



**ANALISA PELABELAN SELIMUT $(a, d) - \mathcal{H}$ -ANTI
AJAIB SUPER PADA GRAF RANTAI DAN
KAITANNYA DENGAN KETERAMPILAN
BERPIKIR TINGKAT TINGGI**

SKRIPSI

Oleh

Dina Rizki Anggraini

NIM 110210101081

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2015



**ANALISA PELABELAN SELIMUT $(a, d) - \mathcal{H}$ -ANTI
AJAIB SUPER PADA GRAF RANTAI DAN
KAITANNYA DENGAN KETERAMPILAN
BERPIKIR TINGKAT TINGGI**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

Dina Rizki Anggraini

NIM 110210101081

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2015

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Ayahanda Kaharudin, S.Pd dan Ibunda Poniyatini, S.Pd, serta kakak saya Eko Budi Priyantono, S.Pd yang selalu memberi kasih sayang serta menjadi motivator terbaik.
2. Drs. Dafikk, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I dan Susi Setiawani, S.Si., M.Sc, selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan ilmu, bimbingan, motivasi, bantuan dan kesabaran dalam mengerjakan skripsi ini.
3. Para guru dan dosen yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran.
4. Sahabat-sahabatku "SM": Ayu, Rizky, Marlia, Rinkar, Wuria, Inge, dan Shofia yang senantiasa membantuku serta menorehkan pengalaman-pengalaman hidup yang berharga dan indah.
5. Teman seperjuanganku : Inge, Ridho, Agnes, Husnul, Masyita, Rizky Titie, Sindy, dan pecinta graf lainnya yang telah membagi ilmu dan pengalaman berharga.
6. Teman- teman PPL: Irwan Putra, Suci Rahmawati, Tyas, Rizal Zul Hilmi, Riska, Yenny, Ade Kurnia, dan Taufik serta teman-teman Pendidikan Matematika angkatan 2011 terima kasih atas dorongan semangat dan bantuannya selama masa proses penyelesaian skripsiku;
7. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

HALAMAN MOTTO

"Jika kamu berbuat baik berarti kamu berbuat baik pada bagi dirimu sendiri, dan jika kamu berbuat jahat, maka kejahatan itu untuk dirimu sendiri"

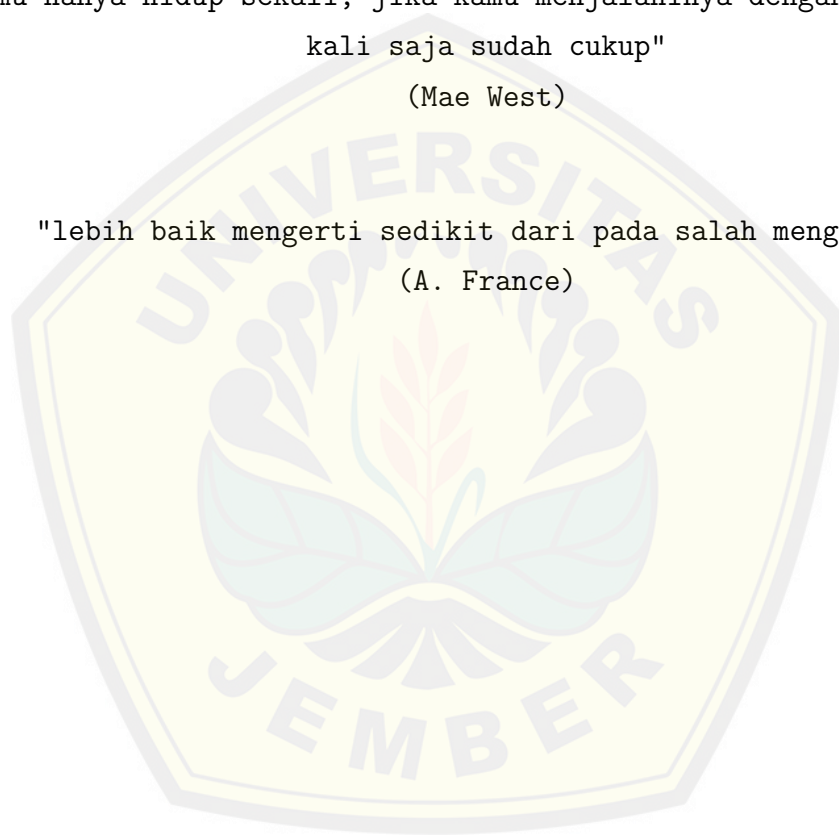
(Q.S. Al-Isra' : 7)

"Kamu hanya hidup sekali, jika kamu menjalaninya dengan baik, satu kali saja sudah cukup"

(Mae West)

"lebih baik mengerti sedikit dari pada salah mengerti."

(A. France)



HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dina Rizki Anggraini

NIM : 110210101081

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Analisa Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2015

Yang menyatakan,

Dina Rizki Anggraini

NIM. 110210101081

SKRIPSI

**ANALISA PELABELAN SELIMUT $(a, d) - \mathcal{H}$ -ANTI
AJAIB SUPER PADA GRAF RANTAI DAN
KAITANNYA DENGAN KETERAMPILAN
BERPIKIR TINGKAT TINGGI**

Oleh

Dina Rizki Anggraini
NIM 110210101081

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Dosen Pembimbing 2 : Susi Setiawani, S.Si., M.Sc

PERSETUJUAN

**ANALISA PELABELAN SELIMUT $(a, d) - \mathcal{H}$ -ANTI AJAIB SUPER
PADA GRAF RANTAI DAN KAITANNYA DENGAN
KETERAMPILAN BERPIKIR
TINGKAT TINGGI**

SKRIPSI

dDiajukan untuk dipertahankan di depan Tim Penguji sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaikan Program Pendidikan Sarjana Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Nama Mahasiswa : Dina Rizki Anggraini
NIM : 110210101081
Jurusan : Pendidikan MIPA
Program Studi : Pendidikan Matematika
Angkatan Tahun : 2011
Daerah Asal : Probolinggo
Tempat, Tanggal Lahir : Probolinggo, 11 September 1993

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19680802 199303 1 004

Susi Setiawani, S.Si., M.Sc
NIP.19700307 199512 2 001

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "ANALISA PELABELAN SELIMUT $(a, d) - \mathcal{H}$ -ANTI AJAIB SUPER PADA GRAF RANTAI DAN KAITANNYA DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI" telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan pada:

hari : Senin

tanggal : 8 Juni 2015

tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua,

Sekretaris,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP. 19680802 199303 1 004

Susi Setiawani, S.Si., M.Sc

NIP. 19700307 199512 2 001

Anggota I,

Anggota II,

Prof. Drs. Slamini, M.Comp.Sc., Ph.D

NIP. 19670420 199201 1 001

Dr. Hobri, S.Pd., M.Pd

NIP. 19730506 199702 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Jember,

Prof. Dr. Sunardi, M.Pd

NIP. 19540501 198303 1 005

RINGKASAN

Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ Anti Ajaib Super Pada Graf Rantai dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi; Dina Rizki Anggraini, 110210101081; 2015: 126 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Salah satu topik dalam graf adalah pelabelan graf. salah satu pelabelan graf yaitu pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super, dimana a bobot selimut terkecil dan d nilai beda. Graf Rantai dinotasikan dengan K_4P_n merupakan pengembangan dari graf lengkap yang membentuk lintasan. Graf ini merupakan graf yang memiliki berindeks n . Gabungan diskonektif graf Rantai merupakan gabungan saling lepas dari k duplikat graf Rantai dan dinotasikan dengan mK_4P_n . Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui batas atas pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada graf Rantai konektif dan diskonektif, apakah graf Rantai memiliki pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super, dan keterkaitan proses menemukan pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super pada graf Rantai dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif aksiomatik, yaitu dengan menetapkan pengertian dasar selimut \mathcal{H} anti ajaib super. Kemudian diterapkan dalam pelabelan selimut- \mathcal{H} anti ajaib super pada graf Rantai. Hasil penelitian ini adalah teorema baru dan batas atas serta keterkaitan keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super.

Graf Rantai konektif memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super untuk $d = \{0, 1, 2, \dots, 48\}$. Hasil Penelitian ini. Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa Graf Rantai konektif K_4P_n terdapat fungsi bijektif pelabelan selimut yaitu $(18n + 37, 48)$, $(24n + 31, 36)$, $(54n + 1, 24)$, $(31n + 24, 22)$, $(33n + 22, 18)$, $(34n + 21, 16)$, $(35n + 20, 14)$, $(36n + 19, 12)$, $(37n + 18, 10)$, $(38n + 17, 8)$, $(39n + 16, 6)$, $(40n + 15, 4)$, $(41n + 14, 2)$, dan $(42n + 14, 0) - K_4$ anti ajaib super untuk $n \geq 2$. Terdapat konjektur pelabelan titik selimut pada graf Rantai K_sP_n yaitu ada pelabelan titik selimut $(\frac{s^2+s}{2}, s^2 - s) - K_s$ anti ajaib pada graf

Rantai K_sP_n untuk $s \geq 2$ dan $n \geq 2$. Konjektur pelabelan selimut yaitu ada pelabelan selimut $(a, d) - K_s$ anti ajaib super pada graf Rantai K_sP_n untuk $s \geq 2$ dan $n \geq 2$.

Graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super untuk $d < 50$. Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa Graf Rantai diskonektif mK_4P_n terdapat fungsi bijektif pelabelan selimut yaitu $(21mn + 9m + 25, 40)$, $(69mn - 28m - 12n + 28, 32)$, $(29mn + 2m - 2n + 28, 28)$, $(61mn - 10n - 22m + 28, 20)$, $(37mn - 4m - 4n + 28, 16)$, $(36mn + 8m + 13, 10)$, $(37mn + 8m + 12, 8)$, $(38mn + 8m + 11, 6)$, $(39mn + 8m + 10, 4)$, dan $(40mn + 8m + 9, 2) - K_4$ anti ajaib super untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$.

Kaitan antara keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super yakni mengingat yaitu mengidentifikasi famili graf, memahami yaitu menghitung jumlah titik p dan sisi q , menentukan batas atas nilai beda d pada graf Rantai, menerapkan yaitu menentukan label titik dan menentukan fungsi bijektif bobot titik selimut, menganalisa yaitu menentukan label sisi dan fungsi bijektif sisi, menegembnagkan fungsi sisi dan bobot total, mengevaluasi yaitu membuktikan kebenaran fungsi dan mencipta yaitu tercipta teorema baru.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Ketua Laboratorium Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan MIPA FKIP;
5. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I dan Susi Setiawani, S.Si., M.Sc, selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
6. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
7. Semua pihak yang turut berperan dalam penyelesaian skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PERSETUJUAN	vi
HALAMAN PENGESAHAN	vii
RINGKASAN	viii
KATA PENGANTAR	x
DAFTAR ISI	xii
DAFTAR GAMBAR	xvi
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMBANG	xviii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
2 TINJAUAN PUSTAKA	6
2.1 Terminologi Dasar Graf	6
2.2 Jenis-jenis graf	11
2.3 Graf Khusus	12
2.3.1 Graf khusus populer (<i>Well – known Special Graph</i>)	13
2.3.2 Graf khusus yang belum populer (<i>Well – defined special graph</i>)	17
2.4 Graf Rantai	23
2.5 Aplikasi Graf	24
2.6 Fungsi dan Barisan	26
2.6.1 Fungsi	26

2.6.2	Barisan	27
2.7	Pelabelan Graf	29
2.7.1	Definisi Pelabelan Graf	29
2.7.2	Pelabelan Selimut $\mathcal{H}(a, d)$ Anti Ajaib Super	29
2.7.3	Batas Atas Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ Anti Ajaib Super	31
2.8	Aksioma, Lemma, Teorema, Corollary, Konjektur dan Open Problem	31
2.9	Berpikir Tingkat Tinggi	32
2.10	Hasil Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ Anti Ajaib	33
3	METODE PENELITIAN	35
3.1	Metode Penelitian	35
3.2	Definisi Operasional	35
3.3	Teknik Penelitian	38
3.4	Observasi	38
4	HASIL DAN PEMBAHASAN	41
4.1	Batas Atas Pelabelan Selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n konektif dan diskonektif	41
4.2	Pelabelan Selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib Super pada Graf Rantai Konektif K_4P_n	44
4.3	Pelabelan Selimut $(a, d) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif	67
4.4	Berpikir Tingkat Tinggi dalam Pelabelan Selimut $(a, d) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n	92
4.5	Hasil dan Pembahasan	108
5	KESIMPULAN DAN SARAN	115
5.1	Kesimpulan	115
5.2	Saran	116
	DAFTAR PUSTAKA	117

DAFTAR GAMBAR

2.1	Jembatan Konigsberg	6
2.2	Graf Kosong	7
2.3	Contoh Sebuah Graf	8
2.4	Contoh Graf dengan Subgrafnya	9
2.5	Gabungan Saling Lepas Graf	10
2.6	Graf Isomorfik	10
2.7	Graf Sederhana dan Tidak Sederhana	11
2.8	Graf Tidak berarah dan Berarah	12
2.9	Graf Tak Berhingga	13
2.10	Graf Lengkap	13
2.11	Graf Bintang S_6	14
2.12	Graf Lingkaran (Roosen, 2003)	15
2.13	Graf Teratur	15
2.14	Graf Roda (Roosen, 2003)	16
2.15	Graf Planar(Munir,2005)	16
2.16	Graf Bipartit	17
2.17	Graf Buku Segitiga Bt_n	17
2.18	Graf UFO $U_{m,n}$	18
2.19	Graf Tunas Kelapa $CR_{n,m}$	18
2.20	Graf Ulat Sutra Sw_n	19
2.21	Graf Tribun \mathfrak{T}_n	19
2.22	Graf Tangga Permata Dl_3	20
2.23	Graf Rantai Pentagon	20
2.24	Graf Roket $R_{m,n}$	21
2.25	Graf Lampion $\mathcal{L}_{n,m}$	22
2.26	Graf Gunung M_{2n} dengan $n = 2, M_4$	23
2.27	Graf Rantai K_4P_n	24
2.28	Pelabelan Titik dan Sisi Graf Lengkap lintasan $d = 48$	25
2.29	Aplikasi Graf	27

2.30 (a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif, dan (c) Fungsi Bijektif . . . 28

2.31 Tahapan Taksonomi Bloom 33

3.1 Graf Rantai Konektif K_4P_3 36

3.2 Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n 37

3.3 Observasi Awal Graf Rantai Konektif (K_4P_n) 39

3.4 Rancangan Penelitian 40

4.1 Pelabelan Selimut $(18n + 37, 48) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n 47

4.2 Pelabelan Selimut $(24n + 31, 36) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n 48

4.3 Pelabelan Selimut $(54n + 1, 24) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n 50

4.4 Pelabelan Selimut $(31n + 24, 22) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n 51

4.5 Pelabelan Selimut $(33n + 22, 18) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n 53

4.6 Pelabelan Selimut $(34n + 21, 16) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n 54

4.7 Pelabelan Selimut $(35n + 20, 14) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n 56

4.8 Pelabelan Selimut $(36n + 19, 12) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n 57

4.9 Pelabelan Selimut $(37n + 18, 10) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n 59

4.10 Pelabelan Selimut $(38n + 17, 8) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n 60

4.11 Pelabelan selimut $(39n + 16, 6) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n 62

4.12 Pelabelan Selimut $(40n + 15, 4) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n 63

4.13 Pelabelan Selimut $(41n + 14, 2)$ - K_4 Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n	65
4.14 Pelabelan Selimut $(42n + 13, 0)$ - K_4 aAnti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n	66
4.15 Pelabelan Selimut $(21mn + 9m + 25, 40)$ - K_4 Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n	70
4.16 Pelabelan Selimut $(69mn - 28m - 12n + 28, 32)$ - K_4 Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n	73
4.17 Pelabelan Selimut $(29mn + 2m - 2n + 28, 28) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n	75
4.18 Pelabelan Selimut $(61mn - 10n - 22m + 28, 20) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n	77
4.19 Pelabelan Selimut $(37mn - 4m - 4n + 28, 16) - K_4$ aAnti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n	80
4.20 Pelabelan Selimut $(36mn + 8m + 13, 10) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n	82
4.21 Pelabelan Selimut $(37mn + 8m + 12, 8) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n	84
4.22 Pelabelan Selimut $(38mn + 8m + 11, 6) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n	86
4.23 Pelabelan Selimut $(39mn + 8m + 10, 4) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n	89
4.24 Pelabelan Selimut $(40mn + 8m + 9, 2) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n	91
4.25 Graf Rantai K_4P_n	92
4.26 Jumlah titik dan sisi graf pada K_4P_2 (a), K_4P_3 (b), dan K_4P_4 (c)	94
4.27 Bobot Titik Graf Rantai (K_4P_n) untuk $n = 3$	96
4.28 Pelabelan Titik Graf Rantai (K_4P_n) untuk $n = 3$	96
4.29 Bobot Titik Graf Rantai (K_4P_n) untuk $n = 5$	97
4.30 Pelabelan Titik Graf Rantai (K_4P_n) untuk $n = 5$	97
4.31 Pelabalen Titik Graf Rantai Diskonektif	99

4.32	Bobot Titik Graf Rantai Diskonektif	99
4.33	pelabelan titik selimut $(21, 30) - K_6$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_s P_n$	111
4.34	pelabelan selimut $(a, d) - K_s$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_s P_n$	112



DAFTAR TABEL

2.1 Ringkasan Pelabelan Selimut (a, d) - \mathcal{H} Anti Ajaib Super. 34



DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
v_n	=	Titik ke- n pada suatu graf
e_n	=	Sisi ke- n dari suatu graf
$ V(G) $	=	Banyaknya titik dari graf G yang disebut <i>order</i>
$ E(G) $	=	Banyaknya sisi dari graf G yang disebut ukuran (<i>size</i>)
d	=	Nilai beda barisan bobot total
a	=	Bobot sisi terkecil yang merupakan suku pertama barisan
K_4P_n	=	Graf rantai, dimana n adalah banyaknya graf lengkap yang membentuk lintasan
mK_4P_n	=	Gabungan graf Rantai diskonektif, dimana m menyatakan jumlah <i>copy</i> dari graf Rantai
x_i	=	Titik x ke- i pada graf Rantai
y_j	=	Titik y ke- j pada graf Rantai
z_i	=	Titik z ke- i pada graf Rantai
x_i^k	=	Titik x ke- i <i>copy</i> ke- k pada graf Rantai diskonektif
y_j^k	=	Titik y ke- j <i>copy</i> ke- k pada graf Rantai diskonektif
z_i^k	=	Titik z ke- i <i>copy</i> ke- k pada graf Rantai diskonektif
f	=	fungsi pada graf Rantai konektif
g	=	fungsi pada graf Rantai diskonektif
w_f	=	fungsi bobot titik pada graf Rantai konektif
w_f	=	fungsi bobot total pada graf Rantai konektif
w_g	=	fungsi bobot titik pada graf Rantai diskonektif
W_g	=	fungsi bobot total pada graf Rantai diskonektif

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Ilmu pengetahuan dan teknologi semakin berkembang seiring dengan kemajuan jaman dan kebutuhan manusia. Matematika merupakan ilmu yang universal yang mendasari perkembangan teknologi modern. Matematika mempunyai peranan penting dalam berbagai disiplin ilmu dan memajukan daya pikir manusia. Perkembangan pesat dibidang teknologi, informasi, dan komunikasi dilandasi oleh perkembangan matematika dibidang Teori Bilangan, Aljabar, Matematika Diskrit, dan lain sebagainya.

Pemecahan masalah merupakan fokus matematika. Matematika dapat melatih kemampuan untuk berpikir, terutama ketika memecahkan masalah-masalah dalam matematika. Salah satu keterampilan berpikir adalah berpikir tingkat tinggi (*Higher Order Thinking Skill*). Kemampuan berpikir tingkat tinggi merupakan suatu kemampuan berpikir yang tidak hanya membutuhkan kemampuan mengingat saja namun juga membutuhkan kemampuan lain yang lebih tinggi yaitu menganalisis, mengevaluasi, dan mengkreasi.

Taksonomi Bloom merupakan suatu teori yang membahas keterampilan berpikir tingkat tinggi. Taksonomi Bloom membahas tiga ranah aspek kognitif yaitu aspek analisa, aspek evaluasi, dan aspek mencipta. Kemampuan berpikir tingkat tinggi pada matematika contohnya seperti kemampuan berpikir kreatif dan memecahkan masalah matematis. Berpikir tingkat tinggi sangat diperlukan karena setiap orang pasti dihadapkan pada berbagai masalah yang harus dipecahkan dan menuntut pemikiran tingkat tinggi dalam memecahkan masalah yang dihadapi, sehingga berpikir tingkat tinggi membantu kita dalam menghadapi tantangan hidup.

Matematika memiliki beberapa cabang ilmu seperti Statistika, Aljabar, Kalkulus, Kombinatorik, Matematika Diskrit dan lain lain. Salah satu cabang ilmu matematika yang sedang dikaji yaitu Matematika Diskrit yang didalamnya memuat

Teori Graf. Teori Graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Graf merupakan salah satu topik pada Teori Graf. Graf adalah salah satu metode yang sering digunakan untuk mencari solusi dari permasalahan diskrit dalam dunia nyata. Dalam kehidupan sehari-hari, graf digunakan untuk menggambarkan struktur yang ada. Tujuannya adalah sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan cacah yang disebut label. Pelabelan graf pertama kali muncul pada pertengahan tahun 1960-an yang diawali sebuah hipotesis oleh Ringel dan Rosa (dalam Dafik, 2007:17). Pelabelan graf merupakan suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif. Elemen-elemen graf itu sendiri meliputi himpunan titik, himpunan sisi, himpunan titik dan sisi. Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya terutama pada sektor transportasi, navigasi, sistem komunikasi dan lain lain. Berdasarkan elemen-elemen yang dilabeli, pelabelan dibagi menjadi 3 jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total.

Pelabelan berkembang menjadi pelabelan graceful, pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib dan lain lain. Sedláček mendefinisikan bahwa suatu graf dikatakan ajaib, jika sisi-sisinya dapat dilabeli dengan bilangan bulat positif sehingga jumlah label sisi yang terkait pada setiap titik selalu sama. Pelabelan ajaib terdiri dari beberapa jenis pelabelan yaitu pelabelan total titik ajaib, pelabelan total sisi ajaib, pelabelan total titik ajaib super, dan pelabelan total sisi ajaib super, sedangkan pada pelabelan anti ajaib terdapat pelabelan total titik anti ajaib dan pelabelan total sisi anti ajaib.

Pelabelan anti ajaib adalah pengembangan dari pelabelan ajaib yang dilakukan oleh Hartsfield dan Ringel (1990). Mereka mendefinisikan bahwa suatu graf G yang memiliki verteks sebanyak $v_G = |V| = |V(G)|$ dan $e_G = |E| = |E(G)|$ disebut anti ajaib, jika sisi-sisinya dapat dilabeli dengan $\{1, 2, \dots, e_G\}$ sehingga setiap titik mempunyai bobot titik yang berbeda. Gutiérrez dan Lladó (2005) memperkenalkan pelabelan total \mathcal{H} -ajaib dengan menggunakan konsep selimut-

\mathcal{H} . Suatu selimut dari G adalah $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \dots, \mathcal{H}_k\}$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf \mathcal{H}_i , untuk suatu $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, \mathcal{H}_i isomorfik dengan suatu subgraf \mathcal{H} , maka \mathcal{H} dikatakan suatu selimut- \mathcal{H} dari G .

Salah satu penelitian tentang pelabelan total selimut pernah dilakukan oleh Inayah (2013), tentang pelabelan selimut $(a, d) - C_h$ -anti ajaib super pada graf kipas dan graf roda. Inayah mengembangkan suatu pelabelan selimut \mathcal{H} anti ajaib, dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib pada graf G adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlah yang merupakan deret aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d\}$. Inayah meneliti tentang pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib pada graf fan F_n dengan $d \in \{3, 2h - 5, 2h - 1, 6h - 3; 3 \leq h \leq n + 1\}$.

Pada penelitian ini dibahas tentang ketekaitan pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada graf Rantai, dinotasikan $mK_4 - P_n$, dengan $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ tumbuhnya berpikir tingkat tinggi karena belum pernah ditemukan sebelumnya. Oleh karena itu, pada penelitian ini penulis memilih judul "Analisa Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

- berapa batas atas pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada graf Rantai konektif dan diskonektif?
- apakah graf Rantai konektif memiliki pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super?
- apakah graf Rantai diskonektif memiliki pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super?
- bagaimana keterkaitan keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada graf Rantai?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi pada :

- a. graf sederhana, yaitu graf yang tidak mempunyai loop dan sisi ganda;
- b. graf Rantai konektif disimbolkan dengan K_4P_n dan gabungan graf Rantai diskonektif disimbolkan dengan mK_4P_n , dengan $m \geq 2$, $n \geq 2$; $m, n \in \mathbb{N}$. Dalam penelitian ini, m merupakan banyaknya gabungan graf Rantai dan n merupakan ketentuan dari definisi graf Rantai;
- c. menggunakan Taksonomi Bloom yang telah direvisi.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. menentukan batas atas pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super pada graf Rantai konektif dan diskonektif;
- b. menentukan pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super pada graf Rantai konektif;
- c. menentukan pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif;
- d. mengetahui keterkaitan proses menemukan pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super pada graf Rantai dengan tumbuhnya keterampilan berpikir tingkat tinggi.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapatkan dari penelitian ini adalah :

- a. menambah pengetahuan baru tentang teori graf khususnya tentang pelabelan selimut graf Rantai;

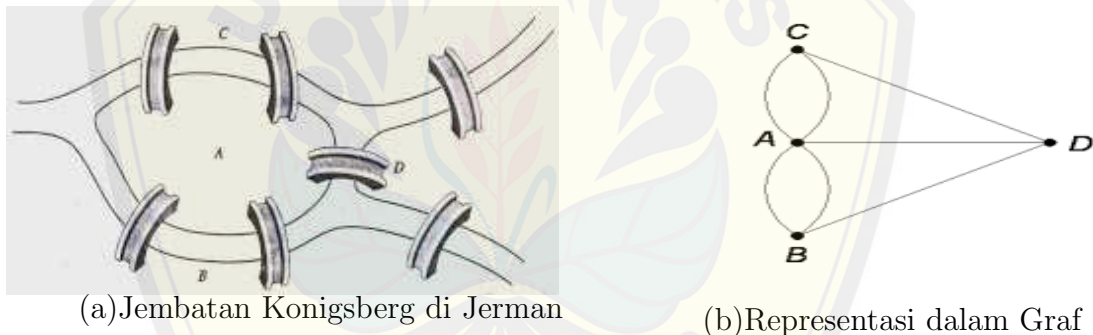
- b. memberi motivasi untuk meneliti tentang pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super pada graf jenis lain;
- c. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super;
- d. menumbuhkan keterampilan berpikir tingkat tinggi untuk mewujudkan HOTS (*Higher Order Thinking Skill*).



BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Teori graf bermula ketika Leonhard mencoba mencari solusi dari permasalahan yang terkenal yaitu jembatan Konigsberg di Prusia timur yang menghubungkan empat wilayah disekitarnya. Masalah jembatan Konigsberg ini adalah mungkinkah melalui ketujuh jembatan tersebut tanpa mengulangi jembatan tersebut dua kali. Euler seorang ahli matematika dari Swiss pada tahun 1736 mencoba memecahkan masalah jembatan Konigsberg. Gambar 2.1 graf jembatan Konigsberg oleh Euler

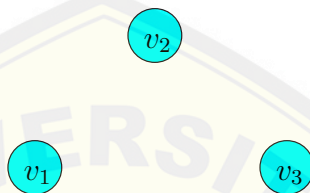


Gambar 2.1 Jembatan Konigsberg

(Sumber: <http://sha-essa.blogspot.com/2011/12/01-archive.html>)

Euler mencoba solusi dari permasalahan bagaimana menyeberangi semua pulau dimulai dari sebarang pulau dan melewati semua pulau melalui jembatan itu tepat hanya satu kali dari tempat berangkat sampai kembali ke tempat semula. Permasalahan jembatan Konigsberg tersebut dapat direpresentasikan dalam aplikasi teori graf. Pada permasalahan ini, lokasi sepanjang kota yang dihubungkan oleh jembatan merupakan representasi *vertex*, sedangkan jembatan yang menghubungkan antar lokasi merupakan representasi *edge*.

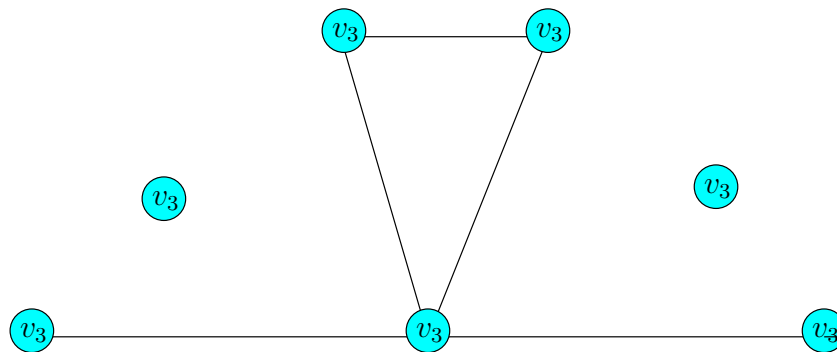
Sebuah graf G merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan terurut $\{u, v\}$ dari titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi. Berdasarkan definisi graf yang telah disebutkan di atas dapat dimungkinkan adanya graf yang tidak memiliki sisi tetapi hanya berupa titik. Titik-titik yang berkelompok dan membentuk suatu himpunan titik tanpa sisi maka disebut *null raph* atau graf kosong. Graf kosong (*null graph* atau *empty graph*) dinotasikan dengan N_n , dimana n adalah jumlah titik pada graf. Gambar 2.2 merupakan contoh graf kosong.



Gambar 2.2 Graf Kosong

Sebuah graf G mungkin mengandung *loop* yaitu sisi yang berbentuk u, v , dan/sisi ganda, yaitu sisi yang menghubungkan sepasang titik yang lebih dari satu. Untuk menyederhanakan notasi sebuah sisi u, v sering dinotasikan dengan uv untuk menyederhanakan notasi. Ordo dari sebuah graf G adalah banyaknya titik pada G . Berdasarkan Gambar 2.3 menunjukkan sebuah contoh graf yang berordo 7 dengan himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan himpunan sisi $\{v_1v_4, v_4v_3, v_3v_5, v_5v_4, v_4v_7\}$. Misalkan u dan v merupakan titik titik dari graf G . u dikatakan bertetangga dengan v . Sebuah sisi e yang menghubungkan u dan v yaitu $e = uv$. Selanjutnya kita sebut v tetangga dari u . Himpunan semua tetangga dari u disebut ketetangaan dari u dan dinotasikan dengan $N(u)$. Kedua titik u dan v dapat juga disebut bersisian dengan sisi e . (Slamin, 2009)

Derajat titik v pada G adalah banyaknya titik-titik yang bertetangga dengan v yaitu jumlah semua tetangga dari v . Jika sebuah titik v mempunyai derajat 0, dengan kata lain v tidak bertetangga dengan sembarang titik yang lain, maka v adalah titik terasing. Titik yang mempunyai derajat satu disebut titik akhir (*end vertex*) atau daun. Jika semua titik pada graf G mempunyai derajat yang



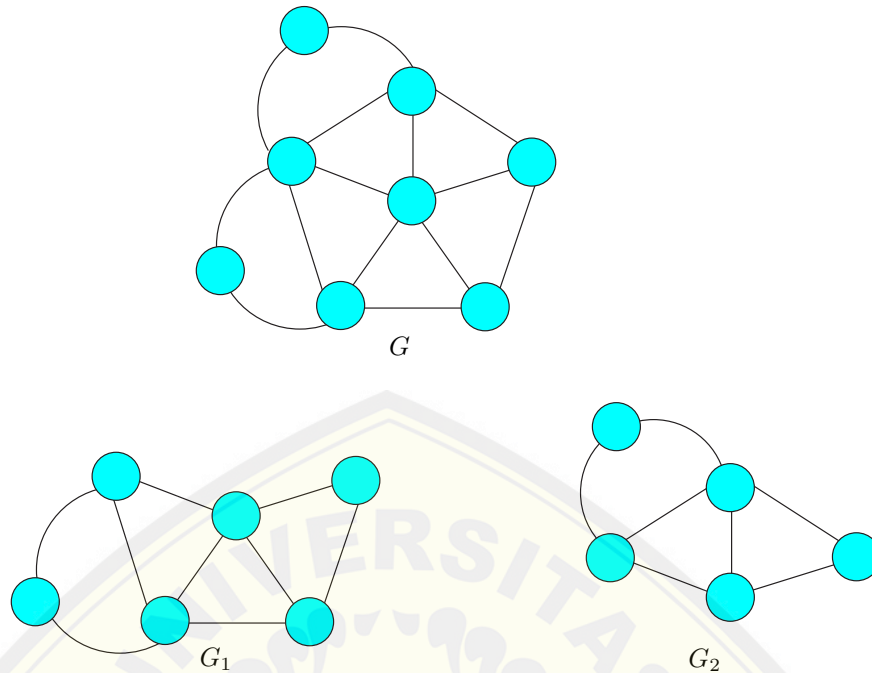
Gambar 2.3 Contoh Sebuah Graf

sama d maka dikatakan graf singular graf d (Dafik dkk, 2009). Suatu graf G mempunyai derajat yang tidak sama maka graf tersebut dikatakan non-reguler. Derajat terkecil dari suatu garf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ adalah derajat terkecil yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik yang lain. Derajat terbesar dari suatu graf G yang dinotasikan dengan $\Delta(G)$ adalah derajat terbesar yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik yang lain.

Graf H merupakan subgraf dari G jika setiap titik di H adalah titik di G dan setiap sisi di H adalah sisi di G ($V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$). Graf H merupakan subgraf dari G maka dapat ditulis $H \subseteq G$. Jika H adalah subgraf dari G tetapi $H \neq G$, maka H disebut subgraf sejati dari G dan ditulis dengan $H \subset G$, sedangkan G disebut supergraf dari H . Pada Gambar 2.4 merupakan contoh graf dan subgraf. G_1 dan G_2 merupakan subgraf dari G karena semua titik dan sisi pada graf G_1 dan G_2 adalah sisi dan titik di G .

Gabungan dari dua graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$, didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titiknya adalah $V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1) \cup E(G_2)$. Pada Gambar 2.5, graf G merupakan gabungan graf G_1 dan G_2 , yaitu $G = G_1 \cup G_2$. Graf gabungan mG didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari m buah kopi graf G dan dapat juga dikatakan sebagai graf dengan m komponen, dimana setiap komponennya adalah graf G . Jenis graf tersebut juga disebut sebagai graf diskonektif atau dapat juga dikatakan sebagai graf dengan m komponen. Dengan kata lain $mG = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_m$, dengan $G_1 = G_2 = G_3 = \dots = G_m = G$. Misal graf G mempunyai p titik dan q

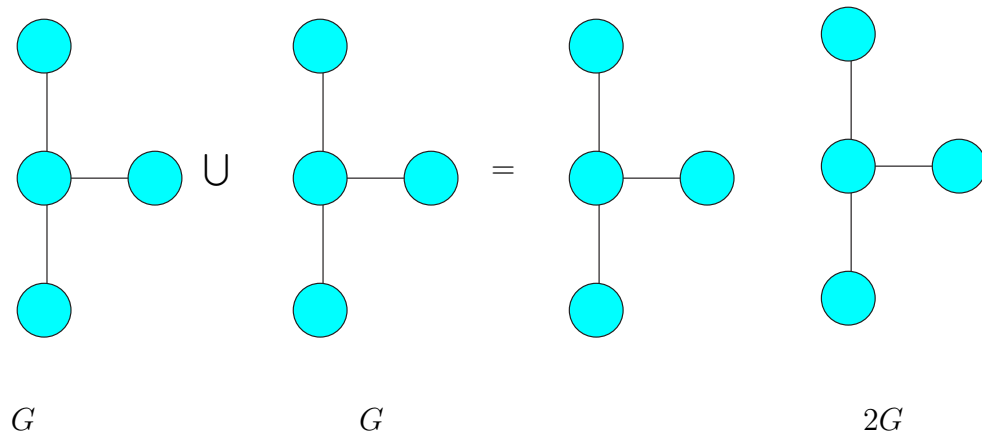
sisi, maka graf mG mempunyai mp titik dan mq sisi.



Gambar 2.4 Contoh Graf dengan Subgrafnya

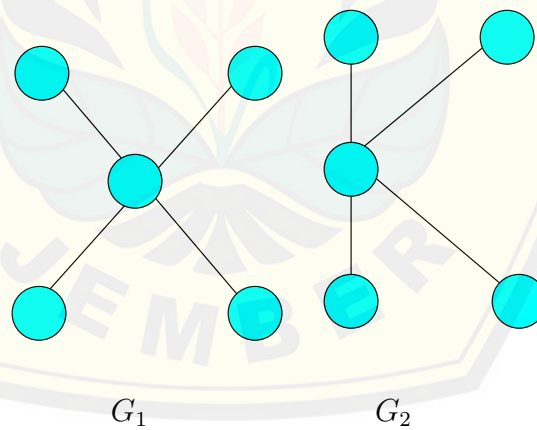
Graf $G(V, E)$ dan $G(v^*, e^*)$ disebut *isomorfik* jika ada korespondensi satu-satu $f : V \rightarrow V^*$ sedemikian hingga u, v adalah suatu sisi dari G jika dan hanya jika $f(u), f(v)$ adalah suatu sisi dari graf G^* . Graf isomorfik tidak dibedakan (walaupun diagramnya mungkin "tampak beda"). Gambar 2.6 menunjukkan graf G_1 mirip dengan huruf X dan G_2 mirip dengan huruf K. Perhatikan gambar 2.6 bahwa X dan K adalah graf-graf isomorfik (Lipschutz dan Lipson, 2008:138).

Jalan dari suatu graf dinotasikan dengan $A_1e_1, A_2e_2, A_3e_3, A_4e_4, \dots, A_ke_k$ adalah barisan titik dan sisi terhingga dan bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi dalam suatu graf dengan ketentuan setiap sisi e_i , menempel pada A_i dan A_j dan $A_i \neq A_j$ jika e_i bukan merupakan sebuah loop. Trail atau jejak adalah jalan yang semua sisinya berbeda disebut dengan trail. Jalan pada suatu graf dibentuk dari barisan titik dan sisi terhingga serta bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi dalam suatu graf, titik dan sisinya boleh ada pengulangan disebut lintasan. Lintasan adalah suatu jalan yang keseluruhan titiknya berbeda (Hartseld dan Ringel, 1994).



Gambar 2.5 Gabungan Saling Lepas Graf

Suatu graf dikatakan terhubung (*connected*), jika ada lintasan dari u ke v dan jika tidak ada lintasan dari u ke v disebut graf tak terhubung (*disconnected*). Jarak antara verteks u dan v dalam G yang ditulis $d(u, v)$ adalah panjang dari jarak tersingkat antara u dan v . Diameter dari G yang dituliskan $\text{diam}(G)$ adalah jarak maksimum antara sembarang dua titik dalam G (Lipchutz dan Lipson, 2008)



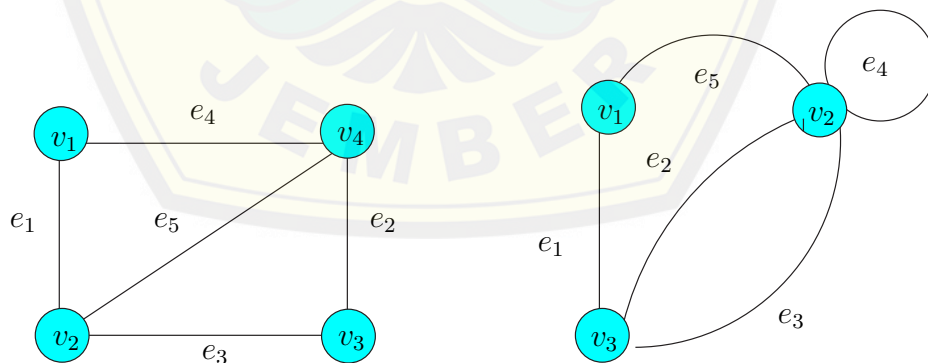
Gambar 2.6 Graf Isomorfik

Suatu graf G disebut graf berlabel jika sisi-sisinya dan / vertexnya diberi data dalam suatu bentuk. Lebih khusus lagi, G disebut graf berbobot jika setiap sisi e dan G diberi suatu bilangan nonnegatif $w(e)$ yang disebut bobot atau panjang dari v . Bobot atau panjang suatu lintasan dalam suatu graf berbobot G didefinisikan sebagai hasil penjumlahan dari bobot sisi-sisi dalam lintasan tersebut.

2.2 Jenis-jenis graf

Graf terdiri beberapa jenis namun yang sering digunakan ada dua jenis. Jenis-jenis graf dibagi berdasarkan ada atau tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf dan berdasarkan sisi pada graf yang mempunyai orientasi arah.

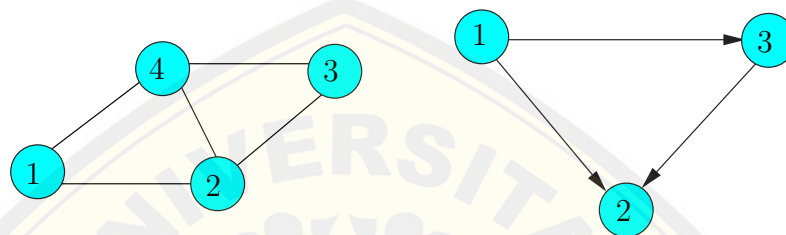
1. Graf sederhana (*simple graf*) adalah graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana. Pada graf sederhana sisi merupakan pasangan tak terurut. Jadi sisi (u, v) sama saja dengan (v, u) .
2. Graf tak-sederhana (*unsimple-graf/multigraf*) adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Graf tak sederhana dibagi menjadi dua macam, yaitu graf ganda dan graf semu. Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Sedangkan graf semu adalah graf yang mengandung gelang. Sisi pada graf semu dapat terhubung ke dirinya sendiri.



Gambar 2.7 Graf Sederhana dan Tidak Sederhana

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka graf dibedakan menjadi dua jenis yaitu graf tidak berarah dan graf berarah.

1. Graf tidak berarah (*Undirect Graph*) adalah graf yang tidak mempunyai orientasi arah. Contoh graf tidak berarah ditunjukkan pada gambar 2.6. Graf tak berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $(u, v) = (v, u)$ adalah sisi yang sama.
2. Graf berarah (*directed graf atau digraf*) adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah.



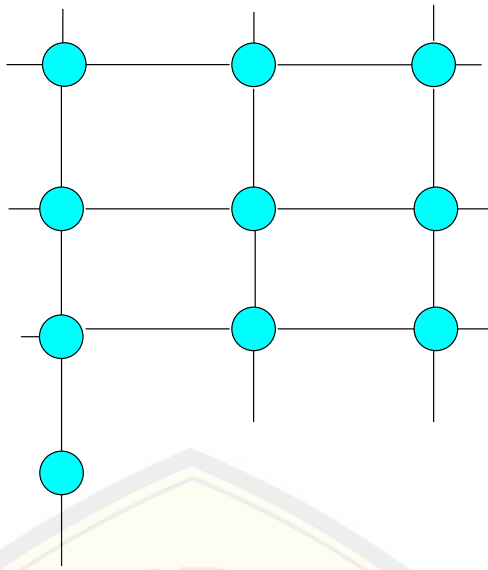
Gambar 2.8 Graf Tidak berarah dan Berarah

Berdasarkan jumlah verteks pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis yaitu graf berhingga dan graf tidak berhingga.

1. Graf Berhingga (*Limited Graph*) adalah graf yang jumlah verteksnya n , berhingga. Pada gambar 2.8 adalah contoh graf berhingga.
2. Graf tak berhingga (*Unlimited Graph*) adalah graf yang jumlah verteksnya, n tidak berhingga. Pada gambar 2.9 adalah gambar graf tak berhingga.

2.3 Graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya, dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Graf khusus yang sudah populer dinamakan *well-known special graph* sedangkan graf khusus yang belum populer tetapi dengan karakteristik graf khusus dinamakan *well-defined special graph*. Berikut ini beberapa contoh graf khusus.

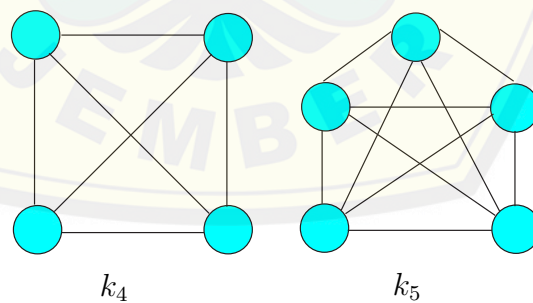


Gambar 2.9 Graf Tak Berhingga

2.3.1 Graf khusus populer (*Well – known Special Graph*)

1. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

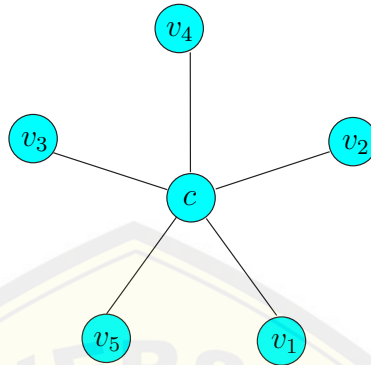
Suatu graf dikatakan lengkap jika setiap verteks dalam G terhubung ke setiap verteks lainnya dalam G jadi suatu graf lengkap G pasti terhubung. Graf lengkap dengan n verteks dinotasikan oleh K_n . Gambar 2.10 merupakan contoh graf lengkap.



Gambar 2.10 Graf Lengkap

2. Graf Bintang (*Star Graph*)

Graf bintang adalah graf pohon yang terdiri dari 1 titik yang berderajat $(n - 1)$ dan $(n - 1)$ titik yang berderajat 1. Jadi, graf bintang S_n terdiri dari n titik dan $(n - 1)$ sisi dengan $n \geq 3$ seperti pada Gambar 2.11.



Gambar 2.11 Graf Bintang S_6

3. Graf Lingkaran (*Cycle graph*)

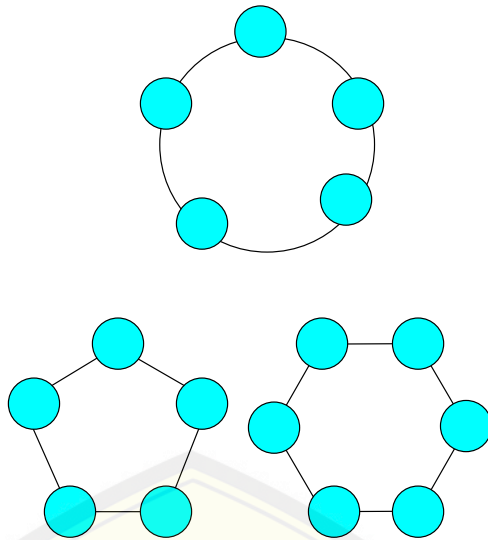
Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n . Gambar 2.12 adalah contoh graf lingkaran

4. Graf Roda (*Wheels Graph*)

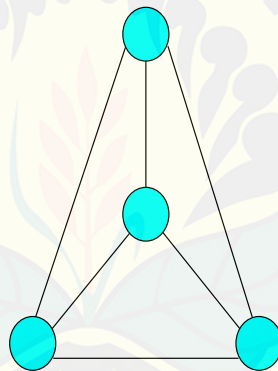
Graf roda adalah graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu simpul pada graf lingkaran C_n dan menghubungkan simpul baru tersebut dengan semua simpul pada graf lingkaran tersebut. Gambar 2.14 adalah contoh graf roda.

5. Graf Teratur (*Regular Graph*)

Graf teratur adalah graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama. Apabila derajat setiap simpul pada graf teratur adalah r , maka graf tersebut dinamakan graf teratur berderajat r . Jumlah sisi pada graf teratur dengan n simpul adalah $\frac{nr}{2}$ sisi. Gambar 2.13 adalah contoh graf teratur.



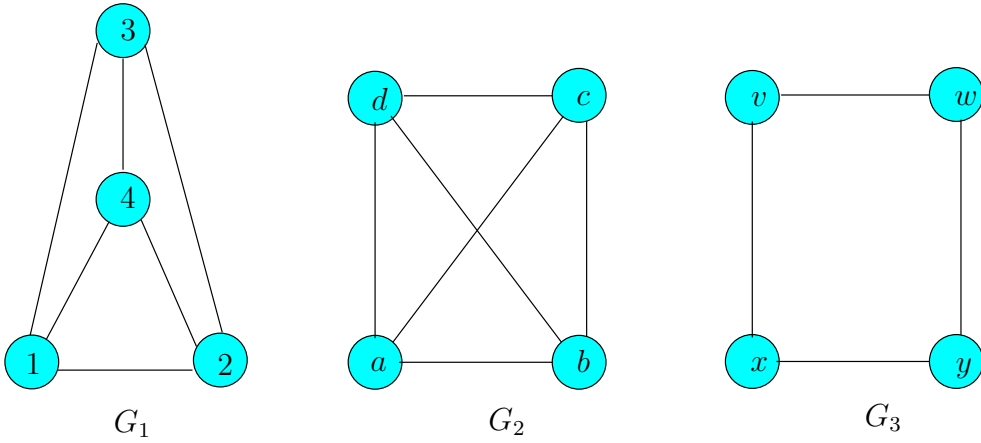
Gambar 2.12 Graf Lingkaran (Roosen, 2003)



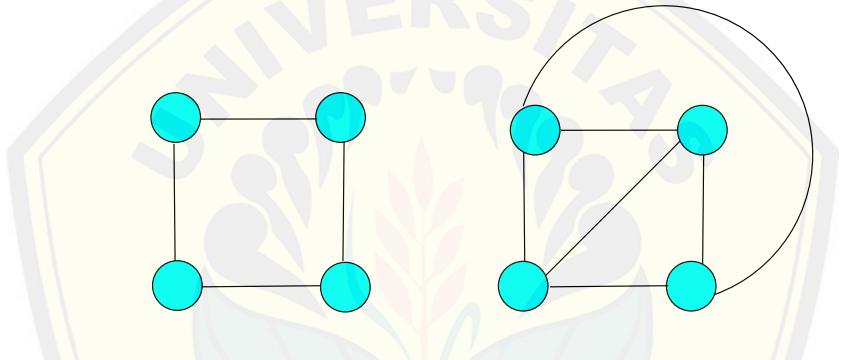
Gambar 2.13 Graf Teratur

6. Graf Planar (*Planar Graph*)

Graf planar dapat digambarkan pada bidang datar dengan sisi yang tidak saling berpotongan dinamakan graf planar. Semua graf lingkaran adalah planar. Tetapi, graf lengkap K_n untuk $n \geq 5$ merupakan graf tak planar. Pada gambar 2.15 adalah contoh graf planar.



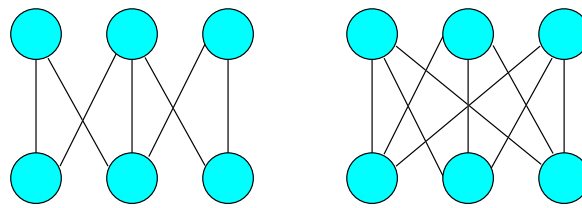
Gambar 2.14 Graf Roda (Roosen, 2003)



Gambar 2.15 Graf Planar(Munir,2005)

7. Graf Bipartit (*Bipartite Graph*)

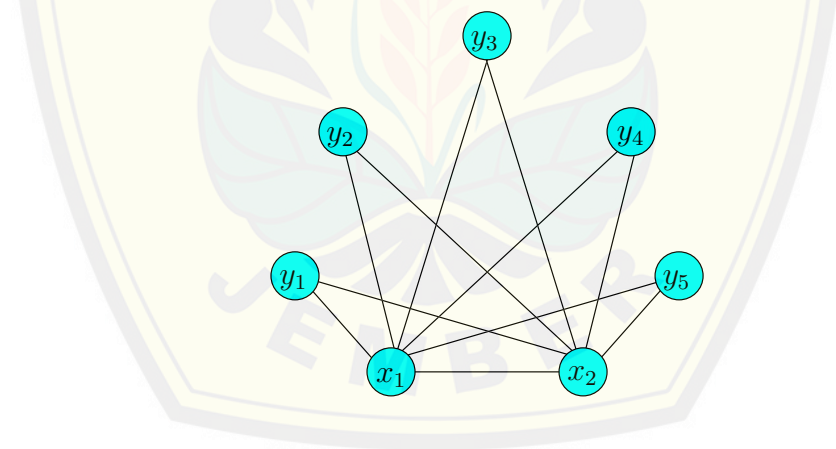
Graf bipartit adalah Graf sederhana G jika himpunan simpul pada Graf tersebut dapat dipisah menjadi dua himpunan tak kosong yang *disjoint*, misalkan V_1 dan V_2 , sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul pada V_1 dan sebuah simpul pada V_2 . Dengan demikian, pada graf bipartit tidak ada sisi yang menghubungkan dua simpul pada V_1 atau pada V_2 . Graf bipartit tersebut dinotasikan oleh $G(V_1, V_2)$. Graf bipartit ditunjukkan pada Gambar 2.16.



Gambar 2.16 Graf Bipartit

2.3.2 Graf khusus yang belum populer (*Well – defined special graph*)

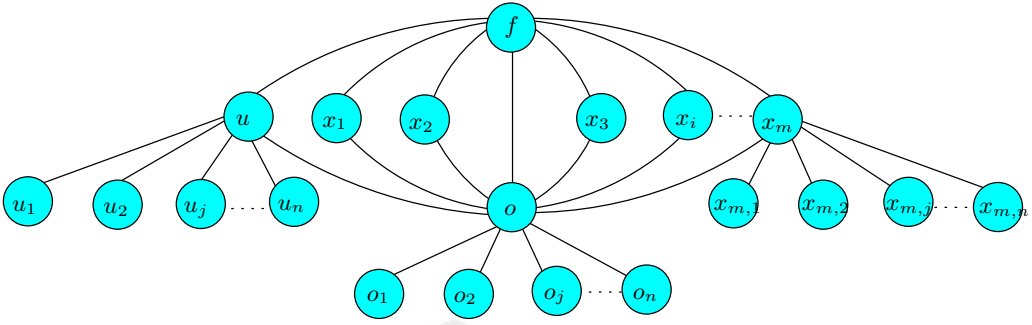
1. Graf Buku Segitiga (F.E.Chandra, 2011) dinotasikan dengan Bt_n adalah suatu graf yang merupakan famili dari graf Komplete tripartite $K_{m,n,l}$ dengan jumlah titik pada m dan n adalah satu dan jumlah titik pada l sebanyak n . Graf Buku Segitiga Bt_n merupakan graf yang terdiri dari n buah segitiga ($n \geq 1$) dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain setiap segitiga memiliki 2 titik yang sama. Sebagai ilustrasi perhatikan graf Bt_5 pada Gambar 2.17. Graf tersebut tersusun dari 5 buah segitiga.



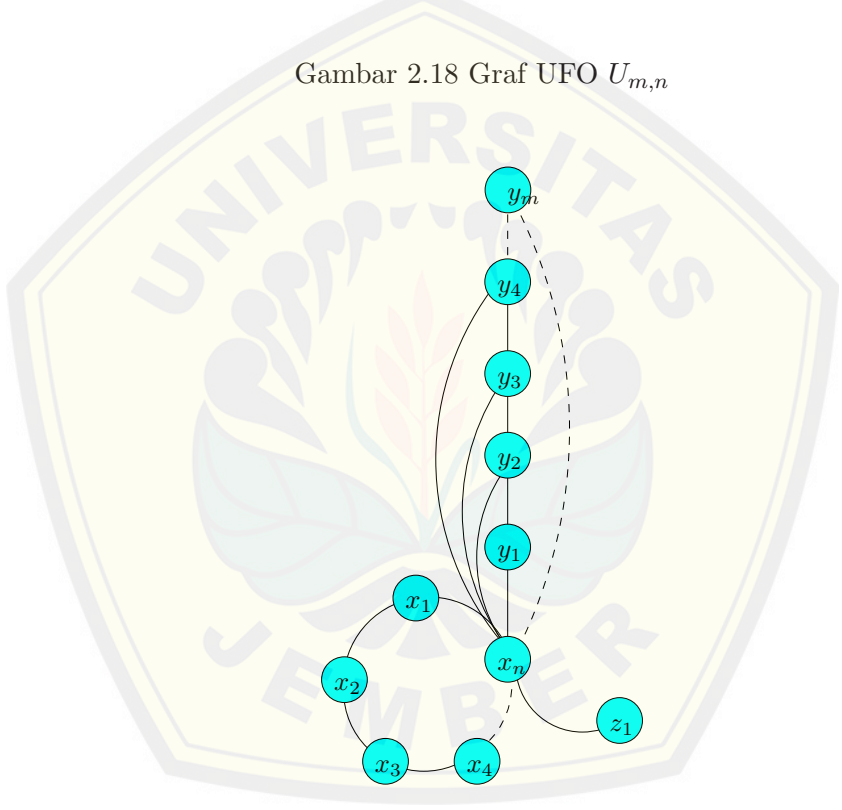
Gambar 2.17 Graf Buku Segitiga Bt_n

2. Graf UFO (Umilasari,R.,2013) yang dinotasikan dengan $U_{m,n}$ adalah sebuah graf yang memiliki bentuk menarik yang dikembangkan dari graf Buku Segitiga. Graf UFO memiliki himpunan *vertex*, $V = \{u, f, o, x_i, u_j, o_j, x_{mj}, ; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; m, n \in \mathbb{N}\}$ dan himpunan *edge*, $E = \{fx_i, uf, fo, ox_i, x_mx_{mj},$

$uu_j, oo_j; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; m, n \in \mathbb{N}$. Gambar 2.18 merupakan Graf UFO, $U_{m,n}$.



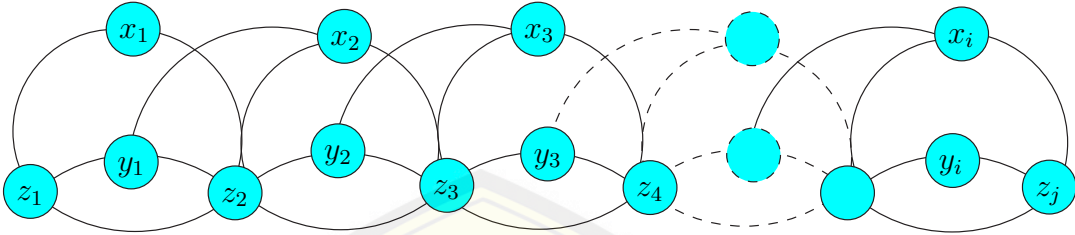
Gambar 2.18 Graf UFO $U_{m,n}$



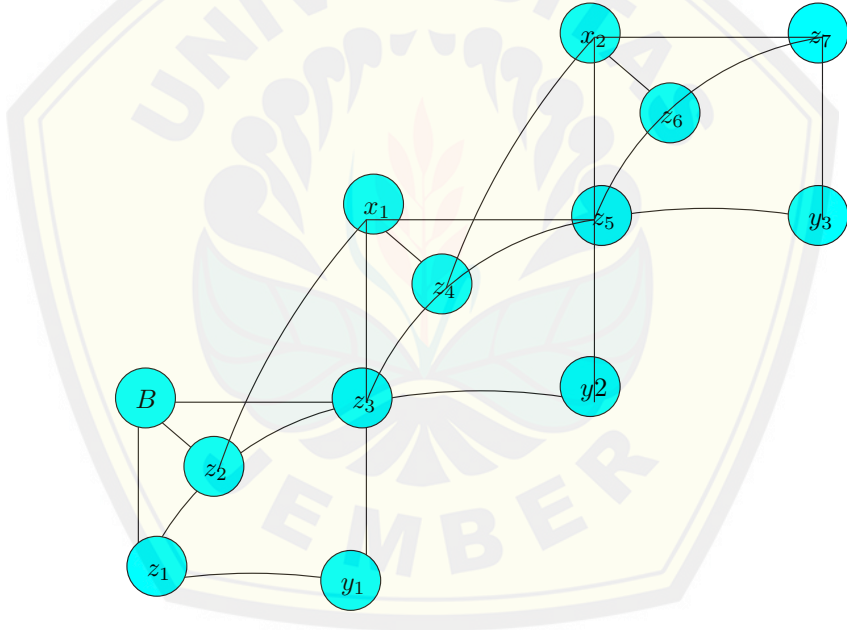
Gambar 2.19 Graf Tunas Kelapa $CR_{n,m}$

3. Graf Tunas kelapa (Lestari, I.L.,2013) $CR_{n,m}$ mempunyai himpunan titik $V(CR_{n,m}) = \{x_i, y_j, z; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(CR_{n,m}) = \{x_n x_i, ; i = 1\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_n z\}$. Gambar 2.19 merupakan graf tunas kelapa $CR_{n,m}$.

4. Graf Ulat Sutra(Dian,A.H.,2014)adalah satu graf yang menarik yang dikembangkan dari graf Snake. Graf Ulat sutra dinotasikan dengan Sw_n dimana himpunan titik Sw_n adalah $V(Sw_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n + 1\}$ dan $E(Sw_n) = \{x_i z_i, x_i z_{i+1}, z_i z_{i+1}, y_i z_i, y_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$. Gambar 2.20 merupakan graf Ulat sutra Sw_n .

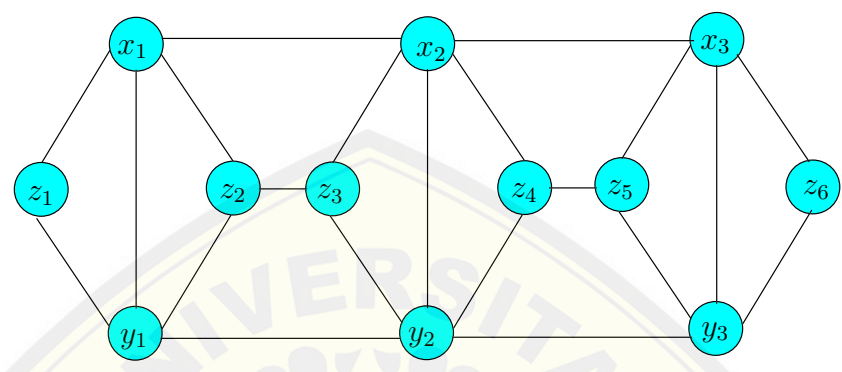


Gambar 2.20 Graf Ulat Sutra Sw_n

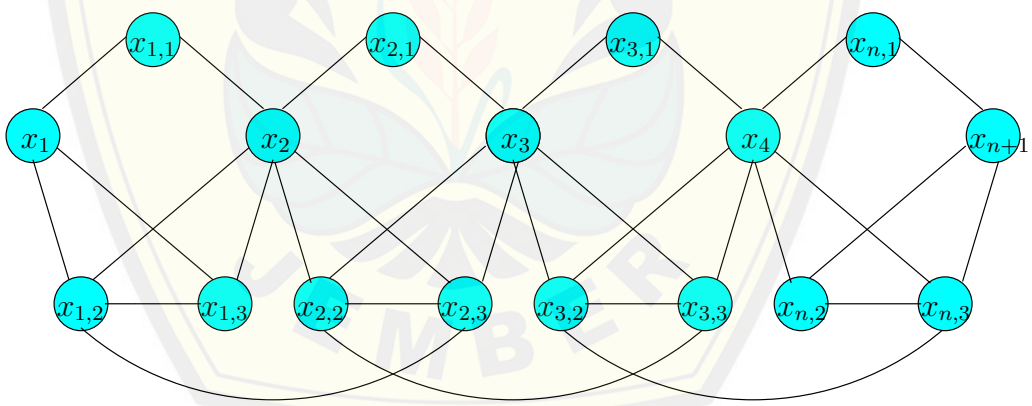


Gambar 2.21 Graf Tribun T_n

5. Graf Tribun (Muhlisatul, M,2014) adalah sebuah graf yang dikembangkan dari graf ular (*Snake*) dan dinotasikan sengan \mathfrak{T}_n . Bentuk dari graf Tribun dapat dilihat pada gambar 2.21. Graf Tribun memiliki himpunan *vertex*, \mathfrak{T}_n dimana titik (*vertex*) adalah $V\mathfrak{T}_n = \{x_i, z_j, y_i, B; 1 \leq i \leq n \text{ dan } 1 \leq j \leq n\}$ dan Sisi (edge) adalah $E\mathfrak{T}_n = \{Bz_1, Bz_2, Bz_3 \cup z_j z_{j+1}; 1 \leq j \leq n \cup x_i z_{2i+1}; 1 \leq i \leq n \cup x_i z_{2i+3}; 1 \leq i \leq n \cup y_i z_{2i+1}; 1 \leq i \leq n \cup y_i z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\}$



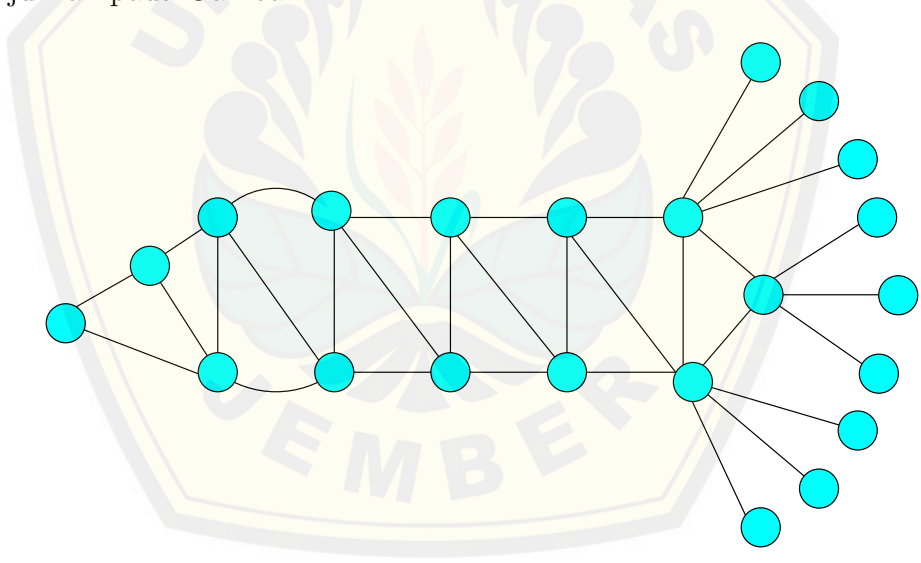
Gambar 2.22 Graf Tangga Permata Dl_3



Gambar 2.23 Graf Rantai Pentagon

6. Graf Rantai Pentagon (Ermita,R.A.,2014) adalah salah satu graf yang dikembangkan dari graf Siklis dan graf Snake. Graf *Snake*, yang berupa *expand* dari graf pentagon, adalah graf yang salah satu titiknya dipakai bersama dengan graf lainnya. Graf Rantai Pentagon adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan \mathfrak{PC}_n dimana titik (vertex) adalah $V\mathfrak{PC}_n = \{x_i, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3\}$ dan Sisi (edge) adalah $E\mathfrak{PC}_n = \{x_i, x_{i,j}; x_{i,j}, x_{i+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3\} \cup \{x_{i,2}, x_{i,3}; x_{i,2}, x_{i+1,3}; 1 \leq i \leq n\}$. Gambar 2.23 merupakan graf rantai pentagon \mathfrak{PC}_n .

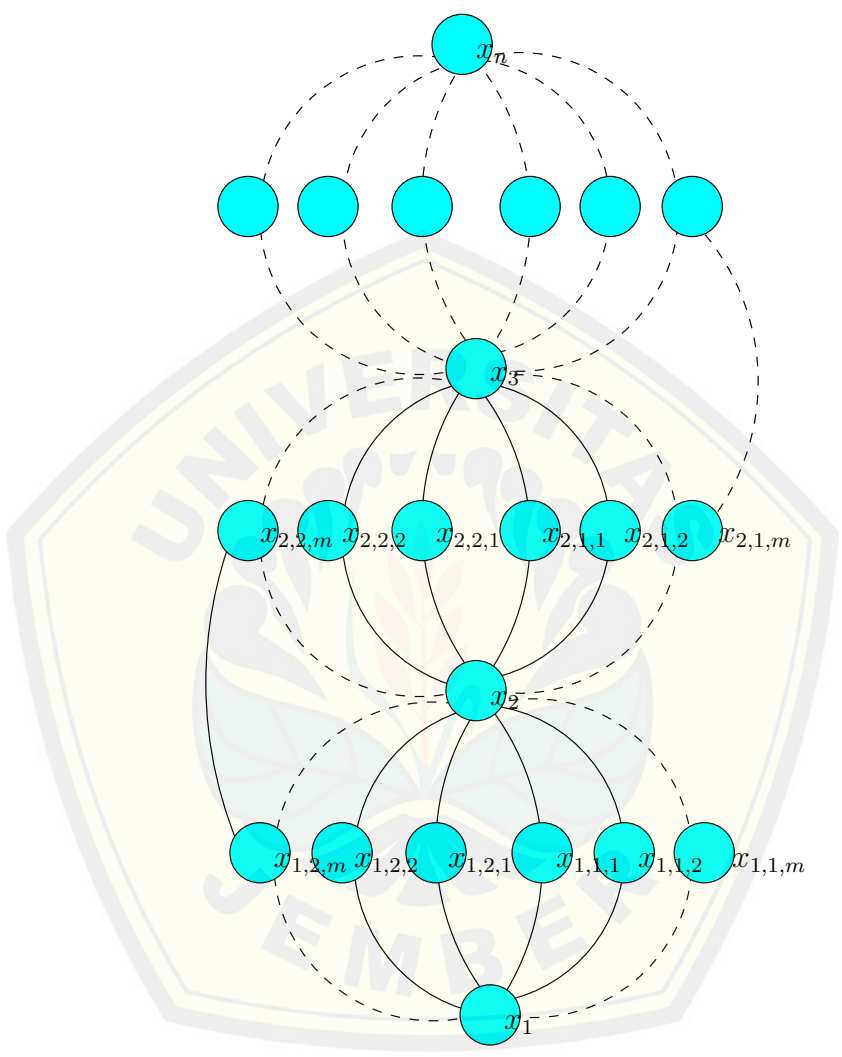
7. Graf Tangga (L. Syakdiyah, 2011) adalah salah satu family dari graf tangga. Graf tangga permata adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan Dl_n dimana $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n\}$ dan $E(Dl_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}; 2 \leq j \leq 2n - 2 \text{ genap}\} \cup \{x_i z_{2i-1}, x_i z_{2i}, y_i z_{2i-1}, y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$. Contoh graf Dl_3 ditunjukkan pada Gambar 2.22



Gambar 2.24 Graf Raket $R_{m,n}$

8. Graf Raket (L.S.Prastiwi,2013) merupakan sebuah graf yang dinotasikan dengan $R_{m,n}$ dimana n banyaknya percikan api yang keluar dari ekor Raket dan m adalah jumlah titik pada badan dari graf Raket. Graf Raket mempunyai $2m + 3n + 3$ titik dan $4m + 3n + 3$ sisi. Graf Raket mempunyai him-

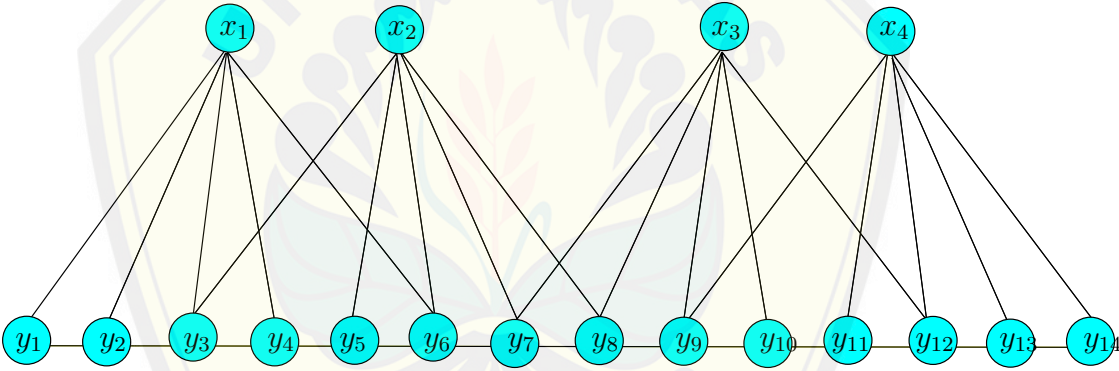
punan titik $R_{m,n}$ dimana $V(R_{m,n}) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_{mj}, y_{mj}, z_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{v, w, z\}$ $ER_{m,n} = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}, x_i y_i, x_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq m\} \cup \{wx_1, vy_1, wy_1, vw\} \cup \{x_m z, y_m z, x_m x_{mj}, z z_j, y_m y_{mj}; 1 \leq j \leq n\}$. Gambar 2.24 yang merupakan graf Roket $R_{m,n}$.



Gambar 2.25 Graf Lampion $\mathcal{L}_{n,m}$

9. Graf Lampion (Robiyatul,A.,2014)adalah salah satu graf yang merupakan famili dari graf buku segitiga. Graf lampion adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan $\mathcal{L}_{n,m}$ dimana $V(\mathcal{L}_{n,m}) = \{x_i, x_{i,1,j}, x_{i,2,j}; 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(\mathcal{L}_{n,m}) = \{x_i x_{i,1,j}; 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i x_{i,2,j}; 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,1,j} x_{i+1}; 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,2,j} x_{i+1}; 1 \leq i \leq n + 1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,1,1} x_{i,2,1}; 1 \leq i \leq n + 1\}$. Berikut ini gambar 2.25 adalah gambar graf lampion,

10. Graf Gunung (A. Fajriatin, 2011), dinotasikan M_{2n} adalah sebuah graf dengan himpunan *vertex*, $|V| = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq 2n \text{ dan } 1 \leq j \leq 6n + 2, n \in \mathbb{N}\}$ dan himpunan *edge*, $|E| = \{x_i y_{3i-2}, x_i y_{3i+3} \text{ untuk } i \text{ ganjil, } x_i y_{3i-3}, x_i y_{3i+2} \text{ untuk } i \text{ genap, } x_i y_{3i-1}, x_i y_{3i}, x_i y_{3i+1} \text{ untuk } i \text{ sebarang, } 1 \leq i \leq 2n \text{ dan } y_j y_{j+1}, 1 \leq j \leq 6n + 1\}$. Gambar 2.26 merupakan contoh graf Gunung (M_{2n}).



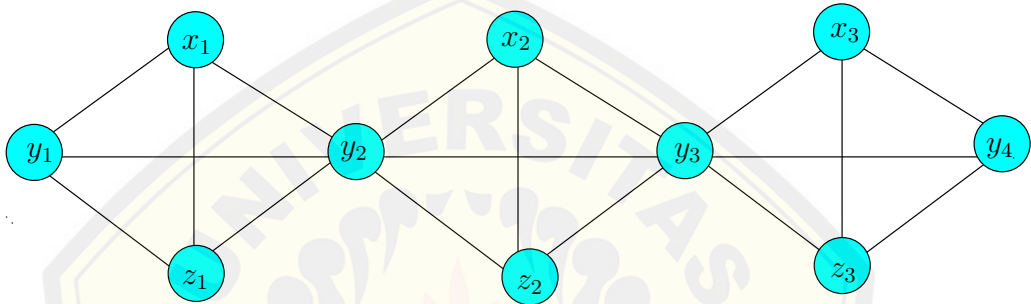
Gambar 2.26 Graf Gunung M_{2n} dengan $n = 2, M_4$

2.4 Graf Rantai

Graf Rantai merupakan graf baru yang belum diketahui pelabelannya dan graf ini menarik untuk diteliti pelabelannya. Graf Rantai dinotasikan dengan K_4P_n . Graf Rantai berawal dari lintasan yang terdiri dari graf lengkap. Graf Rantai merupakan shackle titik yang disimbolkan dengan $shack(K_4, v, n)$, sehingga $shack(K_4, v, n)$ memiliki arti sama dengan K_4P_n . Misalkan k adalah bilan-

gan bulat positif. Graf shackle dinotasikan dengan $shack(G_1, G_2, \dots, G_k)$, sebagai sebuah graf yang dibentuk dari k graf tak terhubung tak trivial G_1, G_2, \dots, G_k sehingga untuk setiap $s, t \in [1, k]$ dengan $|s, t| \geq 2$ berlaku G_s dan G_t tidak mempunyai titik yang sama, dan untuk setiap $i \in [1, k - 1]$, G_i dan G_{i+1} mempunyai tepat satu titik yang sama, disebut titik penghubung, dan $k - 1$ titik penghubung itu semua berbeda. Maryati dkk (2010)

Dalam penelitian ini graf Rantai akan dinotasikan dengan K_4P_n dengan titik $V(K_4P_n) = \{x_i, y_j, z_i; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n + 1\}$ dan sisi $(K_4P_n) = \{x_i z_i, x_i y_i, y_i y_{i+1}, x_i y_{i+1}, y_i z_i, z_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$.

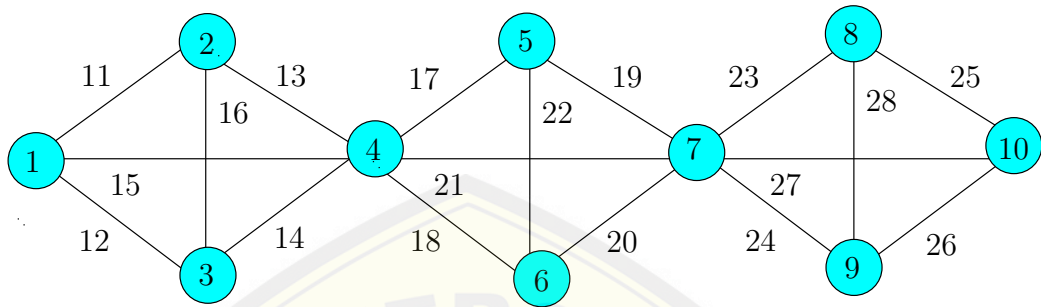


Gambar 2.27 Graf Rantai K_4P_n

2.5 Aplikasi Graf

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang dapat digunakan dalam kehidupan sehari hari. Beberapa aplikasi graf dalam kehidupan adalah pengaturan lampu jalan, menyusun jadwal kuliah, menyusun jadwal pertandingan, persoalan pedagang keliling (*Salesman Traveling Problem*), dan lain lain. Salah satu aplikasi graf dalam kehidupan yaitu pembuatan sandi pesan rahasia. Contoh sepasang suami istri di sebuah rumah menyimpan uang sebesar 1 triliun rupiah. Karena sekarang rawan adanya perampok dan pencuri sehingga suaminya menyimpan uang itu di tempat yang aman. Karena sang suami pergi keluar kota untuk beberapa hari dan tidak sempat menghubungi istrinya sehingga dia membuat pesan untuk istrinya terkait keberadaan uang tersebut. Jika menggunakan pesan biasa pasti akan terbaca oleh orang lain sehingga sang

suami membuat pesan rahasia. Untuk membuat pesan rahasia dapat menggunakan aplikasi graf. Sang suami menulis pesan "uangnya di gudang." apabila membuat pesan rahasia tersebut bisa dengan menggunakan graf Rantai seperti pada Gambar 2.28. Graf Rantai dapat digunakan untuk membuat pesan rahasia menggunakan *Ciphertext* seperti pada Gambar 2.29



Gambar 2.28 Pelabelan Titik dan Sisi Graf Lengkap lintasan $d = 48$

Berdasarkan gambar 2.29 bisa dibentuk kode rahasia dari sisi yang dilewati sebagai berikut:

- $a = 1116,$ $d = 1113,$
- $g = 1214,$ $i = 151722$
- $n = 151719$ $u = 151820$
- $y = 152123,$ $space = 152124$
- $. = 152127$

Kode sisi yang dilewati tersebut diterapkan pada alfabet dengan menggunakan modulo 26 dan kemudian dikombinasikan dengan titik seperti berikut:

$$a = 1116(\text{mod}26) = 24 \text{ maka } 324(\text{mod}26) = 12$$

$$d = 1113(\text{mod}26) = 21 \text{ maka } 421(\text{mod}26) = 5$$

$$\begin{aligned}
 g &= 1214((\text{mod}26) = 18 \text{ maka } 418(\text{mod}26) = 2 \\
 i &= 151722(\text{mod}26) = 12 \text{ maka } 622(\text{mod}26) = 14 \\
 n &= 151719(\text{mod}26) = 9 \text{ maka } 79(\text{mod}26) = 1 \\
 u &= 151820(\text{mod}26) = 6 \text{ maka } 76(\text{mod}26) = 15 \\
 y &= 152123(\text{mod}26) = 23 \text{ maka } 823(\text{mod}26) = 17 \\
 \text{space} &= 152124(\text{mod}26) = 24 \text{ maka } 924(\text{mod}26) = 14 \\
 . &= 152127(\text{mod}26) = 1 \text{ maka } 110(\text{mod}26) = 6
 \end{aligned}$$

Dari kode di atas dapat diterapkan dalam alfabet yaitu $a = 12 = m$, $d = 5 = f$, $g = 2 = c$, $i = 14 = o$, $n = 1 = b$, $u = 15 = p$, $y = 17 = r$, $\text{space} = 14 = o$, dan $. = 6 = g$. Sehingga kalimat "uangnya di gudang." dapat dituliskan dalam pesan rahasia "pmbcbrmfocpfbmc". Dengan pesan rahasia tersebut maka tidak akan ada orang yang mengetahui kecuali sang istri sehingga pesan tersebut aman.

2.6 Fungsi dan Barisan

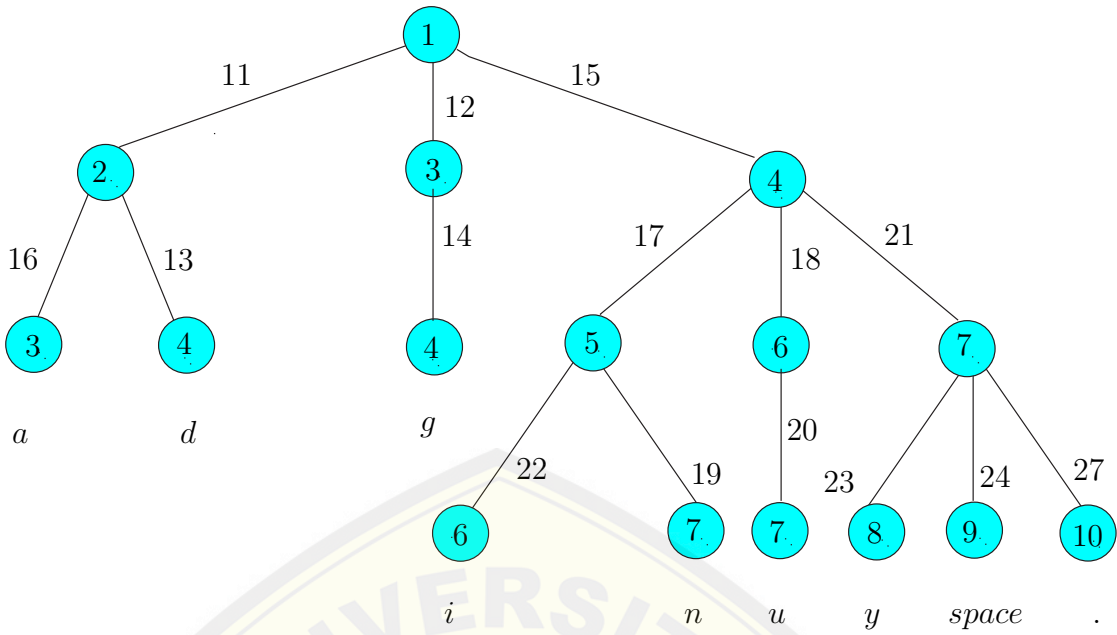
2.6.1 Fungsi

Misalkan setiap unsur suatu himpunan A dikaitkan dengan tepat satu unsur dari himpunan B , cara pengaitan seperti itu disebut *fungsi* atau *pemetaan* dari A ke B dan ditulis $f : A \rightarrow B$ Unsur tunggal di B yang dikaitkan dengan $a \in A$ oleh f diberi notasi $f(a)$ dan disebut peta a oleh f atau nilai f di a . A disebut *domain* f dan B disebut *kodomain* f .

Berikut ini beberapa jenis fungsi khusus :

1. Fungsi Injektif

Fungsi injektif adalah pemetaan dimana setiap elemen di daerah kodomain yang berpasangan mempunyai pasangan elemen tepat satu di daerah kodomain, secara matematika dituliskan sebagai berikut :



Gambar 2.29 Aplikasi Graf

Fungsi $f : A \rightarrow B$, injektif $\Leftrightarrow \forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

2. Fungsi Surjektif

Fungsi surjektif adalah pemetaan dimana semua elemen didaerah kodomain mempunyai pasangan elemen didaerah domain, secara matematika dituliskan sebagai berikut :

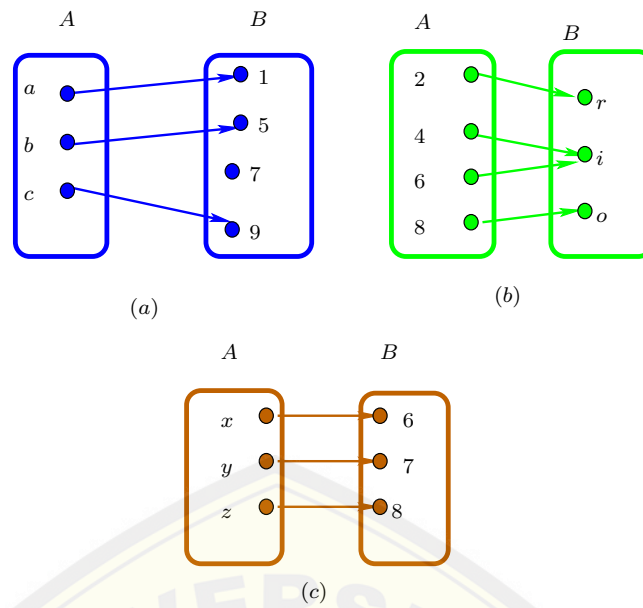
Fungsi $f : A \rightarrow B$, Surjektif $\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A \rightarrow f(a) = b$.

3. Fungsi Bijektif

Fungsi bijektif yaitu pemetaan yang memenuhi pemetaan injektif dan surjektif. Istilah ini berasal dari kenyataan bahwa setiap elemen domain akan berkorespondensi secara unik ke elemen kodomain dan sebaliknya. Pada gambar 2.30 adalah fungsi injektif, fungsi surjektif dan fungsi bijektif.

2.6.2 Barisan

Barisan yang dibentuk dengan cara menambah atau mengurangi suku sebelumnya dengan suatu bilangan tetap tertentu disebut Barisan Aritmatika.



Gambar 2.30 (a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif, dan (c) Fungsi Bijektif

(a) 10,15,20,25, ...

(b) 24,20,16,12,8,...

Barisan (a) mempunyai beda $b=5$. Barisan (a) disebut barisan aritmatika naik karena nilai suku sukunya makin besar. Barisan (b) mempunyai beda, $b=-4$. Barisan (b) disebut barisan aritmatika turun karena nilai suku sukunya makin kecil. Suatu barisan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ disebut barisan aritmatika jika selisih dua suku yang berurutan adalah tetap.

Nilai untuk menentukan suku ke- n dari barisan aritmatika. Perhatikan pada contoh ini 2, 7, 12, 17, 19, ... Misalkan U_1, U_2, U_3, \dots adalah barisan aritmatika, maka:

$$U_1 = 10 = 10 + 5(0)$$

$$U_2 = 15 = 10 + 5 = 10 + 5(1)$$

$$U_3 = 20 = 10 + 5 + 5 = 10 + 5(2)$$

...

$$U_n = 10 + 5(n - 1)$$

Barisan aritmetika yang mempunyai beda positif disebut barisan aritmatika

naik, sedangkan jika bedanya negatif disebut barisan aritmatika turun. Secara umum, jika suku pertama (U_1) = a dan beda suku yang berurutan adalah b maka dari rumus $U_n = 10 + 5(n - 1)$ diperoleh 10 adalah a dan 5 adalah b . Oleh sebab itu, suku ke- n dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$U_n = a + b(n - 1)$$

$U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$ disebut barisan aritmatika, jika

$$U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1} = \text{konstanta.}$$

2.7 Pelabelan Graf

2.7.1 Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan graf merupakan suatu fungsi bijektif yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf, yaitu sisi dan titik ke himpunan bilangan bulat positif. Secara umum, fungsi f yang memetakan himpunan A ke dalam B disebut fungsi injektif jika setiap elemen dalam A mempunyai bayangan yang berbeda pada B disebut jika dan hanya jika $\text{range } f$ sama dengan B . Secara lebih singkat, $f : A \rightarrow B$ adalah satu satu jika $f(a) = f(a')$ maka $a = a'$ dan merupakan onto jika $f(A) = B$ (Baca, 2001). Secara matematik definisi pelabelan graf daat dituliskan sebagai berikut:

Pelabelan graf $G = (V, E)$ dalah suatu pemetaan: $D \rightarrow N$, dimana D : domain, N : himpunan label dari G , jika $D = V$ maka disebut pelabelan titik, $D = E$ maka disebut pelabelan sisi dan $D = V \cup E$ maka disebut pelabelan total. Pada pelabelan titik, jumlah label titik lebih dari dua yang saling menempel disebut bobot selimut. Semua selimut yang mempunyai bobot selimut yang sama disebut pelabelan titik selimut ajaib. Semua selimut yang mempunyai bobot selimut berbeda dan himpunan bobot selimut dari semua selimut membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama a dan beda b disebut pelabelan titik selimut anti ajaib (Simanjuntak dan Salman, 2010).

2.7.2 Pelabelan Selimut $\mathcal{H}(a, d)$ Anti Ajaib Super

Pelabelan pada graf adalah pemetaan atau fungsi yang memasangkan setiap titik pada graf dengan bilangan bulat. Jika domain dari pemetaan tersebut merupakan titik maka disebut pelabelan titik. Jika domain dari pemetaan tersebut

adalah sisi maka disebut pelabelan sisi dan jika domainnya merupakan titik dan sisi maka disebut pelabelan total.

Pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super merupakan fungsi injektif karena label selimut dalam setiap selimut pasti berbeda sesuai dengan definisi pelabelan selimut anti ajaib, label selimutnya selalu berbeda dan berurutan. Label selimut dikatakan surjektif karena label selimutnya merupakan range dan semuanya adalah kodomain yang diperoleh dari melabeli setiap selimut graf dengan bilangan berurutan setelah label titik terbesar. Penelitian ini merupakan fungsi bijektif.

Pelabelan selimut \mathcal{H} anti ajaib super pada graf G dengan v merupakan titik dan e merupakan sisi, didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik titik dan sisi sisi pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai dengan sejumlah titik dan sisi yang ada. Secara matematis dapat ditulis $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$ dengan setiap subgraf dari G yang isomorfik dengan H dimana H juga subgraf dari G mempunyai total label.

Graf G dikatakan memiliki pelabelan selimut \mathcal{H} anti ajaib jika himpunan titik $V(G)$ merupakan pemetaan bijektif f ke $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$ (Gutierrez dan Lliado, 2005). Suatu selimut dari G adalah $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \dots, \mathcal{H}_k\}$ keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang-kurangnya satu graf \mathcal{H}_i , untuk suatu $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Jika untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, \mathcal{H}_i isomorfik dengan suatu subgraf \mathcal{H} , maka \mathcal{H} dikatakan suatu selimut- \mathcal{H} dari G . Selanjutnya dikatakan bahwa G memuat selimut- \mathcal{H} . Diberikan $G = (V(G), E(G))$ graf sederhana dan berhingga yang memuat selimut- \mathcal{H} dengan $|V(G)| = v_G$, $|E(G)| = e_G$, dan banyak subgraf \mathcal{H}_i dari G yang isomorfik dengan H adalah k . Graf G adalah $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib jika ada suatu pelabelan total $\xi : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v_G + e_G\}$ yang memenuhi $\xi(H_i) | H_i \cong H = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (k - 1)d\}$ untuk dua bilangan bulat positif a dan d tertentu. Dalam hal ini, $\xi(H_i)$ dikatakan bobot dari H_i (*bobot - H_i*) dan didefinisikan $\xi(H_i) = \{\sum_{v \in V(H_i)} \xi(v) + \sum_{e \in E(H_i)} \xi(e)\}$. Kemudian, ξ dikatakan pelabelan total $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super, jika $\xi(V(G)) = \{1, 2, \dots, v_G\}$. Suatu graf yang mempunyai pelabelan total $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic super disebut $(a, d) - H$ -antimagic super.

Jika G memuat suatu selimut- \mathcal{H} , maka pelabelan total $(a, d) - \mathcal{H}$ -antimagic super dikatakan *pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ - antimagic (super)* (Inayah, 2013).

Dengan demikian pelabeian selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super adalah pelabelan terhadap unsur titik dan sisi pada graf dengan bilangan $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ sedemikian hingga bobot selimut \mathcal{H} nya membentuk barisan aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (k - 1)d\}$ dengan a adalah suku pertama, b adalah beda, dan k adalah jumlah selimutnya.

2.7.3 Batas Atas Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ Anti Ajaib Super

Lema 2.7.1. *Misalkan G suatu graf, H subgraf G , dan $t \geq 2$ adalah banyak subgraf G yang isomorfik dengan H . Jika G adalah $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super, maka, $d \leq \frac{v_H(2v_G + e_G - v_H + 1) - (\frac{v_H + 1}{2}v_H) + (v_G \cdot e_H) + (\frac{e_H + 1}{2}e_H)}{t - 1}$ (Inayah, 2013)*

2.8 Aksioma, Lemma, Teorema, Corollary, Konjektur dan Open Problem

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi. Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar. Bentuk khusus dari teorema adalah lemma dan corollary (akibat). Lemma adalah teorema sederhana yang digunakan dalam pembuktian teorema lain. Lemma biasanya tidak menarik namun berguna pada pembuktian proposisi yang lebih kompleks, yang dalam hal ini pembuktian tersebut dapat lebih mudah dimengerti bila menggunakan sederetan lemma, setiap lemma dibuktikan secara individual. Corollary (akibat) adalah teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan, atau dapat dikatakan corollary adalah teorema yang mengikuti dari teorema lain. Konjektur adalah suatu pernyataan yang nilai kebenarannya tidak diketahui. Di dalam matematika, konjektur adalah proposisi yang tidak terbukti atau tidak memerlukan bukti atau juga teorema yang dianggap pasti benar adanya. Open problem (masalah terbuka atau pertanyaan terbuka) adalah beberapa masalah yang dapat secara akurat dinyatakan, dan belum diselesaikan (tidak ada solusi untuk diketahui).

2.9 Berpikir Tingkat Tinggi

Penggunaan keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ - anti ajaib super pada graf Rantai untuk mengetahui keterkaitan tum-bunya berpikir tingkat tinggi yang terdapat pada tahapan Taksonomi Bloom pada proses menemukan lemma dan teorema. Berpikir adalah aktivitas men-curahkan daya pikir untuk maksud tertentu. Menurut Santrock (2008) Berpikir melibatkan kegiatan memanipulasi dan mentransformasi informasi dalam memori. Kita berpikir untuk membentuk konsep, menalar, berpikir secara kritis membuat keputusan, berpikir secara kreatif, dan memecahkan masalah. Berpikir tingkat tinggi (*Higher Order Thinking Skill*) termasuk juga berpikir kritis, berpikir logika, refleksi, metakognisi, dan berpikir kreatif. Berpikir tingkat tinggi ini berkaitan dengan taksonomi bloom. Berpikir tingkat tinggi pada Taksonomi Bloom yang dimulai dari tiga tahapan teratas, yaitu tahapan menganalisis, mengevaluasi, dan mengkreasikan.

Keterampilan berpikir tingkat tinggi yang diterjemahkan dari *Higher Or-der Thinking (HOTS)* adalah kegiatan berpikir yang melibatkan level kognitif hearki tinggi berdasarkan Taksonomi Bloom. Sebelum mengalami revisi Taksonomi Bloom meliputi beberapa tahapan berpikir, yaitu mengetahui, mema-hami, mengaplikasikan, menganalisis, mensintesis, dan mengevaluasi. Pada Taksonomi Bloom tiga tahapan teratas merupakan berpikir tingkat tinggi (*Higher Order Thinking*), yaitu menganalisis, mensintesis, dan mengevaluasi. Pada tahun 1994 seorang murid Bloom, Lorin Anderson dan para ahli psikolog memperbaiki Taksonomi Bloom agar sesuai dengan kemajuan zaman. Berdasarkan Gambar 2.31 Taksonomi Bloom mengalami perubahan pada setiap tahapannya. Tahapan Taksonomi Bloom yang baru, yaitu mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, dan menciptakan. Berpikir tingkat tinggi (*Higher Order Thinking Skill*) pada Taksonomi Bloom terbaru merupakan tiga tahapan teratas yaitu tahap menganalisis, mengevaluasi, dan menciptakan.

Berdasarkan Gambar 2.31 dalam menginterpretasikan Taksonomi Bloom yang telah direvisi adalah sebagai berikut: a) sebelum kita memahami sebuah konsep maka kita harus mengingatnya terlebih dahulu; b) sebelum kita menerap-

kan maka kita harus memahaminya terlebih dahulu; c) sebelum kita menganalisis maka kita harus menegaplikasikan dulu; d) sebelum kita mengevaluasi maka kita harus menganalisis dulu; e) sebelum kita mengkreasi kita harus mengingat, memahami, mengaplikasikan, menganalisis, dan mengevaluasi.

2.10 Hasil Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ Anti Ajaib

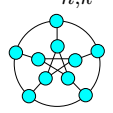
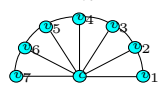

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Rangkuman yang tersedia pada bagian ini merupakan hasil penelitian yang diterbitkan pada tahun 2012

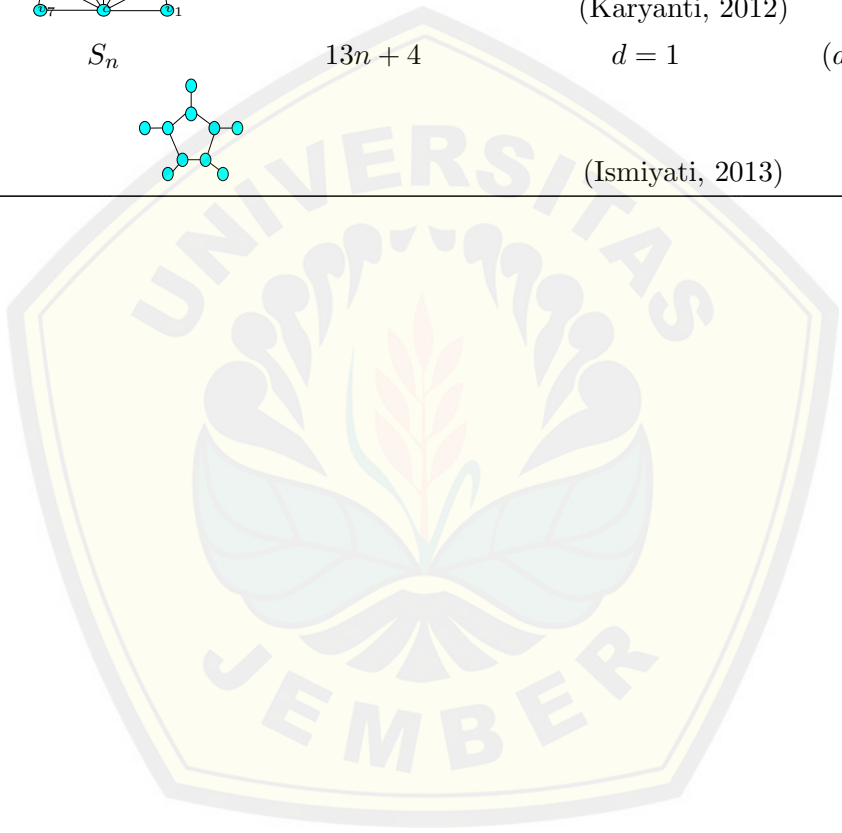


(Taksonomi Bloom yang Belum Direvisi) (Taksonomi Bloom yang Telah Direvisi)

Gambar 2.31 Tahapan Taksonomi Bloom

Tabel 2.1: Ringkasan Pelabelan Selimut (a, d) - \mathcal{H} Anti Ajaib Super.

Graf	a	d	Hasil
$GP_{n,k}$ 	$13n + 4 - \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 2$	$(a, d) - K_{1,3} -$
F_n 	$12 + 4n + \lfloor n/2 \rfloor$	$d = 4$	$(a, d) - C_3 -$
S_n 	$13n + 4$	$d = 1$	$(a, d) - K_{1,3} -$
		(Ismiyati, 2013)	-
		(Karyanti, 2012)	-
		(Ismiyati, 2013)	-



BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif aksiomatik, yaitu menetapkan pengertian dasar selimut \mathcal{H} anti ajaib super, kemudian dikenalkan beberapa teorema mengenai pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super pada graf Rantai. Selanjutnya menurunkan teorema tersebut untuk memperoleh pelabelan titik dan pelabelan sisi pada graf Rantai. Setelah ditemukan pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super pada graf Rantai, maka dilanjutkan ke metode pendektesian pola. Metode ini digunakan untuk merumuskan pola pelabelan titik dan pelabelan sisi apabila graf Rantai diperumum, sehingga nantinya didapatkan perumusan pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super pada graf Rantai. Selain itu penelitian ini juga menggunakan tahapan-tahapan yang terdapat di dalam Taksonomi Bloom yaitu mengingat, memahami, mengaplikasikan, menganalisa, mengevaluasi, dan menciptakan. Dalam menentukan setiap langkah penelitian ini akan dikaitkan dengan enam tahapan Taksonomi Bloom untuk menumbuhkan keterampilan berpikir tingkat tinggi atau biasa disebut *HOTS (Higher Order Thinking Skill)*.

3.2 Definisi Operasional

Definisi Operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi Operasional yang dimaksud adalah sebagai berikut:

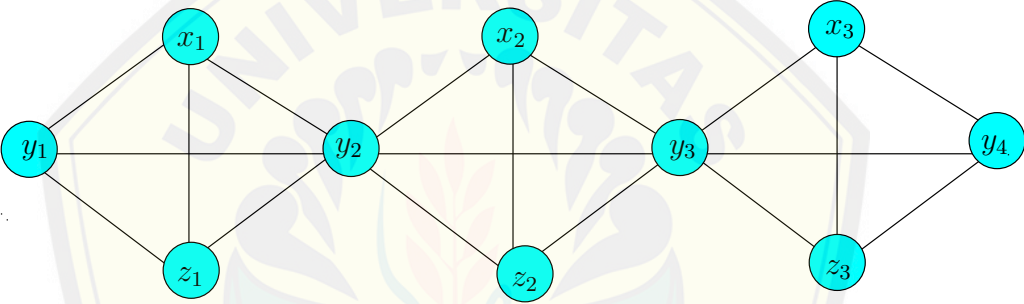
3.2.1 Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ Anti Ajaib Super

Pelabelan selimut \mathcal{H} anti ajaib super pada graf G dengan v titik dan sisi e didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik-titik dan sisi-sisi pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi, secara matematis ditulis dalam bentuk $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| +$

$|E(G)|\}$ dengan sifat bahwa setiap subgraf dari G yang isomorfik dengan H dimana H juga subgraf dari G mempunyai total label $\omega(H)=\sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$ sedemikian hingga bobot selimutnya membentuk barisan aritmatika $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (k - 1)d\}$ dengan a adalah suku pertama, b adalah beda, dan k adalah jumlah selimutnya.

3.2.2 Graf Rantai K_4P_n Konektif

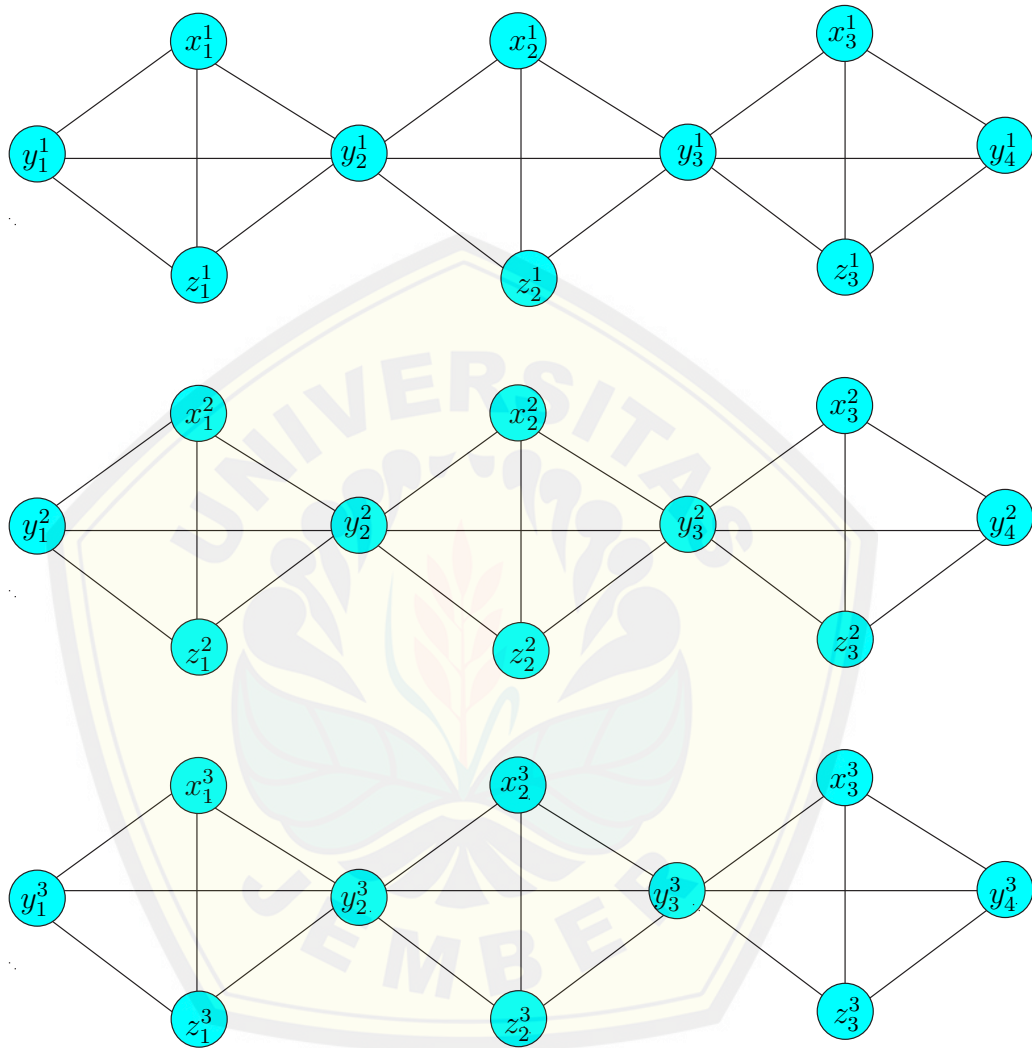
Graf Rantai dinotasikan dengan K_4P_n dengan $n \geq 2$ adalah sebuah graf dengan titik $V(K_4P_n) = \{x_i, y_j, z_i; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n + 1\}$ dan sisi $(K_4P_n) = \{x_i z_i, x_i y_i, y_i y_{i+1}, x_i y_{i+1}, y_i z_i, z_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$. Graf Rantai juga disebut sebagai graf Rantai konektif. Gambar 3.1 merupakan graf Rantai $K_4 \sim P_n$ untuk $n = 3$.



Gambar 3.1 Graf Rantai Konektif K_4P_3

3.2.3 Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n

graf Rantai diskonektif mK_4P_n didefinisikan sebagai gabungan diskonektif sebanyak m salinan graf Rantai yang mempunyai titik $V(mK_4P_n)=\{x_i^k, y_j^k, z_i^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n+1, 1 \leq k \leq m\}$ dan sisi $E(mK_4P_n)=\{x_i^k z_i^k, x_i^k y_i^k, x_j^k y_{i+1}^k, y_i^k y_{i+1}^k, y_i^k z_i^k, z_i^k y_{i+1}^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\}$. Dalam penelitian ini peneliti membatasi pada mK_4P_n dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Gambar 3.2 adalah gabungan saling lepas graf Rantai dengan $n = 3$ dan $m = 3$.



Gambar 3.2 Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n

3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf Rantai K_4P_n . Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

1. mengidentifikasi famili graf Rantai K_4P_n ;
2. menghitung jumlah titik p dan sisi q pada graf Rantai K_4P_n ;
3. menentukan batas atas nilai beda d pada graf Rantai K_4P_n ;
4. menentukan label titik pada graf Rantai K_4P_n ;
5. apabila label titik selimut anti ajaib berlaku untuk beberapa graf maka pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan dengan mengembangkan fungsi bijektif bobot titik selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib pada graf Rantai K_4P_n ;
6. menentukan label sisi dan fungsi bijektif sisi selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n ;
7. mengembangkan fungsi sisi dan bobot total pada graf Rantai K_4P_n ;
8. membuktikan kebenaran fungsi sisi pada graf Rantai K_4P_n ;
9. menemukan teorema.

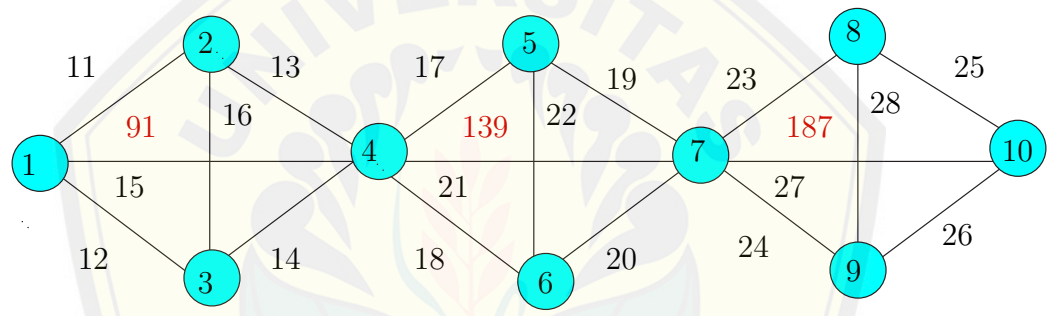
Penelitian ini akan menemukan berbagai pola pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super dengan berbagai nilai awal a dan beda d yang ditentukan. Teknik penelitian yang dilakukan pada gabungan graf Rantai juga sama dengan penelitian seperti yang telah disebutkan di atas namun teknik tersebut diterapkan pada gabungan saling lepas graf Rantai. Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam bagan alir pada Gambar 3.4.

3.4 Observasi

Sebelum penelitian lanjutan pada graf Rantai, telah dilakukan observasi awal untuk nilai m dan n tertentu sebagai pedoman untuk menduga keberadaan pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super serta menentukan pola pelabelannya. Ternyata setelah melakukan observasi awal, peneliti menemukan pola pelabelan

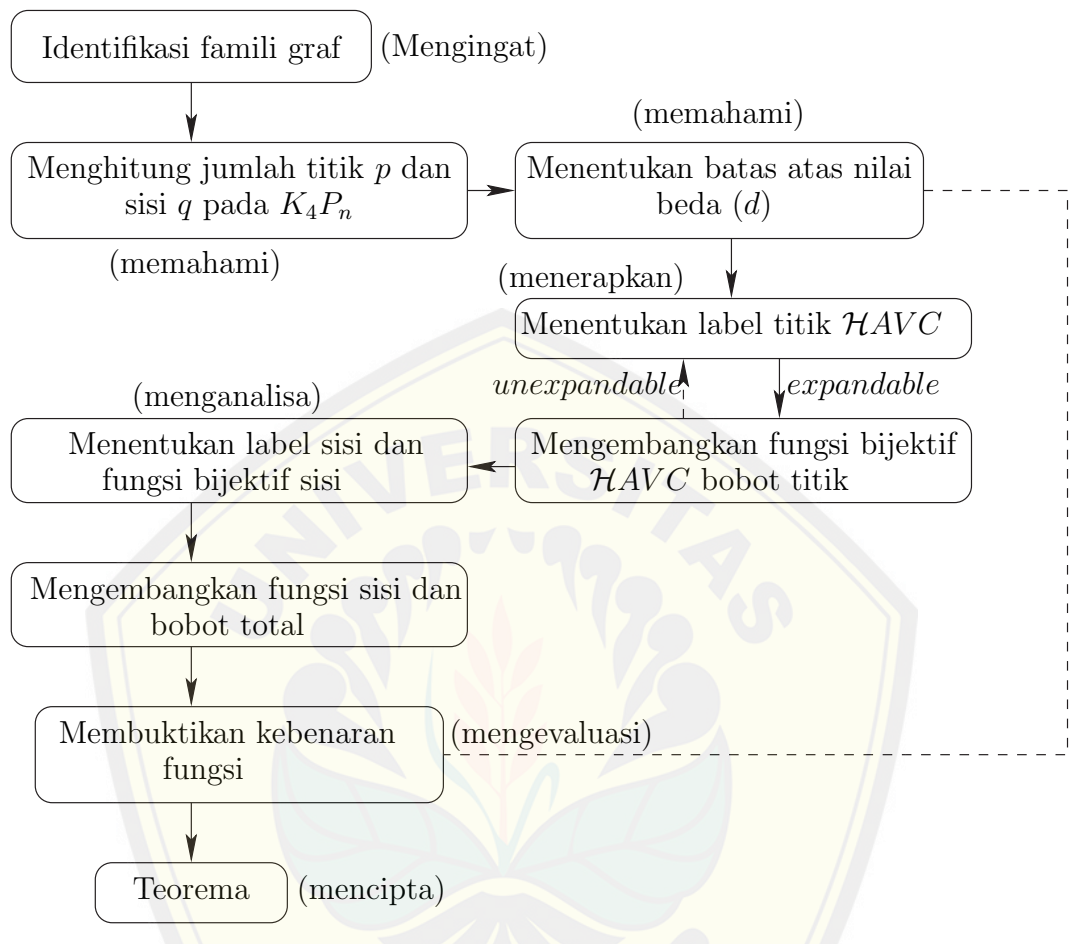
titik tunggal pada graf Rantai, antara lain dengan tahapan sebagai berikut: 1) mencari pelabelan titik graf Rantai; 2) pelabelan pertama dimulai dari titik y_1 ; 3) selanjutnya titik yang dilabeli adalah titik x_1 ; 4) Kemudian dilanjutkan dengan melabeli titik z_1 ; 5) kemudian dilanjutkan dengan melabeli titik y_2 ; 6) pola tersebut. berkelanjutan sampai titik z_3 . Pelabelan titik terakhir pada titik y_4 ; 7) pelabelan gabungan graf Rantai juga sama tahapannya hanya berbeda pengurutan *copy*.

Berdasarkan tahapan pelabelan tersebut yang dilakukan pada observasi awal sehingga penulis menemukan pelabelan titik dan bobot titik yang berurutan, maka penulis dapat melanjutkan observasinya untuk menemukan pelabelan selimut $(a, d)\mathcal{H}$ anti ajaib super pada graf Rantai. Untuk lebih jelasnya, berikut hasil observasi awal pelabelan graf Rantai konektif. Berdasarkan Gambar 3.3 pada



Gambar 3.3 Observasi Awal Graf Rantai Konektif (K_4P_n)

observasi awal penulis telah menemukan pelabelan selimut $(a, d)\mathcal{H}$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n = 3$ dengan nilai d adalah 48. Penulis dapat melanjutkan observasinya untuk menemukan pelabelan selimut $(a, d)\mathcal{H}$ anti ajaib super pada graf Rantai mK_4P_n untuk nilai m dan n tertentu.



Keterangan:
 —> Aliran kegiatan utama
 - - -> Aliran pengecekan

Gambar 3.4 Rancangan Penelitian

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini disajikan hasil penelitian mengenai pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n konektif dan diskonektif. Sedangkan sub graf \mathcal{H} pertama kali dipilih K_4 selanjutnya diperluas menjadi K_s pada bagian pembahasan. Sehingga peristilahan pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super, akan ditulis dengan pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super atau pelabelan selimut $(a, d) - K_s$ anti ajaib super. Hasil utama penelitian ini berupa teorema baru tentang pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super, yang ditandai dengan gambar permata \diamond dan kaitannya dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam proses menemukan pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n . Penelitian ini diawali dengan menentukan nilai batas atas d , menentukan pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super kemudian menentukan bobot selimut dan selimut totalnya.

Ditemukan 24 teorema dan 2 konjektur baru yang ditemukan secara eksperimental dalam penelitian ini. Format penyajian temuan penelitian dalam bab ini diawali dengan pernyataan teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema dan dekripsi keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam menemukan pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n . Berikut ini akan dijelaskan tahap-tahap bagaimana teorema tersebut ditemukan dan keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam menemukan teorema tersebut sekaligus menjawab rumusan masalah yang telah disajikan sebelumnya.

4.1 Batas Atas Pelabelan Selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n konektif dan diskonektif

Lema 4.1.1. *Jika sebuah graf $G (V, E)$ adalah pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super maka $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$ untuk $s = |\mathcal{H}_i|$, $H \subseteq G$ yang isomorfik dengan \mathcal{H} $p_G = |V|$, $q_G = |E|$, $p_H = |V'|$, $q_H = |E'|$.*

Bukti. $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p_G\}$ dan $f(E) = \{p_G+1, p_G+2, p_G+2, \dots, p_G+q_G\}$. Misalkan graf (p_G, q_G) mempunyai pelabelan selimut (a, d) - \mathcal{H} anti ajaib super dengan fungsi total $f(V \cup E) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$ maka himpunan bobot selimut sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a(s - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot selimut terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned} a + (s - 1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\ &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H p_G \\ &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) \\ (s - 1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\ &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H p_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\ &\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H p_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\ &= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\ &= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\ &= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\ d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s - 1)} \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas terbukti bahwa batas atas $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$ jika graf G memiliki pelabelan selimut $(a, d)\mathcal{H}$ anti ajaib super dari berbagai famili graf. (Dafik, 2014) \square

Observasi 4.1.1. *Jika graf Rantai K_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d)\text{-}K_4$ anti ajaib super maka $d \leq 48$.*

Bukti. Graf Rantai K_4P_n memiliki titik $V(K_4P_n) = \{x_i, y_j, z_i \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n+1\}$ dan himpunan sisi $E(K_4P_n) = \{x_i y_{i+1}, z_i y_{i+1}, x_i y_i, y_i z_i, y_i y_{i+1}, x_i z_i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\}$. Sedangkan jumlah titik $p_G = 3n + 1$ dan sisi $q_G = 6n$, dan jumlah titik selimut adalah $p_H = 4$ serta jumlah sisi selimut adalah $q_H = 6$ dengan jumlah selimut n . Sesuai dengan Lemma 4.1.1, batas atas nilai beda d adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1} \\ &\leq \frac{(3n + 1 - 4)4 + (6n - 6)6}{n - 1} \\ &\leq \frac{(3n - 3)4 + (6n - 6)}{6} n - 1 \\ &\leq \frac{(12n - 12 + 66n - 36)}{n - 1} \\ &\leq \frac{48n - 48}{n - 1} \\ &\leq \frac{48(n - 1)}{n - 1} \\ &\leq 48 \end{aligned}$$

Observasi 4.1.2. *Jika graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d)\text{-}K_4$ anti ajaib super maka $d < 50$.*

Bukti. graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki himpunan titik $V(mK_4P_n) = \{x_i^k, y_j^k, z_i^k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n+1; 1 \leq k \leq m\}$ dan sisi $E(mK_4P_n) = \{x_i^k y_{i+1}^k, z_i^k y_{i+1}^k, x_i^k y_i^k, y_i^k z_i^k, y_i^k y_{i+1}^k, x_i^k z_i^k, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq m\}$. Sedangkan jumlah titik $p_G = 3mn + m$ dan sisi $q_G = 6mn$, dan jumlah titik selimut adalah $p_H = 4$ serta jumlah sisi selimut adalah $q_H = 6$ dengan jumlah selimut

nm . Batas atas nilai beda d adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1} \\ &\leq \frac{(3mn + m - 4)4 + (6mn - 6)6}{(mn - 1)} \\ &\leq \frac{48mn + 4m - 52}{mn - 1} \\ &\leq 48 + \frac{4m - 4}{mn - 1} \end{aligned}$$

karena $0 < \frac{4m - 4}{mn - 1} < 2$ maka

$$d < 50$$

Karena pelabelan selimut (a, d) - K_4 anti ajaib super selalu menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai $d \geq 0$ dan d adalah bilangan bulat, sehingga $d \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 49\}$. \square

4.2 Pelabelan Selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib Super pada Graf Rantai Konektif K_4P_n

Pada tahap ini, fungsi bijektif pelabelan selimut K_4 anti ajaib super pada graf Rantai konektif (tunggal) K_4P_n akan disesuaikan dengan nilai d yang telah ditetapkan. Untuk menentukan pelabelan selimut K_4 anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n digunakan metode yang terdiri dari beberapa langkah. Metode ini diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku pada batas i yang telah ditemukan. Untuk penentuan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi barisan aritmatika, fungsi ini pada akhirnya merupakan fungsi bijektif pada graf yang diteliti. Setelah fungsi bijektif diketahui selanjutnya dilakukan pembuktian secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema yang didapat. Teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik karena teoremnya bersifat keberadaan sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Berdasarkan hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa teorema sebagai berikut. Teo-

rema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Setelah mengetahui batas atas nilai d , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan selimut K_4 anti ajaib super dengan terlebih dahulu menentukan fungsi bijektif melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika dari titik dan sisi pada graf Rantai K_4P_n .

◇ **Teorema 4.2.1.** *Ada pelabelan selimut $(18n + 37, 48) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(y_j) &= 3j - 2, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n + 1 \\ f_1(x_i) &= 3i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(z_i) &= 3i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa f_1 adalah fungsi bijektif yang memetakan K_4P_n ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \dots, 3n+1\}$. Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot titik selimut dari pelabelan total selimut pada graf Rantai dimana bobot titik selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 4 label titik dari K_4 yang menjadi selimut pada pada graf Rantai K_4P_n , maka fungsi bijektif w_{f_1} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_1} &= f_1(y_j) + f_1(x_i) + f_1(z_i) \\ &= (3i - 1) + (3j - 2) + (3i) \\ &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) \end{aligned}$$

Labeli sisi graf Rantai K_4P_n dengan fungsi f_1 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_1(x_i y_{i+1}) &= 3n + 6i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(z_i y_{i+1}) &= 3n + 6i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(x_i y_i) &= 3n + 6i - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(y_i z_i) &= 3n + 6i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(y_i y_{i+1}) &= 3n + 6i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_1(x_i z_i) &= 3n + 6i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

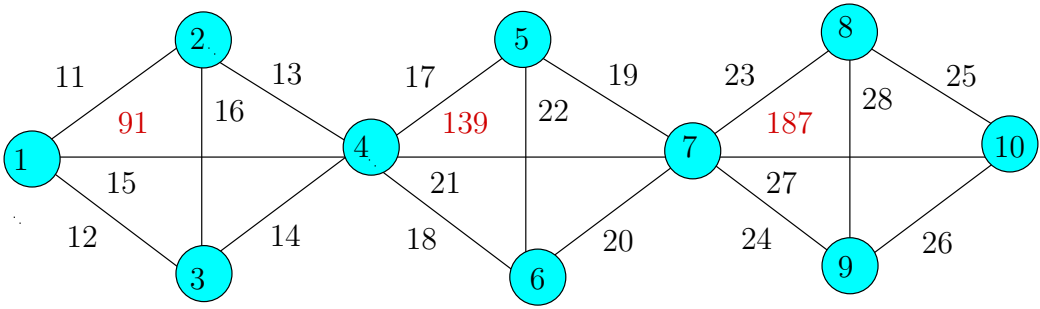
Jika W_{f_1} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_1} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_1} dan rumus label sisi f_1 , sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_1} &= w_{f_1} + f_1(x_i y_{i+1}) + f_1(z_i y_{i+1}) + f_1(x_i y_i) + f_1(y_i z_i) + f_1(y_i y_{i+1}) + f_1(x_i z_i) \\
 &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) + (3n + 6i - 2) + (3n + 6i - 1) + (3n + 6i - 4) + \\
 &\quad (3n + 6i - 3) + (3n + 6i) + (3n + 6i + 1) \\
 &= 18n + 42i - 10 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk i, j pada interval $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n + 1$ didapat himpunan $W_{f_1} = \{18n + 37, 18n + 85, \dots, 66n - 11\}$ karena $U_n = a + (n - 1)b = 18n + 37 + (n - 1)48 = 66n - 11$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut $(18n + 37, 48) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$ untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.1 merupakan contoh pelabelan selimut $(18n + 37, 48) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$.

\diamond **Teorema 4.2.2.** *Ada pelabelan selimut $(24n + 31, 36) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$ untuk $n \geq 2$.*



Gambar 4.1 Pelabelan Selimut $(18n + 37, 48) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 , maka $f_2(y_j) = f_1(y_j)$, $f_2(x_i) = f_1(x_i)$, dan $f_2(z_i) = f_1(z_i)$ sehingga $w_{f_2} = w_{f_1} = 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)$, untuk $1 \leq j \leq n + 1$, $1 \leq i \leq n$. Labeli sisi graf Rantai K_4P_n dengan fungsi f_2 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_2(x_i y_{i+1}) &= 3n + 6i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_2(z_i y_{i+1}) &= 3n + 6i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_2(x_i y_i) &= 3n + 6i - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_2(y_i z_i) &= 3n + 6i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_2(y_i y_{i+1}) &= 3n + 6i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_2(x_i z_i) &= 9n - 6i + 7, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

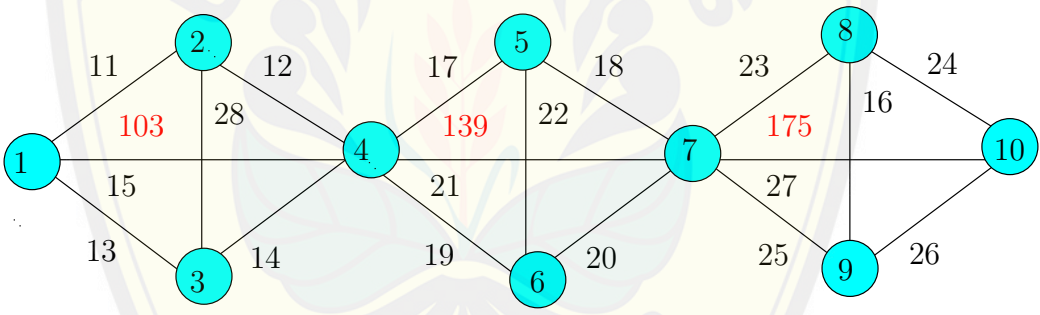
Jika W_{f_2} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{f_2} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_2} dan rumus label sisi f_2 , sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$W_{f_2} = w_{f_2} + f_2(x_i y_{i+1}) + f_2(z_i y_{i+1}) + f_2(x_i y_i) + f_2(y_i z_i) + f_2(y_i y_{i+1}) + f_2(x_i z_i)$$

$$\begin{aligned}
 &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) + (3n + 6i - 3) + (3n + 6i - 1) + (3n + 6i - 4) + \\
 &\quad (3n + 6i - 2) + (3n + 6i) + (9n - 6i + 7) \\
 &= 24n + 30i - 4 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk i, j pada interval $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq i \leq n + 1$ didapat himpunan $W_{f_2} = \{24n + 31, 24n + 67, \dots, 67n - 5\}$ karena $U_n = a + (n - 1)b = 24n + 31 + (n - 1)36 = 67n - 5$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut $(24n + 31, 36) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.2 merupakan contoh pelabelan selimut $(24n + 31, 36) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n .



Gambar 4.2 Pelabelan Selimut $(24n + 31, 36) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n

◇ **Teorema 4.2.3.** *Ada pelabelan selimut $(54n + 1, 24) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 , maka $f_3(y_j) = f_1(y_j)$, $f_3(x_i) = f_1(x_i)$, dan $f_3(z_i) = f_1(z_i)$ sehingga $w_{f_3} = w_{f_1} = 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} 3j - 2$. Labeli sisi graf Rantai K_4P_n dengan fungsi f_3 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_3(x_i y_{i+1}) &= 9n - 6i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_3(z_i y_{i+1}) &= 9n - 6i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_3(x_i y_i) &= 9n - 6i + 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_3(y_i z_i) &= 9n - 6i + 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_3(y_i y_{i+1}) &= 9n - 6i + 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_3(x_i z_i) &= 9n - 6i + 7, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

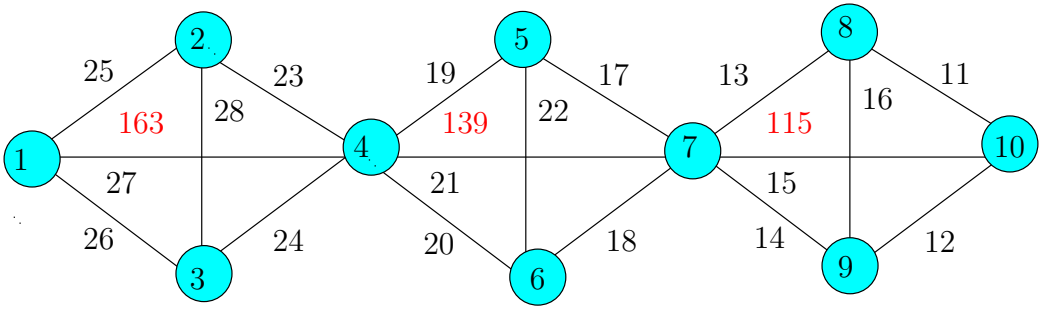
Jika W_{f_3} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{f_3} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_3} dan rumus label sisi f_3 , sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_3} &= w_{f_3} + f_3(x_i y_{i+1}) + f_3(z_i y_{i+1}) + f_3(x_i y_i) + f_3(y_i z_i) + f_3(y_i y_{i+1}) + f_3(x_i z_i) \\
 &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) + (9n - 6i + 2) + (9n - 6i + 3) + (9n - 6i + 4) + \\
 &\quad (9n - 6i + 5) + (9n - 6i + 6) + (9n - 6i + 7) \\
 &= 54n - 30i + 26 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk i, j pada interval $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n + 1$ didapat himpunan $W_{f_3} = \{54n + 1, 54n + 25, 18n + 85, \dots, 78n - 23\}$ karena $U_n = a + (n - 1)b = 54n + 1 + (n - 1)24 = 78n - 23$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut $(54n + 1, 24) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$ untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.3 merupakan contoh pelabelan selimut $(54n + 1, 24) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$.

\diamond **Teorema 4.2.4.** *Ada pelabelan selimut $(31n + 24, 22) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$ untuk $n \geq 2$.*



Gambar 4.3 Pelabelan Selimut $(54n + 1, 24)$ - K_4 Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 , maka $f_4(y_j) = f_1(y_j)$, $f_4(x_i) = f_1(x_i)$, dan $f_4(z_i) = f_1(z_i)$ sehingga $w_{f_4} = w_{f_1} = 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)$. Labeli sisi graf Rantai K_4P_n dengan fungsi f_4 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

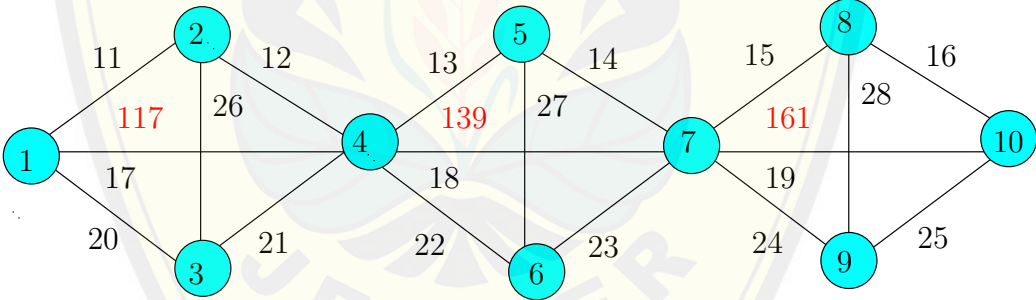
$$\begin{aligned}
 f_4(x_i y_{i+1}) &= 3n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_4(z_i y_{i+1}) &= 6n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_4(x_i y_i) &= 3n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_4(y_i z_i) &= 6n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_4(y_i y_{i+1}) &= 5n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_4(x_i z_i) &= 8n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Jika W_{f_4} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{f_4} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_4} dan rumus label sisi f_4 , sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_4} &= w_{f_4} + f_4(x_i y_{i+1}) + f_4(z_i y_{i+1}) + f_4(x_i y_i) + f_4(y_i z_i) + f_4(y_i y_{i+1}) + f_4(x_i z_i) \\
 &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) + (3n + 2i + 1) + (6n + 21 + 1) + (3n + 2i) + \\
 &\quad (6n + 2i) + (5n + i + 1) + (8n + i + 1) \\
 &= 31n + 16i + 3 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk i, j pada interval $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n + 1$ didapat himpunan $W_{f_4} = \{31n + 24, 31n + 46, \dots, 53n + 2\}$ karena $U_n = a + (n - 1)b = 31n + 24 + (n - 1)22 = 53n + 2$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut $(31n + 24, 22) - K_4 P_n$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$ untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.4 merupakan contoh pelabelan selimut $(31n + 24, 22) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$.



Gambar 4.4 Pelabelan Selimut $(31n + 24, 22) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai $K_4 P_n$

\diamond **Teorema 4.2.5.** Ada pelabelan selimut $(33n + 22, 18) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$ untuk $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf Rantai $K_4 P_n$ dengan fungsi bijektif f_1 , maka $f_5(y_j) = f_1(y_j)$, $f_5(x_i) = f_1(x_i)$, dan $f_5(z_i) = f_1(z_i)$ sehingga $w_{f_5} = w_{f_1} =$

$6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)$. Labeli sisi graf Rantai K_4P_n dengan fungsi f_5 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_5(x_i y_{i+1}) &= 3n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_5(z_i y_{i+1}) &= 6n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_5(x_i y_i) &= 3n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_5(y_i z_i) &= 6n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_5(y_i y_{i+1}) &= 6n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_5(x_i z_i) &= 9n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

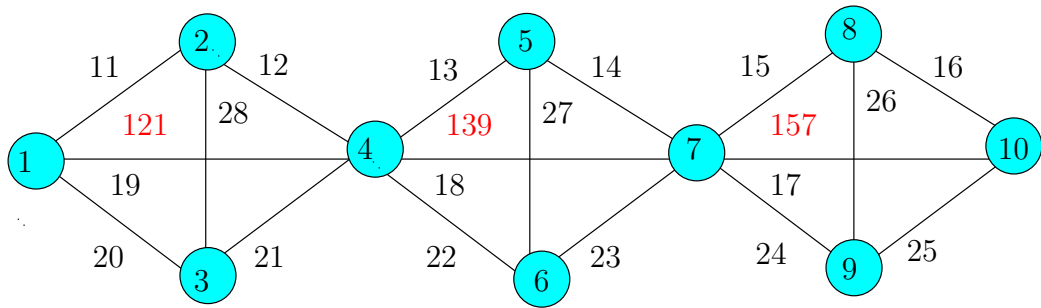
Jika W_{f_5} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{f_5} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_5} dan rumus label sisi f_5 , sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_5} &= w_{f_5} + f_5(x_i y_{i+1}) + f_5(z_i y_{i+1}) + f_5(x_i y_i) + f_5(y_i z_i) + f_5(y_i y_{i+1}) + f_5(x_i z_i) \\ &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) + (3n + 2i + 1) + (6n + 2i + 1) + (3n + 2i) + \\ &\quad (6n + 2i) + (6n - i + 2) + (9n - i + 2) \\ &= 33n + 12i + 5 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk i, j pada interval $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n + 1$ didapat himpunan $W_{f_5} = \{33n + 22, 33n + 40, \dots, 51n + 4\}$ karena $U_n = a + (n - 1)b = 33n + 22 + (n - 1)18 = 51n + 4$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut $(33n + 22, 18) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.5 merupakan contoh pelabelan selimut $(33n + 22, 18) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n .

\diamond **Teorema 4.2.6.** *Ada pelabelan selimut $(34n + 21, 16) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$.*



Gambar 4.5 Pelabelan Selimut $(33n + 22, 18) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 , maka $f_6(y_j) = f_1(y_j)$, $f_6(x_i) = f_1(x_i)$, dan $f_6(z_i) = f_1(z_i)$ sehingga $w_{f_6} = w_{f_1} = 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)$. Labeli sisi graf Rantai K_4P_n dengan fungsi f_6 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_6(x_i y_{i+1}) &= 5n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_6(z_i y_{i+1}) &= 8n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_6(x_i y_i) &= 6n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_6(y_i z_i) &= 8n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_6(y_i y_{i+1}) &= 3n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_6(x_i z_i) &= 3n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

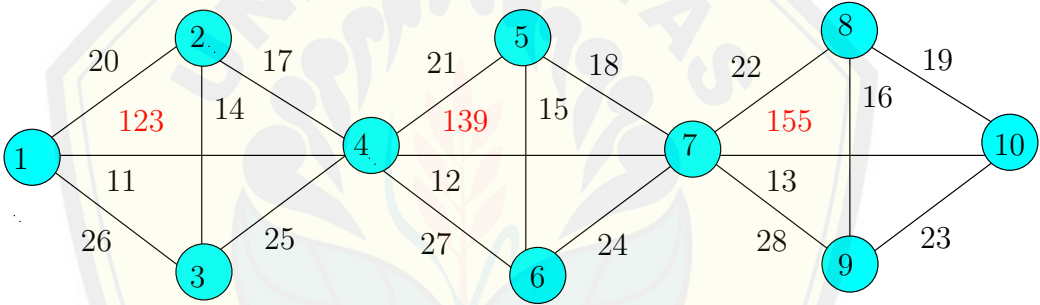
Jika W_{f_6} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{f_6} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_6} dan rumus label sisi f_6 , sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_6} &= w_{f_6} + f_6(x_i y_{i+1}) + f_6(z_i y_{i+1}) + f_6(x_i y_i) + f_6(y_i z_i) + f_6(y_i y_{i+1}) + f_6(x_i z_i) \\
 &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) + (5n + i + 1) + (8n - i + 2) + (6n + i + 1) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (8n + i + 1) + (3n + i + 1) + (3n + i + 1) \\
&= 34n + 10i + 6 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)
\end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk i, j pada interval $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n + 1$ didapat himpunan $W_{f_6} = \{34n + 21, 34n + 37, \dots, 50n + 5\}$ karena $U_n = a + (n - 1)b = 34n + 21 + (n - 1)16 = 50n + 5$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut $(34n + 21, 16) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$. □

Gambar 4.6 merupakan contoh pelabelan selimut $(34n + 21, 16) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n .



Gambar 4.6 Pelabelan Selimut $(34n + 21, 16) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n

◇ **Teorema 4.2.7.** *Ada pelabelan selimut $(35n + 20, 14) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 , maka $f_7(y_j) = f_1(y_j)$, $f_7(x_i) = f_1(x_i)$, dan $f_7(z_i) = f_1(z_i)$ sehingga $w_{f_7} = w_{f_1} = 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)$. Labeli sisi graf Rantai K_4P_n dengan fungsi f_7 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_7(x_i y_{i+1}) &= 5n - 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_7(z_i y_{i+1}) &= 6n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_7(x_i y_i) &= 5n - 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_7(y_i z_i) &= 6n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_7(y_i y_{i+1}) &= 5n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_7(x_i z_i) &= 8n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Jika W_{f_7} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{f_7} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_7} dan rumus label sisi f_7 , sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

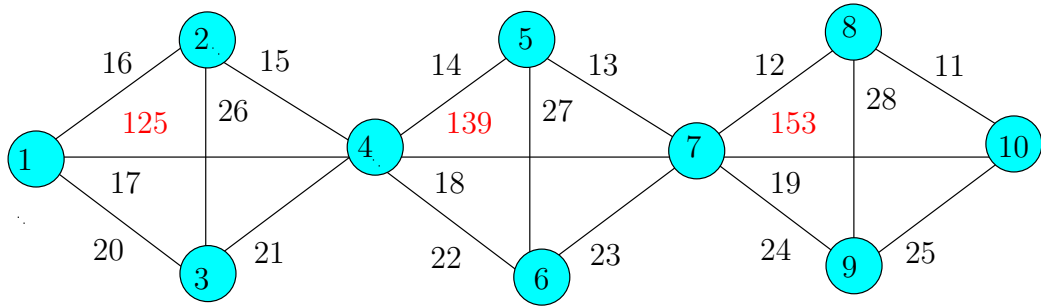
$$\begin{aligned}
 W_{f_7} &= w_{f_7} + f_7(x_i y_{i+1}) + f_7(z_i y_{i+1}) + f_7(x_i y_i) + f_7(y_i z_i) + f_7(y_i y_{i+1}) + f_7(x_i z_i) \\
 &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) + (5n - 2i + 2) + (6n + 2i + 1) + (5n - 2i + 3) + \\
 &\quad (6n + 2i) + (5n + i + 1) + (8n + i + 1) \\
 &= 35n + 8i + 7 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk i, j pada interval $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n + 1$ didapat himpunan $W_{f_7} = \{35n + 23, 35n + 44, \dots, 49n + 6\}$ karena $U_n = a + (n - 1)b = 35n + 20 + (n - 1)14 = 49n + 6$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut $(35n + 20, 14) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$ untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.7 merupakan contoh pelabelan selimut $(35n + 20, 14) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai

$$K_4 P_n.$$

\diamond **Teorema 4.2.8.** *Ada pelabelan selimut $(36n + 19, 12) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$ untuk $n \geq 2$.*



Gambar 4.7 Pelabelan Selimut $(35n + 20, 14) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 , maka $f_8(y_j) = f_1(y_j)$, $f_8(x_i) = f_1(x_i)$, dan $f_8(z_i) = f_1(z_i)$ sehingga $w_{f_8} = w_{f_1} = 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)$. Labeli sisi graf Rantai K_4P_n dengan fungsi f_8 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_8(x_i y_{i+1}) &= 5n - 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_8(z_i y_{i+1}) &= 5n - 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_8(x_i y_i) &= 5n - 2i + 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_8(y_i z_i) &= 5n - 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_8(y_i y_{i+1}) &= 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_8(x_i z_i) &= 9n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

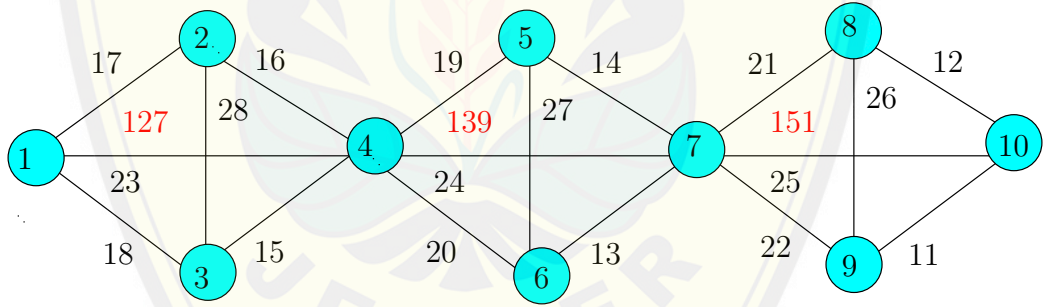
Jika W_{f_8} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{f_8} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_8} dan rumus label sisi f_8 , sehingga dapat

dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_8} &= w_{f_8} + f_8(x_i y_{i+1}) + f_8(z_i y_{i+1}) + f_8(x_i y_i) + f_8(y_i z_i) + f_8(y_i y_{i+1}) + f_8(x_i z_i) \\
 &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) + (5n - 2i + 3) + (5n - 2i + 2) + (5n - 2i + 4) + \\
 &\quad (5n - 2i + 1) + (7n + i + 1) + (9n - i + 2) \\
 &= 36n + 2i + 12 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk i, j pada interval $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n + 1$ didapat himpunan $W_{f_8} = \{36n + 19, 36n + 31, \dots, 48n + 7\}$ karena $U_n = a + (n - 1)b = 36n + 19 + (n - 1)12 = 48n + 7$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut $(36n + 19, 12) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$ untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.8 merupakan contoh pelabelan selimut $(36n + 19, 12) - K_4 P_3$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$.



Gambar 4.8 Pelabelan Selimut $(36n + 19, 12) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai $K_4 P_n$

\diamond **Teorema 4.2.9.** Ada pelabelan selimut $(37n + 18, 10) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$ untuk $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf Rantai $K_4 P_n$ dengan fungsi bijektif f_1 , maka $f_9(y_j) = f_1(y_j)$, $f_9(x_i) = f_1(x_i)$, dan $f_9(z_i) = f_1(z_i)$ sehingga $w_{f_9} = w_{f_1} =$

$6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} 3j - 2$. Labeli sisi graf Rantai K_4P_n dengan fungsi f_9 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_9(x_i y_{i+1}) &= 7n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_9(z_i y_{i+1}) &= 7n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_9(x_i y_i) &= 6n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_9(y_i z_i) &= 8n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_9(y_i y_{i+1}) &= 4n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_9(x_i z_i) &= 5n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

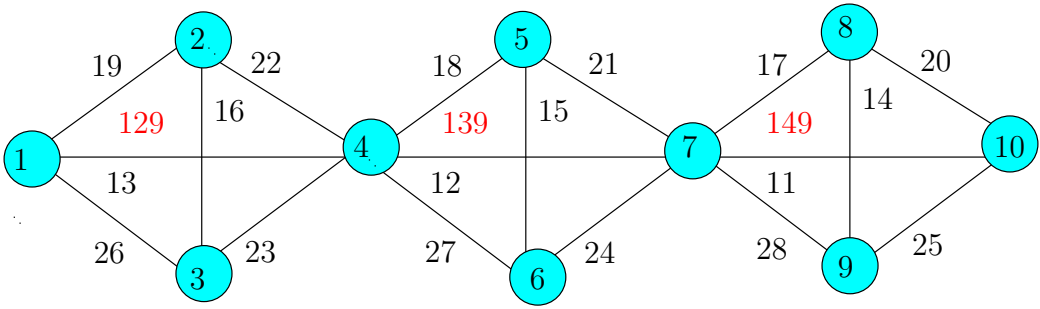
Jika W_{f_9} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka W_{f_9} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_9} dan rumus label sisi f_9 , sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_9} &= w_{f_9} + f_9(x_i y_{i+1}) + f_9(z_i y_{i+1}) + f_9(x_i y_i) + f_9(y_i z_i) + f_9(y_i y_{i+1}) + f_9(x_i z_i) \\ &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) + (7n - i + 2) + (7n + i + 1) + (6n - i + 2) + \\ &\quad (8n + i + 1) + (4n - i + 2) + (5n - i + 2) \\ &= 37n + 4i + 9 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk i, j pada interval $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n + 1$ didapat himpunan $W_{f_9} = \{37n + 18, 37n + 28, \dots, 47n + 8\}$ karena $U_n = a + (n - 1)b = 37n + 18 + (n - 1)10 = 47n + 8$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut $(37n + 18, 10) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.9 merupakan contoh pelabelan selimut $(37n + 18, 10) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n .

\diamond **Teorema 4.2.10.** *Ada pelabelan selimut $(38n + 17, 8) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$.*



Gambar 4.9 Pelabelan Selimut $(37n + 18, 10)$ - K_4 Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 , maka $f_{10}(y_j) = f_1(y_j)$, $f_{10}(x_i) = f_1(x_i)$, dan $f_{10}(z_i) = f_1(z_i)$ sehingga $w_{f_{10}} = w_{f_1} = 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)$. Labeli sisi graf Rantai K_4P_n dengan fungsi f_{10} yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_{10}(x_i y_{i+1}) &= 5n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{10}(z_i y_{i+1}) &= 7n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{10}(x_i y_i) &= 4n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{10}(y_i z_i) &= 6n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{10}(y_i y_{i+1}) &= 8n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{10}(x_i z_i) &= 8n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

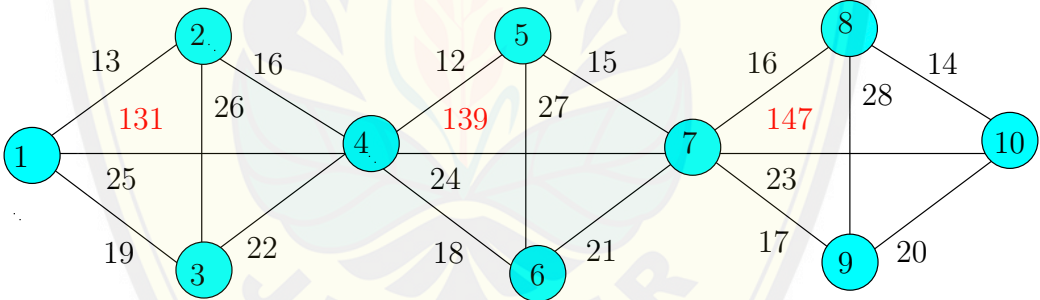
Jika $W_{f_{10}}$ didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka $W_{f_{10}}$ dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut $W_{f_{10}}$ dan rumus label sisi f_{10} , sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_{10}} &= w_{f_{10}} + f_{10}(x_i y_{i+1}) + f_{10}(z_i y_{i+1}) + f_{10}(x_i y_i) + f_{10}(y_i z_i) + f_{10}(y_i y_{i+1}) + \\
 &\quad f_{10}(x_i z_i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) + (5n - i + 2) + (7n - i + 2) + (4n - i + 2) + \\
 &\quad (6n - i + 2) + (8n - i + 2) + (8n + i + 1) \\
 &= 38n + 2i + 10 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk i pada interval $1 \leq i \leq n$ didapat himpunan $W_{f_{10}} = \{38n + 17, 38n + 25, \dots, 46n + 9\}$ karena $U_n = a + (n - 1)b = 38n + 17 + (n - 1)8 = 46n + 9$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut $(38n + 17, 8) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.10 merupakan contoh pelabelan selimut $(38n + 17, 8) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n .



Gambar 4.10 Pelabelan Selimut $(38n + 17, 8) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n

\diamond **Teorema 4.2.11.** *Ada pelabelan selimut $(39n + 16, 6) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 , maka $f_{11}(y_j) = f_1(y_j)$, $f_{11}(x_i) = f_1(x_i)$, dan $f_{11}(z_i) = f_1(z_i)$ sehingga $w_{f_{11}} = w_{f_1} =$

$6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)$. Labeli sisi graf Rantai K_4P_n dengan fungsi f_{11} yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{11}(x_i y_{i+1}) &= 5n - 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{11}(z_i y_{i+1}) &= 8n - 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{11}(x_i y_i) &= 5n - 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{11}(y_i z_i) &= 8n - 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{11}(y_i y_{i+1}) &= 5n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{11}(x_i z_i) &= 8n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

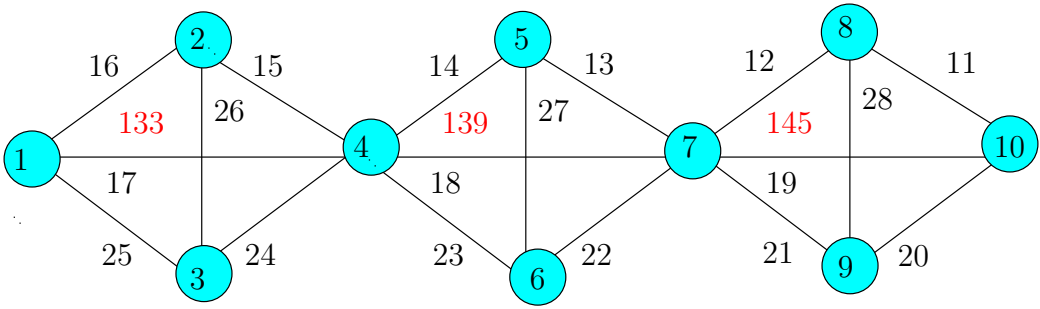
Jika $W_{f_{11}}$ didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka $W_{f_{11}}$ dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut $w_{f_{11}}$ dan rumus label sisi f_{11} , sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{11}} &= w_{f_{11}} + f_{11}(x_i y_{i+1}) + f_{11}(z_i y_{i+1}) + f_{11}(x_i y_i) + f_{11}(y_i z_i) + f_{11}(y_i y_{i+1}) \\ &\quad + f_{11}(x_i z_i) \\ &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) + (5n - 2i + 2) + (8n - 2i + 2) + (8n + i + 1) + \\ &\quad (8n - 2i + 3) + (5n + i + 1) + (8n + i + 1) \\ &= 39n + 11 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk i pada interval $1 \leq i \leq n$ didapat himpunan $W_{f_{11}} = \{39n + 16, 39n + 22, \dots, 45n + 10\}$ karena $U_n = a + (n - 1)b = 39n + 16 + (n - 1)6 = 45n + 10$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut $(39n + 16, 6) - K_4P_n$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.11 merupakan contoh pelabelan selimut $(39n + 16, 6) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n .

\diamond **Teorema 4.2.12.** *Ada pelabelan selimut $(40n + 15, 4) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$.*



Gambar 4.11 Pelabelan selimut $(39n + 16, 6)$ - K_4 Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 , maka $f_{12}(y_j) = f_1(y_j)$, $f_{12}(x_i) = f_1(x_i)$, dan $f_{12}(z_i) = f_1(z_i)$ sehingga $w_{f_{12}} = w_{f_1} = 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)$. Labeli sisi graf Rantai K_4P_n dengan fungsi f_{12} yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_{12}(x_i y_{i+1}) &= 5n - 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{12}(z_i y_{i+1}) &= 8n - 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{12}(x_i y_i) &= 5n - 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{12}(y_i z_i) &= 8n - 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{12}(y_i y_{i+1}) &= 6n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{12}(x_i z_i) &= 8n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Jika $W_{f_{12}}$ didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Lengkap Lintasan berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka $W_{f_{12}}$ dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut $w_{f_{12}}$ dan rumus label sisi f_{12} , sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

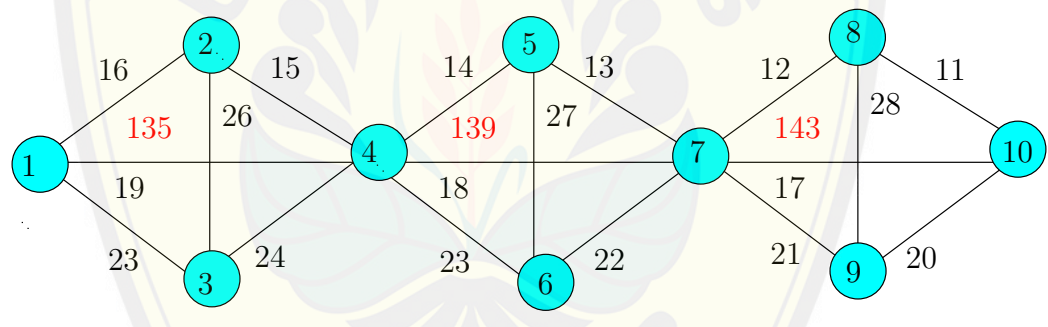
$$\begin{aligned}
 W_{f_{12}} = & w_{f_{12}} + f_{12}(x_i y_{i+1}) + f_{12}(z_i y_{i+1}) + f_{12}(x_i y_i) + f_{12}(y_i z_i) + f_{12}(y_i y_{i+1}) + \\
 & f_{12}(x_i z_i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) + (5n - 2i + 2) + (8n - 2i + 2) + (8n + i + 1) + \\
 &\quad (8n - 2i + 3) + (6n - i + 2) + (8n + i + 1) \\
 &= 40n - 2i + 12 \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk i pada interval $1 \leq i \leq n$ didapat himpunan $W_{f_{12}} = \{40n + 15, 40n + 19, \dots, 44n + 9\}$ karena $U_n = a + (n - 1)b = 40n + 15(n - 1)4 = 44n + 9$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut $(40n + 15, 4) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.12 merupakan contoh pelabelan selimut $(40n + 15, 4) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai

K_4P_n .



Gambar 4.12 Pelabelan Selimut $(40n + 15, 4) - K_4$ aAnti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n

\diamond **Teorema 4.2.13.** *Ada pelabelan selimut $(41n + 14, 2) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 , maka $f_{13}(y_j) = f_1(y_j)$, $f_{13}(x_i) = f_1(x_i)$, dan $f_{13}(z_i) = f_1(z_i)$ sehingga $w_{f_{13}} = w_{f_1} = 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)$. Labeli sisi graf Rantai K_4P_n dengan fungsi f_{13} yang dapat

dituliskan sebagai berikut:

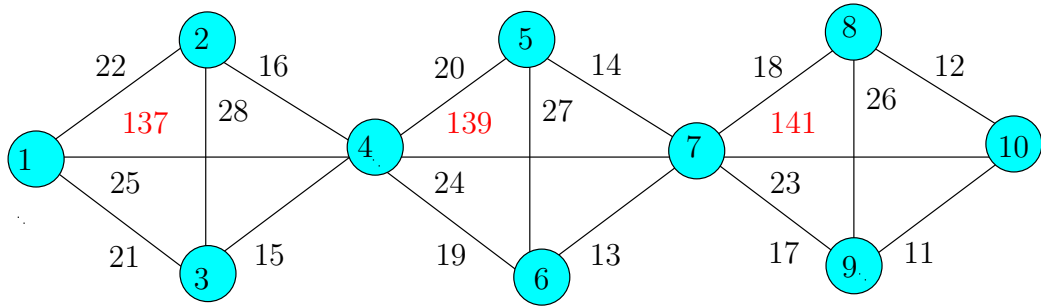
$$\begin{aligned}
 f_{13}(x_i y_{i+1}) &= 5n - 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{13}(z_i y_{i+1}) &= 5n - 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{13}(x_i y_i) &= 7n - 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{13}(y_i z_i) &= 7n - 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{13}(y_i y_{i+1}) &= 8n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{13}(x_i z_i) &= 9n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Jika $W_{f_{13}}$ didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka $W_{f_{13}}$ dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut $w_{f_{13}}$ dan rumus label sisi f_{13} , sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_{13}} &= w_{f_{13}} + f_{13}(x_i y_{i+1}) + f_{13}(z_i y_{i+1}) + f_{13}(x_i y_i) + f_{13}(y_i z_i) + f_{13}(y_i y_{i+1}) + \\
 &\quad f_{13}(x_i z_i) \\
 &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) + (5n - 2i + 3) + (5n - 2i + 2) + (7n - 2i + 3) + \\
 &\quad (7n - 2i + 2) + (8n - i + 2) + (9n - i + 2) \\
 &= 41n - 4i + 13 \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk i pada interval $1 \leq i \leq n$ didapat himpunan $W_{f_{13}} = \{41n + 14, 41n + 16, \dots, 41n + 12\}$ karena $U_n = a + (n - 1)b = 41n + 14(n - 1)2 = 43n + 12$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut $(41n + 14, 2) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$ untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.13 merupakan contoh pelabelan selimut $(41n + 14, 2) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$.



Gambar 4.13 Pelabelan Selimut $(41n + 14, 2)$ - K_4 Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n

◇ **Teorema 4.2.14.** *Ada pelabelan selimut $(42n + 14, 0) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$.*

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 , maka $f_{14}(y_j) = f_1(y_j)$, $f_{14}(x_i) = f_1(x_i)$, dan $f_{14}(z_i) = f_1(z_i)$ sehingga $w_{f_{14}} = w_{f_1} = 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)$, untuk $1 \leq j \leq n + 1$, $1 \leq i \leq n$. Labeli sisi graf Rantai K_4P_n dengan fungsi f_{14} yang dapat dituliskan sebagai berikut:

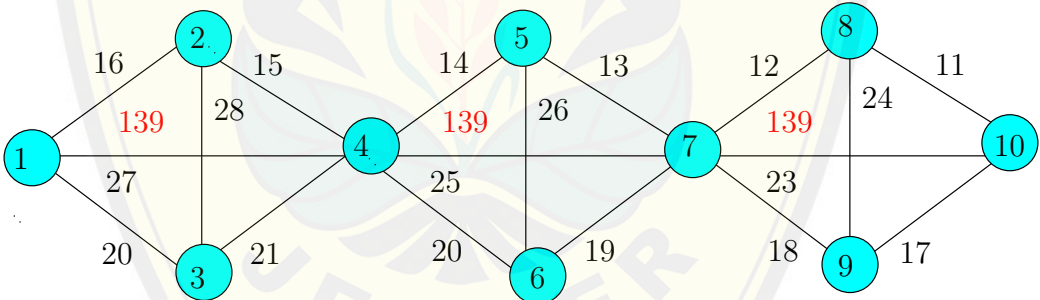
$$\begin{aligned}
 f_{14}(x_i y_{i+1}) &= 5n - 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{14}(z_i y_{i+1}) &= 7n - 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{14}(x_i y_i) &= 5n - 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{14}(y_i z_i) &= 7n - 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{14}(y_i y_{i+1}) &= 9n - 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{14}(x_i z_i) &= 9n - 2i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Jika $W_{f_{14}}$ didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka $W_{f_{14}}$ dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut $w_{f_{14}}$ dan rumus label sisi f_{14} , sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W_{f_{14}} &= w_{f_{14}} + f_{14}(x_i y_{i+1}) + f_{14}(z_i y_{i+1}) + f_{14}(x_i y_i) + f_{14}(y_i z_i) + f_{14}(y_i y_{i+1}) + \\
&\quad f_{14}(x_i z_i) \\
&= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) + (5n - 2i + 2) + (7n - 2i + 2) + (5n - 2i + 3) + \\
&\quad (7n - 2i + 3) + (9n - 2i + 2) + (9n - 2i + 3) \\
&= 42n - 6i + 14 \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2)
\end{aligned}$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk i pada interval $1 \leq i \leq n$ didapat himpunan $W_{f_{14}} = \{42n + 13, 42n + 13, \dots, 42n + 13\}$ karena $U_n = a + (n - 1)b = 42n + 13(n - 1)0 = 42n + 13$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut $(42n + 13, 0) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$ untuk $n \geq 2$. \square

Gambar 4.14 merupakan contoh pelabelan selimut $(42n + 13, 0) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_4 P_n$.



Gambar 4.14 Pelabelan Selimut $(42n + 13, 0) - K_4$ aAnti Ajaib Super pada Graf Rantai $K_4 P_n$

4.3 Pelabelan Selimut (a, d) - K_4 Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif

Penentuan fungsi bijektif pelabelan selimut (a, d) - K_4 anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif akan disesuaikan dengan nilai d yang telah ditetapkan. Sama seperti graf Rantai konektif, metode yang digunakan dalam menemukan pelabelan selimut (a, d) - K_4 anti ajaib super graf Rantai diskonektif mK_4P_n terdiri dari beberapa langkah yang diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas i, j dan k yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Setelah fungsi bijektif diketahui maka harus dibuktikan secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema tersebut.

Teorema dalam penelitian ini bukan teorema yang biimplikatif atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah. Dari hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*). Langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan selimut \mathcal{H} anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif dengan terlebih dahulu menentukan fungsi bijektif melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika.

◇ **Teorema 4.3.1.** *Ada pelabelan selimut $(21mn + 9m + 25, 40)$ - K_4 anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$.*

Bukti. Labeli titik graf Rantai diskonektif mK_4P_n dengan fungsi bijektif g_1 dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g_1(y_i^k) &= jm - m + k, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n + 1, 1 \leq k \leq m \\ g_1(x_i^k) &= im + mn + k, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_1(z_i^k) &= 2mn + k + im, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Jika w_{g_1} didefinisikan sebagai bobot titik selimut dari pelabelan total selimut

pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n . Bobot titik selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan label titik dari mK_4P_n yang menjadi selimut pada graf Rantai, maka fungsi bijektif w_{g_1} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{g_1} &= g_1(y_i) + g_1(x_i) + g_1(z_i) \\ &= (jm - m + k) + (im + mn + k) + (j + 4mi - 2m) + (2mn + k + im) \\ &= 3mn + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n + 1, \\ &\quad 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Labeli sisi graf Rantai diskonektif mK_4P_n dengan fungsi bijektif g_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g_1(x_i^k y_i^k) &= 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_1(x_i^k y_{i+1}^k) &= 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_1(y_i^k z_i^k) &= 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_1(z_i^k y_{i+1}^k) &= 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_1(y_i^k y_{i+1}^k) &= 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_1(x_i^k z_i^k) &= 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Jika W_{g_1} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai diskonektif berdasarkan penjumlahan bobot selimut w_{g_1} dengan label sisinya maka W_{g_1} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{g_1} dan rumus label sisi g_1 dengan syarat batas i , j , dan k yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan

sebagai berikut:

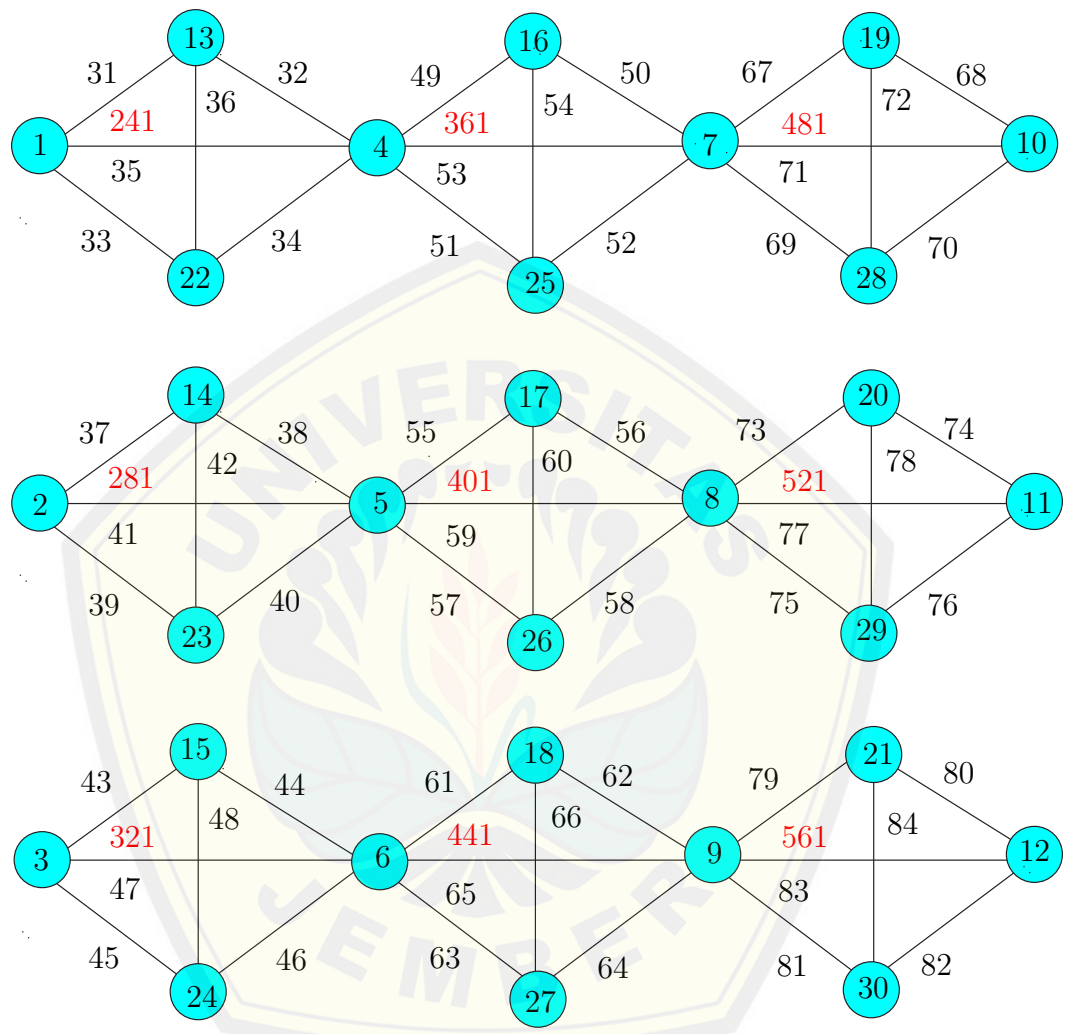
$$\begin{aligned}
 W_{g_1} &= w_{g_1} + g_1(x_i^k y_i^k) + g_1(x_i^k y_{i+1}^k) + g_1(y_i^k z_i^k) + g_1(z_i^k y_{i+1}^k) + g_1(z_i^k y_{i+1}^k) \\
 &\quad + g_1(y_i^k y_{i+1}^k) + g_1(x_i^k z_i^k) \\
 &= 3nm + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k) + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 1 \\
 &\quad + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 2 + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 3 \\
 &\quad + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 4 + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 5 \\
 &\quad + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 6 \\
 &= 21mn - 30m + 12nk - 12n + 38im + 2k + 21 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut W_{g_1} , bobot total selimut terkecil terdefiniskan oleh W_{g_1} untuk $i = 1, j = 1$, dan $k = 1$. Bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh W_{g_1} untuk $i = n, j = n + 1$, dan $k = m$. Selanjutnya nilai batas rumusan bobot definisi W_{g_1} disubstitusikan dengan nilai tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkaian bilangan yang membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $21mn + 9m + 25$ dan beda setiap rangkaian tersebut adalah 40 karena $U_n = a + (n - 1)d = 21mn + 9m + 25 + (mn - 1)40 = 61nm + 9m - 15$. sehingga dapat ditulis dalam himpunan $W_{g_1} = \{21mn + 9m + 25, 21mn + 9m + 65, \dots, 61nm + 9m - 15\}$. Dengan demikian dapat disimpulkan graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(21mn + 9m + 25, 40)$ - K_4 anti ajaib super dengan $a = 21mn + 9m + 25$ dan $d = 40$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut $(21mn + 9m + 25, 40)$ - K_4 anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. \square

Gambar 4.15 merupakan contoh pelabelan selimut $(21mn + 9m + 25, 40)$ - K_4 anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n .

\diamond **Teorema 4.3.2.** *Ada pelabelan selimut $(69mn - 28m - 12n + 28, 32)$ - K_4 anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$.*

Bukti. Gunakan pelabelan titik g_1 untuk melabeli titik pada graf Rantai diskonektif, maka $g_2(y_i^k) = g_1(y_i^k)$, $g_2(x_i^k) = g_1(x_i^k)$, dan $g_2(z_i^k) = g_1(z_i^k)$ sehingga



Gambar 4.15 Pelabelan Selimut $(21mn + 9m + 25, 40)$ - K_4 Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n

bobot titik $w_{g_2} = w_{g_1} = 3mn + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k)$. Labeli sisi graf Rantai diskonektif mK_4P_n dengan fungsi bijektif g_2 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g_2(x_i^k y_i^k) &= 11mn + m - 2nk - 6im + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_2(x_i^k y_{i+1}^k) &= 11mn + m - 2nk - 6im + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_2(y_i^k z_i^k) &= 11mn + m - 2nk - 6im + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_2(z_i^k y_{i+1}^k) &= 11mn + m - 2nk - 6im + 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_2(y_i^k y_{i+1}^k) &= 11mn + m - 2nk - 6im + 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_2(x_i^k z_i^k) &= 11mn + m - 2nk - 6im + 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Jika W_{g_2} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai diskonektif maka W_{g_2} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{g_1} dan rumus label sisi g_2 dengan syarat batas i, j , dan k yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{g_2} &= w_{g_2} + g_2(x_i^k y_i^k) + g_2(x_i^k y_{i+1}^k) + g_2(y_i^k z_i^k) + g_2(z_i^k y_{i+1}^k) + g_2(z_i^k y_{i+1}^k) \\ &\quad + g_2(y_i^k y_{i+1}^k) + g_2(x_i^k z_i^k) \\ &= 3nm + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k) + 11mn + m - 2nk - 6im + 1 \\ &\quad + 11mn + m - 2nk - 6im + 2 + 11mn + m - 2nk - 6im + 3 \\ &\quad + 11mn + m - 2nk - 6im + 4 + 11mn + m - 2nk - 6im + 5 \\ &\quad + 11mn + m - 2nk - 6im + 6 \\ &= 69mn + 6m - 12nk - 34im + 2k + 21 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k) \end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut W_{g_2} , bobot total selimut terkecil terdefiniskan oleh W_{g_2} untuk $i = 1, j = 1$, dan $k = 1$. Bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh W_{F_2} untuk $i = n, j = n + 1$, dan $k = m$. Selanjutnya nilai batas rumusan bobot definisi W_{f_2} disubstitusikan dengan nilai tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkaian bilangan yang membentuk barisan aritmatika dengan suku

awal $69mn - 28m - 12n + 28$ dan beda setiap rangkaian tersebut adalah 32, karena $U_n = a + (n-1)b = 69mn - 28m - 12n + 28 + (mn-1)32 = 101nm - 28m - 12n - 4$. sehingga dapat ditulis dalam himpunan $W_{g_2} = \{69mn - 28m - 12n + 28, 69mn - 28m - 12n + 60, \dots, 101nm - 28m - 12n - 4\}$. Dengan demikian graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(69mn - 28m - 12n + 28, 32)-K_4$ anti ajaib super dengan $a = 69mn - 28m - 12n + 28$ dan $d = 32$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut $(69mn - 28m - 12n + 28, 32)-K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. \square

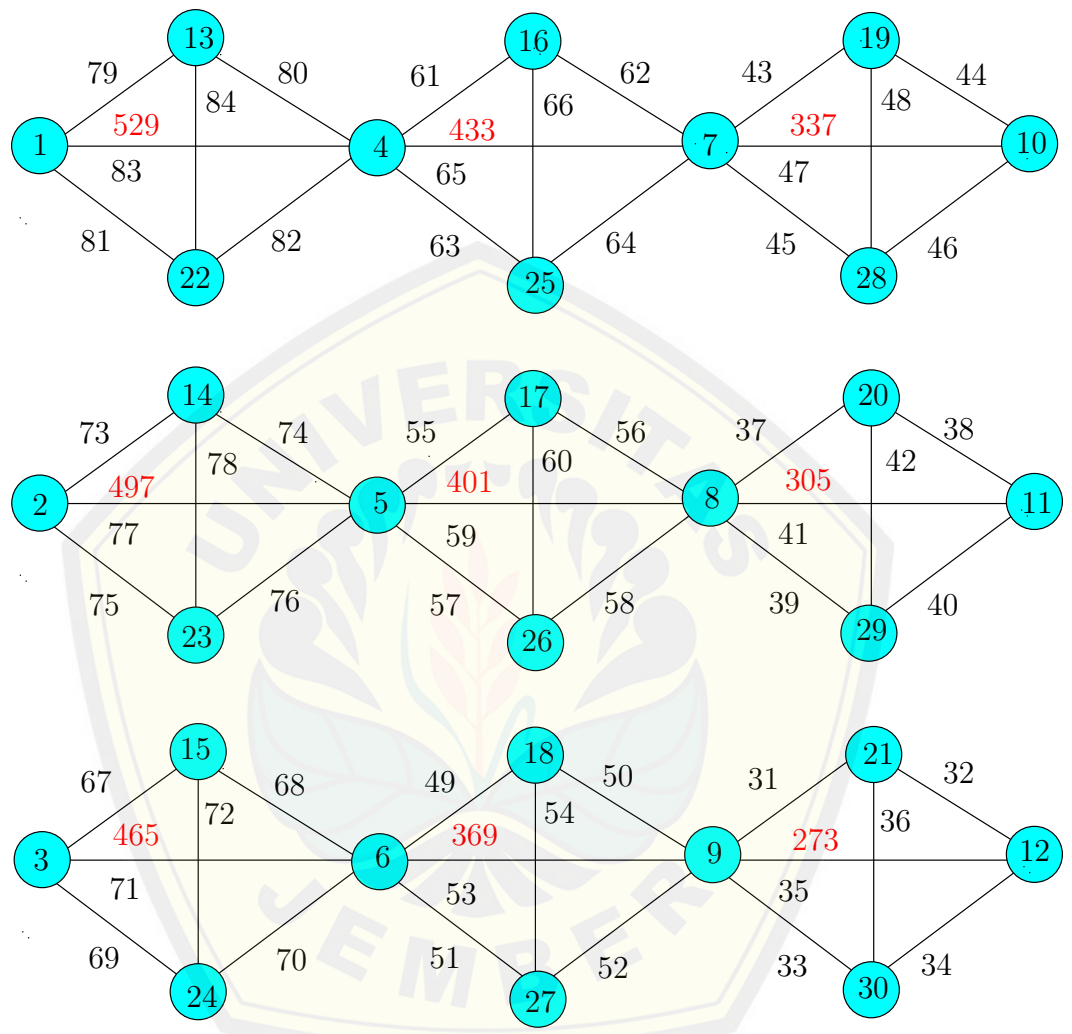
Gambar 4.16 merupakan contoh pelabelan selimut $(69mn - 28m - 12n + 28, 32)-K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n .

\diamond **Teorema 4.3.3.** *Ada pelabelan selimut $(29mn + 2m - 2n + 28, 28)-K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$.*

Bukti. Gunakan pelabelan titik g_1 untuk melabeli titik pada graf Rantai diskonektif, maka $g_3(y_i^k) = g_1(y_i^k)$, $g_3(x_i^k) = g_1(x_i^k)$, dan $g_3(z_i^k) = g_1(z_i^k)$ sehingga bobot titik $w_{g_3} = w_{g_1} = 3mn + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k)$. Labeli sisi graf Rantai diskonektif mK_4P_n dengan fungsi bijektif f_4 . Gunakan pelabelan $g_3(x_i^k y_i^k) = g_1(x_i^k y_i^k)$, $g_3(x_i^k y_{i+1}^k) = g_1(x_i^k y_{i+1}^k)$, $g_3(y_i^k z_i^k) = g_1(y_i^k z_i^k)$, $g_3(z_i^k y_{i+1}^k) = g_1(z_i^k y_{i+1}^k)$, $g_3(y_i^k y_{i+1}^k) = g_1(y_i^k y_{i+1}^k)$, $g_3(x_i^k z_i^k) = 11mn + m - 2nk - 6im + 6$ untuk $1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$.

Jika W_{g_3} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai diskonektif berdasarkan penjumlahan bobot selimut w_{g_3} dengan label sisinya maka W_{g_3} dapat diperoleh dengan merumuskan bobot titik w_{g_3} dan rumus label sisi g_3 dengan syarat batas i, j , dan k yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{g_3} = w_{g_3} + g_3(x_i^k y_i^k) + g_3(x_i^k y_{i+1}^k) + g_3(y_i^k z_i^k) + g_3(z_i^k y_{i+1}^k) + g_3(z_i^k y_{i+1}^k) + g_3(y_i^k y_{i+1}^k) + g_3(x_i^k z_i^k)$$



Gambar 4.16 Pelabelan Selimut $(69mn - 28m - 12n + 28, 32)$ - K_4 Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n

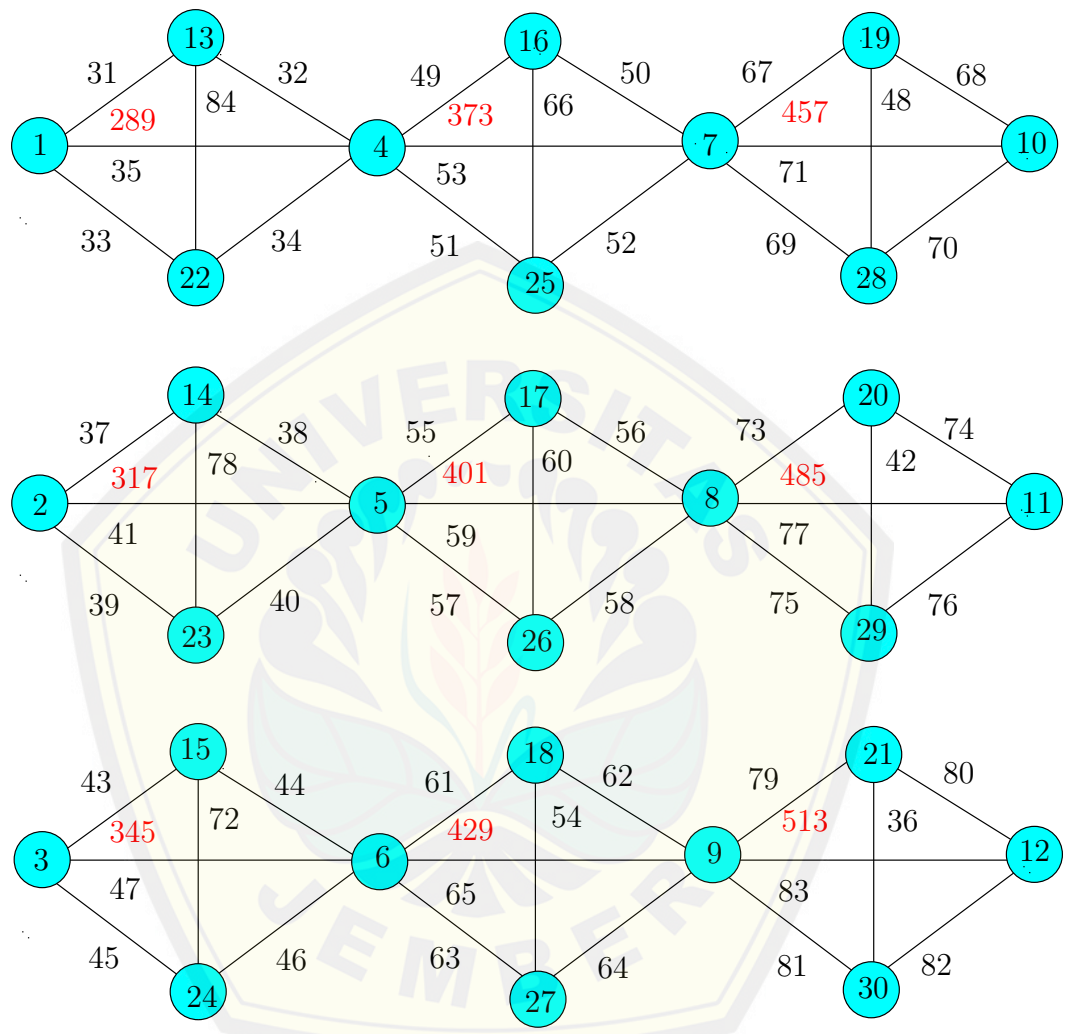
$$\begin{aligned}
 &= 3nm + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k) + 33mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 1 \\
 &\quad + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 2 + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 3 \\
 &\quad + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 4 + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 5 \\
 &\quad 11mn + m - 2nk - 6im + 6 \\
 &= 29mn - 24m + 8nk - 10n + 26im + 2k + 21 \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut W_{g_3} bobot total selimut terkecil terdefiniskan oleh W_{g_3} untuk $i = 1, j = 1,$ dan $k = 1$. Bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh W_{f_3} untuk $i = n, j = n + 1,$ dan $k = m$. Selanjutnya nilai batas rumusan bobot definisi W_{g_3} disubstitusikan dengan nilai tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkaian bilangan yang membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $29mn + 2m - 2n + 28$ dan beda setiap rangkaian tersebut adalah 28, karena $U_n = a + (n - 1)b = 29mn + 2m - 2n + 28 + (mn - 1)28 = 57mn + 2m - 2n$. sehingga dapat ditulis dalam himpunan $W_{g_3} = \{29mn + 2m - 2n + 28, 29mn + 2m - 2n + 56, \dots, 57mn + 2m - 2n\}$. Dengan demikian dapat diperoleh sebuah kesimpulan graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(29mn + 2m - 2n + 28, 28) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 29mn + 2m - 2n + 28$ dan $d = 28$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut $(29mn + 2m - 2n + 28, 28) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. \square

Gambar 4.17 merupakan contoh pelabelan selimut $(29mn + 2m - 2n + 28, 28) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n .

\diamond **Teorema 4.3.4.** *Ada pelabelan selimut $(61mn - 10n - 22m + 28, 20) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$.*

Bukti. Gunakan pelabelan titik g_1 untuk melabeli titik pada graf Rantai diskonektif, maka $g_4(y_i^k) = g_1(y_i^k), g_4(x_i^k) = g_1(x_i^k),$ dan $g_4(z_i^k) = g_1(z_i^k)$ sehingga bobot titik $w_{g_4} = w_{g_1} = 3mn + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} jm - m + k$. Labeli sisi graf Rantai



Gambar 4.17 Pelabelan Selimut $(29mn + 2m - 2n + 28, 28) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n

diskonektif mK_4P_n dengan fungsi bijektif g_4 yaitu $g_4(x_i^k y_i^k) = 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 1$, $g_4(x_i^k y_{i+1}^k) = g_2(x_i^k y_{i+1}^k)$, $g_4(y_i^k z_i^k) = g_2(y_i^k z_i^k)$, $g_4(z_i^k y_{i+1}^k) = g_2(z_i^k y_{i+1}^k)$, $g_4(y_i^k y_{i+1}^k) = g_2(y_i^k y_{i+1}^k)$, dan $g_4(x_i^k z_i^k) = g_2(x_i^k z_i^k)$ untuk $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq m$.

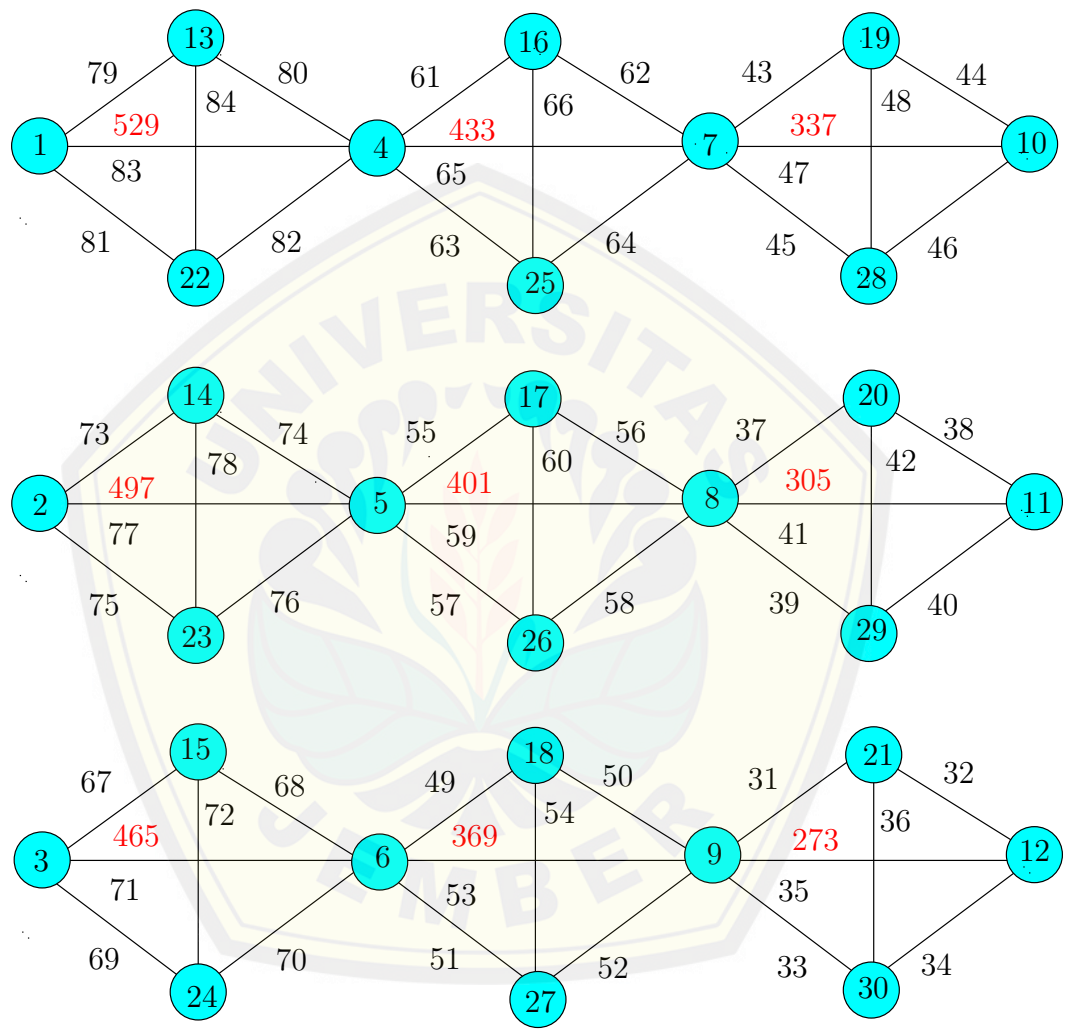
Jika W_{g_4} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai diskonektif berdasarkan penjumlahan bobot selimut w_{g_4} dengan label sisinya maka W_{g_4} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut w_{g_4} dan rumus label sisi g_4 dengan syarat batas i , j , dan k yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{g_4} &= w_{g_4} + g_4(x_i^k y_i^k) + g_4(x_i^k y_{i+1}^k) + g_4(y_i^k z_i^k) + g_4(z_i^k y_{i+1}^k) + g_4(z_i^k y_{i+1}^k) \\ &\quad + g_4(y_i^k y_{i+1}^k) + g_4(x_i^k z_i^k) \\ &= 3nm + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k) + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im \\ &\quad + 1 + 11mn + m - 2nk - 6im + 2 + 11mn + m - 2nk - 6im + 3 \\ &\quad + 11mn + m - 2nk - 6im + 4 + 11mn + m - 2nk - 6im + 5 + 11mn \\ &\quad + m - 2nk - 6im + 6 \\ &= 61mn - 8nk - 2n - 22im + 2k + 21 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k) \end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut W_{g_4} dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefiniskan oleh W_{g_4} untuk $i = 1$, $j = 1$, dan $k = 1$, bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh W_{g_4} untuk $i = n$, $j = n+1$ dan $k = m$. Selanjutnya nilai batas rumusan bobot definisi W_{g_4} disubstitusikan dengan nilai tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkaian bilangan yang membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $61mn - 10n - 22m + 28$ dan beda setiap rangkaian tersebut adalah 20, karena $U_n = a + (n - 1)b = 61mn - 10n - 22m + 28 + (mn - 1)20 = 81mn - 10n - 22m + 8$. sehingga dapat ditulis dalam himpunan $W_{g_4} = \{61mn - 10n - 22m + 28, 61mn - 10n - 22m + 48, \dots, 81mn - 10n - 22m + 8\}$. Dengan demikian dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(61mn - 10n - 22m + 28, 20) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 61mn - 10n - 22m + 28$ dan $d = 20$ untuk $n \geq 2$ dan

$m \geq 2$. Maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut $(61mn - 10n - 22m + 28, 20) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. \square

Gambar 4.18 merupakan contoh pelabelan selimut $(61mn - 10n - 22m + 28, 20) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n .



Gambar 4.18 Pelabelan Selimut $(61mn - 10n - 22m + 28, 20) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n

\diamond **Teorema 4.3.5.** Ada pelabelan selimut $(37mn - 4m - 4n + 28, 16) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$.

Bukti. Gunakan pelabelan titik g_1 untuk melabeli titik pada graf Rantai diskonektif, maka $g_5(y_i^k) = g_1(y_i^k)$, $g_5(x_i^k) = g_1(x_i^k)$, dan $g_5(z_i^k) = g_1(z_i^k)$ sehingga bobot titik $w_{g_5} = w_{g_1} = 3mn + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k)$. Labeli sisi graf Rantai mK_4P_n dengan fungsi bijektif g_5 dapat dituliskan sebagai berikut: $g_5(x_i^k y_i^k) = g_1(x_i^k y_i^k)$, $g_5(x_i^k y_{i+1}^k) = g_1(x_i^k y_{i+1}^k)$, $g_5(y_i^k z_i^k) = g_1(y_i^k z_i^k)$, $g_5(z_i^k y_{i+1}^k) = g_1(z_i^k y_{i+1}^k)$, $g_5(z_i^k y_{i+1}^k) = g_1(z_i^k y_{i+1}^k)$, $g_5(y_i^k y_{i+1}^k) = 11mn + m - 6im - 2nk + 5$, dan $g_5(x_i^k z_i^k) = g_3(x_i^k z_i^k)$ untuk $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq m$.

Jika W_{g_5} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai diskonektif berdasarkan penjumlahan bobot selimut w_{g_5} dengan label sisinya maka W_{g_5} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik w_{g_5} dan rumus label sisi g_5 dengan syarat batas i , j , dan k yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{g_5} &= w_{g_5} + g_5(x_i^k y_i^k) + g_5(x_i^k y_{i+1}^k) + g_5(y_i^k z_i^k) + g_5(z_i^k y_{i+1}^k) + g_5(z_i^k y_{i+1}^k) \\ &\quad + g_5(y_i^k y_{i+1}^k) + g_5(x_i^k z_i^k) \\ &= 3nm + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} jm - m + k + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 1 \\ &\quad + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 2 + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 3 \\ &\quad + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 4 + 11mn + m - 6im - 2nk + 5 \\ &\quad + 11mn + m - 6im - 2nk + 6 \\ &= 37mn - 18m + 4nk + 14im - 8n + 2k + 21 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k) \end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut W_{g_5} dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefinisi oleh W_{g_5} untuk $i = 1$, $j = 1$, dan $k = 1$ bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh W_{f_5} untuk $i = n$, $j = n + 1$ dan $k = m$. Selanjutnya nilai batas rumusan bobot definisi W_{g_5} disubstitusikan dengan nilai tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkaian bilangan yang membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $37mn - 4m - 4n + 28$ dan beda setiap rangkaian tersebut adalah 16, karena $U_n = a + (n - 1)b = 37mn - 4m - 4n + 28 + (mn - 1)16 = 53mn - 4m - 4n + 12$. sehingga dapat ditulis dalam himpunan

$W_{g_5} = \{37mn - 4m - 4n + 28, 37mn - 4m - 4n + 44, \dots, 53mn - 4m - 4n + 12\}$. Dengan demikian dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(37mn - 4m - 4n + 28, 16)-K_4$ anti ajaib super dengan $a = 37mn - 4m - 4n + 28$ dan $d = 16$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut $(37mn - 4m - 4n + 28, 16) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. \square

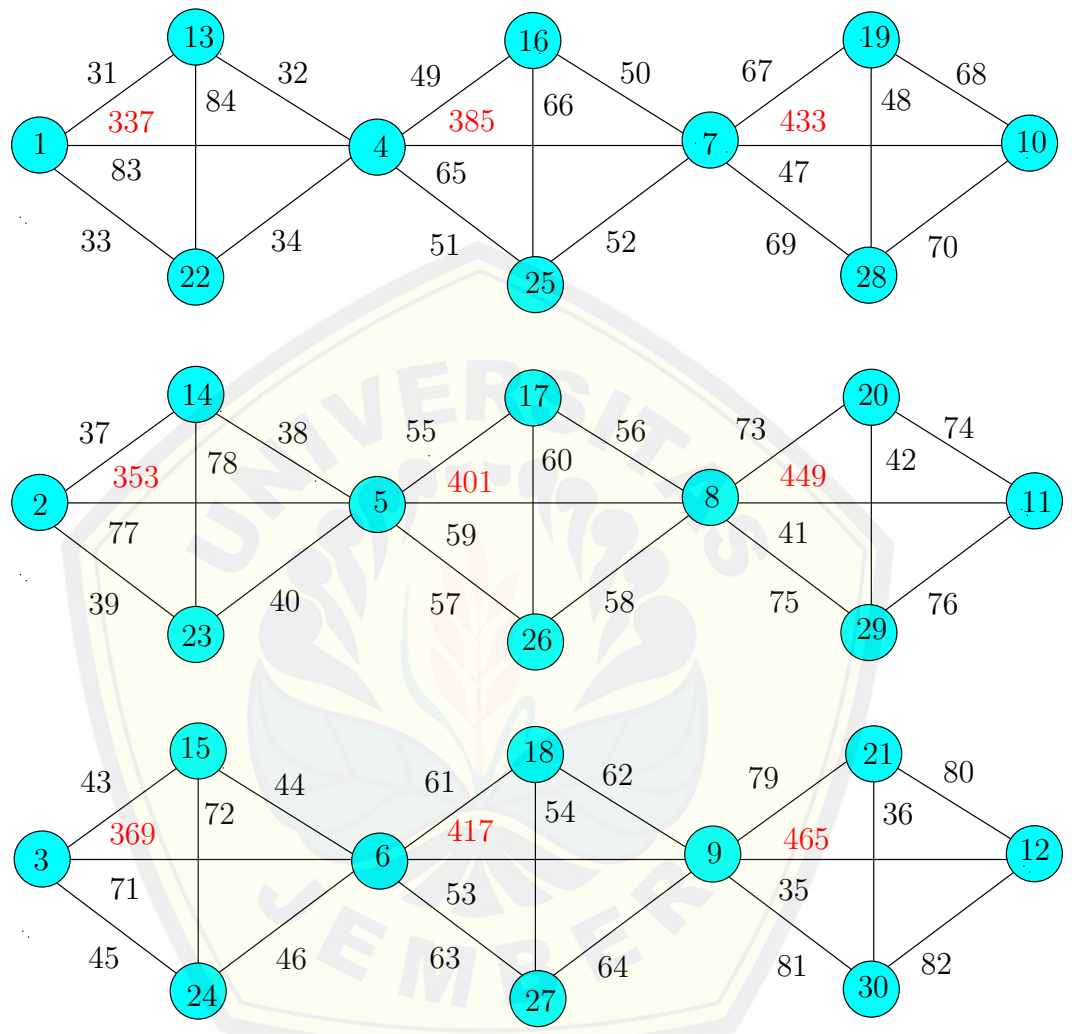
Gambar 4.19 merupakan contoh pelabelan selimut $(37mn - 4m - 4n + 28, 16) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n .

\diamond **Teorema 4.3.6.** *Ada pelabelan selimut $(36mn + 8m + 13, 10)-mK_4P_n$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$.*

Bukti. Gunakan pelabelan titik f_1 untuk melabeli titik pada graf Rantai diskonektif, maka $g_6(y_i^k) = g_1(y_i^k)$, $g_6(x_i^k) = g_1(x_i^k)$, dan $g_6(z_i^k) = g_1(z_i^k)$ sehingga bobot titik $w_{g_6} = w_{g_1} = 3mn + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k)$. Labeli sisi graf Rantai diskonektif mK_4P_n dengan fungsi bijektif g_6 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g_6(x_i^k y_i^k) &= 3mn + k - im, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_6(x_i^k y_{i+1}^k) &= 4mn + k - im, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_6(y_i^k z_i^k) &= 5mn + k - im, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_6(z_i^k y_{i+1}^k) &= 6mn + k - im, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_6(y_i^k y_{i+1}^k) &= 7mn + k - im, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_6(x_i^k z_i^k) &= 8mn + k - im, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Jika W_{g_6} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai diskonektif berdasarkan penjumlahan bobot selimut w_{g_6} dengan label sisinya maka W_{g_6} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik w_{g_6} dan rumus label sisi g_6 dengan syarat batas i, j , dan k yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan



Gambar 4.19 Pelabelan Selimut $(37mn - 4m - 4n + 28, 16) - K_4$ aAnti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n

sebagai berikut:

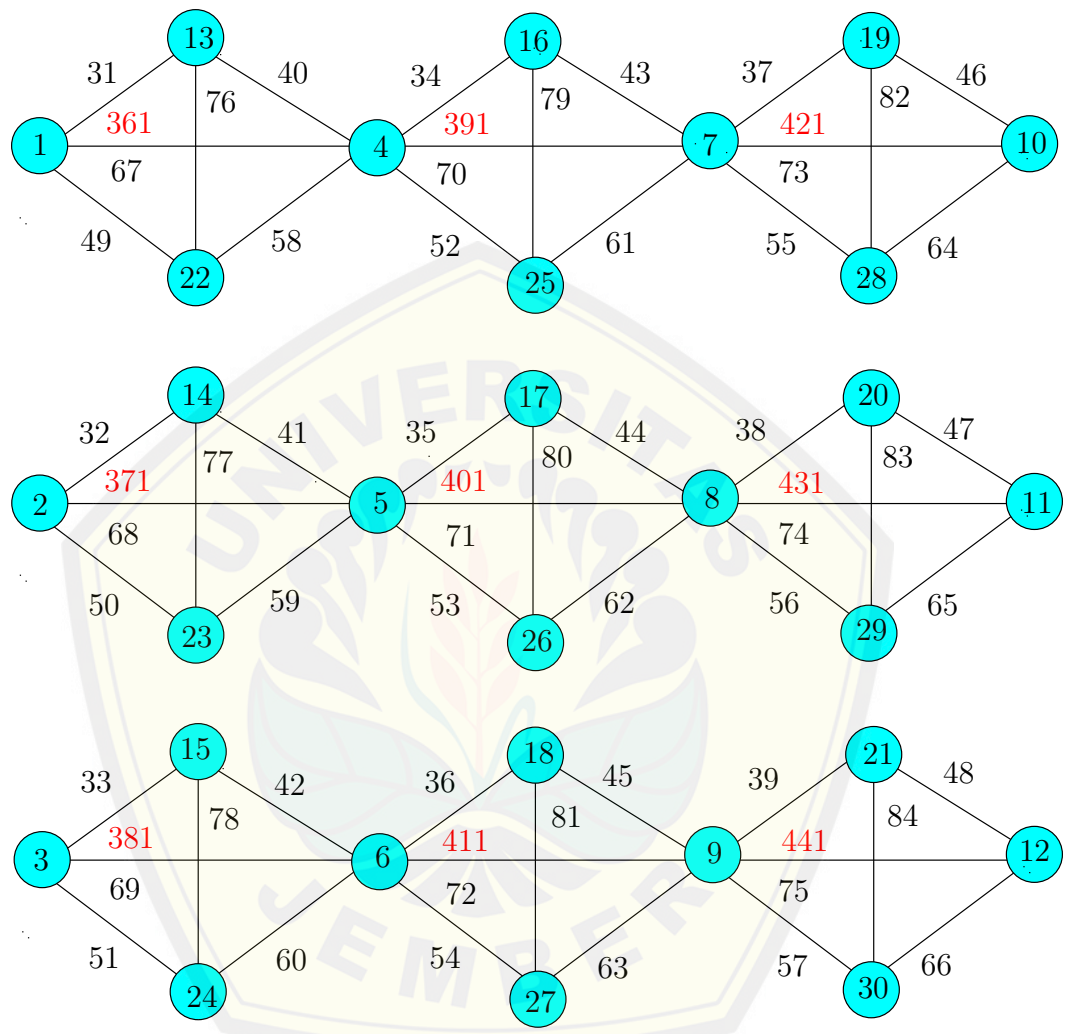
$$\begin{aligned}
 W_{g_6} &= w_{g_6} + g_6(x_i^k y_i^k) + g_6(x_i^k y_{i+1}^k) + g_6(y_i^k z_i^k) + g_6(z_i^k y_{i+1}^k) + g_6(z_i^k y_{i+1}^k) \\
 &\quad + g_6(y_i^k y_{i+1}^k) + g_6(x_i^k z_i^k) \\
 &= 3nm + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k) + 3mn + k - im + 4mn + k - im \\
 &\quad + 5mn + k - im + 6mn + k - im + 7mn + k - im + 8mn + k - im \\
 &= 36mn + 8k + 8im + \bigcup_{j=i}^{i+1} jm - m + k
 \end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut W_{g_6} dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefiniskan oleh W_{g_6} untuk $i = 1, j = 1$, dan $k = 1$ bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh W_{g_6} untuk $i = n, j = n + 1$ dan $k = m$. Selanjutnya nilai batas rumusan bobot definisi W_{g_6} disubstitusikan dengan nilai tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkaian bilangan yang membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $36mn + 8m + 13$ dan beda setiap rangkaian tersebut adalah 10, karena $U_n = a + (n - 1)b = 36mn + 8m + 13 + (mn - 1)10 = 46mn + 8m + 3$. sehingga dapat ditulis dalam himpunan $W_{g_6} = \{36mn + 8m + 13, 36mn + 8m + 23, \dots, 46mn + 8m + 3\}$. Dengan demikian dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(336mn + 8m + 13, 10) - K_4$ -anti ajaib super dengan $336mn + 8m + 13$ dan $d = 10$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut $(36mn + 8m + 13, 10) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. \square

Gambar 4.20 merupakan contoh pelabelan selimut $(36mn + 8m + 13, 10) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n .

\diamond **Teorema 4.3.7.** *Ada pelabelan selimut $(37mn + 8m + 12, 8) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$.*

Bukti. Gunakan pelabelan titik g_1 untuk melabeli titik pada graf Rantai diskonektif, maka $g_7(y_i^k) = g_1(y_i^k)$, $g_7(x_i^k) = g_1(x_i^k)$, dan $g_7(z_i^k) = g_1(z_i^k)$ sehingga bobot titik $w_{g_7} = w_{g_1} = 3mn + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k)$. Labeli sisi



Gambar 4.20 Pelabelan Selimut $(36mn + 8m + 13, 10) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n

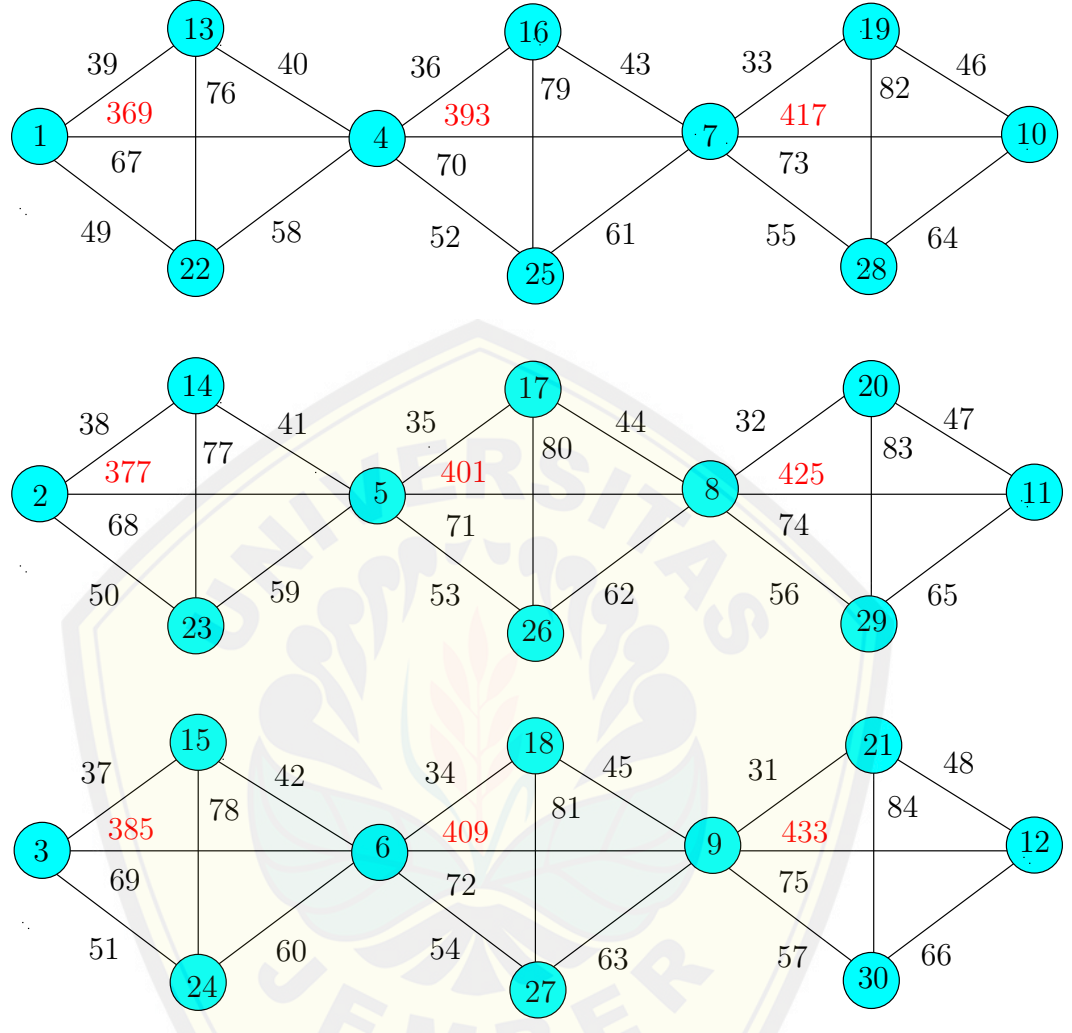
graf Rantai mK_4P_n dengan fungsi bijektif g_7 dapat dituliskan sebagai berikut:
 $g_7(x_i^k y_i^k) = 4mn + 2m - im - k + 1$, $g_7(x_i^k y_{i+1}^k) = g_6(x_i^k y_{i+1}^k)$, $g_7(y_i^k z_i^k) = g_6(y_i^k z_i^k)$,
 $g_7(y_i^k y_{i+1}^k) = g_6(y_i^k y_{i+1}^k)$, dan $g_7(x_i^k z_i^k) = g_6(x_i^k z_i^k)$ untuk $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq m$.

Jika W_{g_7} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai diskonektif berdasarkan penjumlahan bobot selimut w_{g_7} dengan label sisinya maka W_{g_7} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik w_{g_7} dan rumus 6 label sisi g_7 dengan syarat batas i, j , dan k yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{g_7} &= w_{g_7} + g_7(x_i^k y_i^k) + g_7(x_i^k y_{i+1}^k) + g_7(y_i^k z_i^k) + g_7(z_i^k y_{i+1}^k) + g_7(z_i^k y_{i+1}^k) \\ &\quad + g_7(y_i^k y_{i+1}^k) + g_7(x_i^k z_i^k) \\ &= 3nm + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} jm - m + k + 4mn + 2m - im - k + 1 + \\ &\quad 4mn + k - im + 5mn + k - im + 6mn + k - im + 7mn + k - im \\ &\quad + 8mn + k - im \\ &= 37mn + 6k + 2m + 6im + 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} jm - m + k \end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut W_{g_7} dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefinisi oleh W_{g_7} untuk $i = 1, j = 1$, dan $k = 1$ bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh W_{g_7} untuk $i = n, j = n + 1$ dan $k = m$. Selanjutnya nilai batas rumusan bobot definisi W_{g_7} disubstitusikan dengan nilai tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkaian bilangan yang membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $37mn + 8m + 12$ dan beda setiap rangkaian tersebut adalah 8 karena $U_n = a + (n - 1)b = 37mn + 8m + 12 + (mn - 1)8 = 45mn + 8m + 4$. sehingga dapat ditulis dalam himpunan $W_{g_7} = \{37mn + 8m + 12, 37mn + 8m + 20, \dots, 45mn + 8m + 4\}$. Dengan demikian dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(37mn + 8m + 12, 8)$ - mK_4P_n -anti ajaib super dengan $a = 37mn + 8m + 12$ dan $d = 8$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut $(37mn + 8m + 12, 8)$ - K_4 anti ajaib super pada graf Rantai mK_4P_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. \square

Gambar 4.21 merupakan contoh pelabelan selimut $(37mn + 8m + 12, 8) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n .



Gambar 4.21 Pelabelan Selimut $(37mn + 8m + 12, 8) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n

◇ **Teorema 4.3.8.** *Ada pelabelan selimut $(38mn + 8m + 11, 6) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$.*

Bukti. Gunakan pelabelan titik g_8 untuk melabeli titik pada graf Rantai diskonektif, maka $g_8(y_i^k) = g_1(y_i^k)$, $g_8(x_i^k) = g_1(x_i^k)$, dan $g_8(z_i^k) = g_1(z_i^k)$ sehingga

bobot titik $w_{g_8} = w_{g_1} = 3mn + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k)$. Labeli sisi graf Rantai mK_4P_n dengan fungsi bijektif g_8 dapat dituliskan sebagai berikut: $g_8(x_i^k y_i^k) = g_7(x_i^k y_i^k)$, $g_8(x_i^k y_{i+1}^k) = 5mn + 2m - im - k + 1$, $g_8(y_i^k z_i^k) = g_6(y_i^k z_i^k)$, $g_8(z_i^k y_{i+1}^k) = g_6(z_i^k y_{i+1}^k)$, $g_8(y_i^k y_{i+1}^k) = g_6(y_i^k y_{i+1}^k)$, dan $g_8(x_i^k z_i^k) = g_6(x_i^k z_i^k)$ untuk $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq m$.

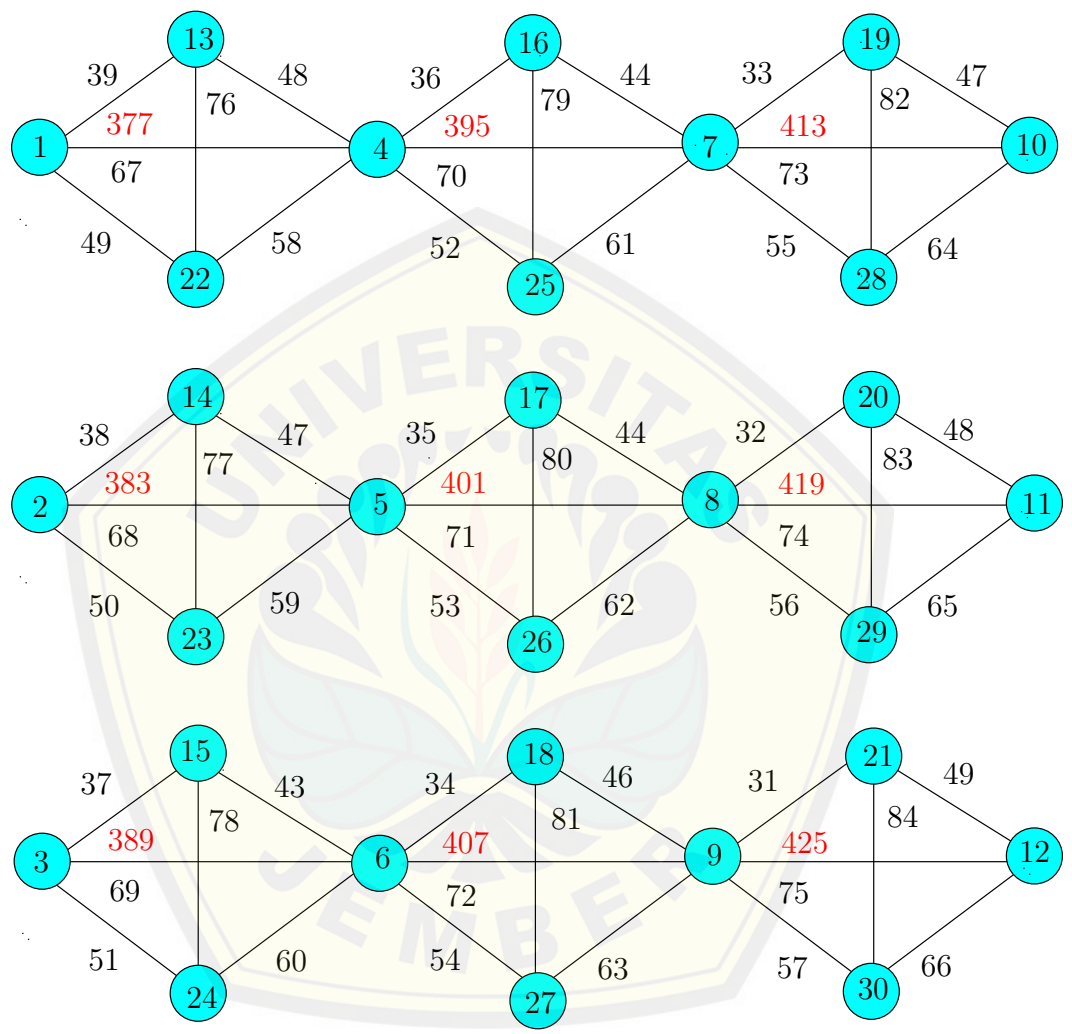
Jika W_{g_8} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai diskonektif berdasarkan penjumlahan bobot selimut w_{g_8} dengan label sisinya maka W_{g_8} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik w_{g_8} dan rumus label sisi g_8 dengan syarat batas i, j , dan k yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{g_8} &= w_{g_8} + g_8(x_i^k y_i^k) + g_8(x_i^k y_{i+1}^k) + g_8(y_i^k z_i^k) + g_8(z_i^k y_{i+1}^k) + g_8(z_i^k y_{i+1}^k) \\ &\quad + g_8(y_i^k y_{i+1}^k) + g_8(x_i^k z_i^k) \\ &= 3nm + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} jm - m + k + 4mn + 2m - im - k + 1 + 5mn \\ &\quad + 2m - im - k + 1 + 5mn + k - im + 6mn + k - im + 7mn + k - im \\ &\quad + 8mn + k - im \\ &= 38mn + 4k + 4m + 4im + 2 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k) \end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut W_{g_8} dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefinisi oleh W_{g_8} untuk $i = 1, j = 1$, dan $k = 1$ bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh W_{g_8} untuk $i = n, j = n + 1$ dan $k = m$. Selanjutnya nilai batas rumusan bobot definisi W_{f_8} disubstitusikan dengan nilai tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkaian bilangan yang membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $38mn + 8m + 11$ dan beda setiap rangkaian tersebut adalah 6 karena $U_n = a + (n - 1)b = 38mn + 8m + 11 + (mn - 1)6 = 44mn + 8m + 5$. sehingga dapat ditulis dalam himpunan $W_{g_8} = \{38mn + 8m + 11, 38mn + 8m + 17, \dots, 44mn + 8m + 5\}$. Dengan demikian dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(38mn + 8m + 11, 6) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 38mn + 8m + 11$ dan $d = 6$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut

$(38mn + 8m + 11, 6) - K_4$ -anti ajaib super pada graf Rantai mK_4P_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. \square

Gambar 4.22 merupakan contoh pelabelan selimut $(38mn + 8m + 11, 6) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai mK_4P_n .



Gambar 4.22 Pelabelan Selimut $(38mn + 8m + 11, 6) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n

◇ **Teorema 4.3.9.** *Ada pelabelan selimut $(39mn + 8m + 10, 4)$ - mK_4P_n anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$.*

Bukti. Gunakan pelabelan titik g_1 untuk melabeli titik pada graf Rantai diskonektif, maka $g_9(y_i^k) = g_1(y_i^k)$, $g_9(x_i^k) = g_1(x_i^k)$, dan $g_9(z_i^k) = g_1(z_i^k)$ sehingga $w_{g_9} = w_{g_1} = 3mn + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k)$. Labeli sisi graf Rantai diskonektif mK_4P_n dengan fungsi bijektif g_9 dapat dituliskan sebagai berikut: $g_9(x_i^k y_i^k) = g_7(x_i^k y_i^k)$, $g_9(x_i^k y_{i+1}^k) = g_8(x_i^k y_{i+1}^k)$, $g_9(y_i^k z_i^k) = g_6(y_i^k z_i^k)$, $g_9(z_i^k y_{i+1}^k) = g_6(z_i^k y_{i+1}^k)$, dan $g_9(x_i^k z_i^k) = g_6(x_i^k z_i^k)$ untuk $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq m$.

Jika W_{g_9} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai diskonektif berdasarkan penjumlahan bobot selimut w_{g_9} dengan label sisinya maka W_{g_9} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik w_{g_9} dan rumus label sisi g_9 dengan syarat batas i , j dan k yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{g_9} &= w_{g_9} + g_9(x_i^k y_i^k) + g_9(x_i^k y_{i+1}^k) + g_9(y_i^k z_i^k) + g_9(z_i^k y_{i+1}^k) + g_9(z_i^k y_{i+1}^k) \\ &\quad + g_9(y_i^k y_{i+1}^k) + g_9(x_i^k z_i^k) \\ &= 3nm + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k) + 4mn + 2m - im - k + 1 + 5mn \\ &\quad + 2m - im - k + 1 + 5mn + 2m - im - k + 1 + 6mn + k - im + 7mn \\ &\quad + k - im + 8mn + k - im \\ &= 39mn + 6m = 2im + 2k \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k) \end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut W_{g_9} dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefiniskan oleh W_{g_9} untuk $i = 1$, $j = 1$, dan $k = 1$ bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh W_{f_9} untuk $i = n$, $j = n + 1$ dan $k = m$. Selanjutnya nilai batas rumusan bobot definisi W_{g_9} disubstitusikan dengan nilai tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkainan bilangan yang membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $39mn + 8m + 10$ dan beda setiap rangkainan tersebut adalah 4, karena $U_n = a + (n - 1)b = 39mn + 8m + 10 + (mn - 1)4 = 43mn + 8m + 6$. sehingga dapat ditulis dalam himpunan $W_{g_9} = \{39mn + 8m +$

$10, 39mn+8m+10, \dots, 43mn+8m+6\}$. Dengan demikian dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(39mn + 8m + 10, 4) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 39mn + 8m + 10$ dan $d = 4$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut $(39mn + 8m + 10, 4) - K_4$ -anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. \square

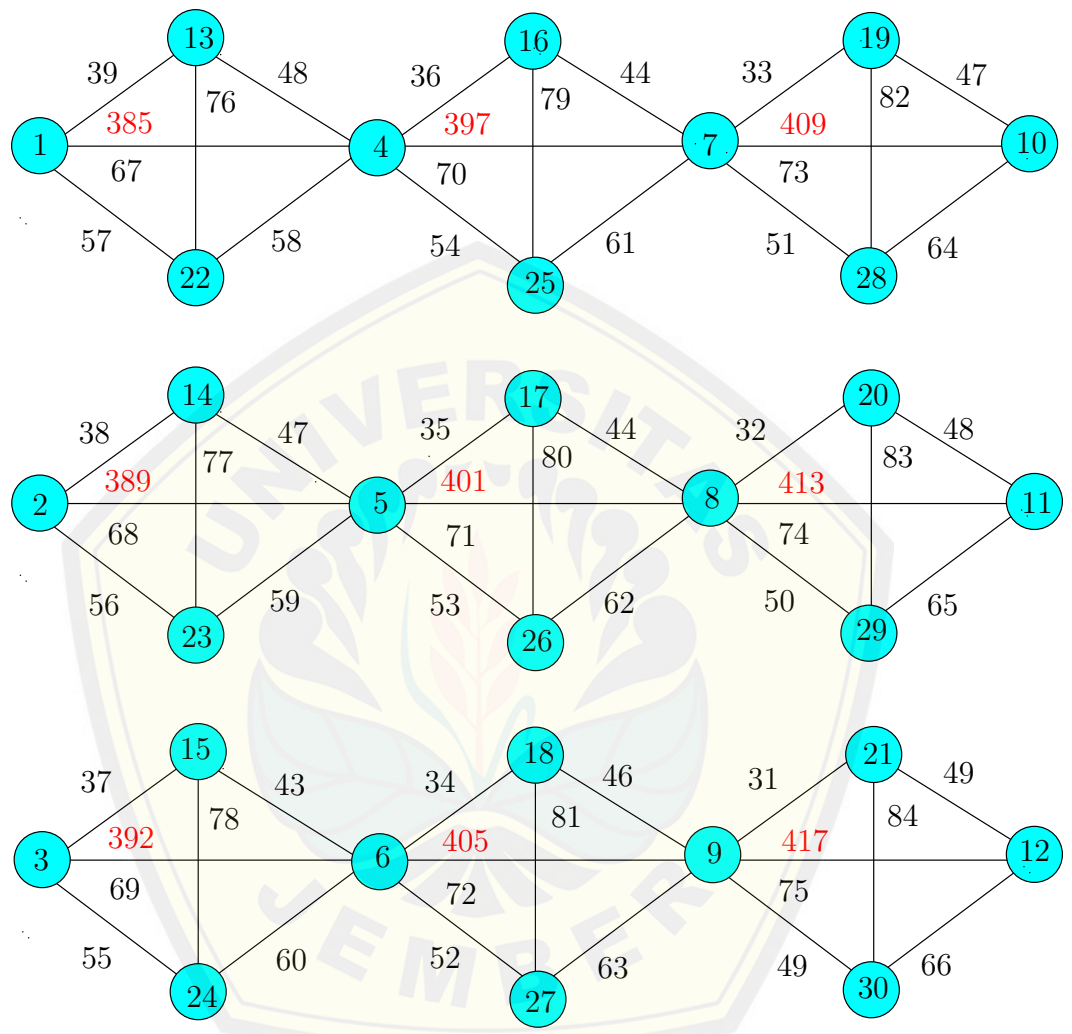
Gambar 4.23 merupakan contoh pelabelan selimut $(39mn + 8m + 10, 4) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n .

\diamond **Teorema 4.3.10.** *Ada pelabelan selimut $(40mn + 8m + 9, 2)$ - mK_4P_n anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$.*

Bukti. Gunakan pelabelan titik g_1 untuk melabeli titik pada graf Rantai diskonektif, maka $g_{10}(y_i^k) = g_1(y_i^k)$, $g_{10}(x_i^k) = g_1(x_i^k)$, dan $g_{10}(z_i^k) = g_1(z_i^k)$ sehingga bobot titik $w_{g_{10}} = w_{g_1} = 3mn + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k)$. Labeli sisi graf Rantai diskonektif mK_4P_n dengan fungsi bijektif f_{10} dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g_{10}(x_i^k y_i^k) &= 4mn + 2m - im - k + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_{10}(x_i^k y_{i+1}^k) &= 5mn + 2m - im - k + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_{10}(y_i^k z_i^k) &= 6mn + 2m - im - k + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_{10}(z_i^k y_{i+1}^k) &= 7mn + 2m - im - k + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_{10}(y_i^k y_{i+1}^k) &= 7mn + k - im, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_{10}(x_i^k z_i^k) &= 8mn + k - im, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Jika $W_{g_{10}}$ didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai diskonektif berdasarkan penjumlahan bobot selimut $w_{g_{10}}$ dengan label sisinya maka $W_{g_{10}}$ dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik dan rumus label sisi f_{10} dengan syarat batas i, j dan k yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan



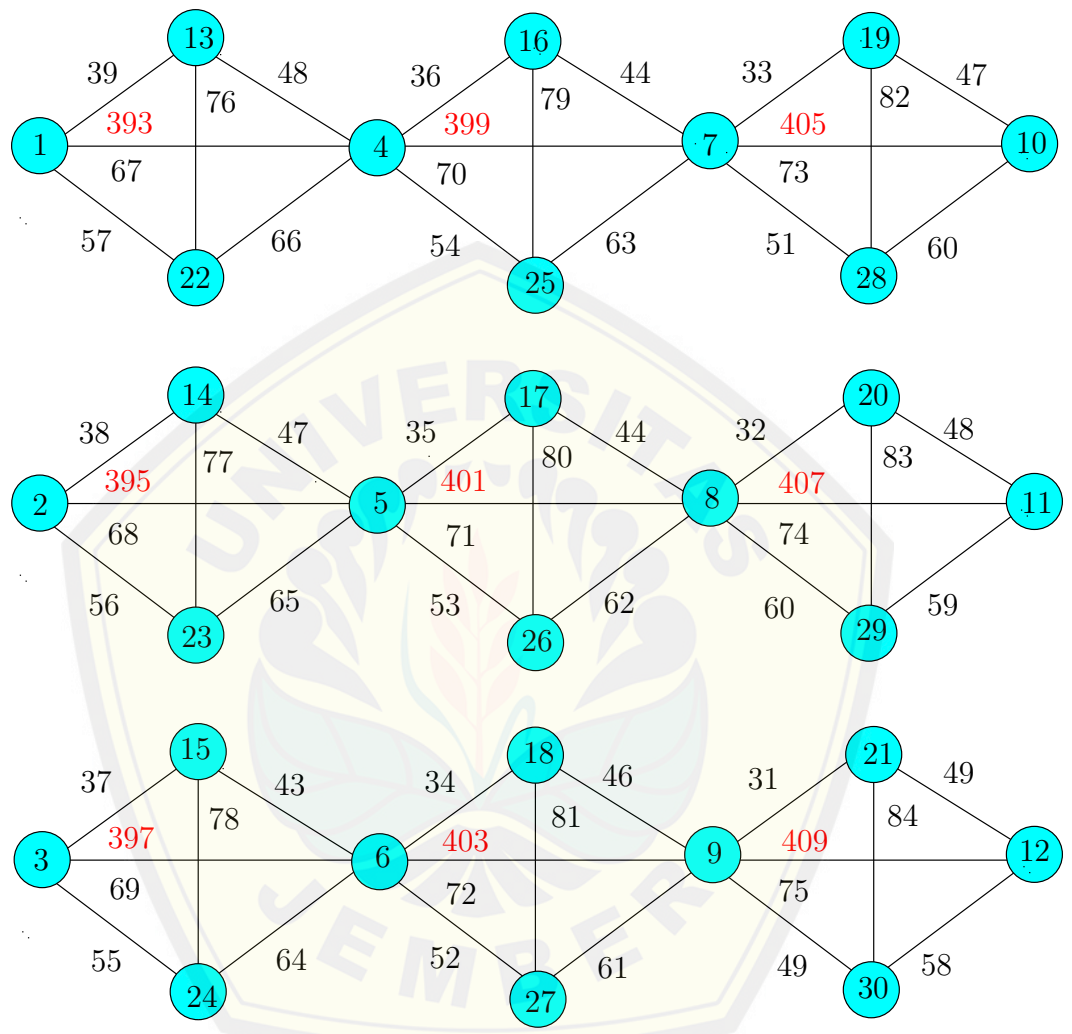
Gambar 4.23 Pelabelan Selimut $(39mn + 8m + 10, 4) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n

sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{g_{10}} &= w_{g_{10}} + g_{10}(x_i^k y_i^k) + g_{10}(x_i^k y_{i+1}^k) + g_{10}(y_i^k z_i^k) + g_{10}(z_i^k y_{i+1}^k) + g_{10}(z_i^k y_{i+1}^k) \\
 &\quad + g_{10}(y_i^k y_{i+1}^k) + g_{10}(x_i^k z_i^k) \\
 &= 3nm + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k) + 4mn + 2m - im - k + 1 + 5mn \\
 &\quad + 2m - im - k + 1 + 5mn + 2m - im - k + 1 + 6mn + 2m - im - k \\
 &\quad + 1 + 7mn + k - im + 8mn + k - im \\
 &= 40mn + 8m + 4 \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot total selimut $W_{g_{10}}$ dapat diperhatikan bahwa bobot total selimut terkecil terdefiniskan oleh $W_{g_{10}}$ untuk $i = 1, j = 1,$ dan $k = 1$ bobot total selimut terbesar terdefinisi oleh $W_{g_{10}}$ untuk $i = n, j = n+1$ dan $k = m$. Selanjutnya nilai batas rumusan bobot definisi $W_{g_{10}}$ disubstitusikan dengan nilai tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkaian bilangan yang membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $40mn + 8m + 9$ dan beda setiap rangkaian tersebut adalah 2, karena $U_n = a + (n - 1)b = 40mn + 8m + 9 + (mn - 1)2 = 42mn + 8m + 7$. sehingga dapat ditulis dalam himpunan $W_{g_{10}} = \{40mn + 8m + 9, 40mn + 8m + 11, \dots, 42mn + 8m + 7\}$. Dengan demikian dapat diperoleh sebuah kesimpulan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(40mn + 8m + 9, 2) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 40mn + 8m + 9$ dan $d = 2$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut $(40mn + 8m + 9, 2) - mK_4P_n$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. \square

Gambar 4.24 merupakan contoh pelabelan selimut $(40mn + 8m + 9, 2) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n .



Gambar 4.24 Pelabelan Selimut $(40mn + 8m + 9, 2) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai Diskonektif mK_4P_n

4.4 Berfikir Tingkat Tinggi dalam Pelabelan Selimut $(a, d) - K_4$ Anti Ajaib Super pada Graf Rantai K_4P_n

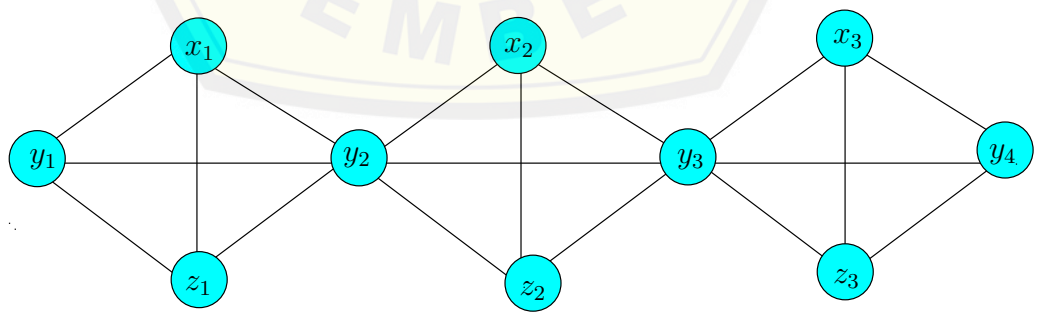
Pada subbab ini menjelaskan keterkaitan antara level berpikir menurut Bloom dengan proses pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n .

Tahap 1. Mengingat

Kata kerja operasional: Mengidentifikasi famili graf

Mengingat adalah kemampuan menyebutkan kemabali informasi atau pengetahuan yang tersimpan. Pada penelitian ini mengingat kembali tentang jenis-jenis graf. Penelitian ini menggunakan graf berhingga yang tidak mempunyai loop dan sisi ganda serta bukan graf berarah. Graf yang akan dibentuk adalah graf yang jumlah titiknya berhingga n dihubungkan oleh sebuah titik yang digunakan untuk meghubugkan graf lainnya dan sisi yang terbentuk tidak memiliki orientasi arah.

Nama graf yang diberikan adalah Graf Rantai , karena graf tersebut terdiri graf lengkap yang membentuk sebuah lintasan. Karena graf Rantai hanya memiliki 1 ekspan yaitu memeperbanyak graf lengkap K_4 maka notasi untuk graf Rantai adalah K_4P_n . Selain mengingat batasan-batasan yang ada pada graf yang akan dibangun yaitu mengenai lemma dan teorema apa saja yang diperlukan dalam proses menuju terciptanya konjektur dan teorema yang baru. Graf Rantai merupakan shackle titik yang disimbolkan dengan $shack(K_4, v, n)$, sehingga $shack(K_4, v, n)$ memiliki arti sama dengan K_4P_n . Namun dalam penelitian ini graf Rantai dinotasikan dengan K_4P_n . Selimut graf Rantai merupakan graf lengkap K_4 . Gambar 4.25 merupakan Graf Rantai K_4P_n .



Gambar 4.25 Graf Rantai K_4P_n

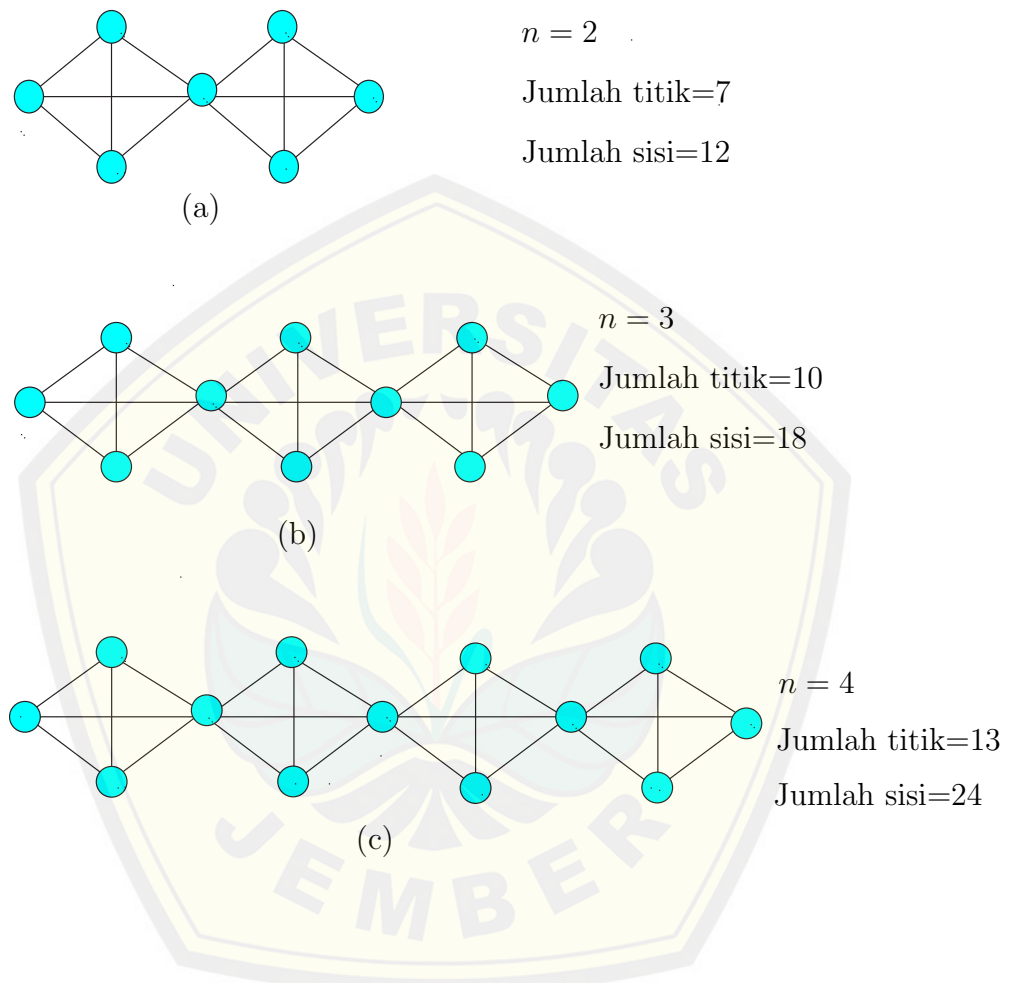
Tahap 2. Memahami

Kata kerja kunci: menghitung jumlah titik p dan sisi q serta menentukan batas atas nilai beda (d)

Pada tahap kedua yaitu memahami, dalam tahapan ini setelah diketahui graf yang telah dibangun sesuai dengan batasan yang telah ditentukan, maka hal selanjutnya yang perlu dilakukan adalah menghitung jumlah titik dan sisi yang disebut kardinalitas serta menentukan batas atas beda d . Sebelumnya harus menentukan jumlah titik dan sisi pada graf tersebut.

Untuk pendefinisian dari titik yakni graf Rantai menggunakan indeks dua huruf yakni i dan j , indeks i menggambarkan indeks dari x dan z yang mempunyai batas $1 \leq i \leq n$, ini berarti titik x dan z terdapat sebanyak n pada graf Rantai tersebut. Indeks j menggambarkan titik y yang mempunyai batas $1 \leq j \leq n + 1$, ini berarti titik y terdapat sebanyak $n + 1$ pada graf Rantai tersebut. Berdasarkan Gambar Gambar 4.25 pendefinisian dari sisinya sebagai berikut:

1. $\{x_i y_{i+1}\}$, titik x_1 bertetangga dengan y_2 , x_2 bertetangga dengan y_3 , dan x_3 bertetangga dengan y_4 yang kemudian didefinisikan $\{x_i y_{i+1}\}$.
2. $\{z_i y_{i+1}\}$, titik z_1 bertetangga dengan y_2 , z_2 bertetangga dengan y_3 , dan z_3 bertetangga dengan y_4 yang kemudian didefinisikan $\{z_i y_{i+1}\}$.
3. $\{x_i y_i\}$, titik x_1 bertetangga dengan y_1 , x_2 bertetangga dengan y_2 , dan x_3 bertetangga dengan y_3 yang kemudian didefinisikan $\{x_i y_i\}$.
4. $\{y_i z_i\}$, titik y_1 bertetangga dengan z_1 , y_2 bertetangga dengan z_2 , dan y_3 bertetangga dengan z_3 yang kemudian didefinisikan $\{x_i y_i\}$.
5. $\{y_i y_{i+1}\}$, titik y_1 bertetangga dengan y_2 , y_2 bertetangga dengan y_3 , dan y_3 bertetangga dengan y_4 yang kemudian didefinisikan $\{y_i y_{i+1}\}$.
6. $\{x_i z_i\}$, titik x_1 bertetangga dengan z_1 , x_2 bertetangga dengan z_2 , dan x_3 bertetangga dengan z_3 yang kemudian didefinisikan $\{x_i z_i\}$.



Gambar 4.26 Jumlah titik dan sisi graf pada K_4P_2 (a), K_4P_3 (b), dan K_4P_4 (c)

Pada kardinalitas, terdapat istilah order ($|V|$) dan size ($|E|$) yang diperlukan untuk langkah selanjutnya. Gambar 4.26 menunjukkan graf Rantai K_4P_n memiliki order $|V| = 3n+1$ yang didapatkan dari banyaknya graf lengkap (n) yang dibentuk oleh graf tersebut. Sedangkan size yang diperoleh pada graf Rantai K_4P_n adalah penjumlahan dari setiap selimut graf Rantai K_4P_n . size yang didapatkan adalah $|E| = 6n$. Berdasarkan Lemma 4.1.1 dan kardinalitas graf Rantai konektif K_4P_n maka batas atas d adalah 48 dan batas atas d diskonektif mK_4P_n adalah $d < 50$.

Tahap 3. Menerapkan

Kata kerja kunci: Menentukan label titik graf Rantai dan mengembangkan fungsi bijektif bobot titik

Menerapkan yaitu setelah menetapkan konsep yang sesuai yang di pakai untuk memecahkan sebuah masalah, selanjutnya mencoba menentukan solusi dengan indikator yang telah di tetapkan. Pada Tahapan ini, setelah diketahui jumlah titik dan sisi serta batas atas d pada graf Rantai K_4P_n , langkah selanjutnya yakni menentukan label titik dan fungsi bijektif bobot titik pada graf Rantai konektif K_4P_n dan diskonektif mK_4P_n . Telah ditemukan pada subbab hasil penelitian mengenai batas atas d graf Rantai konektif K_4P_n bahwa batas atasnya yakni $d \leq 48$ dan diskonektif yakni $d \leq 48$. Pelabelan titik yang di gunakan pada graf Rantai konektif berbeda dengan graf Rantai

diskonektif. Pola pelabelan titik pada graf Rantai konektif sebagai berikut;

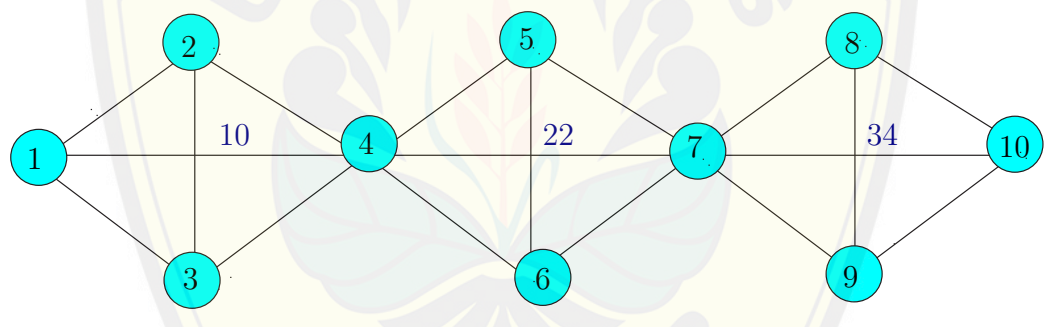
1. Pelabelan pertama dimulai dari ujung graf Rantai yaitu titik y_1 .
2. Pelabelan kedua di titik x_1 .
3. selanjutnya melabeli titik z_1 .
4. dan yang paling akhir yang dilabeli adalah akhir selimut graf lengkap lintasan yaitu y_2 .
5. pola tersebut berkelanjut sampai titik z_3 . Pelabelan titik terakhir pada titik y_4 .

Graf Rantai

merupakan shackle titik, sehingga titik yang lebih dulu dilabeli adalah titik yang setara dengan titik yang menjadi shackle pada selimut berikutnya. Dari pola pelabelan titik di atas akan menghitung bobot titik masing-masing selimut pada graf lengkap lintasan. penjumlahan selimut graf terdiri dari 4 titik dengan 1 titik dipakai 2 kali. Gambar 4.27 merupakan penjumlahan bobot titik graf Rantai. Bobot titik membentuk barisan aritmatika.

$$\begin{array}{r}
 y_j \quad 1 \quad 4 \quad 7 \\
 x_i \quad 2 \quad 5 \quad 8 \\
 z_i \quad 3 \quad 6 \quad 9 \\
 y_{j+1} \quad 4 \quad 7 \quad 10 \\
 \hline
 \quad \quad 10 \quad 22 \quad 34
 \end{array} +$$

Gambar 4.27 Bobot Titik Graf Rantai (K_4P_n) untuk $n = 3$



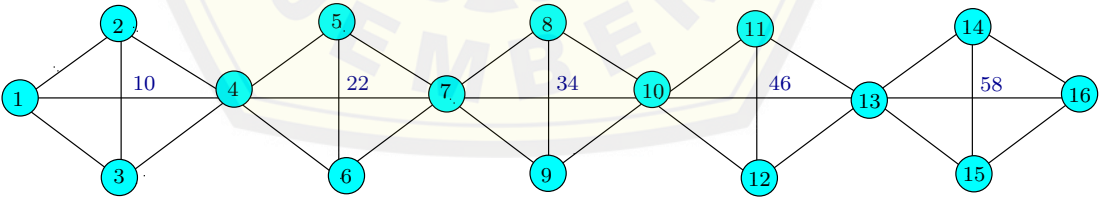
Gambar 4.28 Pelabelan Titik Graf Rantai (K_4P_n) untuk $n = 3$

Berdasarkan gambar 4.27 dapat diketahui bahwa bobot titik selimut graf Rantai konektif adalah $\{10,22,34\}$. Bobot titik tersebut membentuk barisan aritmatika yang memiliki beda 12. Gambar 4.28 merupakan pelabelan titik graf Rantai K_4P_n . Sebelum pada tahap berikutnya, harus dilakukan pemeriksaan apakah label titik tersebut *expandable* atau *unexpandable*. Gambar 4.28 merupakan gambar pelabelan titik untuk $n = 3$. Peneliti mencoba untuk $n = 5$. Gambar 4.29 merupakan penjumlahan pelabelan titik graf Rantai untuk $n = 5$.

y_j	1	4	7	10	13	
x_i	2	5	8	11	14	
z_i	3	6	9	12	15	
y_{j+1}	4	7	10	13	16	
						+
	10	22	34	46	58	

Gambar 4.29 Bobot Titik Graf Rantai (K_4P_n) untuk $n = 5$

Berdasarkan gambar 4.29 bobot titik selimut graf Rantai adalah $\{10,22,34,46,58\}$. Bobot titik tersebut membentuk barisan aritmatika yang memiliki beda 12. Gambar 4.30 merupakan pelabelan titik graf Rantai K_4P_n untuk $n = 5$ dan Gambar 4.31 merupakan pelabelan titik graf Rantai diskonektif.



Gambar 4.30 Pelabelan Titik Graf Rantai (K_4P_n) untuk $n = 5$

Berdasarkan pelabelan titik $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib pada graf Rantai K_4P_n peneliti juga melakukan observasi pelabelan titik $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib pada graf

Rantai K_sP_n sehingga menemukan sebuah konjektur baru. Konjektur 4.5.1 merupakan konjektur baru yang ditemukan oleh peneliti. Pelabelan titik graf Rantai diskonektif seperti Gambar ???. Berdasarkan Gambar 4.31 bobot titik setiap selimut graf Rantai diskonektif membentuk barisan aritmatika yang memiliki beda 12. Pelabelan titik graf lengkap lintasan diskonektif adalah sebagai berikut:

1. Pelabelan pertama pada titik y_1^1 yaitu titik y_1 *copy* pertama;
2. Pelabelan kedua pada titik y_1^2 ;
3. Pelabelan selanjutnya pada titik y_1^3 .
4. Pelabelan selanjutnya pada titik y_2^k , k merupakan *copy* graf Rantai diskonektif dan pelabelannya titiknya berurutan dari *copy* pertama sampai ke- k , untuk $1 \leq k \leq m$;
5. selanjutnya pelabelan pada titik x_1^k , k merupakan *copy* graf Rantai diskonektif $1 \leq k \leq m$ kemudian pelabelannya titiknya sampai x_i^k , untuk $1 \leq i \leq n$;
6. selanjutnya pelabelan pada titik z_1^k , k merupakan *copy* graf Rantai diskonektif $1 \leq k \leq m$ kemudian pelabelannya titiknya sampai z_i^k , untuk $1 \leq i \leq n$;
- .

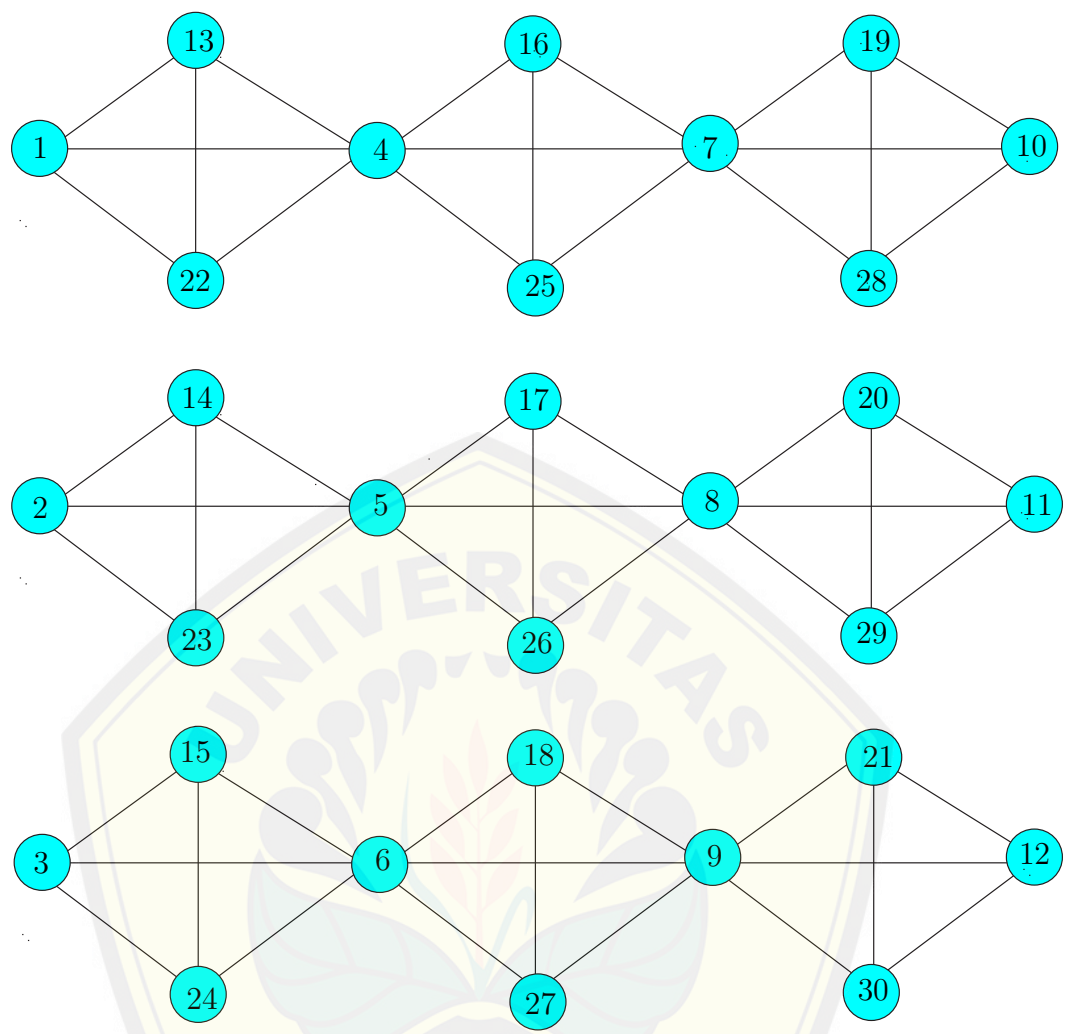
Berdasarkan Gambar 4.30 dapat diketahui bahwa pola pelabelan titik graf Rantai konektif merupakan pelabelan titik yang expandable, sehingga bisa melanjutkan pada tahap selanjutnya yaitu mengembangkan fungsi bijektif bobot titik graf Rantai.

Label titik graf Rantai konektif K_4P_n dengan fungsi bijektif f dengan label sebagai berikut:

$$f(y_j) = 3j - 2, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n + 1$$

$$f(x_i) = 3i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(z_i) = 3i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$



Gambar 4.31 Pelabalen Titik Graf Rantai Diskonektif

k	1			2			3		
y_j^k	1	4	7	2	5	8	3	6	9
x_i^k	13	16	19	14	17	20	15	18	21
z_i^k	22	25	28	23	26	29	24	27	30
y_{j+1}^k	4	7	10	5	8	11	6	9	12
	40	52	64	44	56	68	48	60	72

Gambar 4.32 Bobot Titik Graf Rantai Diskonektif

f adalah fungsi bijektif yang memetakan K_4P_3 ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \dots, 3n + 1\}$. Jika w_f didefinisikan sebagai bobot titik selimut dari pelabelan total selimut pada graf Rantai dimana bobot titik selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 4 label titik dari K_4 yang menjadi selimut pada pada graf Rantai K_4P_n , maka fungsi bijektif w_f dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_f &= f(y_j) + f(x_i) + f(z_i) \\ &= (3i - 1) + (3j - 2) + (3i) \\ &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) \end{aligned}$$

Label titik graf Rantai diskonektif mK_4P_n dengan fungsi bijektif g dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g(y_i^k) &= jm - m + k, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n + 1, 1 \leq k \leq m \\ g(x_i^k) &= im + mn + k, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g(z_i^k) &= 2mn + k + im, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Jika w_g didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n . Jika w_g didefinisikan sebagai bobot selimut dari pelabelan total selimut pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 4 label titik dari K_4 yang menjadi selimut pada graf Rantai diskonektif, maka fungsi bijektif w_g dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_g &= g(y_i) + g(x_i) + g(z_i) \\ &= (jm - m + k) + (im + mn + k) + (j + 4mi - 2m) + (2mn + k + im) \\ &= 3mn + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n + 1, \\ &\quad 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Tahap 4. Menganalisa

Kata kerja kunci: Menentukan label sisi dan fungsi bijektif sisi serta mengembangkan fungsi sisi dan bobot total

Graf yang memiliki batas atas $\{0, 1, 2, \dots, 48\}$, berarti memiliki label sisi dengan menggunakan pola yang pada setiap batas atas yang telah ditemukan. Menganalisa adalah membuktikan dan memberi alasan logis atau kritis dengan cara menghubungkan konsep yang satu dengan konsep lainnya untuk menguji kebenaran daei sebuah hasil. Bobot titik graf Rantai telah membentuk barisan aritmatika sehingga untuk melabeli sisinya dapat menggunakan permutasi. Begitu pula graf Rantai Diskonektif yang bobot titiknya memebentuk barisan aritmatika sehingga pelabela sisinya dapat menggunakan metode permutasi pula. Sehingga didapatkan nilai beda d yang telah di jelaskan sebeblumnya. Sampel fungsi sisi pada graf Rantai K_4P_n $d = 48$ sebagai berikut:

$$f(x_i y_{i+1}) = 3n + 6i - 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(z_i y_{i+1}) = 3n + 6i - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(x_i y_i) = 3n + 6i - 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(y_i z_i) = 3n + 6i - 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(y_i y_{i+1}) = 3n + 6i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f(x_i z_i) = 3n + 6i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

Bobot total merupakan jumlah bobot selimut w_f dan rumus label sisi f . Bobot total disimbolkan W_f sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_f &= w_f + f(x_i y_{i+1}) + f(z_i y_{i+1}) + f(x_i y_i) + f(y_i z_i) + f(y_i y_{i+1}) + f(x_i z_i) \\ &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) + (3n + 6i - 2) + (3n + 6i - 1) + (3n + 6i - 4) + \\ &\quad (3n + 6i - 3) + (3n + 6i) + (3n + 6i + 1) \\ &= 18n + 42i - 10 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (3j - 2) \end{aligned}$$

Rumus bobot total graf legnkap lintasan konektif adalah $18n+42i-10+\bigcup_{j=i}^{i+1}(3j-2)$, untuk $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n + 1$. Sampel fungsi sisi pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n $d = 40$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g(x_i^k y_i^k) &= 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g(x_i^k y_{i+1}^k) &= 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g(y_i^k z_i^k) &= 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g(z_i^k y_{i+1}^k) &= 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g(y_i^k y_{i+1}^k) &= 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 5, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g(x_i^k z_i^k) &= 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Bobot total merupakan jumlah bobot selimut w_g dan rumus label sisi g . Bobot total disimbolkan W_g sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_g &= w_g + g(x_i^k y_i^k) + g(x_i^k y_{i+1}^k) + g(y_i^k z_i^k) + g(z_i^k y_{i+1}^k) + \\ &g(z_i^k y_{i+1}^k) + g(y_i^k y_{i+1}^k) + g(x_i^k z_i^k) \\ &= 3nm + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k) + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 1 \\ &+ 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 2 + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 3 \\ &+ 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 4 + 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 5 \\ &+ 3mn - 5m + 2nk - 2n + 6im + 6 \\ &= 21mn - 30m + 12nk - 12n + 38im + 2k + 21 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k) \end{aligned}$$

Rumus bobot total graf Rantai diskonektif adalah $21mn - 30mn + 12nk - 12n + 38im + 2k + 21 + \bigcup_{j=i}^{i+1}(jm - m + k)$, untuk $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n + 1$, dan $1 \leq k \leq m$.

Tahap 5. Mengevaluasi

Kata kerja kunci: Membuktikan kebenaran fungsi

Pada tahap ini, yang dilakukan adalah membuktikan kebenaran fungsi yang telah dirumuskan. Mengevaluasi yaitu kemampuan melakukan pemeriksaan ulang dengan cara melakukab simulasi. Ambil sampel rumus fungsi bobot titik graf Rantai konektif K_4P_n adalah $6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1}(3j - 2)$, misal saat $i = 1$ dan $j = 1$ maka bobot titik dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_f &= 6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1}(3j - 2) \\ &= 6 - 1 + \bigcup_{j=1}^{1+1}(3j - 2) \\ &= 10 \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa fungsi bobot titik graf Lengkap lintasan konektif K_4P_n adalah $6i - 1 + \bigcup_{j=i}^{i+1}(3j - 2)$. Fungsi Bobot total graf Rantai konektif K_4P_n $d = 48$ adalah $18n + 42i - 10 + \bigcup_{j=i}^{i+1}(3j - 2)$. Misal saat $i = 1$, $j = 1$ dan $n = 3$ maka bobot total dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_f &= 18n + 42i - 10 + \bigcup_{j=i}^{i+1}(3j - 2) \\ &= (18.3) + 42 - 10 + (3 - 2) + (6 - 2) \\ &= 91 \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian diatas terbukti baHwa fungsi Bobot total graf Rantai konektif K_4P_n $d = 48$ adalah $18n + 42i - 10 + \bigcup_{j=i}^{i+1}(3j - 2)$. Sedangkan bobot titil Graf Rantai

Diskonektif memili fungsi bobot titik $3mn + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1}(jm - m + k)$. Misal jika $i = 1$, $j = 1$, $n = 3$, $m = 3$ dan $k = 1$ maka bobot titik dapat dituliskan sebagai berikut:

$$w_g = 3mn + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1}(jm - m + k)$$

$$\begin{aligned}
 &= 27 + 6 + 2 + (3 - 3 + 1) + (6 - 3 + 1) \\
 &= 40
 \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa fungsi bobot titik $3mn + 2im + 2k + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k)$. Bobot total graf Rantai Diskonektif adalah $21mn - 30m + 12nk - 12n + 38im + 2k + 21 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k)$. Misal jika $i = 1, j = 1, n = 3, m = 3$ dan $k = 1$ maka bobot total dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_g &= 21mn - 30m + 12nk - 12n + 38im + 2k + 21 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k) \\
 &= 189 - 90 + 36 - 36 + 111 + 2 + 21 + (3 - 3 + 1) + (6 - 3 + 1) \\
 &= 241
 \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa fungsi bobot total graf Rantai Diskonektif adalah $21mn - 30m + 12nk - 12n + 38im + 2k + 21 + \bigcup_{j=i}^{i+1} (jm - m + k)$.

Tahap 6. Menciptakan

Kata kerja kunci: menemukan teorema baru

Tahapan yang terakhir adalah mencipta, kata kunci yang digunakan untuk tahapan ini adalah menemukan teorema. Menciptakan yaitu kemampuan memadukan unsur-unsur menjadi sesuatu yang baru, utuh dan koheren dalam bentuk lemma, teorema, koralari, atau konjektur. Menemukan teorema yang dimaksud adalah bagaimana fungsi yang ditemukan setelah proses pada tahapan sebelumnya yakni pengelompokan pada beda yang konsisten. Dari penelitian ini diperoleh suatu konjektur dan teorema yang baru mengenai pelabelan selimut anti ajaib super graf Rantai ini. Sesuai dengan tujuan penelitian yakni untuk mengetahui pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai konektif dan diskonektif, a adalah bobot sisi terkecil dan d adalah nilai bedanya. Berikut merupakan hasil dari pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super yang dijadikan suatu teorema dan konjektur graf Rantai, diantaranya:

1. untuk Graf Rantai konektif K_4P_n :

- (a) untuk pelabelan bobot total $d = 48$ ditemukan bahwa graf Rantai K_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 18n + 37$, dengan kata lain graf Rantai K_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(18n + 37, 48) - K_4$ anti ajaib super;
- (b) untuk pelabelan bobot total $d = 36$ ditemukan bahwa graf Rantai K_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 24n + 31$, dengan kata lain graf Rantai K_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(24n + 31, 36) - K_4$ anti ajaib super;
- (c) untuk pelabelan bobot total $d = 24$ ditemukan bahwa graf Rantai K_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 54n + 1$, dengan kata lain graf Rantai K_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(54n + 1, 24) - K_4$ anti ajaib super;
- (d) untuk pelabelan bobot total $d = 22$ ditemukan bahwa graf Rantai K_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 31n + 24$, dengan kata lain graf Rantai K_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(31n + 24, 22) - K_4$ anti ajaib super;
- (e) untuk pelabelan bobot total $d = 18$ ditemukan bahwa graf Rantai K_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 33n + 22$, dengan kata lain graf Rantai K_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(33n + 22, 18) - K_4$ anti ajaib super;
- (f) untuk pelabelan bobot total $d = 16$ ditemukan bahwa graf Rantai K_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 34n + 21$, dengan kata lain graf Rantai K_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(34n + 21, 16) - K_4$ anti ajaib super;
- (g) untuk pelabelan bobot total $d = 14$ ditemukan bahwa graf Rantai K_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 35n + 20$, dengan kata lain graf Rantai K_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(35n + 20, 14) - K_4$ anti ajaib super;

- (h) untuk pelabelan bobot total $d = 12$ ditemukan bahwa graf Rantai K_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 36n + 19$, dengan kata lain graf Rantai K_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(36n + 19, 12) - K_4$ anti ajaib super;
- (i) untuk pelabelan bobot total $d = 10$ ditemukan bahwa graf Rantai K_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 37n + 18$, dengan kata lain graf Rantai K_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(37n + 18, 10) - K_4$ anti ajaib super;
- (j) untuk pelabelan bobot total $d = 8$ ditemukan bahwa graf Rantai K_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 38n + 17$, dengan kata lain graf Rantai K_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(38n + 17, 8) - K_4$ anti ajaib super;
- (k) untuk pelabelan bobot total $d = 6$ ditemukan bahwa graf Rantai K_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 39n + 16$, dengan kata lain graf Rantai K_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(39n + 16, 6) - K_4$ anti ajaib super;
- (l) untuk pelabelan bobot total $d = 4$ ditemukan bahwa graf Rantai K_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 40n + 15$, dengan kata lain graf Rantai K_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(40n + 15, 4) - K_4$ anti ajaib super;
- (m) untuk pelabelan bobot total $d = 2$ ditemukan bahwa graf Rantai K_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 41n + 14$, dengan kata lain graf Rantai K_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(41n + 14, 2) - K_4$ anti ajaib super;
- (n) untuk pelabelan bobot total $d = 0$ ditemukan bahwa graf Rantai K_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 42n + 13$, dengan kata lain graf Rantai K_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(42n + 14, 0) - K_4$ anti ajaib super.

2. untuk Graf Rantai diskonektif mK_4P_n :

- (a) untuk pelabelan bobot total $d = 40$ ditemukan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 21mn + 9m + 25$ atau graf Rantai diskonektif mK_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(21mn + 9m + 25, 40) - K_4$ anti ajaib super;
- (b) untuk pelabelan bobot total $d = 32$ ditemukan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 69mn - 28m - 12n + 28$ atau graf Rantai diskonektif mK_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(69mn - 28m - 12n + 28, 32) - K_4$ anti ajaib super;
- (c) untuk pelabelan bobot total $d = 28$ ditemukan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 629mn + 2m - 2n + 28$ atau graf Rantai diskonektif mK_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(29mn + 2m - 2n + 28, 28) - K_4$ anti ajaib super;
- (d) untuk pelabelan bobot total $d = 20$ ditemukan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 61mn - 10n - 22m + 28$ atau graf Rantai diskonektif mK_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(61mn - 10n - 22m + 28, 20) - K_4$ anti ajaib super;
- (e) untuk pelabelan bobot total $d = 16$ ditemukan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 37mn - 4m - 4n + 28$ atau graf Rantai diskonektif mK_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(37mn - 4m - 4n + 28, 16) - K_4$ anti ajaib super;
- (f) untuk pelabelan bobot total $d = 10$ ditemukan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 36mn + 8m + 13$ atau graf Rantai diskonektif mK_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(36mn + 8m + 13, 10) - K_4$ anti ajaib super;

- (g) untuk pelabelan bobot total $d = 8$ ditemukan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 37mn + 8m + 12$ atau graf Rantai diskonektif mK_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(37mn + 8m + 12, 8) - K_4$ anti ajaib super;
- (h) untuk pelabelan bobot total $d = 6$ ditemukan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 38mn + 8m + 11$ atau graf Rantai diskonektif mK_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(38mn + 8m + 11, 6) - K_4$ anti ajaib super;
- (i) untuk pelabelan bobot total $d = 4$ ditemukan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 39mn + 8m + 10$ atau graf Rantai diskonektif mK_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(39mn + 8m + 10, 4) - K_4$ anti ajaib super;
- (j) untuk pelabelan bobot total $d = 2$ ditemukan bahwa graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super dengan $a = 40mn + 8m + 9$, atau graf Rantai diskonektif mK_4P_n mempunyai pelabelan selimut $(40mn + 8m + 9, 2) - K_4$ anti ajaib super;

4.5 Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan hasil penelitian untuk memperoleh nilai d yang mungkin untuk pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super pada Rantai konektif K_4P_n maupun diskonektif mK_4P_n adalah $d \in \{0, 1, 2, \dots, 48\}$. Setelah menentukan nilai d , peneliti mencari pelabelan sesuai dengan nilai d yang telah ditentukan tersebut.

Dari hasil penelitian pada beberapa nilai d tersebut diatas, diperoleh 25 teorema baru tentang pelabelan graf Rantai konektif K_4P_n maupun diskonektif mK_4P_n .

1. teorema baru tentang pelabelan graf Rantai konektif K_4P_n , yakni:

- (a) Ada pelabelan selimut $(18n + 37, 48) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.1**;

- (b) Ada pelabelan selimut $(24n + 31, 36) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.2**;
- (c) Ada pelabelan selimut $(54n + 1, 24) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.3**;
- (d) Ada pelabelan selimut $(31n + 24, 22) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.4**;
- (e) Ada pelabelan selimut $(33n + 22, 18) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.5**;
- (f) Ada pelabelan selimut $(34n + 21, 16) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.6**;
- (g) Ada pelabelan selimut $(35n + 20, 14) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.7**;
- (h) Ada pelabelan selimut $(36n + 19, 12) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.8**;
- (i) Ada pelabelan selimut $(37n + 18, 10) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.9**;
- (j) Ada pelabelan selimut $(38n + 17, 8) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.10**;
- (k) Ada pelabelan selimut $(39n + 16, 6) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.11**;

- (l) Ada pelabelan selimut $(40n + 15, 4) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.12**;
- (m) Ada pelabelan selimut $(41n + 14, 2) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.13**;
- (n) Ada pelabelan selimut $(42n + 13, 0) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.14**.

Observasi 4.5.1. *Ada pelabelan titik selimut $(\frac{s^2+s}{2}, s^2 - s) - K_n$ anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n \geq 2$ dan $s \geq 2$.*

Bukti. $s = 2 \rightarrow$ selimut K_2 bobot titiknya $\{3, 4, 7, 9\}$

$s = 3 \rightarrow$ selimut K_3 bobot titiknya $\{6, 12, 18, 24\}$

$s = 4 \rightarrow$ selimut K_4 bobot titiknya $\{10, 22, 34, 46\}$

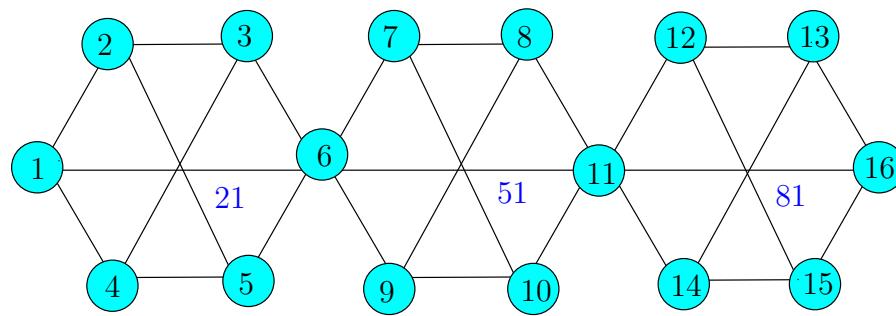
$s = 5 \rightarrow$ selimut K_5 bobot titiknya $\{15, 35, 55, 75\}$

Berdasarkan uraian bobot titik di atas beda bobot titik memebentuk barisan betingkat 2 dengan $d = s^2 - s$ sedangkan bobot terkecil $2, 3, 6, 10, 15$ membentuk barisan aritmatika beritngkat 2 dengan $a = \frac{s^2+s}{2}$ maa terbukti graf K_sP_n mempunyai pelabelan titik selimut $(\frac{s^2+s}{2}, s^2 - s)$ anti ajaib. \square

Sebagai ilustrasi dapat dilihat pada gambar 4.33 pelabelan titik pada graf Rantai K_sP_n untuk $s = 6$. Dengan demikian pelabelan titik diatas maka dapat ditarik konjektur sebagai berikut

Konjektur 4.5.1. *Ada pelabelan titik selimut $(\frac{s^2+s}{2}, s^2 - s) - K_s$ anti ajaib pada graf Rantai K_sP_n untuk $s \geq 2$ dann $n \geq 2$.*

Konjektur 4.5.2. *Ada pelabelan selimut $(a, d) - K_s$ anti ajaib super pada graf Rantai K_sP_n untuk $s \geq 2$ dan $n \geq 2$.*

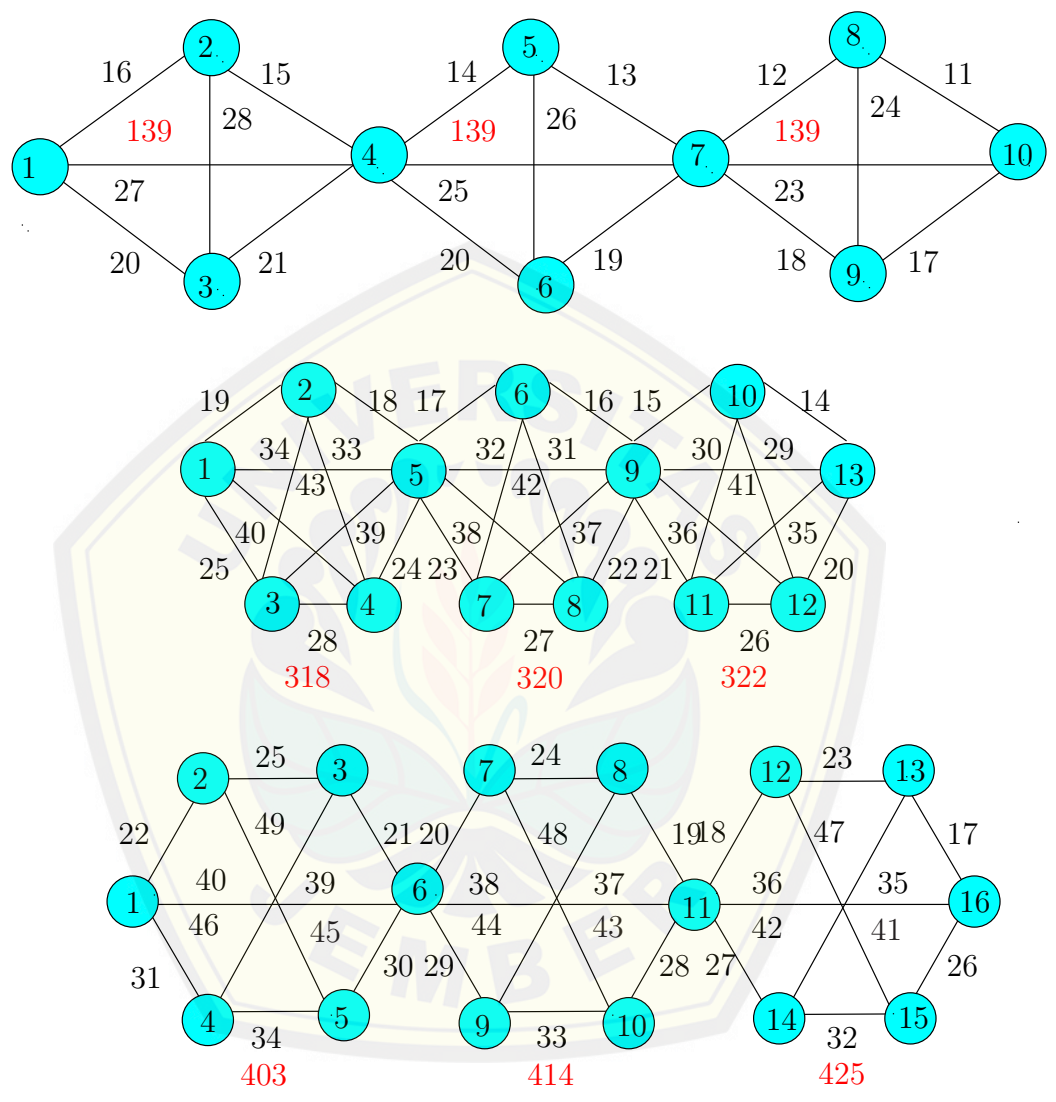


K_6

Gambar 4.33 pelabelan titik selimut $(21, 30) - K_6$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_s P_n$

Gambar 4.34 adalah ilustrasi pelabelan selimut $(a, d) - K_s$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_s P_n$

2. teorema baru tentang pelabelan graf Rantai diskonektif $mK_4 P_n$, yaitu
 - (a) Ada pelabelan selimut $(21mn + 9m + 25, 40) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif $mK_4 P_n$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.3.1**;
 - (b) Ada pelabelan selimut $(69mn - 28m - 12n + 28, 32) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif $mK_4 P_n$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.3.2**;
 - (c) Ada pelabelan selimut $(29mn + 2m - 2n + 28, 28) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif $mK_4 P_n$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.3.3**;
 - (d) Ada pelabelan selimut $(61mn - 10n - 22m + 28, 20) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif $mK_4 P_n$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.3.4**;
 - (e) Ada pelabelan selimut $(37mn - 4m - 4n + 28, 16) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif $mK_4 P_n$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.3.5**;



Gambar 4.34 pelabelan selimut $(a, d) - K_s$ anti ajaib super pada graf Rantai $K_s P_n$

- (f) Ada pelabelan selimut $(36mn + 8m + 13, 10) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.3.6**;
- (g) Ada pelabelan selimut $(37mn + 8m + 12, 8) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.3.7**;
- (h) Ada pelabelan selimut $(38mn + 8m + 11, 6) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.3.8**;
- (i) Ada pelabelan selimut $(39mn + 8m + 10, 4) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.3.9**;
- (j) Ada pelabelan selimut $(40mn + 8m + 9, 2) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.3.10**;

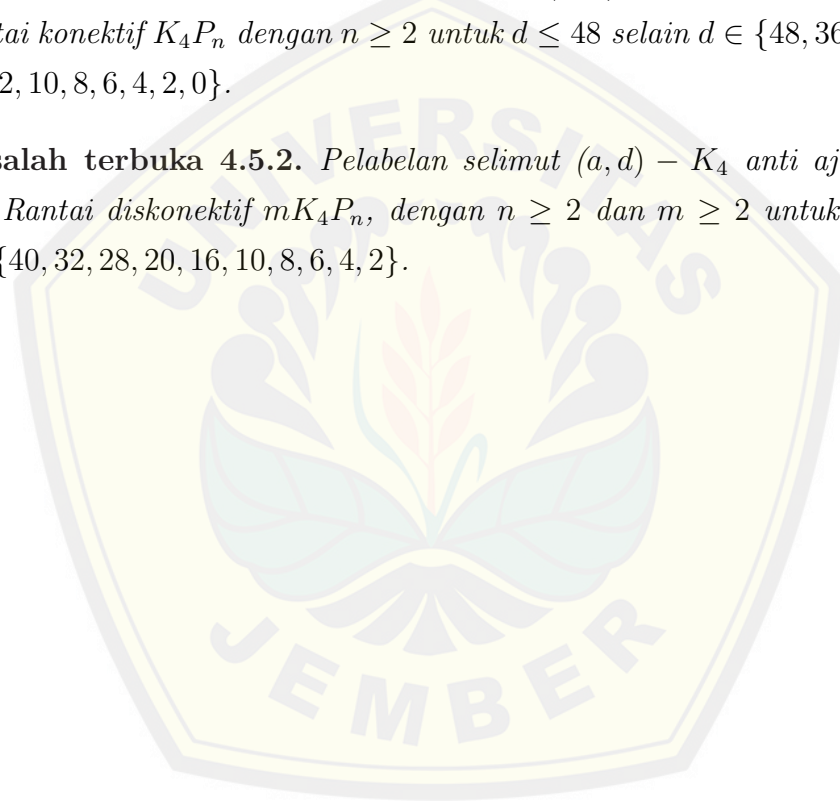
Menurut hasil penelitian tersebut, dapat diketahui bahwa jika diketahui nilai batas atas d yang berlainan maka nilai awal a juga akan berlainan. Namun seluruh label titik yang digunakan sama namun label sisinya yang berbeda. Label titik yang digunakan adalah dari 1 hingga p_G dimana p_G adalah jumlah titik pada graf sedangkan label untuk sisi yang digunakan adalah dimulai dari $p_G + 1$ hingga $p_G + q_G$ dimana q_G merupakan jumlah sisi, sehingga $p_G + q_G$ merupakan jumlah titik dan sisi pada graf. Jika kedua label tersebut digunakan untuk melabeli sebuah graf dengan aturan yang diberikan diatas maka pelabelan tersebut disebut sebagai pelabelan total. Pada graf Rantai konektif K_4P_n dan graf Rantai diskonektif mK_4P_n , untuk seluruh 48 nilai d tersebut berlaku pada syarat yang sama yaitu $n \geq 2$.

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, peneliti telah menemukan pelabelan selimut K_4 anti ajaib super untuk graf lengkap lintasan konektif untuk $d \in \{48, 36, 24, 22, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0\}$ dan pelabelan selimut K_4 anti ajaib super graf Rantai diskonektif $d \in \{40, 32, 28, 20, 16, 10, 8, 6, 4, 2\}$. Penelitian

pelabelan selimut K_4 anti ajaib super pada graf Rantai konektif K_4P_n untuk $d \leq 48$ selain $d \in \{48, 36, 24, 22, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0\}$ maupun graf Rantai diskonektif untuk $d \leq 48$ selain $d \in \{40, 32, 28, 20, 16, 10, 8, 6, 4, 2\}$ masih belum ditemukan oleh peneliti karena pola pelabelan yang telah ditemukan menggunakan konsep permutasi. Keterbatasan pada penelitian ini adalah hanya menemukan pelabelan selimut dengan d genap saja. vBeberapa pelabelan yang belum ditemukan oleh penulis disajikan pada open problem berikut:

Masalah terbuka 4.5.1. *Pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai konektif K_4P_n dengan $n \geq 2$ untuk $d \leq 48$ selain $d \in \{48, 36, 24, 22, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0\}$.*

Masalah terbuka 4.5.2. *Pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n , dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ untuk $d < 50$ selain $d \in \{40, 32, 28, 20, 16, 10, 8, 6, 4, 2\}$.*



BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Batas atas pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada graf Rantai konektif adalah $d \leq 48$ dan diskonektif adalah $d < 50$.
2. Graf Rantai konektif memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super untuk $d = \{0, 1, 2, \dots, 48\}$. Hasil Penelitian ini. Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa Graf Rantai konektif K_4P_n terdapat fungsi bijektif pelabelan selimut yaitu $(18n + 37, 48)$, $(24n + 31, 36)$, $(54n + 1, 24)$, $(31n + 24, 22)$, $(33n + 22, 18)$, $(34n + 21, 16)$, $(35n + 20, 14)$, $(36n + 19, 12)$, $(37n + 18, 10)$, $(38n + 17, 8)$, $(39n + 16, 6)$, $(40n + 15, 4)$, $(41n + 14, 2)$, dan $(42n + 14, 0) - K_4$ anti ajaib super untuk $n \geq 2$. Terdapat konjektur pelabelan titik selimut pada graf Rantai K_sP_n yaitu $(\frac{s^2+s}{2}, s^2 - s) - K_s$ anti ajaib untuk $s \geq 2$ dan $n \geq 2$. Konjektur pelabelan selimut graf K_sP_n yaitu ada pelabelan selimut $(a, d) - K_s$ anti ajaib super pada graf Rantai K_sP_n untuk $s \geq 2$ dan $n \geq 2$.
3. Graf Rantai diskonektif mK_4P_n memiliki pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super untuk $d < 50$. Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa Graf Rantai diskonektif mK_4P_n terdapat fungsi bijektif pelabelan selimut yaitu $(21mn + 9m + 25, 40)$, $(69mn - 28m - 12n + 28, 32)$, $(29mn + 2m - 2n + 28, 28)$, $(61mn - 10n - 22m + 28, 20)$, $(37mn - 4m - 4n + 28, 16)$, $(36mn + 8m + 13, 10)$, $(37mn + 8m + 12, 8)$, $(38mn + 8m + 11, 6)$, $(39mn + 8m + 10, 4)$, dan $(40mn + 8m + 9, 2) - K_4$ anti ajaib super untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$.
4. Kaitan antara keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super yakni dalam penemuan teorema pada

batas atas yang telah ditentukan, mengingat yaitu mengidentifikasi famili graf, memahami yaitu menghitung jumlah titik p dan sisi q , menentukan batas atas nilai beda d pada graf Rantai, menerapkan yaitu menentukan label titik dan menentukan fungsi bijektif bobot titik selimut, menganalisa yaitu menentukan label sisi dan fungsi bijektif sisi, mengembangkan fungsi sisi dan bobot total, mengevaluasi yaitu membuktikan kebenaran fungsi dan mencipta yaitu tercipta teorema baru. Hasil penelitian diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pelabelan graf dan bisa digunakan sebagai acuan oleh peneliti lain untuk meneliti pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super pada graf-graf khusus yang lain.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n karena d yang pada penelitian ini yang ditemukan hanya pada d genap saja serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian pada pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai konektif K_4P_n dengan $n \geq 2$ untuk $d \leq 48$ selain $d \in \{48, 36, 24, 22, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0\}$. Serta pelabelan selimut $(a, d) - K_4$ anti ajaib super pada graf Rantai diskonektif mK_4P_n dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ untuk $d < 50$ selain $d \in \{40, 32, 28, 20, 16, 10, 8, 6, 4, 2, 0\}$.

DAFTAR PUSTAKA

- Adawiyah, R. 2014. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Lam-pion.*(vol.6 No 1)
- Albirri, E.R 2014. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Rantai Pentagon.*(vol.6 No 1)
- Chandra, F.E. 2011. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Buku Segitiga.* Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Dafik. 2014. *Batas Atas dari Sebuah Graf yang Memiliki Super (a, d) – \mathcal{H} anti magic covering.* Working Paper, Fkip UNEJ.
- Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graphs.* Australia : Tidak dipublikasikan (Tesis).
- Dafik, M.Miller, J.Ryan and M.Baca. 2009. *On Super (a, d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs.* Discrete Math.
- Fajriatin, A. 2011. *Pelabelan Total Super (a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Gunung.* Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Guitierrez, A. dan Liado, A. 2005. Magic Coverings. *Of Combin Math and Combin Comput.* Vol.55: 451-461.
- Hadi, D.A. 2014. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Ulat Su-tra.*(vol.6 No 1)
- Hartsfield, N. and Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory.* Boston-San Diego-New York-London: Academic Press.
- Inayah, N., Salman, A.N.M. and Simanjuntak, R. 2013. *On (a, d)-H-antimagic H-decomposition. The Journal of Combinatorial Mathematics dan Combinatorial Computing* 71, 273-281.
- Inayah, N. 2013. *Pelabelan (a, d) – H – Anti Ajaib pada Beberapa Kelas Graf.* Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Isnawati, L. 2013. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Tunas Kelapa.*(vol.4 No 1)

- Lipschutz, S dan Lipson, M.L. 2002. *Matematika Diskret*. Jakarta: Erlangga.
- Muhlisatul. 2014. *Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Tribun.* (vol.6 No 1)
- Munir, R. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.
- Prastiwi, L.S. 2013. *Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Roket.* Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Prastiwi, L.S. 2013. *Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Roket.* Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Roosen, Kenneth H. 2003. *Discrete Mathematics and Its Application*. New York: The McGraw-Hill Companies.
- Santrock, John. 2008. *Psikologi Pendidikan*. Jakarta: Salemba Humanika.
- Sedláček, K. 1963. *Problem 27 in Theory of Graphs and Its Applications. Proceeding of the Symposium held in Smolenice Praha* 163, 163-167.
- Simanjuntak, R., Salman, A. 2010. *Super (a, d) - \mathcal{H} Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph H* . Australian Journal of Combinatorics.
- Slamin. 2009. *Pendekatan Teori Graf*. Jember : Universitas Jember.
- Syakdiyah, L. 2011. *Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Diamond Ladder.* Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Umilasari, R. 2013. *Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Ufo.* (vol.4 No 1)
- Universitas Jember. 2013. *Pedoman Penulisan Karya Ilmiah*. Jember: Badan Penerbit Universitas Jember.
- Wibisono, Samuel. 2004. *Matematika Diskrit*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Internet:

Dafik. 2014. Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi (HOTS). Dalam <http://dafik-fkip-unej.org/berita-199-keterampilan-berpikir-tingkat-tinggi-hots.html> /2014/07/01/Keterampilan-Berpikir-Tingkat-Tinggi-HOTS-/ (Diakses 11 Januari 2015).

