dengan $k \geq 3$. Nilai dimensi partisi graf komposisi TCL_n memiliki nilai yang sama dengan nilai dimensi partisi graf shackle C_4, v, n dan graf komposisi $P_n[P_1]$. Berikut adalah representasi titik TCL_n

terhadap Π berbeda dan memiliki kardinalitas minimal:

$$r(x_i|\Pi) = \begin{cases} (i|i = 0, 2, 3, 4, 5, ..., i, 1) \\ (i|i = 2, 0, 2, 3, 4, ..., i-1, 1) \\ (i|i = 3, 2, 0, 2, 3, ..., i-2, 1) \\ (i|i = 4, 3, 2, 0, 2, ..., i-3, 1) \\ \quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ (i|i = i, ..., 5, 4, 3, 2, 0, 1) & ; \quad \text{untuk } 2 \le i \le n \end{cases}$$

$$r(y_i|\Pi) = \begin{cases} (i|i = 1, 2, 3, 4, 5, ..., i-1, 0) \\ (i|i = 1, 1, 2, 3, 4, ..., i-2, 0) \\ (i|i = 2, 1, 1, 2, 3, ..., i-3, 0) \\ (i|i = 3, 2, 1, 1, 2, ..., i-4, 0) \\ (i|i = 4, 3, 2, 1, 1, ..., i-5, 0) \\ \quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ (i|i = i-1, ..., 5, 4, 3, 2, 1, 0) & ; \quad \text{untuk } 4 \le i \le n \end{cases}$$

$$r(y_i|\Pi) = \begin{cases} (i|i = 1, 3, 4, 5, 6, ..., i, 0) \\ (i|i = 1, 1, 3, 4, 5, ..., i-1, 0) \\ (i|i = 3, 1, 1, 3, 4, ..., i-2, 0) \\ (i|i = 4, 3, 1, 1, 3, ..., i-3, 0) \\ (i|i = 5, 4, 3, 1, 1, ..., i-5, 0) \\ \quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ (i|i = i, ..., 6, 5, 4, 3, 1, 0) & ; \quad \text{untuk } 4 \le i \le n \end{cases}$$

Pada graf tangga permata Dl_n dilakukan penambahan 4 titik dan 8 sisi pada setiap titik dari graf tangga L_n, dan membentuk graf tangga yang berbentuk menyerupai permata yang saling terhubung, sehingga dinamakan graf tangga permata Dl_n. Nilai dimensi metrik dari graf tangga permata Dl_n adalah $dim(Dl_n) = \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 2$. Untuk menentukan dimensi partisinya, maka dilakukan konstruksi, dengan memisalkan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, ..., S_{\lceil 3(\frac{n+1}{2})\rceil - 1}\}$ dimana $s_1 = \{x_2\}$, $S_2 = \{x_4\}$,...,$S_3 = \{z_1\}$,$S_4 = \{z_3\}$,$S_5 = \{z_5\}$,..., $S_{\lceil 3(\frac{n+1}{2})\rceil - 1} = \{x_1, y_1, z_2, y_2, z_4, x_3, y_3, z_6, x_5, y_4, z_8..., x_{2.n-1}, y_n, z_{2.n}\}$ dan jumlah titik $S_{\lceil 3(\frac{n+1}{2})\rceil - 1} = \lfloor 5(\frac{n+1}{2})\rfloor - 2 < 3.n+2$. Dari hasil konstruksi tersebut diperoleh nilai dimensi partisi $pd(Dl_n) = \lceil 3(\frac{n+1}{2})\rceil - 1$. Nilai dimensi partisi graf komposisi $L_n[L_1]$ memiliki nilai yang berbeda dengan nilai dimensi partisi graf tangga L_n, graf shackle C_4, v, n, graf komplemen $\overline{L_n}$, graf komposisi dari graf tangga $P_n[P_1]$ dan graf tangga tiga-siklus TCL_n. Graf tangga permata Dl_n terdapat 4 posisi atau cara menempatkan Π dalam menentukan dimensi partisi yaitu dapat menggunakan Π_1, Π_2, Π_3 dan Π_4. Berikut adalah representasi titik Dl_n terhadap Π dan memiliki kardinalitas minimal:

$$f(x_i|\Pi) = \begin{cases} (i|i = 1, 3, 5, ..., 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., i, 0) \\ (i|i = 0, 2, 4, ..., 2, 1, 2, 3, 4, 5, ..., i-1, 1) \\ (i|i = 1, 1, 3, ..., 3, 2, 1, 2, 3, 4, ..., i-2, 0) \\ (i|i = 2, 0, 2, ..., 4, 3, 2, 1, 2, 3, ..., i-3, 1) \\ (i|i = 3, 1, 3, ..., 5, 4, 3, 2, 1, 2, ..., i-4, 0) \\ \quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ (i|i = ..., 4, 2, 0, i, ..., 6, 5, 4, 3, 2, 1, 1) & ; \quad \text{untuk } 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f(y_i|\Pi) = \begin{cases} (i|i = 2, 4, 6, ..., 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., i, 0) \\ (i|i = 1, 3, 5, ..., 2, 1, 2, 3, 4, 5, ..., i-2, 0) \\ (i|i = 2, 2, 4, ..., 3, 2, 1, 2, 3, 4, ..., i-3, 0) \\ (i|i = 3, 1, 3, ..., 4, 3, 2, 1, 2, 3, ..., i-4, 0) \\ (i|i = 4, 2, 2, ..., 5, 4, 3, 2, 1, 2, ..., i-4, 0) \\ \quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ (i|i = ..., 5, 3, 1, i, ..., 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 0) & ; \quad \text{untuk } 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

Untuk z_i bernilai ganjil diperoleh fungsi sebagai berikut:

$$f(z_i|\Pi) = \begin{cases} (i|i = 2, 4, 6, ..., 0, 3, 4, 5, 6, 7, ..., i+1, 1) \\ (i|i = 1, 3, 5, ..., 3, 0, 3, 4, 5, 6, ..., (i+1)-1, 1) \\ (i|i = 2, 2, 4, ..., 4, 3, 0, 3, 4, 5, ..., (i+1)-2, 1) \\ (i|i = 3, 1, 3, ..., 5, 4, 3, 0, 3, 4, ..., (i+1)-3, 1) \\ (i|i = 4, 2, 2, ..., 6, 5, 4, 3, 0, 3, ..., (i+1)-4, 1) \\ \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ (...5, 3, 1, i, ..., 7, 6, 5, 4, 3, 0, 1) \quad ; & \text{untuk } 2 \le i \le n, i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Untuk z_i bernilai genap diperoleh fungsi sebagai berikut:

$$f(z_i|\Pi) = \begin{cases} (i|i = 2, 4, 6, ..., 2, 1, 4, 5, 6, 7, ..., i+1, 0) \\ (i|i = 1, 3, 5, ..., 3, 2, 1, 4, 5, 6, ..., (i+1)-1, 0) \\ (i|i = 2, 2, 4, ..., 4, 3, 2, 1, 4, 5, ..., (i+1)-2, 0) \\ (i|i = 3, 1, 3, ..., 5, 4, 3, 2, 1, 4, ..., (i+1)-3, 0) \\ (i|i = 4, 2, 2, ..., 6, 5, 4, 3, 2, 1, ..., (i+1)-6, 0) \\ \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ (i|i = ..., 5, 3, 1, i, ..., 7, 6, 5, 4, 1, 2, 0) \quad ; & \text{untuk } 2 \le i \le n, i \text{ genap} \end{cases}$$

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan analisis dan pembahasan adalah sebagai berikut:

1. Nilai dimensi metrik (dim) dari graf khusus dan operasinya diantaranya: dimensi metrik graf tangga L_n dengan $n \geq 2$ adalah 2, dimensi metrik graf shackle C_4, v, n dengan $n \geq 3$ adalah k, dimensi metrik graf komplemen $\overline{L_n}$ dengan $n \geq 2$ adalah 2, dimensi metrik graf komposisi $P_n[P_1]$ dengan $n \geq 3$ adalah k, dimensi metrik graf tangga tiga-siklus TCL_n dengan $n \geq 3$ adalah k, dimensi metrik graf tangga permata Dl_n dengan $n \geq 2$ adalah $\lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 2$. Sedangkan nilai dimensi partisi (pd) dari graf khusus dan operasinya diantaranya: dimensi partisi graf tangga L_n dengan $n \geq 2$ adalah 3, dimensi partisi graf shackle C_4, v, n dengan $n \geq 3$ adalah $k+1$, dimensi partisi graf komplemen $\overline{L_n}$ dengan $n \geq 2$ adalah 3, dimensi partisi graf komposisi $P_n[P_1]$ dengan $n \geq 3$ adalah $k+1$, dimensi partisi graf tangga tiga-siklus TCL_n dengan $n \geq 3$ adalah $k+1$, dimensi partisi graf tangga permata Dl_n dengan $n \geq 2$ adalah $\lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1$.

2. Nilai dimensi partisi (pd) memiliki kesamaan dari graf khusus dan operasinya akibat dari penambahan sisi pada graf khusus dan juga hasil operasinya, kecuali pada graf tangga permata Dl_n. Berikut kesamaan nilai dimensi partisi yang diperoleh:
   $pd(L_n) = pd(\overline{L_n}) = 3$
   $pd(C_4, v, n) = pd(P_n[P_1]) = pd(TCL_n) = k + 1$
   $pd(Dl_n) = \lceil 3(\frac{n+1}{2}) \rceil - 1$

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai penerapan teknik konstruksi graf, dimensi metrik (dim) dan dimensi partisi (pd), maka peneliti memberikan saran pembaca dapat melakukan penelitian pada dimensi metrik (dim) dan dimensi partisi (pd) untuk graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

A. Budi, dan Darmaji. 2012. Dimensi Metrik Graf Pohon Bentuk Tertentu. *Jurnal: Teknik ITS*. No. 1, Vol: 1

Chartrand, G., Salehi, E., dan Zhang, P., 2000. The Partition dimension of a graph. *Aequation Math*. No. 59, Vol: 45-54.

Darmaji, 2011. *Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung* . (Disertasi). Jurusan Matematika FMIPA ITB

F. Harary, dan R. A. Melter. 1976. On the metric dimension of a graph. *Ars Combin*. No. 2, Vol: 191-195

Harary, F. 1969. *Graph Teory*. Wesley Publishing Company,Inc.

Javaid, I., dan Shokat S. 2008. On the partition dimension of some wheel related graphs. *Prime Research in Mathematica*. No. 4, Vol: 154-164

Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit*. Informatika Bandung.

R. Amalia, dan Darmaji. 2012. Dimensi Partisi pada Graf Serupa Roda dengan Penambahan Anting. *Jurnal: Teknik ITS*. No. 1, Vol: 1

R. Riza. 2012. Dimensi Partisi pada Graf Gir. *Jurnal: MIPA UNAND*. No.1 2, Vol: 1

Slamin. 2009. *Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember

Septiana, E dan Budi, R. 2012. Dimensi Metrik Pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang, dan Graf Bipartit Komplit. *Jurnal:*

Universitas Negeri Surabaya. No. 1, Vol: 1

S. Khuller, dan B. Raghavachari, A. 1996. Resenfelt, Landmark in Graph, Discret. *Appl. Math*. No. 70, Vol: 217-229.

Tomescu, I., Javaid, I., dan Slamin. 2007. On the partition dimension and connected partition of wheels. *Ars Combin*. No. 84, Vol: 311-317

Yogi, Suhud, dan Mudjiati. 2012. Dimensi Pertisi Pada Graf hasil Korona $C_m \bigodot K_m$. *Jurnal: Teknik ITS* No. 1, Vol: 1