



**ANALISA PELABELAN SELIMUT  $(a, d) - \mathcal{H}$ -ANTI  
AJAIB SUPER PADA SHACKLE DARI GRAF  
SIKLUS DENGAN BUSUR DAN KAITANNYA  
DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR  
TINGKAT TINGGI**

**SKRIPSI**

Oleh

**Wuria Novitasari**

**NIM 110210101072**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2015**



**ANALISA PELABELAN SELIMUT  $(a, d) - \mathcal{H}$ -ANTI  
AJAIB SUPER PADA SHACKLE DARI GRAF  
SIKLUS DENGAN BUSUR DAN KAITANNYA  
DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR  
TINGKAT TINGGI**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

**Wuria Novitasari**

**NIM 110210101072**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2015**

## HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Ayahanda Suwarno dan Ibunda Susiati serta kakakku Ikasari Dian Andayani, yang senantiasa mengalirkan rasa cinta dan kasih sayang serta cucuran keringat dan iringan doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringi dalam setiap perjalanan hidupku;
2. Prof. Drs. Dafik, M. Sc., Ph.D. dan Prof. Drs. Slamir, M. Comp.Sc., Ph.D., selaku pembimbing skripsi yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan dalam menyelesaikan skripsi ini;
3. Sahabat-sahabatku "SM": Dina, Inge, Shofia, Marlia, Rinkar, Rintie, dan Ayu yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
4. Sahabat terbaikku "Pretty Boy": Tri Asih, Vivin, Rista, Intan, dan Ika. Terima kasih untuk kebersamaan, kekompakan, canda tawa, nasehat dan telah membagi pengalaman berharga;
5. Keluargaku di kos Jl. Jawa Raya 27A Jember yang membuatku mengerti akan asam manis persahabatan dan membagi pengalaman berharga;
6. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

## MOTTO

"Jika nasib adalah titik dan usaha adalah garis, maka hidup adalah graf. Jadi belajarliah teori graf agar hidup jadi indah."

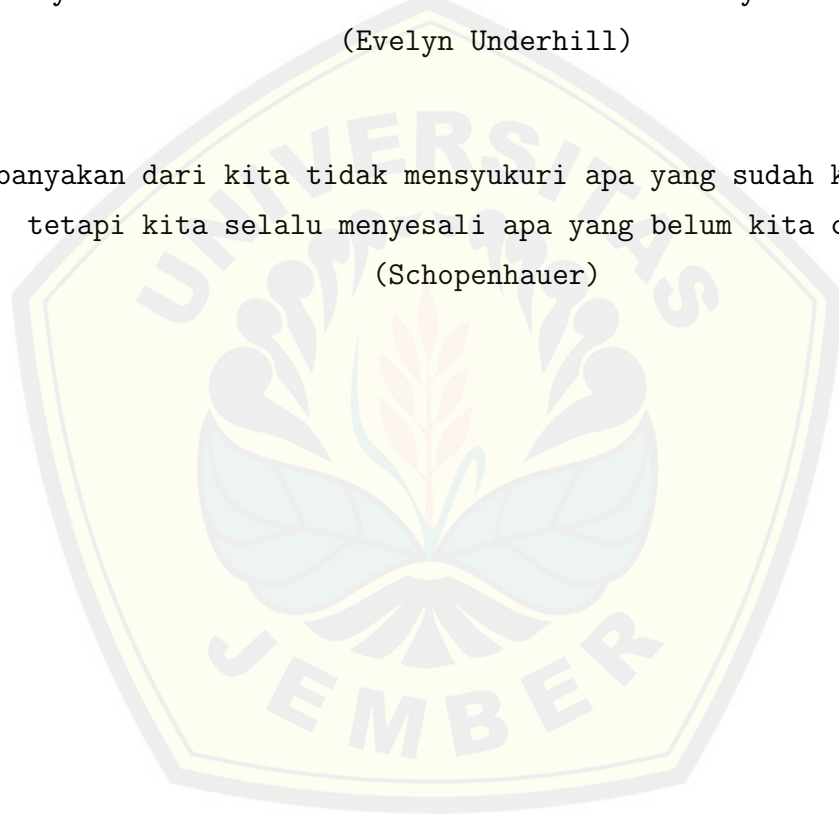
(Slamin)

"Sesuatu yang belum dikerjakan, seringkali tampak mustahil; kita baru yakin kalau kita telah berhasil melakukannya dengan baik."

(Evelyn Underhill)

"Kebanyakan dari kita tidak mensyukuri apa yang sudah kita miliki, tetapi kita selalu menyesali apa yang belum kita capai."

(Schopenhauer)



## HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Wuria Novitasari

NIM : 110210101072

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Analisa Pelabelan Selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -Anti Ajaib Super pada Shackle dari Graf Siklus dengan Busur dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2015

Yang menyatakan,

Wuria Novitasari

NIM. 110210101072

HALAMAN PENGANTAR

ANALISA PELABELAN SELIMUT  $(a, d) - \mathcal{H}$ -ANTI AJAIB SUPER  
PADA SHACKLE DARI GRAF SIKLUS DENGAN BUSUR DAN  
KAITANNYA DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR  
TINGKAT TINGGI

SKRIPSI

Diajukan untuk dipertahankan di depan Tim Penguji sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaikan Program Pendidikan Sarjana Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Oleh:

Nama : Wuria Novitasari  
NIM : 110210101072  
Tempat dan Tanggal Lahir : Lumajang, 28 Pebruari 1993  
Jurusan / Program Studi : Pendidikan MIPA / P. Matematika

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D  
NIP. 19680802 199303 1 004

Prof. Drs. Slamim, M.Comp.Sc., Ph.D.  
NIP. 19670420 199201 1 001

## HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul Analisa Pelabelan Selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -Anti Ajaib Super pada Shackle dari Graf Siklus dengan Busur dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan pada:

Hari : Senin

Tanggal : 8 Juni 2015

Tempat : Gedung 3 FKIP UNEJ

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Susi Setiawani, S.Si, M.Sc.

NIP.19700307 199512 2 001

Anggota I,

Prof. Drs. Slamir, M.Comp.Sc., Ph.D.

NIP.19670420 199201 1 001

Anggota 2,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D.

NIP.19680802 199303 1 004

Dr. Hobri, S.Pd., M.Pd.

NIP. 19730506 199702 1 001

Mengetahui,

Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Jember

Prof. Dr. Sunardi, M.Pd

NIP. 19540501 198303 1 005

## RINGKASAN

**Analisa Pelabelan Selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -Anti Ajaib Super pada Shackle dari Graf  $C_6^3$  dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi;** Wuria Novitasari, 110210101072; 2015: 116 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Matematika sebagai suatu disiplin ilmu yang secara jelas mengandalkan proses berpikir. Berpikir merupakan keterampilan kognitif untuk memperoleh pengetahuan. Bloom mengklasifikasikan ranah kognitif yang sudah direvisi dalam 6 tingkatan yaitu mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, dan mencipta. Mengingat, memahami, dan menerapkan termasuk kategori berpikir tingkat rendah kemudian menganalisis, mengevaluasi, dan mencipta termasuk kategori berpikir tingkat tinggi.

Graf adalah salah satu cabang dari ilmu matematika yang penting. Graf menjadi alat pemodelan yang sangat baik untuk menjelaskan dan menyelesaikan suatu permasalahan dalam berbagai hal. Salah satu contoh penerapan teori graf adalah pelabelan graf. Terdapat banyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, salah satunya adalah pelabelan  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super, dimana  $a$  adalah bobot selimut terkecil dan  $d$  adalah nilai beda.

Salah satu jenis graf yang belum diketahui pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super adalah shackle dari graf  $C_6^3$ . Shackle dari graf  $C_6^3$  dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  adalah sebuah graf yang dibentuk dari beberapa graf siklus dengan busur dengan 6 titik pada setiap selimutnya dan 3 busur,  $e = 1$  yang berarti bahwa ada 1 sisi yang dipakai bersama-sama oleh selimut pertama dan selimut kedua, dan  $n \geq 2$ . Gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  merupakan gabungan saling lepas dari  $m$  duplikat shackle dari graf  $C_6^3$  dan dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif aksiomatik yaitu menetapkan pengertian dasar selimut  $\mathcal{H}$ -anti ajaib, lalu dikenalkan beberapa teorema mengenai pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super



pada shackle dari graf  $C_6^3$  baik secara tunggal maupun gabungan saling lepasnya juga menggunakan metode pendeteksian pola untuk menentukan pola umumnya. Penelitian ini juga mengkaitkan proses pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  dalam terciptanya keterampilan berpikir tingkat tinggi. Hasil penelitian ini berupa teorema baru mengenai pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  dan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  yaitu sebagai berikut:

1. *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super untuk  $d = \{0, 1, 2, \dots, 96\}$ . Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  terdapat fungsi bijektif pelabelan selimut yaitu  $(36n + 84, 96), (44n + 76, 80), (52n + 68, 64), (60n + 60, 48), (57n + 77, 33), (68n + 52, 32), (58n + 76, 31), (59n + 75, 29), (60n + 74, 27), (61n + 73, 25), (54n + 96, 23), (64n + 68, 21), (61n + 79, 19), (72n + 48, 17), (76n + 44, 16), (67n + 65, 15), (84n + 36, 0) - C_6^3$ -anti ajaib super untuk  $n \geq 2$ . Terdapat 2 konjektur pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yaitu pelabelan titik selimut  $(\frac{s^2+s}{2}, s^2 - 2s)$ -anti ajaib super untuk  $s \geq 5$  dan  $n \geq 2$  serta pelabelan total selimut  $(a, d) - C_s^3$ -anti ajaib super untuk  $s \geq 6$  dan  $n \geq 2$ .
2. Gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super untuk  $d = \{0, 1, 2, \dots, 106\}$ . Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  terdapat fungsi bijektif pelabelan selimut yaitu  $(41mn + 124m + 15, 15), (42mn + 124m + 14, 13), (43mn + 124m + 13, 11), (44mn + 124m + 12, 9), (45mn + 124m + 11, 7), (46mn + 124m + 10, 5), (47mn + 124m + 9, 3), (49mn + 114m + 29, 1) - C_6^3$ -anti ajaib super untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .

Kaitan antara keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super yakni dalam penemuan teorema pada batas atas yang telah ditentukan, yaitu dimulai dari mengingat dalam mengidentifikasi famili graf, memahami dalam menghitung jumlah titik  $p$  dan sisi  $q$  dan menentukan batas atas nilai beda  $d$  pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  menentukan label titik, menerapkan dalam menentukan fungsi bijektif bobot titik selimut, menganalisa dalam menentukan

label sisi dan fungsi bijektif sisi dan mengembangkan fungsi sisi dan bobot total, mengevaluasi dalam membuktikan kebenaran fungsi, dan mencipta teorema baru sebanyak 25 teorema dan 2 konjektur.

Penelitian pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  tunggal untuk  $d \leq 96$  selain  $d \in \{96, 80, 64, 48, 33, 32, 31, 29, 27, 25, 23, 21, 19, 17, 16, 15, 0\}$  maupun gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  untuk  $d < 106$  selain  $d \in \{15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1\}$  masih belum ditemukan oleh peneliti dikarenakan pola pelabelan sisi yang telah ditemukan menggunakan konsep permutasi.



## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Analisa Pelabelan Selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -Anti Ajaib Super pada Shackle dari Graf Siklus dengan Busur dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Jember;
4. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I dan Prof. Drs. Slamir, M.Comp.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
5. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
6. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> . . . . .	i
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> . . . . .	ii
<b>HALAMAN MOTTO</b> . . . . .	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> . . . . .	iv
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b> . . . . .	v
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> . . . . .	vi
<b>RINGKASAN</b> . . . . .	vii
<b>KATA PENGANTAR</b> . . . . .	x
<b>DAFTAR ISI</b> . . . . .	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> . . . . .	xvi
<b>DAFTAR TABEL</b> . . . . .	xvii
<b>DAFTAR LAMBANG</b> . . . . .	xviii
<b>1 PENDAHULUAN</b> . . . . .	1
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	4
1.3 Batasan Masalah . . . . .	4
1.4 Tujuan Penelitian . . . . .	5
1.5 Manfaat Penelitian . . . . .	5
<b>2 TINJAUAN PUSTAKA</b> . . . . .	7
2.1 Terminologi Dasar Graf . . . . .	7
2.2 Gabungan Graf . . . . .	11
2.3 Jenis-jenis Graf . . . . .	11
2.4 Graf Khusus . . . . .	13
2.5 Aplikasi Graf . . . . .	19
2.6 Fungsi dan Barisan Aritmatika . . . . .	21
2.6.1 Fungsi . . . . .	21
2.6.2 Barisan Aritmatika . . . . .	22
2.7 Pelabelan Graf . . . . .	24
2.7.1 Definisi Pelabelan Graf . . . . .	24

2.7.2	Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -Anti Ajaib Super . . . . .	24
2.8	Aksioma, Lemma, Teorema, <i>Corollary</i> , Konjektur dan <i>Open Problem</i>	25
2.9	Hasil Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -Anti Ajaib Super pada Beberapa Graf . . . . .	26
2.10	Berpikir Tingkat Tinggi . . . . .	27
<b>3</b>	<b>METODE PENELITIAN</b> . . . . .	<b>31</b>
3.1	Metode Penelitian . . . . .	31
3.2	Definisi Operasional . . . . .	32
3.2.1	Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -Anti Ajaib Super . . . . .	32
3.2.2	Shackle dari Graf Siklus dengan Busur . . . . .	32
3.2.3	Gabungan Saling Lepas Shackle dari Graf Siklus dengan Busur . . . . .	34
3.3	Teknik Penelitian . . . . .	34
3.4	Observasi . . . . .	35
<b>4</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN</b> . . . . .	<b>38</b>
4.1	Batas Atas Pelabelan Selimut $(a, d) - C_6^3$ Anti Ajaib Super pada Shackle dari Graf $C_6^3$ Tunggal dan Gabungan Saling Lepasnya . .	38
4.2	Pelabelan Selimut $(a, d) - C_6^3$ -Anti Ajaib Super pada Shackle dari Graf $C_6^3$ Tunggal yang dinotasikan dengan Shack $(C_6^3, e, n)$ . . . .	42
4.3	Pelabelan Selimut $(a, d) - C_6^3$ -Anti Ajaib Super pada Gabungan Shackle dari Graf Siklus dengan Busur yang dinotasikan dengan Shack $(mC_6^3, e, n)$ . . . . .	68
4.4	Berpikir Tingkat Tinggi dalam Pelabelan Selimut $(a, d) - C_6^3$ -Anti Ajaib Super pada Shackle dari Graf Siklus dengan Busur yang dino- tasikan dengan shack $(C_6^3, e, n)$ . . . . .	87
4.5	Hasil dan Pembahasan . . . . .	104
<b>5</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b> . . . . .	<b>112</b>
5.1	Kesimpulan . . . . .	112
5.2	Saran . . . . .	113
	<b>DAFTAR PUSTAKA</b> . . . . .	<b>114</b>

DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh graf secara umum . . . . .	8
2.2	(a). Graf $G_1$ ; (b). Graf $G_2$ ; (c). Graf $G_3$ . . . . .	9
2.3	(a). Graf Kosong $N_5$ . . . . .	9
2.4	Sebuah graf terhubung menjadi sebuah graf tak terhubung dikarenakan adanya <i>cut – set</i> . . . . .	11
2.5	Contoh Gabungan Graf . . . . .	11
2.6	(a). Graf sederhana; (b). Graf tak sederhana . . . . .	12
2.7	(a). Graf berhingga; (b). Graf tak berhingga . . . . .	13
2.8	(a). Graf tak berarah; (b). Graf berarah . . . . .	14
2.9	(a). Graf $K_4$ ; (b). Graf $K_5$ ; (c). Graf $K_6$ . . . . .	14
2.10	(a). Regular-0; (b). Regular-1; (c). Regular-2 . . . . .	15
2.11	(a). $K_{2,3}$ ; (b). $K_{3,3}$ ; (c). $K_{2,4}$ . . . . .	15
2.12	Graf siklus (Roosen, 2003) . . . . .	16
2.13	Graf roda $W_4$ . . . . .	16
2.14	Graf lintasan $P_3$ dan $P_5$ . . . . .	17
2.15	Graf rantai $3K_4$ -lintasan . . . . .	17
2.16	Graf siklus dengan busur $C_6^1$ (Rezita, F (2014) . . . . .	17
2.17	Graf shack ( $S_m, n$ ) . . . . .	18
2.18	Shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	18
2.19	Pelabelan titik dan sisi <i>Shack</i> ( $C_6^3, e, n$ ) untuk $d = 96$ . . . . .	19
2.20	Diagram Pohon . . . . .	20
2.21	Fungsi-fungsi khusus: (a) injektif; (b) surjektif; (c) bijektif . . . . .	23
2.22	Tahapan taksonomi Bloom . . . . .	28
3.1	Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ tunggal yang dinotasikan dengan <i>Shack</i> ( $C_6^3, e, n$ ) . . . . .	33
3.2	Pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada gabungan saling lepas shackle dari graf $C_6^3$ yang dinotasikan dengan <i>Shack</i> ( $mC_6^3, e, n$ ) . . . . .	33
3.3	Rancangan penelitian . . . . .	36

3.4	Observasi awal pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	37
4.1	Pelabelan selimut $(36n + 84, 96)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	45
4.2	Pelabelan selimut $(44n + 76, 80)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	47
4.3	Pelabelan selimut $(52n + 68, 64)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	48
4.4	Pelabelan selimut $(60n + 60, 48)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	49
4.5	Pelabelan selimut $(57n + 77, 33)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	51
4.6	Pelabelan selimut $(68n + 52, 32)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	52
4.7	Pelabelan selimut $(58n + 76, 31)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	54
4.8	Pelabelan selimut $(59n + 75, 29)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	55
4.9	Pelabelan selimut $(60n + 74, 27)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	56
4.10	Pelabelan selimut $(61n + 73, 25)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	58
4.11	Pelabelan selimut $(54n + 96, 23)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	59
4.12	Pelabelan selimut $(64n + 68, 21)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	61
4.13	Pelabelan selimut $(61n + 79, 19)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	62
4.14	Pelabelan selimut $(72n + 48, 17)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	64
4.15	Pelabelan selimut $(76n + 44, 16)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	65



4.16 Pelabelan selimut $(67n + 65, 15)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	67
4.17 Pelabelan selimut $(84n + 36, 0)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	68
4.18 Pelabelan selimut $(41mn + 124m + 15, 15)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	70
4.19 Pelabelan selimut $(42mn + 124m + 14, 13)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	73
4.20 Pelabelan selimut $(43mn + 124m + 13, 11)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	75
4.21 Pelabelan selimut $(44mn + 124m + 12, 9)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	78
4.22 Pelabelan selimut $(45mn + 124m + 11, 7)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	79
4.23 Pelabelan selimut $(46mn + 124m + 10, 5)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	82
4.24 Pelabelan selimut $(47mn + 124m + 9, 3)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	83
4.25 Pelabelan selimut $(49mn + 114m + 29, 1)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf $C_6^3$ . . . . .	86
4.26 Shack $(C_6^3, e, n)$ , untuk $e = 1$ dan $n \geq 2$ . . . . .	88
4.27 Jumlah titik dan sisi pada (a). Shack $(C_6^3, e, n)$ untuk $e = 1$ dan $n = 2$ ; (b). Shack $(C_6^3, e, n)$ untuk $e = 1$ dan $n = 3$ ; (c). Shack $(C_6^3, e, n)$ untuk $e = 1$ dan $n = 4$ . . . . .	88
4.28 Penjumlahan bobot titik Shack $(C_6^3, e, n)$ untuk $e = 1$ dan $n = 3$ .	89
4.29 Pelabelan titik Shack $(C_6^3, e, n)$ untuk $e = 1$ dan $n = 3$ . . . . .	90
4.30 Pelabelan titik Shack $(C_6^3, e, n)$ untuk $n = 5$ . . . . .	91
4.31 Penjumlahan bobot titik Shack $(C_6^3, e, n)$ untuk $n = 5$ . . . . .	91
4.32 Penjumlahan bobot titik Shack $(mC_6^3, e, n)$ untuk $n = 3$ dan $m = 3$	91
4.33 Pelabelan titik Shack $(mC_6^3, e, n)$ untuk $n = 3$ dan $m = 3$ . . . . .	94
4.34 Pelabelan titik Shack $(mC_6^3, e, n)$ untuk $n = 3$ dan $m = 5$ . . . . .	95



4.35 Pelabelan titik selimut *Shack*  $(C_s^3, e, n)$  untuk  $s = 5, s = 6, s = 7,$   
dan  $s = 8$  . . . . . 108

4.36 Pelabelan total selimut *Shack*  $(C_s^3, e, n)$  untuk  $s = 6, s = 7,$  dan  
 $s = 8$  . . . . . 109



DAFTAR TABEL

- 2.1 Ringkasan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib pada graf tunggal. 26



DAFTAR LAMBANG

$G$	=	Graf $G$
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan $V$ adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan $E$ adalah himpunan sisi
$v_n$	=	Titik ke- $n$ pada suatu graf
$e_n$	=	Sisi ke- $n$ dari suatu graf
$V(G)$	=	Himpunan titik pada graf $G$ yang disebut sebagai <i>vertex</i>
$E(G)$	=	Himpunan sisi pada graf $G$ yang disebut sebagai <i>edge</i>
$ V(G) =p(G)$	=	Banyaknya titik dari graf $G$ yang disebut <i>order</i>
$ E(G) =q(G)$	=	Banyaknya sisi dari graf $G$ yang disebut ukuran ( <i>size</i> )
$ V(H) =p(H)$	=	Jumlah titik selimut
$ E(H) =q(H)$	=	Jumlah sisi selimut
$\lambda$	=	pelabelan selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib
$H \subseteq G$	=	$H$ subgraf $G$ yang isomorfik dengan $\mathcal{H}$
$\mathcal{H}$	=	Selimut $H$ dari $G$
$\mathcal{H}_i$	=	Selimut $H$ dari $G$ sebanyak $i$
$U_n$	=	Suku ke- $n$ barisan aritmatika
$d$	=	Nilai beda barisan bobot total
$a$	=	Bobot sisi terkecil yang merupakan suku pertama barisan
$C_6^3$	=	Graf siklus dengan busur
$Shack(C_6^3, e, n)$	=	Shackle dari graf $C_6^3$ , dimana $e = 1$ dan $n$ adalah banyaknya graf $C_6^3$
$Shack(mC_6^3, e, n)$	=	Gabungan shackle dari graf $C_6^3$ dimana $m$ adalah jumlah copy pada shackle dari graf $C_6^3$ , $e = 1$ , dan $n$ adalah banyaknya graf $C_6^3$
$x_{i,j}$	=	Titik ke- $i$ dalam komponen ke- $j$ pada shackle dari graf $C_6^3$
$x_{i,j}^k$	=	Titik ke- $i$ dalam komponen ke- $j$ copy ke $k$ pada shackle dari graf $C_6^3$
$f(x_{i,j})$	=	Fungsi bijektif pelabelan titik pada shackle dari graf $C_6^3$
$g(x_{i,j})^k$	=	Fungsi bijektif pelabelan titik pada gabungan shackle dari graf $C_6^3$

- $w_f$  = Fungsi bobot titik selimut pada shackle dari graf  $C_6^3$   
 $w_g$  = Fungsi bobot titik selimut pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$   
 $f(x_{i,j}x_{i+1,j})$  = Fungsi bijektif label sisi lingkaran pada shackle dari graf  $C_6^3$   
 $f(x_{i,j}^kx_{i+1,j}^k)$  = Fungsi bijektif label sisi lingkaran pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$   
 $f(x_{1,j}x_{3,j})$  = Fungsi bijektif label sisi busur pada shackle dari graf  $C_6^3$   
 $f(x_{1,j}^kx_{3,j}^k)$  = Fungsi bijektif label sisi busur pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$   
 $f(x_{1,j}x_{3,j+1})$  = Fungsi bijektif label sisi busur pada shackle dari graf  $C_6^3$   
 $f(x_{1,j}^kx_{3,j+1}^k)$  = Fungsi bijektif label sisi busur pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$   
 $f(x_{2,j}x_{3,j+1})$  = Fungsi bijektif label sisi busur pada shackle dari graf  $C_6^3$   
 $f(x_{2,j}^kx_{3,j+1}^k)$  = Fungsi bijektif label sisi busur pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$   
 $W_f$  = Fungsi bobot selimut total pada shackle dari graf  $C_6^3$   
 $W_g$  = Fungsi bobot selimut total pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Seiring dengan semakin pesatnya perkembangan Ilmu Pengetahuan dan Teknologi (IPTEK), prinsip-prinsip matematika menempatkan dirinya sebagai ilmu dasar yang mempunyai peranan penting dalam perkembangan Ilmu Pengetahuan dan Teknologi (IPTEK). Konsep dan prinsip matematika banyak digunakan sebagai alat bantu dalam penerapan bidang ilmu lain maupun dalam pengembangan matematika sendiri. Matematika merupakan ilmu hitung yang penting bagi kehidupan manusia. Kemampuan menghitung, mengukur, menurunkan dan menggunakan suatu rumus adalah fungsi dari matematika yang diperlukan dalam kehidupan sehari-hari.

Matematika sebagai suatu disiplin ilmu yang secara jelas mengandalkan proses berpikir karena berpikir diperlukan oleh individu dalam kehidupan sehari-hari. Menurut Murtadho (2013:531), berpikir dihasilkan dari metakognisi yang dimiliki setiap individu. Secara ringkas dapat dinyatakan bahwa metakognisi adalah kesadaran seseorang tentang proses pemantauan serta menjaga dan mengendalikan pikiran dan tindakannya sendiri. Komalasari (2010) mengemukakan bahwa berpikir dimulai apabila individu dihadapkan pada suatu masalah dan menghadapi sesuatu yang menghendaki adanya jalan keluar. Hal ini menunjukkan ketika individu ingin memecahkan suatu masalah atau ingin menghendaki jalan keluar, maka individu tersebut melakukan aktivitas berpikir. Oleh karena itu, melalui berpikir manusia dapat mengenali masalah, memahami dan memecahkannya.

Berpikir merupakan keterampilan kognitif untuk memperoleh pengetahuan. Bloom mengklasifikasikan ranah kognitif dalam enam tingkatan, yaitu pengetahuan, pemahaman, penerapan, analisis, sintesis, dan evaluasi. Setelah direvisi taksonomi Bloom menjadi mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, dan mencipta. Tiga diantara taksonomi Bloom yang telah

direvisi termasuk kategori keterampilan berpikir tingkat rendah seperti mengingat, memahami, menerapkan dan tiga lainnya termasuk kategori keterampilan berpikir tingkat tinggi seperti menganalisis, mengevaluasi, dan mencipta. Hal ini berarti bahwa untuk mencapai keterampilan berpikir tingkat tinggi tetap harus melalui aspek mengingat, memahami, dan menerapkan.

Teori graf adalah salah satu cabang dari ilmu matematika yang penting. Graf menjadi alat pemodelan yang sangat baik untuk menjelaskan dan menyelesaikan suatu permasalahan dalam berbagai hal. Permasalahan ini akan lebih jelas bila dapat direpresentasikan dalam bentuk graf. Graf adalah himpunan tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dan suatu himpunan pasangan tidak terurut dari titik-titiknya yang disebut sisi. Walaupun teori graf adalah salah satu cabang dari ilmu matematika yang penting namun teori-teorinya dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu contoh penerapan teori graf adalah pelabelan graf.

Pelabelan suatu graf adalah pemetaan bijektif yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif. Pelabelan graf diperkenalkan oleh Sedláček pada tahun 1963 dengan memunculkan ide tentang pelabelan ajaib. Misal  $G(V, E)$ , selanjutnya disingkat  $G$ , adalah graf sederhana dan tak berarah dengan himpunan titiknya adalah  $V$  dan himpunan sisinya adalah  $E$ . Graf  $G$  mempunyai jumlah titik (*order*) dan jumlah sisi (*size*). Pelabelan titik dan sisi dari graf bisa dilakukan dengan banyak cara. Salah satu cara yang bisa digunakan adalah melabelinya dengan bilangan. Terdapat banyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan anti ajaib, dikenal juga pelabelan total  $(a, d)$ -titik anti ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total  $(a, d)$ -sisi anti ajaib, dan pelabelan total sisi ajaib super serta pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super.

Pelabelan anti ajaib adalah pengembangan dari pelabelan ajaib yang dilakukan oleh Hartsfield dan Ringel (1990). Mereka mendefinisikan bahwa suatu graf  $G$  disebut anti ajaib jika sisi-sisinya dapat dilabeli dengan  $1, 2, \dots, e_G$  sehingga setiap titik mempunyai bobot titik yang berbeda. Gutiérrez dan Lladó

(2005) memperkenalkan pelabelan total  $\mathcal{H}$ -ajaib dengan menggunakan konsep selimut- $\mathcal{H}$ . Inayah et al. kemudian mengembangkan suatu pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib dengan penjelasan bahwa suatu pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib pada graf  $G$  adalah sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan barisan aritmatika  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (t - 1)d$ . Pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib dikatakan fungsi bijektif karena label selimut pada suatu graf tersebut selalu berbeda dan berurutan.

Penelitian tentang selimut pernah dilakukan oleh Inayah (2013), Rizky et al. (2014) dan Citra et al. (2014). Inayah membahas tentang pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib pada graf kipas dan graf roda. Rizky membahas tentang pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$  anti ajaib super pada shackle graf triangular book yang menemukan 3 teorema baru dengan  $d \in \{96, 60, 48\}$  yaitu  $(36n + 84, 96) - (Bt_3 + 2e)$ ,  $(52n + 68, 60) - (Bt_3 + 2e)$ , dan  $(60n + 60, 48) - (Bt_3 + 2e)$ . Citra membahas tentang pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada graf semi windmill. Citra menemukan 4 teorema baru dengan  $d \in \{7, 5, 3, 1\}$  yaitu  $(18n + 27, 7) - (C_3 + e)$ ,  $(25n + 17, 5) - (C_3 + e)$ ,  $(23n + 13, 3) - (C_3 + e)$ , dan  $(22n + 20, 1) - (C_3 + e)$ .

Shackle dari graf siklus dengan busur dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  adalah sebuah graf yang dibentuk dari beberapa graf siklus dengan busur dengan 6 titik pada setiap selimutnya dan 3 busur,  $e = 1$  yang berarti bahwa ada 1 sisi yang dipakai bersama-sama oleh selimut pertama dan selimut kedua, dan  $n \geq 2$ . Gabungan shackle dari graf siklus dengan busur merupakan gabungan saling lepas dari  $m$  duplikat shackle dari graf siklus dengan busur dan dinotasikan dengan  $Shack(mC_6^3, e, n)$ . Terdapat pelabelan yang telah dilakukan pada shackle dari graf siklus dengan busur diantaranya pelabelan total  $(a, d) - face$  anti ajaib pada shackle dari graf siklus dengan busur  $C_6^1$ .

Pada penelitian ini dibahas tentang pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur karena belum ada penelitian tentang pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib pada shackle dari graf siklus dengan busur. Selain itu, peneliti akan menerapkan tahapan-tahapan berpikir tingkat tinggi taksonomi Bloom yang telah direvisi hingga mencapai aspek tertinggi yaitu aspek mencipta. Oleh karena itu, pada penelitian ini penulis memilih judul



”Analisa Pelabelan Selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -Anti Ajaib Super pada Shackle dari Graf Siklus dengan Busur dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi”.

### 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. berapa batas atas pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur tunggal dan gabungan saling lepas?
2. apakah shackle dari graf siklus dengan busur tunggal memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super?
3. apakah gabungan saling lepas shackle dari graf siklus dengan busur memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super?
4. bagaimana keterkaitan proses menemukan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi?

### 1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi pada :

1. graf sederhana, yaitu graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda;
2. untuk kasus pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur tunggal yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  dibatasi pada  $e = 1$  dan  $n \geq 2$ ;
3. untuk kasus pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf siklus dengan busur yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dibatasi pada  $m \geq 2$ ,  $e = 1$ ,  $n \geq 2$  dan  $m, n$  adalah bilangan asli. Dalam penelitian ini,  $m$  merupakan banyaknya *copy* dari graf siklus dengan



busur,  $e = 1$  adalah sisi yang dipakai bersama-sama oleh graf siklus dengan busur pertama dan graf siklus dengan busur kedua,  $n$  adalah banyaknya graf siklus dengan busur yang di $expand$ ;

4. jumlah  $n$  pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  hanya digunakan  $n = 3$ ;
5. menggunakan taksonomi Bloom yang telah direvisi.

#### 1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. menentukan batas atas pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur tunggal dan gabungan saling lepas;
2. menentukan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur tunggal;
3. menentukan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada gabungan saling lepas shackle dari graf siklus dengan busur;
4. mengetahui keterkaitan proses menemukan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf siklus dengan busur dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi.

#### 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapatkan dari penelitian ini adalah :

1. menambah pengetahuan baru tentang pelabelan selimut pada shackle dari graf siklus dengan busur;
2. memberi motivasi untuk meneliti tentang pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada graf jenis lain;
3. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super;

4. melatih peneliti dalam proses berpikir tingkat tinggi terutama terkait dengan mengingat dalam mengidentifikasi famili graf, memahami dalam menghitung jumlah titik  $p$  dan sisi  $q$  pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  dan menentukan batas atas nilai beda ( $d$ ), menerapkan dalam menentukan label titik dan mengembangkan fungsi bijektif bobot titik, menganalisa dalam menentukan label sisi dan fungsi bijektif sisi serta mengembangkan fungsi sisi dan bobot total, mengevaluasi dalam membuktikan kebenaran fungsi, dan mencipta teorema.



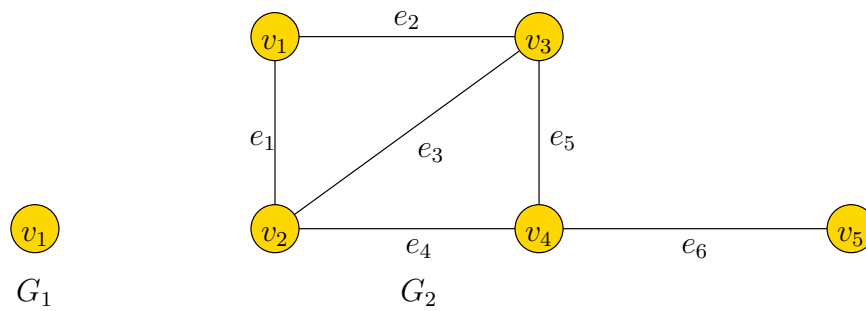
## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Terminologi Dasar Graf

Menurut (Slamin, 2009:11-12), sebuah graf  $G$  merupakan pasangan himpunan  $(V(G), E(G))$ , dimana  $V(G)$  adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan  $E(G)$  adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut  $\{u, v\}$  dari titik-titik  $u, v \in V(G)$  yang disebut sisi.  $V(G)$  disebut himpunan titik dari  $G$  dan  $E(G)$  disebut himpunan sisi dari  $G$ . Banyaknya unsur di  $V(G)$  disebut *order* dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $p(G)$ , dan banyaknya unsur di  $E(G)$  disebut ukuran dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $q(G)$ . Jika graf yang dibicarakan hanya graf  $G$ , maka *order* dan ukuran dari  $G$  masing-masing cukup ditulis  $p$  dan  $q$ . Graf dengan *order*  $p$  dan ukuran  $q$  dapat ditulis graf- $(p, q)$ .

Titik pada graf dinomeri dengan huruf, seperti  $a, b, c, \dots$  dengan bilangan asli  $1, 2, 3, \dots$  atau gabungan antara keduanya. Sisi yang menghubungkan titik  $u$  dan titik  $v$  dapat dinyatakan dengan pasangan  $e = (u, v)$ . Setiap sisi menghubungkan satu titik ke titik yang lain dan setiap titik dapat mempunyai banyak sisi yang menghubungkannya ke titik lain. *Order*  $n$  dari graf  $G$  adalah banyaknya titik di  $G$ , yaitu  $n = p(G)$  atau dapat ditulis  $n = |V(G)|$  sedangkan banyaknya sisi dari sebuah graf  $G$  disebut *size* dari  $G$ , sering dinotasikan dengan  $q(G)$  atau dapat ditulis  $|E(G)|$ .  $G_1$  pada Gambar 2.1 adalah graf dengan *order* = 1 dan  $G_2$  pada Gambar 2.1 adalah graf dengan  $|V(G)| = 5$  dan  $|E(G)| = 6$ . Untuk  $G_1$ ,  $V = v_1$  dan  $E = \emptyset$ , sedangkan untuk  $G_2$ ,  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  dan  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  atau dapat ditulis  $\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_4, v_5)\}$ .

Beberapa terminologi (istilah) dasar yang sering digunakan dalam graf adalah bertetangga (*adjacent*), bersisian (*incident*), derajat (*degree*), simpul terencil (*isolated vertex*), graf kosong (*null graph* atau *empty graph*), gelang (*loop*), lintasan (*path*), sirkuit atau siklus (*cycle*), dan *cut – set*. Beberapa terminologi tersebut dapat dijabarkan sebagai berikut (Muhammad, 2012).



Gambar 2.1 Contoh graf secara umum

1. Bertetangga (*Adjacent*)

Dua buah simpul dikatakan bertetangga jika keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Perhatikan kembali Gambar 2.1, pada graf  $G_2$ , simpul  $v_1$  bertetangga dengan simpul  $v_2$  dan simpul  $v_3$  tetapi simpul  $v_1$  tidak bertetangga dengan simpul  $v_4$  dan simpul  $v_5$ .

2. Bersisian (*Incidency*)

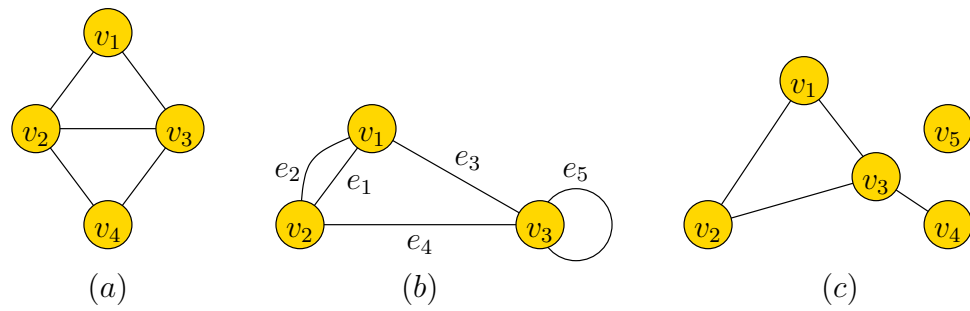
Sisi yang menghubungkan simpul A dan B disebut bersisian dengan simpul A atau B. Perhatikan kembali Gambar 2.1, sisi  $e_1$  pada graf  $G_2$  bersisian dengan simpul  $v_1$  dan simpul  $v_2$ .

3. Derajat (*Degree*)

Derajat suatu simpul pada graf, disimbolkan  $d(v)$  adalah jumlah sisi yang bersisian pada simpul tersebut. Pada Gambar 2.2, graf  $G_1$ ,  $d(1) = d(4) = 2$ ,  $d(2) = d(3) = 3$ . Pada graf  $G_2$ ,  $d(1) = 3$ , bersisian dengan ruas ganda sedangkan  $d(3) = 4$ , bersisian dengan *loop*. *Loop* dihitung berderajat dua;  $d(v) = 2$ . Hal ini dikarenakan *loop* direpresentasikan sebagai  $(v, v)$  dan simpul  $v$  bersisian dua kali pada sisi  $(v, v)$ . Pada Graf  $G_3$ ,  $d(5) = 0$ , disebut simpul terpencil/ simpul terisolasi,  $d(4) = 1$ , disebut simpul akhir atau simpul bergantung.

4. Simpul Terpencil (*Isolated Vertex*)

Simpul terpencil adalah simpul yang tidak mempunyai sisi yang bersisian

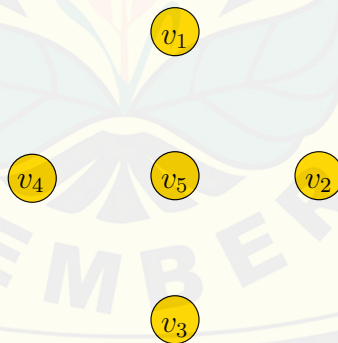


Gambar 2.2 (a). Graf  $G_1$ ; (b). Graf  $G_2$ ; (c). Graf  $G_3$

dengannya. Perhatikan graf  $G_3$  pada Gambar 2.2, simpul  $v_5$  adalah simpul terencil.

5. Graf Kosong (*Null Graph* atau *Empty Graph*)

Graf kosong adalah graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf kosong biasa ditulis dengan  $N_n$  dengan  $n$  adalah jumlah simpul. Perhatikan Gambar 2.3.



Gambar 2.3 (a). Graf Kosong  $N_5$

6. Gelang (*Loop*)

Loop adalah sisi yang menghubungkan sebuah simpul yang sama.  $e_5$  pada graf  $G_2$  Gambar 2.2 disebut *loop*.

### 7. Lintasan (*Path*)

Lintasan yang panjangnya  $n$  dari simpul awal  $v_0$  ke simpul tujuan  $v_n$  di dalam graf  $G$  adalah barisan berselang seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk  $v_0, e_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$  sedemikian sehingga  $e_1 = (v_0, v_1)$ ,  $e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$  adalah sisi-sisi dari graf. Simpul dan sisi yang dilalui di dalam lintasan boleh berulang. Sebuah lintasan dikatakan lintasan sederhana (*simple path*) jika semua simpulnya berbeda. Lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut lintasan tertutup (*closed path*), sedangkan lintasan yang tidak berawal dan berakhir pada simpul yang sama disebut lintasan terbuka (*open path*). Pada Gambar 2.2 (b);  $v_1, e_1, v_2, e_4, v_3, e_5, v_3$ , adalah lintasan dari simpul  $v_1$  ke simpul  $v_3$  yang melalui sisi  $e_1, e_4$ , dan  $e_5$ .

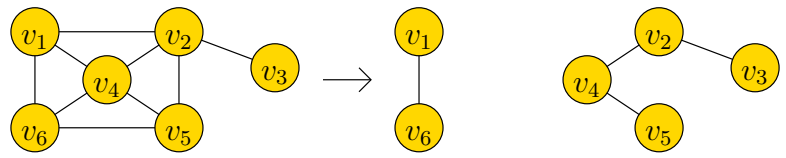
### 8. Sirkuit atau Siklus (*Cycle*)

Sirkuit atau siklus adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama. Sebuah sirkuit dikatakan sirkuit sederhana jika setiap sisi yang dilalui berbeda. Pada Gambar 2.2 (a),  $v_1, v_2, v_3, v_1$  adalah sebuah sirkuit sederhana dengan panjang 3, yang dihitung berdasarkan jumlah sisi di dalam sirkuit tersebut. Sedangkan  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_1$  bukan merupakan sirkuit sederhana karena sisi  $(v_1, v_2)$  dilalui sebanyak dua kali.

### 9. *Cut – Set*

*Cut – set* dari graf terhubung  $G$  adalah himpunan sisi yang bila dibuang dari  $G$  menyebabkan  $G$  tidak terhubung. Jadi *cut – set* menghasilkan dua buah komponen terhubung.

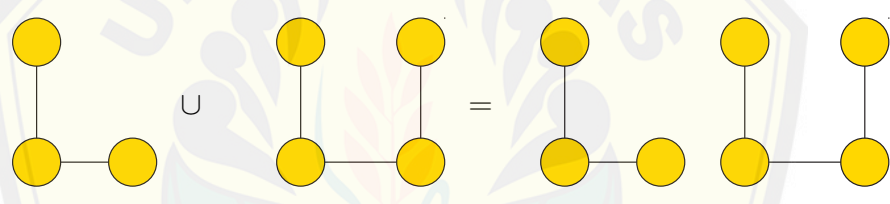
Pada Gambar 2.4, jika kita membuang  $(v_1, v_2)$ ,  $(v_1, v_4)$ ,  $(v_6, v_4)$ , dan  $(v_6, v_5)$  maka graf menjadi tidak terhubung. Jadi himpunan  $\{(v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_6, v_4), (v_6, v_5)\}$  adalah *cut – set*. Himpunan  $\{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_5)\}$  bukan merupakan *cut – set* karena terdapat  $\{(v_1, v_2), (v_2, v_4)\}$  yang juga merupakan *cut – set* dan merupakan himpunan bagian dari  $\{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_4, v_5)\}$ .



Gambar 2.4 Sebuah graf terhubung menjadi sebuah graf tak terhubung dikarenakan adanya *cut – set*

### 2.2 Gabungan Graf

Gabungan dari dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  dinotasikan dengan  $G_1 \cup G_2$ , didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titiknya adalah  $V(G_1) \cup V(G_2)$  dan himpunan sisi  $E(G_1) \cup E(G_2)$ . Gambar 2.5 menunjukkan bahwa graf  $G$  merupakan gabungan graf  $G_1$  dan  $G_2$ , yaitu  $G = G_1 \cup G_2$ .



Gambar 2.5 Contoh Gabungan Graf

Graf gabungan  $mG$  didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari  $m$  komponen graf  $G$ . Dengan kata lain  $mG = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_m$ , dengan  $G_1 = G_2 = G_3 = \dots = G_m = G$ . Menurut (Wijaya et al., 2000:85), misal graf  $G$  mempunyai  $p$  titik dan  $q$  sisi, maka graf  $mG$  mempunyai  $mp$  titik dan  $mq$  sisi.

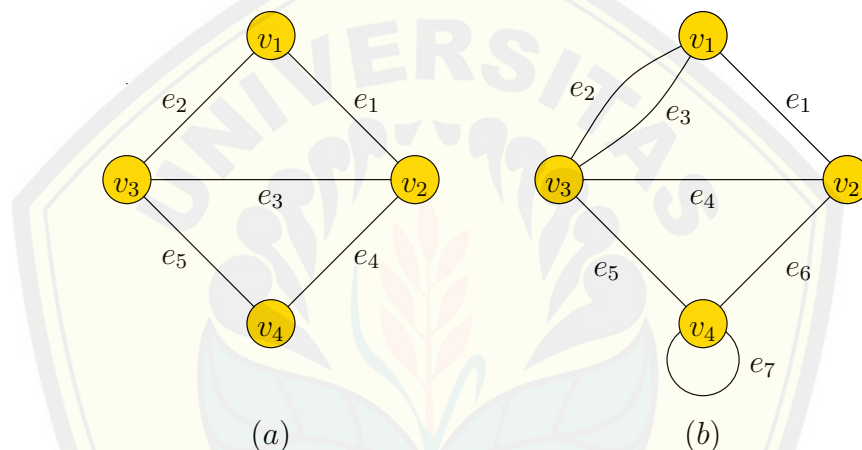
### 2.3 Jenis-jenis Graf

Graf memiliki banyak jenis. Jenis-jenis graf dapat dibagi berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, dan berdasarkan orientasi arah pada sisi.



Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi 2 jenis (Yulianti, 2008):

1. Graf Sederhana (*Simple Graph*) adalah graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda .
2. Graf Tak Sederhana (*Unsimple-Graph*) adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Graf tak sederhana dibagi menjadi dua macam, yaitu graf ganda dan graf semu. Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda sedangkan graf semu adalah graf yang mengandung gelang. Sisi pada graf semu dapat terhubung ke dirinya sendiri.



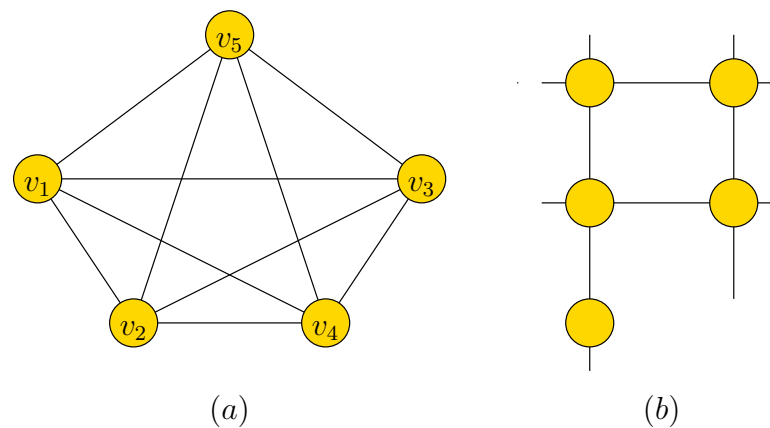
Gambar 2.6 (a). Graf sederhana; (b). Graf tak sederhana

Gambar 2.6 adalah contoh graf sederhana dan tak sederhana. Mengacu pada penjelasan di atas, pada Gambar 2.6 (b) dikatakan graf tak sederhana karena memiliki loop atau gelang yaitu sisi  $e_7$  dan memiliki sisi ganda yaitu  $e_2$  dan  $e_3$ .

Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi 2 jenis:

1. Graf Berhingga (*Limited Graph*) adalah graf yang jumlah simpulnya  $n$  berhingga. Gambar 2.7 (a) adalah contoh graf berhingga.





Gambar 2.7 (a). Graf berhingga; (b). Graf tak berhingga

2. Graf Tak Berhingga (*Unlimited Graph*) adalah graf yang jumlah simpulnya  $n$  tidak berhingga banyaknya. Contoh graf tak berhingga ditunjukkan pada Gambar 2.7 (b) berikut.

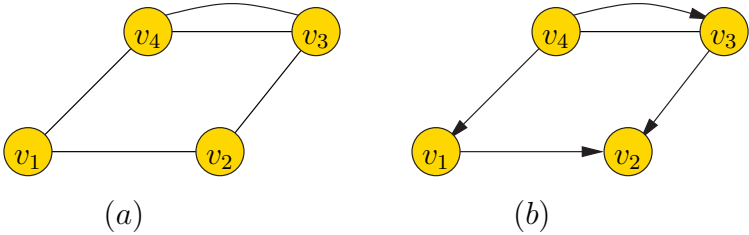
Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka graf digolongkan menjadi 2 jenis (Yulianti, 2008):

1. Graf Tak Berarah (*Undirected Graph*) adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Contoh graf tak berarah ditunjukkan pada Gambar 2.8 (a).
2. Graf Berarah (*Directed Graph* atau *Digraph*) adalah graf yang setiap sisinya diberi orientasi arah. Graf berarah ditunjukkan pada Gambar 2.8 (b).

#### 2.4 Graf Khusus

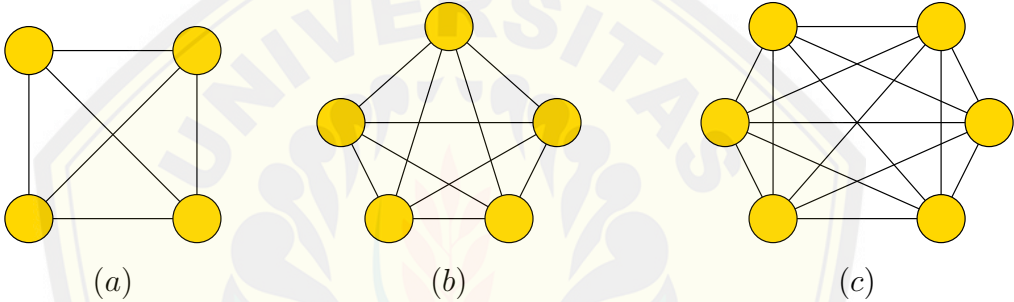
Graf khusus dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis, diantaranya graf lengkap, graf regular, graf bipartit, graf siklus (*cycle*), graf roda, graf lintasan (*path graph*), graf rantai, graf siklus dengan busur, dan masih banyak yang lainnya. Sebelum membahas tentang shackle dari graf siklus dengan busur, berikut akan dijelaskan beberapa graf tersebut.

Suatu graf  $G$  dikatakan lengkap jika setiap titik dalam  $G$  terhubung ke setiap titik lainnya dalam  $G$ . Jadi suatu graf lengkap  $G$  pasti terhubung. Graf lengkap



Gambar 2.8 (a). Graf tak berarah; (b). Graf berarah

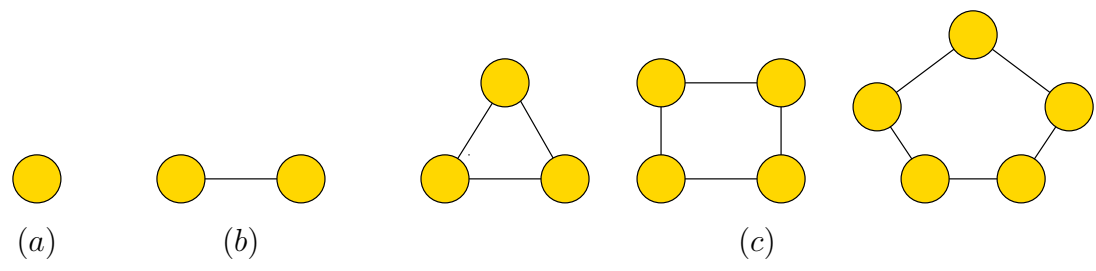
dengan  $n$  titik dinotasikan oleh  $K_n$ . Graf  $K_4$ ,  $K_5$ , dan  $K_6$  adalah contoh graf lengkap yang ditunjukkan pada Gambar 2.9 (Lipschutz dan Lipson, 2008:141).



Gambar 2.9 (a). Graf  $K_4$ ; (b). Graf  $K_5$ ; (c). Graf  $K_6$

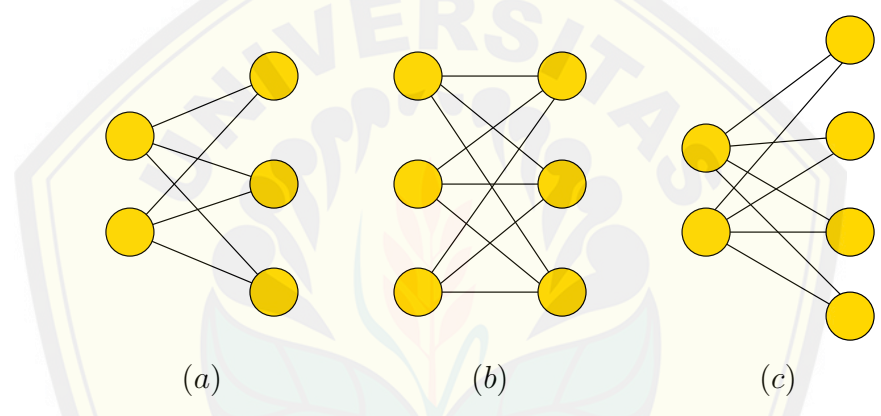
Suatu graf  $G$  adalah regular dengan derajat  $k$  atau regular- $k$  jika setiap titiknya memiliki derajat  $k$ . Dengan kata lain, suatu graf adalah regular jika setiap titiknya memiliki derajat yang sama. Graf terhubung regular-0 adalah graf trivial dengan satu titik dan tanpa sisi. Graf terhubung regular-1 adalah graf dengan dua titik dan satu sisi yang menghubungkan keduanya. Graf terhubung regular-2 dengan  $n$  titik adalah graf yang terdiri dari suatu siklus- $n$  tunggal. Gambar 2.10 adalah contoh graf regular (Lipschutz dan Lipson, 2008:142).

Suatu graf  $G$  disebut bipartit jika titiknya  $V$  dapat dibagi menjadi dua subhimpunan  $M$  dan  $N$  sedemikian sehingga setiap sisi  $G$  menghubungkan suatu titik dari  $M$  ke suatu titik dari  $N$ . Graf bipartit lengkap adalah setiap titik dari  $M$  terhubung ke setiap titik dari  $N$ ; graf ini dinotasikan oleh  $K_{m,n}$  di mana  $m$



Gambar 2.10 (a). Regular-0; (b). Regular-1; (c). Regular-2

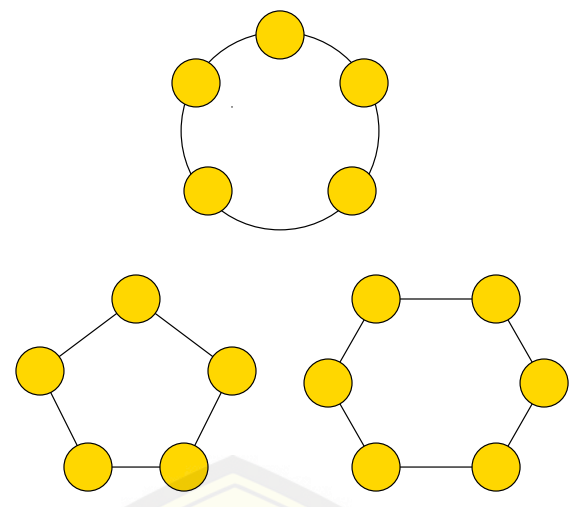
adalah jumlah titik dalam  $M$  dan  $n$  adalah jumlah titik dalam  $N$  dan untuk standarisasi kita akan mengansumsikan  $m \leq n$ . Contoh graf bipartit ditunjukkan pada Gambar 2.11 berikut (Lipschutz dan Lipson, 2008:142).



Gambar 2.11 (a).  $K_{2,3}$ ; (b).  $K_{3,3}$ ; (c).  $K_{2,4}$

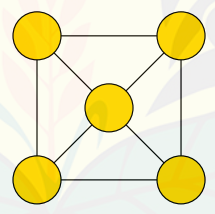
Graf siklus (*Cycle*) adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf siklus dengan  $n$  simpul dilambangkan dengan  $C_n$ . Gambar 2.12 adalah contoh graf siklus.

Graf Roda (*Wheels Graph*) adalah graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu simpul pada graf lingkaran  $C_n$ , dan menghubungkan simpul baru tersebut dengan simpul pada graf lingkaran tersebut. Slamain et al. (2002) menjelaskan graf roda yang dinotasikan dengan  $W_n$  adalah sebuah graf yang memuat  $n$  siklus dengan satu titik pusat yang bertetangga dengan semua titik di  $n$  siklus. Graf roda  $W_n$  terdiri dari  $n + 1$  titik yaitu:  $c, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  dan  $2n$  sisi, yaitu



Gambar 2.12 Graf siklus (Roosen, 2003)

$cx_i, 1 \leq i \leq n, x_i x_{i+1}, 1 \leq i \leq n - 1$  dan  $x_n x_1$ . Contoh graf roda dengan 5 titik atau  $W_4$  ditunjukkan pada Gambar 2.13 berikut.



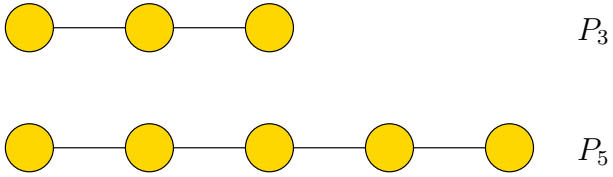
$W_4$

Gambar 2.13 Graf roda  $W_4$

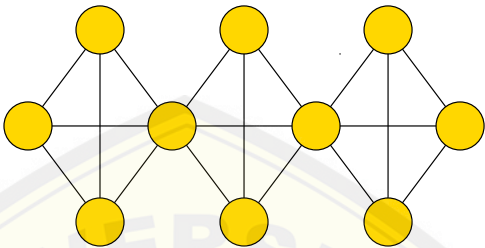
Graf lintasan atau *path graph* adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan  $n$  titik dinotasikan  $P_n$  dengan  $n \geq 2$ . Contoh graf lintasan  $P_3$  dan  $P_5$  ditunjukkan pada Gambar 2.14 berikut.

Gracelia, R. (2013) menjelaskan bahwa graf rantai didefinisikan sebagai  $kK_n$ -lintasan yaitu graf yang dapat dilihat sebagai graf lintasan, di mana setiap titik pada lintasan berupa graf lengkap  $K_n$ . Contoh graf rantai ditunjukkan pada Gambar 2.15.

Graf siklus dengan busur dinotasikan dengan  $C_s^t$  adalah suatu graf yang

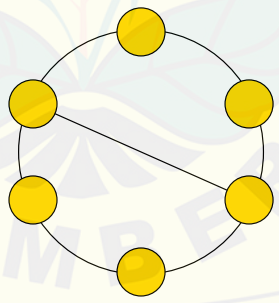


Gambar 2.14 Graf lintasan  $P_3$  dan  $P_5$



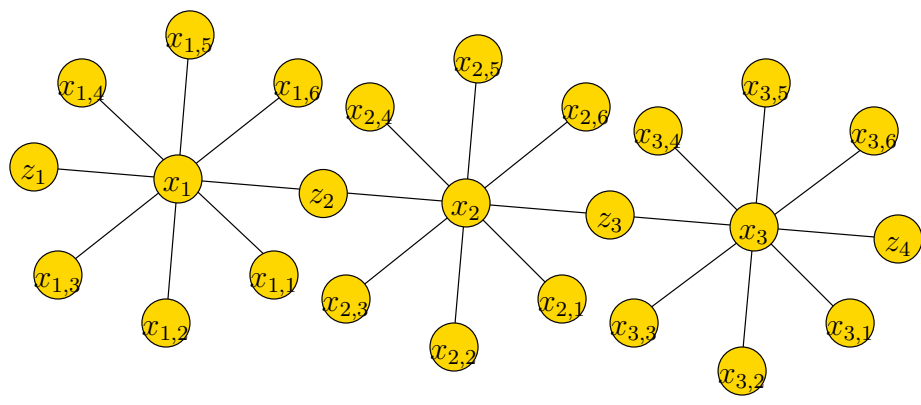
Gambar 2.15 Graf rantai  $3K_4$ -lintasan

merupakan famili dari graf siklus  $C_s$ . Graf siklus dengan busur merupakan sebuah graf yang terdiri dari  $s$  titik dan  $t$  busur. Graf siklus dengan busur  $C_6^1$  dapat dilihat pada Gambar 2.16.



Gambar 2.16 Graf siklus dengan busur  $C_6^1$  (Rezita, F (2014))

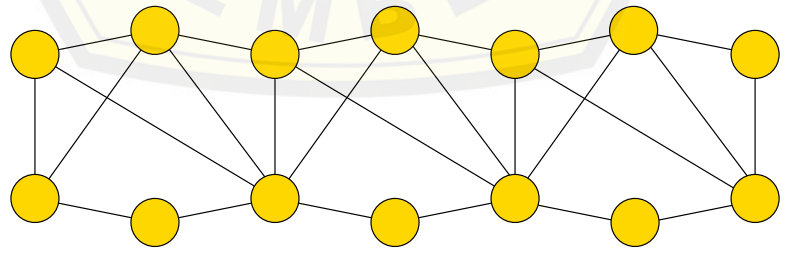
Istilah lain dari shackle adalah belunggu yang berarti sesuatu yang mengikat. Graph Shackle dari  $G_1, G_2, \dots, G_k$  dinotasikan dengan  $Shack(G_1, G_2, \dots, G_k)$  merupakan graf yang dibangun dari graf terhubung nontrivial dan order graf  $G_1, G_2, \dots, G_k$  sedemikian hingga untuk setiap  $1 \leq i, j \leq k$  dengan  $|i - j| \leq$



Gambar 2.17 Graf shack ( $S_m, n$ )

$k - 1, G_i, G_{i+1}$  tepat satu titik yang sama, disebut *vertex linkage* dimana  $k - 1$  linkage titik semua berbeda. Graf shackle ada 2 yaitu shackle titik dan shackle sisi. Gambar 2.17 adalah contoh graf *Shack* ( $S_m, n$ ) yang merupakan salah satu contoh shackle titik (Muharromah, 2014:11).

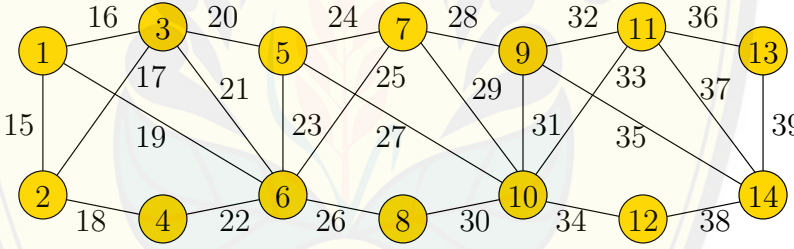
Pada penelitian ini shackle dari graf  $C_6^3$  merupakan graf yang terbentuk dari beberapa graf siklus dengan busur. Shackle dari graf  $C_6^3$  adalah graf yang dinotasikan dengan *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) dimana graf ini memiliki 3 buah busur,  $e = 1$  yaitu 1 sisi yang digunakan bersama-sama oleh graf  $C_6^3$  yang pertama dan graf  $C_6^3$  yang kedua, 1 sisi dari graf  $C_6^3$  yang kedua juga digunakan bersama-sama oleh graf  $C_6^3$  yang ketiga, dan seterusnya. Jadi, shackle ini termasuk kategori shackle sisi karena ada 1 sisi yang digunakan oleh dua buah graf  $C_6^3$ . Contoh graf shackle dari graf  $C_6^3$  dapat dilihat pada Gambar 2.18.



Gambar 2.18 Shackle dari graf  $C_6^3$

### 2.5 Aplikasi Graf

Teori graf mempunyai banyak aplikasi praktis dalam berbagai disiplin, misalnya dalam biologi, ilmu komputer, ekonomi, teknik, informatika, linguistik, matematika, kesehatan, dan ilmu-ilmu sosial. Dalam berbagai hal, graf menjadi alat pemodelan yang sangat baik untuk menjelaskan dan menyelesaikan suatu permasalahan. Salah satu cabang teori graf yang biasa digunakan sebagai alat pemodelan untuk menjelaskan dan menyelesaikan suatu permasalahan adalah pewarnaan graf (*graph colouring*). Pewarnaan graf, yaitu memberikan warna pada elemen graf yang akan dijadikan subjek dalam memahami *constraint* permasalahan (Yahya et al. (Tanpa Tahun: 2)). Persoalan pewarnaan graf (*graph colouring*) dibedakan menjadi 3, yaitu pewarnaan titik (*vertex*), pewarnaan sisi (*edge*), dan pewarnaan wilayah (*region*). Selain aplikasi pewarnaan graf, ada juga aplikasi total selimut yang bisa digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Dafik (2015) mengilustrasikan sebuah permasalahan tentang total selimut sebagai berikut.

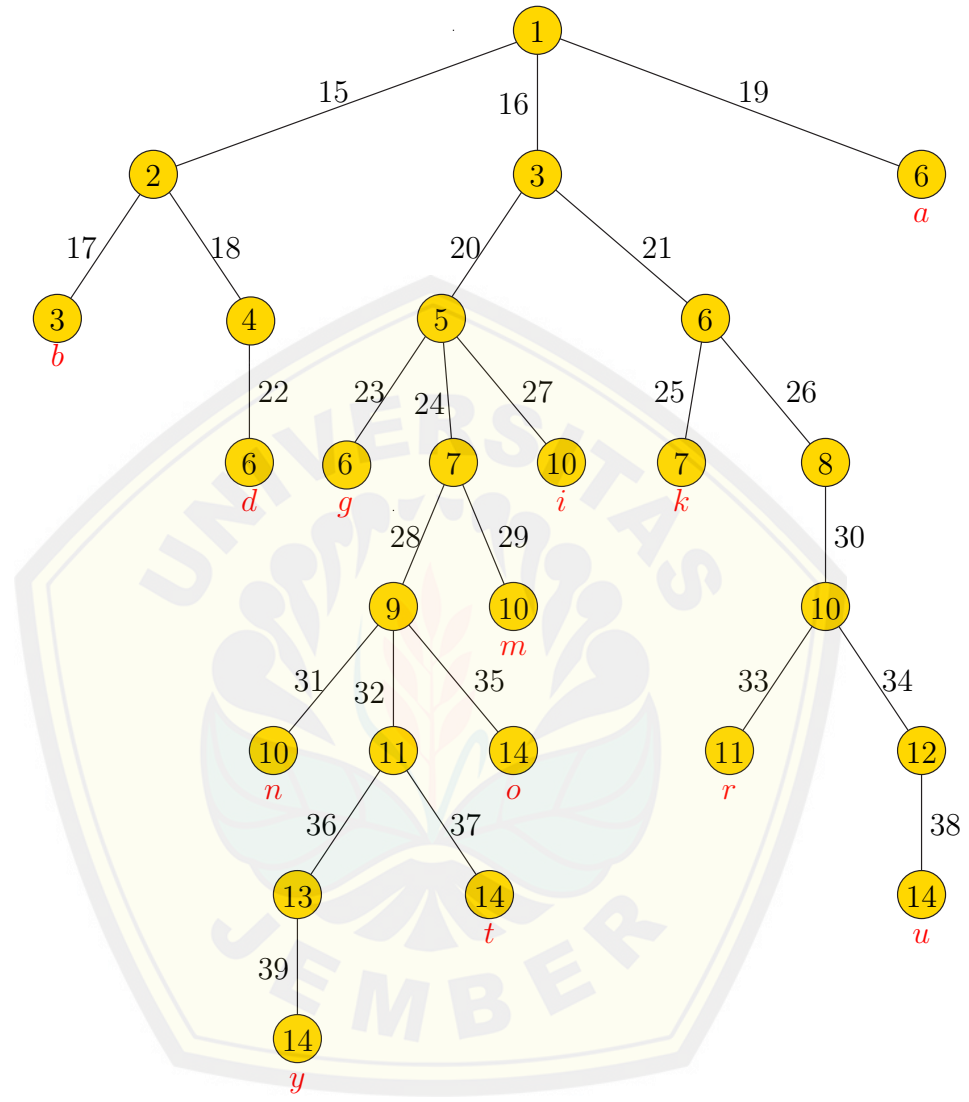


Gambar 2.19 Pelabelan titik dan sisi *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) untuk  $d = 96$

Ada sepasang kakak adik di sebuah perumahan elit menyimpan uang sebesar Rp 10.000.000,00. Si kakak menyimpan uang tersebut di tempat yang aman karena saat ini ada buronan perampok yang sedang berkeliaran. Si kakak membuat pesan kepada adiknya terkait keberadaan uang tersebut karena si kakak sedang pergi penelitian untuk beberapa hari. Jika menggunakan pesan biasa pasti akan terbaca oleh orang lain sehingga si kakak membuat pesan rahasia kepada si adik. Si kakak menulis pesan yang ditempel di almari yang memuat pesan rahasia yang sebenarnya berisi "uangnya di kotak biru muda".



Cara mengatasi permasalahan di atas adalah dengan cara menentukan pelabelan selimut dari sebuah graf, graf yang dipilih adalah  $Shack (C_6^3, e, n)$  dengan  $d = 96$  seperti pada Gambar 2.19.



Gambar 2.20 Diagram Pohon

Dari graf yang dipilih pada Gambar 2.19, dikembangkan dalam diagram pohon yang berakar di label 1, kemudian melengkapi label sisinya. Setelah itu mendata dan menyusun pesan rahasia di atas menjadi a,b,d,g,i,k,m,n,o,r,t,u,y



seperti pada Gambar 2.20.

Adapun cara mendata dan menyusun pesan rahasia tersebut adalah sesuai dengan urutan abjad. Pesan rahasia tersebut dipecahkan dengan menerapkan teknik kriptosistem modulo 26 terhadap masing-masing hurufnya sehingga menjadi  $a=\text{mod}(19,26)=19$ ,  $b=\text{mod}(1517,26)=9$ ,  $d=\text{mod}(151822,26)=8$ ,  $g=\text{mod}(162023,26)=17$ ,  $i=\text{mod}(162027,26)=21$ ,  $k=\text{mod}(162125,26)=15$ ,  $m=\text{mod}(16202429,26)=9$ ,  $n=\text{mod}(1620242831,26)=25$ ,  $o=\text{mod}(1620242835,26)=3$ ,  $r=\text{mod}(1621263033,26)=13$ ,  $t=\text{mod}(162024283237,26)=11$ ,  $u=\text{mod}(162126303438,26)=8$ ,  $y=\text{mod}(16202428323639,26)=25$ . Cara selanjutnya untuk menghindari terjadinya kesamaan bilangan di antara dua *ciphertext* adalah dengan mengkombinasikan hasil modulo dengan label titik terakhir, sehingga menjadi  $a=619$ ,  $b=39$ ,  $d=68$ ,  $g=617$ ,  $i=1021$ ,  $k=715$ ,  $m=109$ ,  $n=1025$ ,  $o=143$ ,  $r=1113$ ,  $t=1411$ ,  $u=148$ ,  $y=1425$ . Kemudian kombinasi titik dan sisi ini diubah dalam bentuk modulo 26 lagi sehingga diperoleh *ciphertext* yaitu  $a=v$ ,  $b=n$ ,  $d=q$ ,  $g=t$ ,  $i=h$ ,  $k=n$ ,  $m=f$ ,  $n=l$ ,  $o=n$ ,  $r=v$ ,  $t=h$ ,  $u=s$ ,  $y=v$ . Dengan proses substitusi pesan kedalam *ciphertext* tanpa spasi dan tanda baca, maka *ciphertext* pesan menjadi: svltlvvqhnmhvnnhvsfsqv.

## 2.6 Fungsi dan Barisan Aritmatika

### 2.6.1 Fungsi

Fungsi seringkali disebut pemetaan. Fungsi  $f$  dari himpunan  $X$  ke himpunan  $Y$  dinotasikan dengan  $f : X \rightarrow Y$  adalah aturan korespondensi satu-satu yang menghubungkan setiap  $x \in X$  dengan tepat satu ke anggota  $Y$ . Himpunan  $X$  disebut domain dari fungsi  $f$  sedangkan himpunan  $Y$  disebut kodomain dari fungsi  $f$ .

Menurut Susilo (2012:115), ada tiga fungsi khusus yaitu:

#### 1. Fungsi Injektif

Suatu fungsi  $f : X \rightarrow Y$  disebut fungsi (pemetaan) injektif jika dan hanya jika untuk setiap  $x_1, x_2 \in X$  berlaku apabila  $f(x_1) = f(x_2)$  maka  $x_1 = x_2$ , yaitu bila dua elemen dalam domain mempunyai bayangan (peta) yang sama, maka kedua elemen itu adalah elemen yang sama. Secara simbolis dapat dinyatakan:

$f$  adalah fungsi injektif  $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in X) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

Secara ekivalen, juga dapat dinyatakan bahwa:

$f$  adalah fungsi injektif  $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in X) x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

yaitu bila dua elemen dalam domain adalah dua elemen yang tidak sama, maka bayangan (peta) kedua elemen itu juga tidak sama.

## 2. Fungsi Surjektif

Suatu fungsi  $f : X \rightarrow Y$  disebut fungsi (pemetaan) surjektif jika dan hanya jika kisaran dari fungsi  $f$  tersebut sama dengan kodomain dari fungsi  $f$ , yaitu  $f(X) = Y$ . Dengan perkataan lain, fungsi  $f : X \rightarrow Y$  adalah fungsi surjektif jika dan hanya jika untuk setiap  $y \in Y$  terdapat  $x \in X$  sedemikian sehingga  $y = f(x)$ , yaitu setiap elemen dalam kodomain mempunyai prabayangan (prapeta). Secara simbolis dapat dinyatakan:

$f$  adalah fungsi surjektif  $\Leftrightarrow (\forall y \in Y)(\exists x \in X)y = f(x)$ .

## 3. Fungsi Bijektif

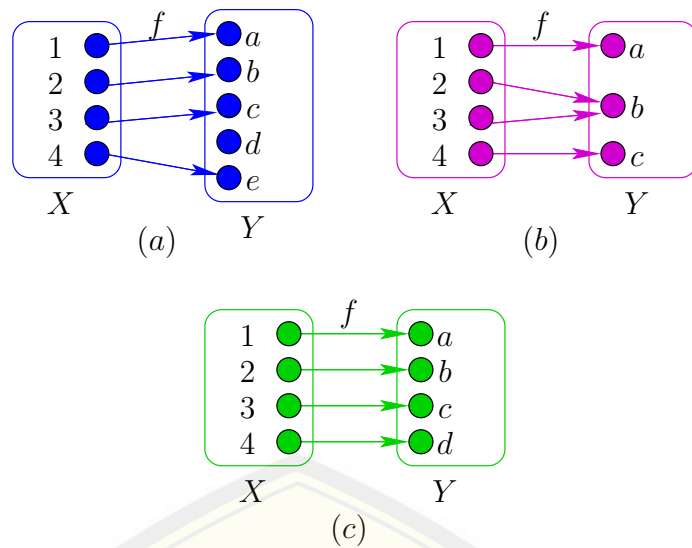
Suatu fungsi  $f : X \rightarrow Y$  disebut fungsi (pemetaan) bijektif jika dan hanya jika fungsi  $f$  tersebut adalah fungsi yang injektif dan sekaligus surjektif. Pada fungsi bijektif, setiap elemen dalam domain mempunyai tepat satu bayangan dan setiap elemen dalam kodomain juga mempunyai tepat satu prabayangan. Oleh karena itu, fungsi bijektif seringkali juga disebut korespondensi satu-satu.

Contoh dari ketiga fungsi khusus tersebut adalah dapat dilihat pada Gambar 2.21.

### 2.6.2 Barisan Aritmatika

Barisan aritmatika adalah suatu barisan yang memiliki beda (selisih) antara dua suku berurutan tetap. Berikut adalah beberapa contoh barisan bilangan:

1. 1, 3, 5, 7, ...
2. 2, 6, 10, 14, ...
3. 100, 90, 80, 70, ...



Gambar 2.21 Fungsi-fungsi khusus: (a) injektif; (b) surjektif; (c) bijektif

Dari contoh barisan bilangan di atas, jika kita perhatikan contoh 1, suku pertamanya  $U_1 = 1$ , suku keduanya  $U_2 = 3$  yang diperoleh dengan menambahkan 2 kepada  $U_1$ , suku ketiganya  $U_3 = 5$  yang diperoleh dengan menambahkan 2 kepada  $U_2$  dan seterusnya. Selisih dari tiap suku yang berurutan dari barisan ini adalah tetap, yaitu sebesar 2. Barisan seperti ini disebut barisan aritmatika dan selisih yang tetap dari barisan ini disebut beda barisan yang dilambangkan dengan  $b$ . Contoh 2 dan 3 juga disebut barisan aritmatika meskipun memiliki nilai beda yang berbeda dengan contoh 1. Contoh 2, nilai bedanya 4 sedangkan contoh 3, nilai bedanya  $-10$ .

Rumus umum suku ke- $n$  dari barisan aritmatika, yaitu sebagai berikut: Jika suku pertama barisan aritmatika  $U_1$  dinamakan  $a$ , maka didapat:

$$U_1 = a$$

$$U_2 - U_1 = b \Leftrightarrow U_2 = U_1 + b = a + b$$

$$U_3 - U_2 = b \Leftrightarrow U_3 = U_2 + b = (a + b) + b = a + 2b$$

$$U_4 - U_3 = b \Leftrightarrow U_4 = U_3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b$$

dan seterusnya, sehingga didapat barisan aritmatika dalam bentuk:

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, \dots, a + (n - 1)b$$

Dari sini kita dapatkan bentuk umum rumus suku ke- $n$  barisan aritmatika yaitu:

$$U_n = a + (n - 1)b.$$

## 2.7 Pelabelan Graf

### 2.7.1 Definisi Pelabelan Graf

Dalam teori graf, pelabelan menjadi topik yang banyak mendapat perhatian karena model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah peta jaringan jalan raya, jaringan internet, sistem alamat jaringan komunikasi, dan desain sirkuit (Munir, 2003). Rahman *et al.* (2012:7) menyatakan pelabelan merupakan pemetaan injektif yang memetakan unsur himpunan titik dan unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Mengacu pada pengertian pelabelan tersebut maka suatu pelabelan dari graf  $G(V, E)$  dengan  $p$  titik dan  $q$  sisi adalah pemetaan injektif dari himpunan  $V(G) \cup E(G)$  ke himpunan bilangan bulat positif  $\{1, 2, \dots, p + q\}$ . Jika domain dari fungsi (pemetaan) adalah titik maka pelabelannya disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), jika domainnya adalah sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi maka disebut pelabelan total (*total labeling*).

Jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada sisi disebut bobot sisi. Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang sama maka graf ini dinamakan sebagai graf dengan pelabelan ajaib. Jika graf memiliki bobot titik atau bobot sisi yang berbeda maka graf ini dinamakan sebagai graf dengan pelabelan anti ajaib.

### 2.7.2 Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -Anti Ajaib Super

Menurut Inayah (2013), suatu selimut dari  $G$  adalah  $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \dots, \mathcal{H}_k\}$  keluarga subgraf dari  $G$  dengan sifat setiap sisi di  $G$  termuat pada sekurang-kurangnya satu graf  $\mathcal{H}_i$ , untuk suatu  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Jika untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $\mathcal{H}_i$  isomorfik dengan suatu subgraf  $\mathcal{H}$ , maka  $\mathcal{H}$  dikatakan suatu selimut- $\mathcal{H}$  dari  $G$ . Selanjutnya dikatakan bahwa  $G$  memuat selimut- $\mathcal{H}$ .

Pelabelan anti ajaib adalah pengembangan dari pelabelan ajaib yang dilakukan oleh Hartsfield dan Ringel (1990). Keduanya mendefinisikan bahwa suatu graf  $G$  yang memiliki titik sebanyak  $v_G = |V| = |V(G)|$  dan sisi sebanyak

$e_G = |E| = |E(G)|$  disebut anti ajaib jika masing-masing sisi dilabeli dengan  $\{1, 2, \dots, e_G\}$  sehingga bobot titiknya saling berbeda *pairwise distinct*, dengan sebuah bobot titik dari titik  $v$ . Pelabelan suatu graf dikatakan anti ajaib jika sisinya dapat dilabeli dengan bilangan bulat positif dan jumlah label sisi yang terkait pada setiap titik berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan  $a$  sebagai suku pertama dan  $d$  sebagai nilai bedanya. Pelabelan suatu graf dikatakan super jika pelabelan total dimana label titiknya adalah label terkecil  $f(v) = \{1, 2, \dots, p\}$ .

Inayah et al. (2013) mengembangkan suatu pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada graf  $G$  dengan penjelasan bahwa pelabelan total  $\lambda$  dari  $V(G) \cup E(G)$  ke bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G) \cup E(G)|\}$ , untuk setiap subgraf  $H$  dari  $G$  yang isomorfik dengan  $\mathcal{H}$  dimana  $\Sigma H = \Sigma_{v \in V(H)} \lambda(v) + \Sigma_{e \in E(H)} \lambda(e)$  merupakan barisan aritmatika. Graf  $G$  dikatakan memiliki pelabelan  $\mathcal{H}$  anti ajaib super jika  $\{\lambda(v)\}_{v \in V} = \{1, \dots, |V|\}$ .  $\lambda$  dikatakan pelabelan total  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super, jika  $\lambda(V(G)) = \{1, 2, \dots, v_G\}$ . Suatu graf yang mempunyai pelabelan total  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super disebut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super. Selanjutnya, jika  $G$  memuat suatu selimut- $\mathcal{H}$ , maka pelabelan total  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib (super) dikatakan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib (super). Sebelum menentukan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super, Inayah (2013) menggunakan batas atas  $d$  untuk pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super yaitu terdapat pada lemma 2.7.1.

**Lema 2.7.1.** *Misalkan  $G$  suatu graf,  $H$  subgraf  $G$ , dan  $t \geq 2$  adalah banyak subgraf  $G$  yang isomorfik dengan  $H$ . Jika  $G$  adalah  $(a, d) - H$ -anti ajaib super, maka  $d \leq \frac{v_H(2v_G + e_G - v_H + 1) - \left(\frac{v_H + 1}{2}v_H + (v_G \cdot e_H) + \frac{(e_H + 1)e_H}{2}\right)}{t - 1}$ .*

## 2.8 Aksioma, Lemma, Teorema, Corollary, Konjektur dan Open Problem

Aksioma adalah suatu pernyataan yang diterima sebagai kebenaran dan bersifat umum, tanpa memerlukan pembuktian. Teorema adalah suatu pernyataan matematika yang masih memerlukan pembuktian dan pernyataan itu dapat ditunjukkan bernilai benar. Teorema adalah lemma dan *corollary*. Lemma adalah teorema sederhana yang dipergunakan untuk pembuktian teorema lain. *Corollary* adalah suatu proposisi yang secara langsung diperoleh dari teorema

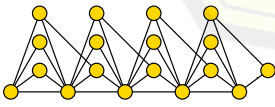
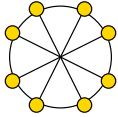
yang sudah dibuktikan (Yunimelawati, 2012). Susilo (2012:12) mengemukakan proposisi adalah kalimat yang bernilai benar atau salah tetapi tidak keduanya. Proposisi seringkali disebut juga pernyataan atau kalimat deklaratif.

Konjektur adalah suatu pernyataan yang nilai kebenarannya tidak diketahui. Setelah pembuktian berhasil dilakukan, maka konjektur berubah menjadi teorema. *Open problem* (masalah terbuka atau pertanyaan terbuka) adalah beberapa masalah yang dapat secara akurat dinyatakan, dan belum diselesaikan (tidak ada solusi untuk diketahui). Contoh *open problem* dalam matematika yang telah diselesaikan dan ditutup oleh peneliti di akhir abad ke-20 adalah Teorema Terakhir Fermat dan empat warna teorema peta, sedangkan *open problem* yang belum terselesaikan contohnya adalah permasalahan jembatan Königsberg.

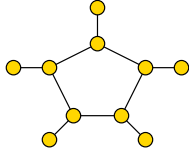
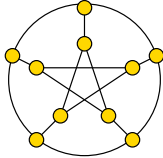
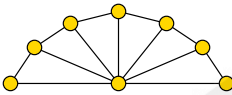
### 2.9 Hasil Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -Anti Ajaib Super pada Beberapa Graf

Pada bagian ini disajikan beberapa pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada beberapa jenis graf yang akan digunakan sebagai rujukan pada penelitian ini. Adapun ringkasan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib pada graf tunggalyang dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1: Ringkasan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib pada graf tunggal.

Notasi Graf	$a$	$d$	Hasil
$SBt_n$ 	$36n + 84$	$d = 96$	$(a, d) - Bt_3 + 2e -$
$W_n$ 	$3hn + 5$	$d = 1$	$(a, d) - C_3 -$
$S_n$	$13n + 4$	$d = 1$	$(a, d) - K_{1,3} -$



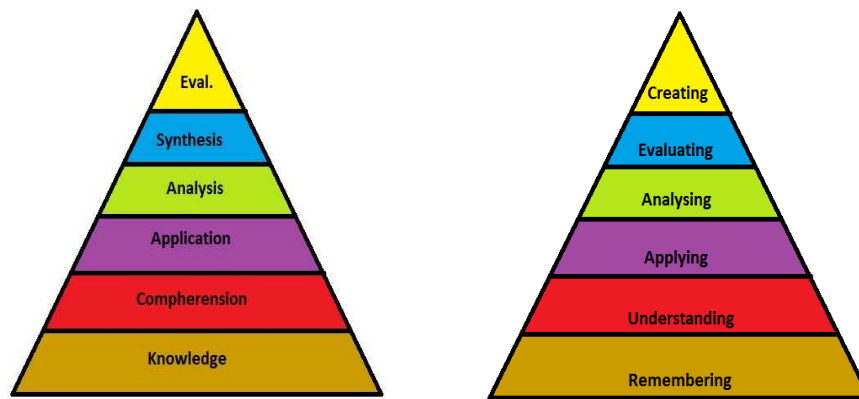
Notasi Graf	$a$	$d$	Hasil
		(Ismiyati,2013)	-
$GP_{n,k}$ 	$13n + 4 - \frac{n}{2}$	$d = 2$  (Ismiyati,2013)	$(a, d) - K_{1,3} -$  -
$F_n$ 	$12 + 4n + \frac{n}{2}$	$d = 4$  (Ismiyati,2013)	$(a, d) - C_3 -$  -

**2.10 Berpikir Tingkat Tinggi**

Pangesti (2012), berpikir merupakan poros dari segala ilmu pengetahuan. Soemanto (1990:29), berpikir adalah meletakkan hubungan antar bagian pengetahuan yang diperoleh manusia. Yang dimaksud pengetahuan di sini mencakup segala konsep, gagasan, dan pengertian yang telah dimiliki dan diperoleh manusia. Salah satu keterampilan berpikir adalah keterampilan berpikir tingkat tinggi. Berpikir tingkat tinggi adalah berpikir pada tingkat lebih tinggi daripada sekedar menghafalkan fakta atau mengatakan sesuatu kepada seseorang persis seperti sesuatu itu disampaikan kepada kita.

Keterampilan berpikir tingkat tinggi merupakan suatu keterampilan yang tidak hanya membutuhkan kemampuan mengingat, memahami, dan mengaplikasikan saja, namun membutuhkan kemampuan lain yang lebih tinggi, seperti kemampuan berpikir kritis dan kreatif. Menurut Wardana (dalam Rofiah, 2013:17), keterampilan berpikir tingkat tinggi adalah proses berpikir yang melibatkan aktivitas mental dalam usaha mengeksplorasi pengalaman yang kompleks, reflektif dan kreatif yang dilakukan secara sadar untuk mencapai tujuan, yaitu memperoleh pengetahuan yang meliputi tingkat berpikir analitis, sintesis, dan evaluasi.





Taksonomi Bloom Sebelum Revisi    Taksonomi Bloom Setelah Revisi

Gambar 2.22 Tahapan taksonomi Bloom

Berdasarkan tahapan taksonomi Bloom pada Gambar 2.22 bahwa taksonomi Bloom sebelum revisi meliputi: pengetahuan, pemahaman, aplikasi, analisis, sintesis, dan evaluasi, kemudian direvisi menjadi taksonomi Bloom yang baru meliputi: mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, dan mencipta. Sama dengan sebelum revisi, tiga level pertama (terbawah) merupakan keterampilan berpikir tingkat rendah atau *Lower Order Thinking Skills* sedangkan tiga level berikutnya merupakan keterampilan berpikir tingkat tinggi atau *High Order Thinking Skills*. Namun ketampilan berpikir tingkat rendah tetap harus dilalui untuk mencapai keterampilan berpikir tingkat tinggi. Jadi, dalam menginterpretasikan tahapan taksonomi Bloom yang telah direvisi pada Gambar 2.22, secara logika adalah sebagai berikut: sebelum kita memahami sebuah konsep maka kita harus mengingatnya terlebih dahulu, sebelum kita menerapkan maka kita harus memahaminya terlebih dahulu, sebelum kita menganalisis maka kita harus menerapkannya terlebih dahulu, sebelum kita mengevaluasi maka kita harus menganalisis terlebih dahulu, sebelum kita mencipta sesuatu maka kita harus mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, dan mengevaluasi.

Berikut ini adalah penjelasan dan pilihan kata kerja operasional dari ranah kognitif yang telah direvisi oleh Utari, R. (2008: 10) yaitu:

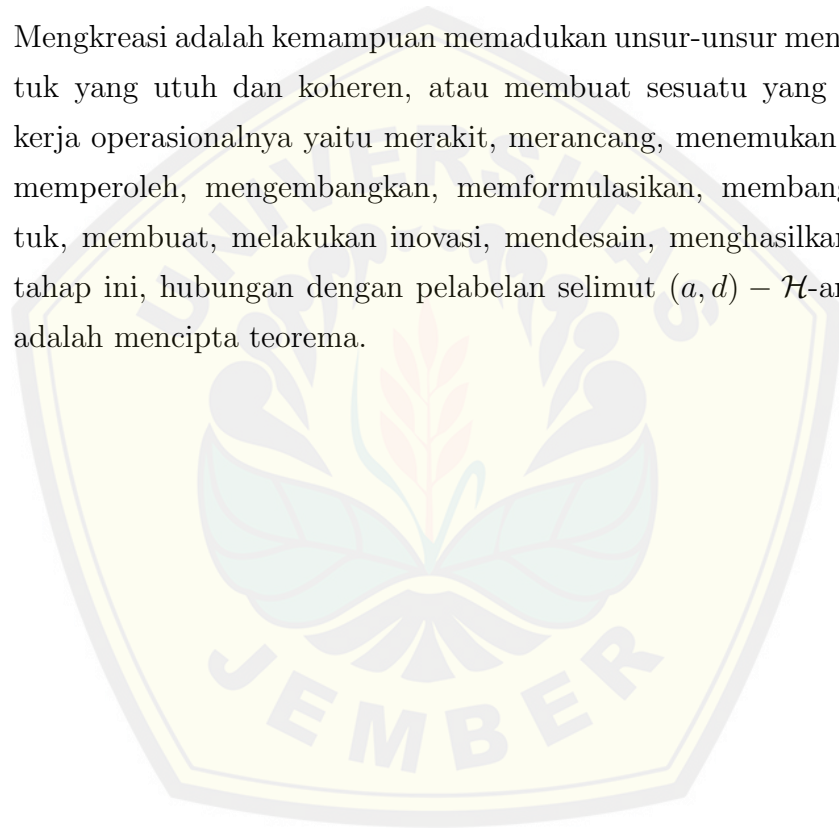
1. Mengingat adalah kemampuan menyampaikan kembali informasi/pengeta-

huan yang tersimpan dalam ingatan. Kata kerja operasionalnya yaitu mendefinisikan, menyusun daftar, menjelaskan, mengingat, mengenali, menemukan kembali, menyatakan, mengulang, mengurutkan, menamai, menempatkan, menyebutkan. Pada tahap ini, hubungan dengan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super adalah mengingat dalam mengidentifikasi famili graf.

2. Memahami adalah kemampuan memahami instruksi dan menegaskan pengertian ide atau konsep yang telah diajarkan baik dalam bentuk lisan, tertulis maupun graf/diagram. Kata kerja operasionalnya yaitu menerangkan, menjelaskan, menerjemahkan, menguraikan, mengartikan, menafsirkan, menginterpretasikan, mendiskusikan, menyeleksi, mendeteksi, melaporkan, menduga, mengelompokkan, memberi contoh, merangkum, menganalogikan, mengubah, memperkirakan. Pada tahap ini, hubungan dengan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super adalah memahami dalam menghitung jumlah titik  $p$  dan sisi  $q$  pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  dan menentukan batas atas nilai beda  $(d)$ .
3. Menerapkan adalah kemampuan melakukan sesuatu dan mengaplikasikan konsep dalam situasi tertentu. Kata kerja operasionalnya yaitu memilih, menerapkan, melaksanakan, menggunakan, mendemonstrasikan, memodifikasi, menunjukkan, membuktikan, menggambarkan, memprogramkan, mempraktikkan. Pada tahap ini, hubungan dengan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super adalah menerapkan dalam menentukan label titik dan mengembangkan fungsi bijektif bobot titik.
4. Menganalisis adalah kemampuan memisahkan konsep ke dalam beberapa komponen dan menghubungkan satu sama lain untuk memperoleh pemahaman atas konsep tersebut secara utuh. Kata kerja operasionalnya yaitu mengkaji ulang, membedakan, membandingkan, memisahkan, menghubungkan, menunjukkan hubungan antara variabel, memecah menjadi beberapa bagian, menyisihkan menjadi beberapa bagian, mengorganisir, mengkerangkakan. Pada tahap ini, hubungan dengan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti

ajaib super adalah menganalisa dalam menentukan label sisi dan fungsi bi-jektif sisi serta mengembangkan fungsi sisi dan bobot total.

5. Mengevaluasi adalah kemampuan menetapkan derajat sesuatu berdasarkan norma, kriteria atau patokan tertentu. Kata kerja operasionalnya yaitu menilai, mengevaluasi, menjustikasi, mengecek, mengkritik, memprediksi, membenarkan, menyalahkan, menyeleksi. Pada tahap ini, hubungan dengan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super adalah mengevaluasi dalam membuktikan kebenaran fungsi.
6. Mengkreasi adalah kemampuan memadukan unsur-unsur menjadi suatu bentuk yang utuh dan koheren, atau membuat sesuatu yang orisinil. Kata kerja operasionalnya yaitu merakit, merancang, menemukan, menciptakan, memperoleh, mengembangkan, memformulasikan, membangun, membentuk, membuat, melakukan inovasi, mendesain, menghasilkan karya. Pada tahap ini, hubungan dengan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super adalah mencipta teorema.



## BAB 3. METODE PENELITIAN

### 3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif aksiomatik yaitu menetapkan pengertian dasar selimut  $\mathcal{H}$ -anti ajaib, lalu dikenalkan beberapa teorema mengenai pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  baik secara tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Penelitian ini juga menggunakan tahapan-tahapan yang terdapat dalam taksonomi Bloom yang telah direvisi yaitu mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, dan mencipta. Langkah yang dilakukan terlebih dahulu pada penelitian ini adalah menentukan nilai beda ( $d$ ) pada shackle dari graf  $C_6^3$ , selanjutnya nilai beda ( $d$ ) tersebut diterapkan dalam pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib pada shackle dari graf  $C_6^3$ . Jika terdapat pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ , maka dapat dirumuskan pola pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  dengan menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pola umumnya. Setiap langkah pada pelabelan ini akan dikaitkan dengan 6 tahapan taksonomi Bloom yang telah direvisi untuk mencapai keterampilan berpikir tingkat tinggi.

Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai beda ( $d$ ) gabungan saling lepas pada shackle dari graf  $C_6^3$ , selanjutnya nilai beda ( $d$ ) tersebut diterapkan dalam pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$  anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ . Jika terdapat pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ , maka dapat dirumuskan pola pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super gabungan saling lepas pada shackle dari graf  $C_6^3$  tersebut dengan menggunakan metode yang sama untuk menentukan pola umumnya. Tahapan yang sama dengan menggunakan taksonomi Bloom yang telah direvisi juga diterapkan pada pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  ini hingga mencapai keterampilan berpikir tingkat tinggi.

## 3.2 Definisi Operasional

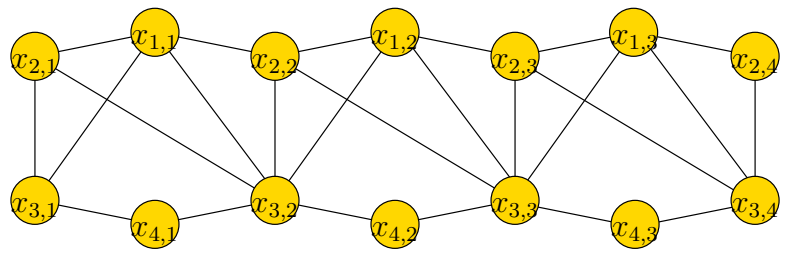
Definisi operasional variabel digunakan untuk memberi gambaran secara matematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi operasional variabel yang dimaksud adalah sebagai berikut:

### 3.2.1 Pelabelan Selimut $(a, d) - \mathcal{H}$ -Anti Ajaib Super

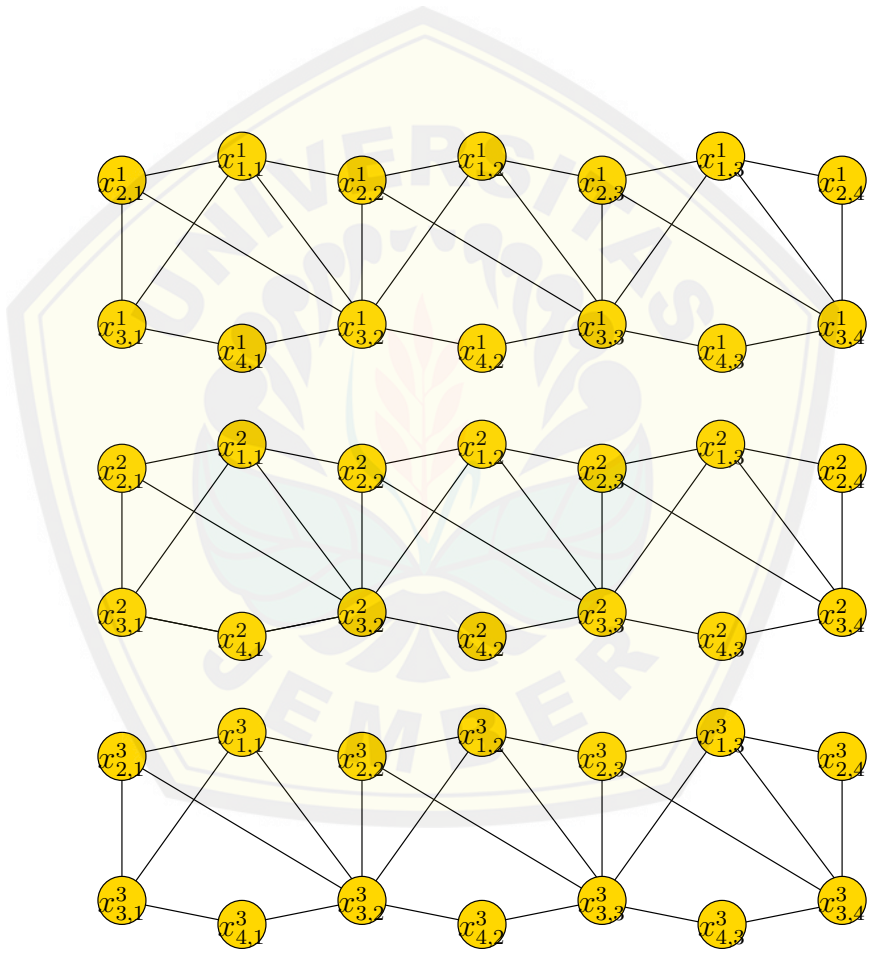
Pelabelan selimut  $\mathcal{H}$  anti ajaib super pada graf  $G$  dengan  $v$  titik dan  $e$  sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik-titik dan sisi-sisi pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi, secara matematis ditulis dalam bentuk  $f : V(G) \cup E(G) \Rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  dengan sifat bahwa setiap subgraf dari  $G$  yang isomorfik dengan  $H$  dimana  $H$  juga subgraf dari  $G$  mempunyai total label  $\lambda(H)$  yang berbeda,  $\lambda(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$ . Graf  $G$  dikatakan memiliki pelabelan  $\mathcal{H}$ -anti ajaib super jika himpunan titik  $V(G)$  merupakan pemetaan bijektif  $f$  ke himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$ .

### 3.2.2 Shackle dari Graf Siklus dengan Busur

Graf siklus dengan busur dinotasikan dengan  $C_6^3$  adalah salah satu graf yang merupakan famili dari graf siklus  $C_6$ . Graf  $C_6^3$  memiliki 3 buah busur. Adapun objek dari penelitian ini adalah shackle dari graf  $C_6^3$ . Shackle dari graf  $C_6^3$  merupakan graf yang terbentuk dari beberapa graf  $C_6^3$ . Shackle dari graf  $C_6^3$  dinotasikan dengan  $Shack C_6^3, e, n$  untuk  $e = 1$  dan  $n \geq 2$ .  $e = 1$  merupakan 1 sisi yang digunakan bersama-sama oleh graf  $C_6^3$  yang pertama dan graf siklus dengan busur yang kedua, 1 sisi dari graf siklus dengan busur yang kedua juga digunakan bersama-sama oleh graf siklus dengan busur yang ketiga, dan seterusnya. Graf ini merupakan salah satu contoh graf yang masih belum ditemukan pelabelannya. Shackle dari graf  $C_6^3$  adalah sebuah graf dengan titik  $V(Shack(C_6^3, e, n)) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq n\}$  dan sisi  $E(Shack(C_6^3, e, n)) = \{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,j}x_{3,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,j}x_{3,j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{2,j}x_{3,j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,j}x_{2,j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{4,j}x_{3,j+1}; 1 \leq j \leq n\}$ . Gambar 3.1 merupakan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$  anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  tunggal.



Gambar 3.1 Pelabelan Selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  tunggal yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$



Gambar 3.2 Pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada gabungan saling lepas shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(mC_6^3, e, n)$



### 3.2.3 Gabungan Saling Lepas Shackle dari Graf Siklus dengan Busur

Gabungan saling lepas pada shackle dari graf  $C_6^3$  didefinisikan sebagai gabungan saling lepas sebanyak  $m$  salinan shackle dari graf siklus dengan busur  $C_6^3, e, n$  yang mempunyai titik  $V(\text{Shack}(mC_6^3, e, n)) = \{x_{i,j}^k; 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m\}$  dan sisi  $E(\text{Shack}(mC_6^3, e, n)) = \{x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k; 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_{1,j}^k x_{3,j}^k; 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k; 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k; 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k; 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k; 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m\}$ . Pada penelitian ini, peneliti membatasi pada  $mC_6^3, e, n$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ . Gambar 3.2 adalah pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada gabungan saling lepas shackle dari graf  $C_6^3$ .

### 3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada shackle dari graf  $C_6^3$  baik yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Jika pada graf ini ditemukan pelabelan selimut  $\mathcal{H}$ -anti ajaib super maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola (*pattern recognition*). Penelitian ini juga menerapkan tahapan-tahapan taksonomi Bloom yang telah direvisi dalam menentukan langkah-langkah untuk pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ . Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

1. mengidentifikasi famili pada shackle dari graf  $C_6^3$ ;
2. menghitung jumlah titik  $p_G$  dan sisi  $q_G$  pada shackle dari graf  $C_6^3$  serta menghitung jumlah selimut titik  $p_H$ , jumlah selimut sisi  $q_H$ , dan jumlah selimut pada shackle dari graf  $C_6^3$ ;
3. menentukan batas atas nilai beda  $d$  pada shackle dari graf  $C_6^3$ ;
4. menentukan label  $\mathcal{H}AVC$  ( $\mathcal{H}$  Antimagical Vertex Covering) atau pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -titik anti ajaib pada shackle dari graf  $C_6^3$ ;
5. apabila label  $\mathcal{H}AVC$  berlaku untuk beberapa graf maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan dengan mengembangkan fungsi bijektif bobot titik pada shackle dari graf  $C_6^3$ ;



6. menentukan label sisi dan fungsi bijektif sisi pada shackle dari graf  $C_6^3$ ;
7. mengembangkan fungsi sisi dan bobot total pada shackle dari graf  $C_6^3$ ;
8. membuktikan kebenaran fungsi pada shackle dari graf  $C_6^3$ ;
9. menemukan teorema.

Penelitian ini akan menemukan berbagai pola pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super dengan berbagai nilai awal ( $a$ ) serta nilai beda ( $d$ ) yang ditentukan. Penelitian ini juga dapat dinyatakan dalam pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ . Teknik penelitian yang dilakukan pada gabungan saling lepas pada shackle dari graf  $C_6^3$  juga sama dengan teknik penelitian seperti yang telah disebutkan di atas namun teknik tersebut ditetapkan pada gabungan saling lepas shackle dari graf  $C_6^3$ . Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam bagan alir pada Gambar 3.3.

### 3.4 Observasi

Sebelum penelitian lanjutan pada shackle dari graf  $C_6^3$ , telah dilakukan observasi awal untuk nilai  $m$  dan  $n$  tertentu sebagai pedoman untuk menduga keberadaan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super serta menentukan pola pelabelannya. Setelah melakukan observasi awal, peneliti menemukan pola pelabelan titik tunggal pada shackle dari graf  $C_6^3$ , antara lain dengan beberapa tahapan berikut: (1) mencari pelabelan titik pada shackle dari  $C_6^3$ ; (2) pelabelan pertama dimulai dari titik  $x_{2,1}$ ; (3) selanjutnya titik yang dilabeli adalah titik  $x_{3,1}$ ; (4) kemudian dilanjutkan dengan melabeli titik  $x_{1,1}$ ; (5) setelah itu dilanjutkan dengan melabeli titik  $x_{4,1}$ ; (6) lalu dilanjutkan dengan melabeli  $x_{2,2}$ ; (7) dilanjutkan lagi dengan melabeli titik  $x_{3,2}$ ; (8) pola tersebut berlanjut sampai titik  $x_{3,4}$ . Pelabelan titik terakhir adalah pada titik  $x_{3,4}$ ; (9) untuk pelabelan gabungan saling lepas pada shackle dari graf  $C_6^3$  juga sama tahapannya, hanya berbeda pengurutan *copy*-annya.

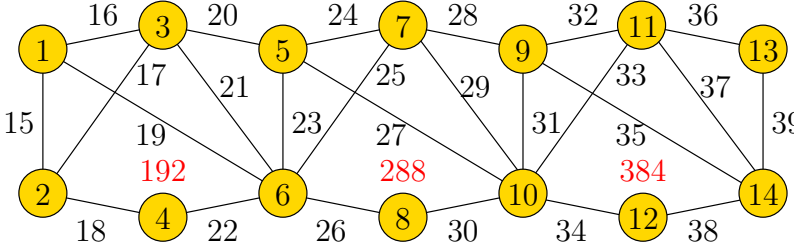
Berdasarkan tahapan pelabelan tersebut yang dilakukan pada observasi awal adalah penulis telah menemukan pelabelan titik dan pelabelan sisi yang berurutan, maka penulis dapat melanjutkan observasinya untuk menemukan pelabelan



Keterangan:  
—> Aliran kegiatan utama  
- - -> Aliran pengecekan

Gambar 3.3 Rancangan penelitian

selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  untuk  $m$  dan  $n$  sembarang. Hasil observasi awal pelabelan titik dan pelabelan sisi pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang tunggal ditunjukkan pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 Observasi awal pada shackle dari graf  $C_6^3$

Berdasarkan Gambar 3.4, penulis telah menemukan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  untuk  $n \geq 2$  dengan beda  $(d) = 96$ . Dari hasil observasi ini, peneliti dapat melanjutkan observasi lanjutan untuk menemukan pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  untuk  $m$  dan  $n$  sembarang.

## BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini merupakan penjelasan hasil penelitian mengenai pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  baik yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Subgraf  $\mathcal{H}$  yang pertama dipilih adalah  $C_6^3$  kemudian pada bagian pembahasan diperluas menjadi  $C_s^3$ , sehingga istilah pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -anti ajaib super akan ditulis menjadi pelabelan selimut  $(a, d)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super atau pelabelan selimut  $(a, d)$ - $C_s^3$ -anti ajaib super. Hasil utama dari penelitian yang akan dibahas terkait dengan pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -anti ajaib super adalah berupa teorema baru yang ditandai dengan gambar permata  $\diamond$  dan kaitannya dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam proses menemukan pelabelan selimut  $(a, d)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ . Penelitian ini diawali dengan menentukan nilai batas atas  $(d)$ , menentukan pelabelan selimut  $(a, d)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super kemudian menentukan bobot titik selimut dan selimut total.

Pada penelitian ini terdapat 25 teorema baru dan 2 konjektur yang ditemukan secara eksperimental. Format penyajian temuan penelitian dalam bab ini diawali dengan pernyataan teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi pembuktian teorema dan kaitannya dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam menemukan pelabelan selimut  $(a, d)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super. Berikut ini adalah penjelasan tahap-tahap bagaimana teorema tersebut ditemukan sekaligus menjawab rumusan masalah yang telah disajikan pada bab 1.

### 4.1 Batas Atas Pelabelan Selimut $(a, d)$ - $C_6^3$ Anti Ajaib Super pada Shackle dari Graf $C_6^3$ Tunggal dan Gabungan Saling Lepasnya

Penentuan batas atas beda  $(d)$  merupakan hal yang penting dalam penelitian ini. Batas atas ini adalah bagian yang menunjukkan seberapa banyak nilai beda yang mungkin dimiliki oleh *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  tunggal maupun gabungan saling

lepas dalam pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ . Terlebih dahulu perlu diketahui jumlah titik ( $p_G$ ) atau jumlah sisi ( $q_G$ ) pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang tunggal maupun gabungannya dan perlu diketahui jumlah titik ( $p_H$ ) dan jumlah sisi ( $q_H$ ) pada subgraf atau selimut *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang tunggal maupun gabungannya serta jumlah selimutnya ( $s$ ).

Berdasarkan definisi, *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  adalah graf dengan titik  $V(\text{Shack}(C_6^3, e, n)) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq n\}$  dan sisi  $E(\text{Shack}(C_6^3, e, n)) = \{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,j}x_{3,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,j}x_{3,j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{2,j}x_{3,j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,j}x_{2,j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{4,j}x_{3,j+1}; 1 \leq j \leq n\}$ . Nilai  $n$  yang dimaksudkan adalah banyaknya *expand Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  dari samping kiri ke kanan.

Berdasarkan definisi dari graf *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  dengan  $n$  yang berbeda, didapatkan rumusan jumlah titik pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  adalah  $p_G = 4n + 2$  dan jumlah sisi pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  adalah  $q_G = 8n + 1$ . Selimut pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  berupa subgraf dari *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang berupa  $C_6^3, e, n$ , maka jumlah titik selimut  $p_H = 6$  dan jumlah sisi selimut  $q_H = 9$  serta rumusan jumlah selimut *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  adalah  $s$ .

Batas atas ini dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma sebagai berikut:

**Lema 4.1.1.** *Jika sebuah graf  $G(V, E)$  adalah pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super, maka  $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$  untuk  $s = |\mathcal{H}_i|$ ,  $H \subseteq G$  yang isomorfik dengan  $\mathcal{H}$ ,  $p_G = |V(G)|$ ,  $q_G = |E(G)|$ ,  $p_H = |V(H)|$ ,  $q_H = |E(H)|$ .*

**Bukti.**  $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$  dan  $f(E) = \{p+1, p+2, \dots, p+q\}$ . Misalkan graf  $(p_G, q_G)$  mempunyai pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$  anti ajaib super dengan fungsi total  $f(V \cup E) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p+q\}$  maka himpunan bobot selimut sebuah graf adalah  $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(s-1)d\}$  dimana  $a$  merupakan bobot selimut terkecil. Karena graf  $G(V, E)$  adalah  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib, bobot- $\mathcal{H}$  terkecil adalah tidak lebih kecil daripada  $1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H)$  dan bobot- $\mathcal{H}$  terbesar adalah tidak lebih besar daripada  $p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1))$ , sehingga diperoleh:

untuk nilai terkecil berlaku:

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\
 \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &= \\
 \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a
 \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned}
 a + (s - 1)d &\leq p_G + p_G - 1 + p_G - 2 + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\
 &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\
 &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H q_G \\
 &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\
 &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) \\
 (s - 1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\
 &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\
 &\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 &= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H q_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
 &= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\
 &= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\
 &= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s - 1)}
 \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas terbukti bahwa batas atas  $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$  jika graf  $G$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -anti ajaib super dari berbagai famili graf. (Dafik, 2014) □



**Observasi 4.1.1.** Jika shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan Shack  $(C_6^3, e, n)$ , untuk  $n \geq 2$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super, maka  $d \leq 96$ .

**Bukti.** Shack  $(C_6^3, e, n)$  memiliki himpunan titik  $V(\text{Shack}(C_6^3, e, n)) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq n\}$  dan himpunan sisi  $E(\text{Shack}(C_6^3, e, n)) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,j}x_{3,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,j}x_{3,j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{2,j}x_{3,j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{1,j}x_{2,j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{4,j}x_{3,j+1}; 1 \leq j \leq n\}$  untuk  $n \geq 2$ . Jumlah titik  $p_G = 4n + 2$  dan sisi  $q_G = 8n + 1$ , jumlah titik selimut adalah  $p_H = 6$  serta jumlah sisi selimut adalah  $q_H = 9$  dengan jumlah selimut  $n$  maka batas atas nilai beda  $(d)$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1} \\ &\leq \frac{(4n + 2 - 6)6 + (8n + 1 - 9)9}{n - 1} \\ &\leq \frac{(4n - 4)6 + (8n - 8)9}{n - 1} \\ &\leq \frac{96n - 96}{n - 1} \\ &\leq \frac{96(n - 1)}{n - 1} \\ &\leq 96 \end{aligned}$$

Pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super selalu menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai  $d \geq 0$  dan  $d$  adalah bilangan bulat, sehingga  $d \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 96\}$ .  $\square$

**Observasi 4.1.2.** Jika gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan Shack  $(mC_6^3, e, n)$ , untuk  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super maka  $d \leq 96m$ .

**Bukti.** Shack  $(mC_6^3, e, n)$  memiliki himpunan titik  $V(\text{Shack } mC_6^3, e, n) = \{x_{i,j}^k; 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq n\}$  dan himpunan sisi  $E(\text{Shack } mC_6^3, e, n) = \{x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k; 1 \leq i^k \leq 3, 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_{1,j}^k x_{3,j}^k; 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k; 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k; 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m\}$



$m\} \cup \{x_{1,j}^k, x_{2,j+1}^k; 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_{4,j}^k, x_{3,j+1}^k; 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m\}$ .  
 Jumlah titik  $p_G = 4nm + 2m$  dan sisi  $q_G = 8nm + m$ , jumlah titik selimut adalah  $p_H = 6$  serta jumlah sisi selimut adalah  $q_H = 9$  dengan jumlah selimut  $nm$  maka batas atas nilai beda ( $d$ ) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1} \\ &\leq \frac{(4nm + 2m - 6)6 + (8nm + m - 9)9}{nm - 1} \\ &\leq \frac{(24nm + 12m - 36 + 72nm + 9m - 81)}{nm - 1} \\ &\leq \frac{96nm + 21m - 117}{nm - 1} \\ &\leq 96 + \frac{21m - 21}{nm - 1} \\ d &< 107 \end{aligned}$$

Karena syarat dari  $m \geq 2$  sehingga  $d = 0$  tidak berlaku. Nilai  $d$  menghasilkan nilai 0 apabila  $m$  bernilai 1 sehingga tidak sesuai dengan syarat nilai  $m$  pada gabungan saling lepas *Shack*  $(C_6^3, e, n)$ . Jadi, pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super menggunakan bilangan asli, maka nilai  $d > 0$  dan  $d$  adalah bilangan asli, sehingga  $d \in \{1, 2, 3, \dots, 106\}$ .  $\square$

#### 4.2 Pelabelan Selimut $(a, d) - C_6^3$ -Anti Ajaib Super pada Shackle dari Graf $C_6^3$ Tunggal yang dinotasikan dengan Shack $(C_6^3, e, n)$

Penentuan fungsi bijektif pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$  anti ajaib super akan disesuaikan dengan nilai beda ( $d$ ) yang telah ditetapkan, maka digunakan metode yang terdiri dari beberapa langkah untuk menentukan pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$ . Metode ini diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku pada batas  $i$  dan  $j$  yang telah ditemukan. Dalam penentuan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi barisan aritmatika yang pada akhirnya fungsi ini merupakan fungsi bijektif pada graf yang diteliti. Setelah fungsi bijektif diketahui, selanjutnya dilakukan

pembuktian secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema yang didapat. Sebagai catatan, teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang *bimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Berdasarkan hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa teorema dan akibat. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Setelah mengetahui batas atas nilai beda ( $d$ ), langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  dengan terlebih dahulu menentukan fungsi bijektif melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika dari titik dan sisi pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$ . Adapun teorema-teorema yang telah ditemukan sebagai berikut:

◇ **Teorema 4.2.1.** *Ada pelabelan selimut  $(36n + 84, 96) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  dengan fungsi bijektif  $f_1$  dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_1(x_{i,j}) &= 4j + i - 5, \text{ untuk } i = 2, 3, 1 \leq j \leq n \\ f_1(x_{i,j}) &= 4j + \frac{i+2}{3} - 2, \text{ untuk } i = 1, 4, 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

$f_1$  adalah fungsi bijektif yang memetakan *Shack*  $(C_6^3, e, 3)$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, 4n+2\}$ . Jika  $w_{f_1}$  didefinisikan sebagai bobot titik selimut dari pelabelan selimut total pada *Shack*  $(C_6^3, e, 3)$  dimana bobot titik selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 6 label titik dari  $C_6^3$  yang menjadi selimut pada *Shack*  $(C_6^3, e, 3)$ , maka fungsi bijektif  $w_{f_1}$  dapat ditentukan sebagai berikut:

$$w_{f_1} = \bigcup_{i=2,3} (f_1(x_{i,j})) + \bigcup_{i=1,4} (f_1(x_{i,j})) + \bigcup_{i=2,3} (f_1(x_{i,j+1}))$$

$$\begin{aligned}
 &= \bigcup_{i=2,3} (4j + i - 5) + \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (4(j+1) + i - 5) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (4j + i - 5 + 4(j+1) + i - 5) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)
 \end{aligned}$$

Himpunan bobot titik selimut di atas adalah  $w_{f_1} = \{21, 45, 69, \dots, 24n - 3\}$  membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 24$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 21 + (n - 1)24 = 24n - 3$  maka terbukti bahwa fungsi bobot selimut  $w_{f_1} = 24i - 3$ . Selanjutnya untuk membentuk selimut total, diperlukan label sisi. Labeli sisi *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  dengan fungsi bijektif  $f_1$  yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_1(x_{i,j}x_{i+1,j}) &= 4n - i + 8j - 3, \text{ untuk } i = 1, 2, 1 \leq j \leq n \\
 f_1(x_{1,j}x_{3,j}) &= 4n + 8j - 3, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
 f_1(x_{3,j}x_{4,j}) &= 4n + 8j - 2, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
 f_1(x_{2,j}x_{3,j+1}) &= 4n + 8j - 1, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
 f_1(x_{1,j}x_{2,j+1}) &= 4n + 8j, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
 f_1(x_{1,j}x_{3,j+1}) &= 4n + 8j + 1, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
 f_1(x_{4,j}x_{3,j+1}) &= 4n + 8j + 2, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n
 \end{aligned}$$

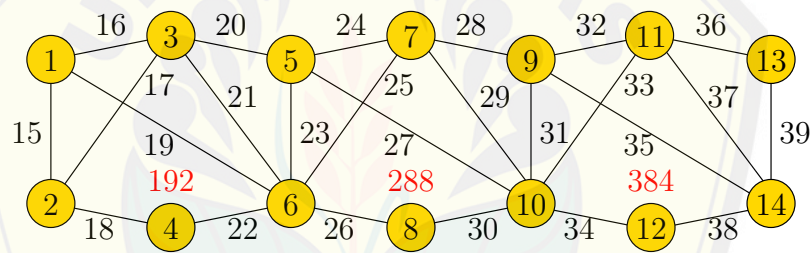
Jika  $W_{f_1}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_1}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut  $w_{f_1}$  dan rumus label sisi  $f_1$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_1} &= w_{f_1} + \bigcup_{i=1,2} (f_1(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_1(x_{1,j}x_{3,j}) + f_1(x_{3,j}x_{4,j}) + f_1(x_{2,j}x_{3,j+1}) + \\
 &\quad f_1(x_{1,j}x_{2,j+1}) + f_1(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_1(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_1(x_{2,j}x_{3,j})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (4n \\
 &\quad + 8j - 3) + (4n + 8j - 2) + (4n + 8j - 1) + (4n + 8j) + (4n + 8j + 1) \\
 &\quad + (4n + 8j + 2) + (4n - 2 + 8(j + 1) - 3) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (28n \\
 &\quad + 56j)
 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_1} = \{36n + 84, 36n + 180, \dots, 132n - 12\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 36n + 84 + (n - 1)96 = 132n - 12$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(36n + 84, 96) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.1 merupakan contoh pelabelan selimut  $(36n + 84, 96) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ .



Gambar 4.1 Pelabelan selimut  $(36n + 84, 96) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

$\diamond$  **Teorema 4.2.2.** Ada pelabelan selimut  $(44n + 76, 80) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .

**Bukti.** Labeli titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.2 dengan fungsi bijektif  $f_1(x_{i,j})$  untuk  $i = 2, 3$  dan  $i = 1, 4$  maka  $f_2(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$  sehingga  $w_{f_2} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$ . Labeli sisi *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.2 dimana  $f_2 = f_1$ , maka label sisinya:  $f_2(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_1(x_{i,j}x_{i+1,j})$ ,  $f_2(x_{2,j}x_{3,j+1}) = f_1(x_{2,j}x_{3,j+1})$ ,  $f_2(x_{1,j}x_{2,j+1}) = f_1(x_{1,j}x_{2,j+1})$ ,  $f_2(x_{1,j}$

$x_{3,j+1}) = f_1(x_{1,j}x_{3,j+1}), f_2(x_{4,j}x_{3,j+1}) = f_1(x_{4,j}x_{3,j+1}), f_2(x_{3,j}x_{4,j}) = 12n - 8j + 5$  untuk  $1 \leq j \leq n, f_2(x_{1,j}x_{3,j}) = 4n + 8j - 2$  untuk  $1 \leq j \leq n$ .

Jika  $W_{f_2}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_2}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut  $w_{f_2}$  dan rumus label sisi  $f_2$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

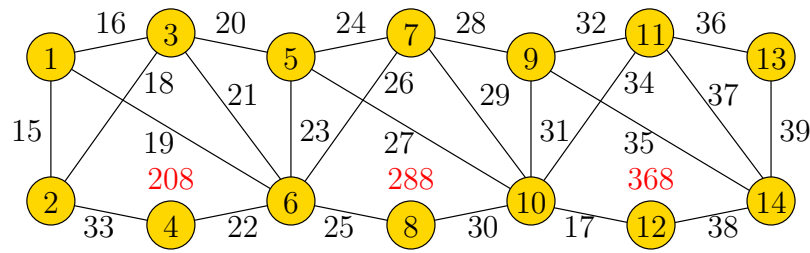
$$\begin{aligned} W_{f_2} &= w_{f_2} + \bigcup_{i=1,2} (f_2(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_2(x_{3,j}x_{4,j}) + f_2(x_{1,j}x_{3,j}) + f_2(x_{2,j}x_{3,j+1}) + \\ &\quad f_2(x_{1,j}x_{2,j+1}) + f_2(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_2(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_2(x_{2,j}x_{3,j}) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (12n \\ &\quad - 8j + 5) + (4n + 8j - 2) + (4n + 8j - 1) + (4n + 8j) + (4n + 8j + 1) \\ &\quad + (4n + 8j + 2) + (4n - 2 + 8(j + 1) - 3) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (36n \\ &\quad + 40j + 8) \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_2} = \{44n + 76, 44n + 156, \dots, 124n - 4\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 44n + 76 + (n - 1)80 = 124n - 4$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(44n + 76, 80) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.2 merupakan contoh pelabelan selimut  $(44n + 76, 80) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ .

$\diamond$  **Teorema 4.2.3.** *Ada pelabelan selimut  $(52n + 68, 64) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.3 dengan fungsi bijektif  $f_1(x_{i,j})$  untuk  $i = 2, 3$  dan  $i = 1, 4$  maka  $f_3(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$  sehingga  $w_{f_3} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$ . Labeli sisi *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema



Gambar 4.2 Pelabelan selimut  $(44n + 76, 80)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

4.2.1 ke dalam teorema 4.2.3 dan teorema 4.2.2 ke dalam teorema 4.2.3 dimana  $f_3 = f_1$  dan  $f_3 = f_2$ , maka label sisinya:  $f_3(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_1(x_{i,j}x_{i+1,j})$ ,  $f_3(x_{3,j}x_{4,j}) = f_2(x_{3,j}x_{4,j})$ ,  $f_3(x_{1,j}x_{3,j}) = f_2(x_{1,j}x_{3,j})$ ,  $f_3(x_{1,j}x_{3,j+1}) = f_1(x_{1,j}x_{3,j+1})$ ,  $f_3(x_{4,j}x_{3,j+1}) = f_1(x_{4,j}x_{3,j+1})$ ,  $f_3(x_{1,j}x_{2,j+1}) = 12n - 8j + 7$  untuk  $1 \leq j \leq n$ ,  $f_3(x_{2,j}x_{3,j+1}) = 4n + 8j$  untuk  $1 \leq j \leq n$ .

Jika  $W_{f_3}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_3}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut  $w_{f_3}$  dan rumus label sisi  $f_3$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

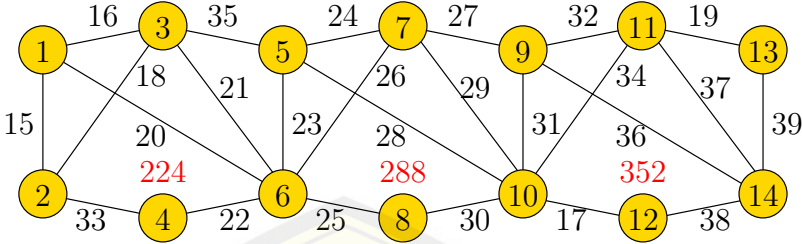
$$\begin{aligned} W_{f_3} &= w_{f_3} + \bigcup_{i=1,2} (f_3(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_3(x_{3,j}x_{4,j}) + f_3(x_{1,j}x_{3,j}) + f_3(x_{1,j}x_{2,j+1}) + \\ & f_3(x_{2,j}x_{3,j+1}) + f_3(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_3(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_3(x_{2,j}x_{3,j}) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (12n \\ & - 8j + 5) + (4n + 8j - 2) + (12n - 8j + 7) + (4n + 8j) + (4n + 8j + 1) \\ & + (4n + 8j + 2) + (4n - 2 + 8(j + 1) - 3) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (44n \\ & + 24j + 16) \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_3} = \{52n + 68, 52n + 132, \dots, 116n + 4\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 52n + 68 + (n - 1)64 = 116n + 4$  maka



terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut  $(52n + 68, 64) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.3 merupakan contoh pelabelan selimut  $(52n + 68, 64) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ .



Gambar 4.3 Pelabelan selimut  $(52n + 68, 64) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

$\diamond$  **Teorema 4.2.4.** Ada pelabelan selimut  $(60n + 60, 48) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .

**Bukti.** Labeli titik  $Shack(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.4 dengan fungsi bijektif  $f_1(x_{i,j})$  untuk  $i = 2, 3$  dan  $i = 1, 4$  maka  $f_4(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$  sehingga  $w_{f_4} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$ . Labeli sisi  $Shack(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1, teorema 4.2.2 juga teorema 4.2.3 ke dalam teorema 4.2.4 dimana  $f_4 = f_1, f_4 = f_2$ , dan  $f_4 = f_3$ , maka label sisinya:  $f_4(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_1(x_{i,j}x_{i+1,j}), f_4(x_{3,j}x_{4,j}) = f_1(x_{3,j}x_{4,j}), f_4(x_{1,j}x_{3,j}) = f_2(x_{1,j}x_{3,j}), f_4(x_{1,j}x_{2,j+1}) = f_3(x_{1,j}x_{2,j+1}), f_4(x_{2,j}x_{3,j+1}) = f_3(x_{2,j}x_{3,j+1}), f_4(x_{4,j}x_{3,j+1}) = 4n + 8j + 1$  untuk  $1 \leq j \leq n, f_4(x_{1,j}x_{3,j+1}) = 12n - 8j + 10$  untuk  $1 \leq j \leq n$ .

Jika  $W_{f_4}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada  $Shack(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_4}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut  $w_{f_4}$  dan rumus label sisi  $f_4$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan

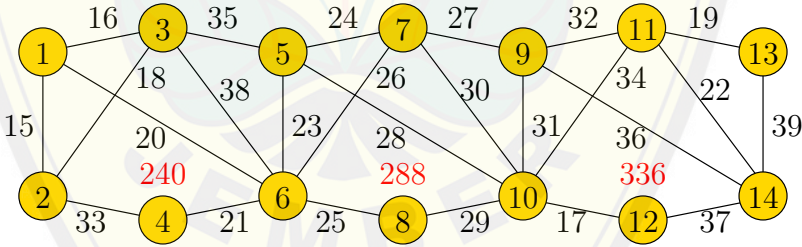


sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_4} &= w_{f_4} + \bigcup_{i=1,2} (f_4(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_4(x_{3,j}x_{4,j}) + f_4(x_{1,j}x_{3,j}) + f_4(x_{1,j}x_{2,j+1}) + \\
 &\quad f_4(x_{2,j}x_{3,j+1}) + f_4(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_4(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_4(x_{2,j}x_{3,j}) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (12n \\
 &\quad - 8j + 5) + (4n + 8j - 2) + (12n - 8j + 7) + (4n + 8j) + (4n + 8j + 1) \\
 &\quad + (12n - 8j + 10) + (4n - 2 + 8(j + 1) - 3) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (52n \\
 &\quad + 8j + 24)
 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_4} = \{60n + 60, 60n + 108, \dots, 108n + 12\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 60n + 60 + (n - 1)48 = 108n + 12$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(60n + 60, 48) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.4 merupakan contoh pelabelan selimut  $(60n + 60, 48) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ .



Gambar 4.4 Pelabelan selimut  $(60n + 60, 48) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

$\diamond$  **Teorema 4.2.5.** *Ada pelabelan selimut  $(57n + 77, 33) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.5 dengan fungsi bijektif  $f_1(x_{i,j})$  untuk  $i = 2, 3$  dan  $i = 1, 4$  maka

$f_5(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$  sehingga  $w_{f_5} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4}(4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3}(8j + 2i - 6)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$ . Labeli sisi *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  dengan fungsi bijektif  $f_5$  yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_5(x_{i,j}x_{i+1,j}) &= 4n - 4i + j + 10, \text{ untuk } i = 1, 2, 1 \leq j \leq n \\ f_5(x_{1,j}x_{3,j}) &= 5n + j + 6, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_5(x_{3,j}x_{4,j}) &= 6n + j + 6, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_5(x_{2,j}x_{3,j+1}) &= 7n + j + 6, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_5(x_{1,j}x_{2,j+1}) &= 8n + j + 6, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_5(x_{1,j}x_{3,j+1}) &= 9n + j + 6, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_5(x_{4,j}x_{3,j+1}) &= 10n + j + 6, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

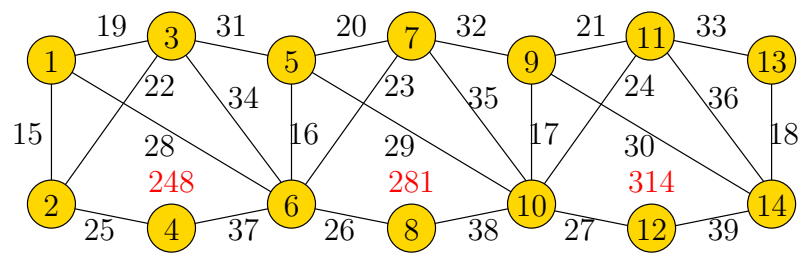
Jika  $W_{f_5}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_5}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah titik bobot selimut  $w_{f_5}$  dan rumus label sisi  $f_5$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_5} &= w_{f_5} + \bigcup_{i=1,2} (f_5(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_5(x_{1,j}x_{3,j}) + f_5(x_{3,j}x_{4,j}) + f_5(x_{2,j}x_{3,j+1}) + \\ & f_5(x_{1,j}x_{2,j+1}) + f_5(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_5(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_5(x_{2,j}x_{3,j}) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - 4i + j + 10) + (5n \\ & + j + 6) + (6n + j + 6) + (7n + j + 6) + (8n + j + 6) + (9n + j + 6) + \\ & (10n + j + 6) + (4n - 8 + (j + 1) + 10) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - 4i + j + 10) + \\ & (49n + 7j + 39) \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_5} = \{57n + 77, 57n + 110, \dots, 90n + 44\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 57n + 77 + (n - 1)33 = 90n + 44$  maka terbuktilah bahwa ada pelabelan selimut  $(57n + 77, 33) - C_6^3$ -anti ajaib super pada

shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.5 merupakan contoh pelabelan selimut  $(57n + 77, 33) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ .



Gambar 4.5 Pelabelan selimut  $(57n + 77, 33) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

$\diamond$  **Teorema 4.2.6.** Ada pelabelan selimut  $(68n + 52, 32) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .

**Bukti.** Labeli titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.6 dengan fungsi bijektif  $f_1(x_{i,j})$  untuk  $i = 2, 3$  dan  $i = 1, 4$  maka  $f_6(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$  sehingga  $w_{f_6} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$ . Labeli sisi *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1, teorema 4.2.2, teorema 4.2.3 juga teorema 4.2.4 ke dalam teorema 4.2.6 dimana  $f_6 = f_1, f_6 = f_2, f_6 = f_3$  dan  $f_6 = f_4$ , maka label sisinya:  $f_6(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_1(x_{i,j}x_{i+1,j}), f_6(x_{3,j}x_{4,j}) = f_2(x_{3,j}x_{4,j}), f_6(x_{1,j}x_{3,j}) = f_2(x_{1,j}x_{3,j}), f_6(x_{1,j}x_{2,j+1}) = f_3(x_{1,j}x_{2,j+1}), f_6(x_{2,j}x_{3,j+1}) = f_3(x_{2,j}x_{3,j+1}), f_6(x_{1,j}x_{3,j+1}) = f_4(x_{1,j}x_{3,j+1}), f_6(x_{4,j}x_{3,j+1}) = 12n - 8j + 9$  untuk  $1 \leq j \leq n$

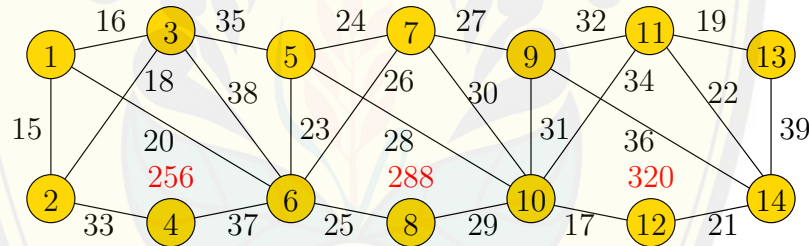
Jika  $W_{f_6}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_6}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut  $w_{f_6}$  dan rumus label sisi  $f_6$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_6} = w_{f_6} + \bigcup_{i=1,2} (f_6(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_6(x_{3,j}x_{4,j}) + f_6(x_{1,j}x_{3,j}) + f_6(x_{1,j}x_{2,j+1}) +$$

$$\begin{aligned}
 & f_6(x_{2,j}x_{3,j+1}) + f_6(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_6(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_6(x_{2,j}x_{3,j}) \\
 = & \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (12n \\
 & - 8j + 5) + (4n + 8j - 2) + (12n - 8j + 7) + (4n + 8j) + (12n - 8j + 9) \\
 & + (12n - 8j + 10) + (4n - 2 + 8(j + 1) - 3) \\
 = & \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (60n \\
 & - 8j + 32)
 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_6} = \{68n + 52, 68n + 84, \dots, 100n + 20\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 68n + 52 + (n - 1)32 = 100n + 20$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(68n + 52, 32) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.6 merupakan contoh pelabelan selimut  $(68n + 52, 32) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ .



Gambar 4.6 Pelabelan selimut  $(68n + 52, 32) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

$\diamond$  **Teorema 4.2.7.** *Ada pelabelan selimut  $(58n + 76, 31) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.7 dengan fungsi bijektif  $f_1(x_{i,j})$  untuk  $i = 2, 3$  dan  $i = 1, 4$  maka  $f_7(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$  sehingga  $w_{f_7} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$ . Labeli sisi *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.5 ke dalam teorema 4.2.7 dimana  $f_7 = f_5$ , maka label sisinya:  $f_7(x_{i,j}x_{i+1,j}) =$

$f_5(x_{i,j}x_{i+1,j}), f_7(x_{2,j}x_{3,j+1}) = f_5(x_{2,j}x_{3,j+1}), f_7(x_{1,j}x_{2,j+1}) = f_5(x_{1,j}x_{2,j+1}), f_7(x_{1,j}x_{3,j+1}) = f_5(x_{1,j}x_{3,j+1}), f_7(x_{4,j}x_{3,j+1}) = f_5(x_{4,j}x_{3,j+1}), f_7(x_{3,j}x_{4,j}) = 6n - j + 7$  untuk  $1 \leq j \leq n$ , dan  $f_7(x_{1,j}x_{3,j}) = 6n + j + 6$  untuk  $1 \leq j \leq n$ .

Jika  $W_{f_7}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_7}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut  $w_{f_7}$  dan rumus label sisi  $f_7$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

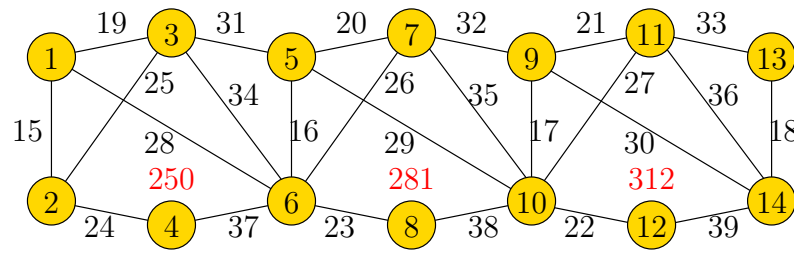
$$\begin{aligned} W_{f_7} &= w_{f_7} + \bigcup_{i=1,2} (f_7(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_7(x_{3,j}x_{4,j}) + f_7(x_{1,j}x_{3,j}) + f_7(x_{2,j}x_{3,j+1}) + \\ &\quad f_7(x_{1,j}x_{2,j+1}) + f_7(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_7(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_7(x_{2,j}x_{3,j}) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - 4i + j + 10) + (6n \\ &\quad - j + 7) + (6n + j + 6) + (7n + j + 6) + (8n + j + 6) + (9n + j + 6) + \\ &\quad (10n + j + 6) + (4n - 8 + (j + 1) + 10) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - 4i + j + 10) + (50n \\ &\quad + 5j + 40) \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_7} = \{58n + 76, 58n + 107, \dots, 89n + 45\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 58n + 76 + (n - 1)31 = 89n + 45$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(58n + 76, 31) - C_6^3$  anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.7 merupakan contoh pelabelan selimut  $(58n + 76, 31) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ .

$\diamond$  **Teorema 4.2.8.** *Ada pelabelan selimut  $(59n + 75, 29) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.8 dengan fungsi bijektif  $f_1(x_{i,j})$  untuk  $i = 2, 3$  dan  $i = 1, 4$  maka  $f_8(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$  sehingga  $w_{f_8} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)$ ,



Gambar 4.7 Pelabelan selimut  $(58n + 76, 31)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

untuk  $1 \leq j \leq n$ . Labeli sisi *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.5 dan teorema 4.2.7 ke dalam teorema 4.2.8 dimana  $f_8 = f_5$  dan  $f_8 = f_7$ , maka label sisinya:  $f_8(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_5(x_{i,j}x_{i+1,j})$ ,  $f_8(x_{3,j}x_{4,j}) = f_7(x_{3,j}x_{4,j})$ ,  $f_8(x_{1,j}x_{3,j}) = f_7(x_{1,j}x_{3,j})$ ,  $f_8(x_{1,j}x_{3,j+1}) = f_5(x_{1,j}x_{3,j+1})$ ,  $f_8(x_{4,j}x_{3,j+1}) = f_5(x_{4,j}x_{3,j+1})$ ,  $f_8(x_{1,j}x_{2,j+1}) = 8n - j + 7$  untuk  $1 \leq j \leq n$ , dan  $f_8(x_{2,j}x_{3,j+1}) = 8n + j + 6$  untuk  $1 \leq j \leq n$ .

Jika  $W_{f_8}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_8}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut  $w_{f_8}$  dan rumus label sisi  $f_8$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_8} &= w_{f_8} + \bigcup_{i=1,2} (f_8(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_8(x_{3,j}x_{4,j}) + f_8(x_{1,j}x_{3,j}) + f_8(x_{1,j}x_{2,j+1}) + \\ &\quad f_8(x_{2,j}x_{3,j+1}) + f_8(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_8(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_8(x_{2,j}x_{3,j}) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - 4i + j + 10) + (6n \\ &\quad - j + 7) + (6n + j + 6) + (8n - j + 7) + (8n + j + 6) + (9n + j + 6) + \\ &\quad (10n + j + 6) + (4n - 8 + (j + 1) + 10) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - 4i + j + 10) + (51n \\ &\quad + 3j + 41) \end{aligned}$$

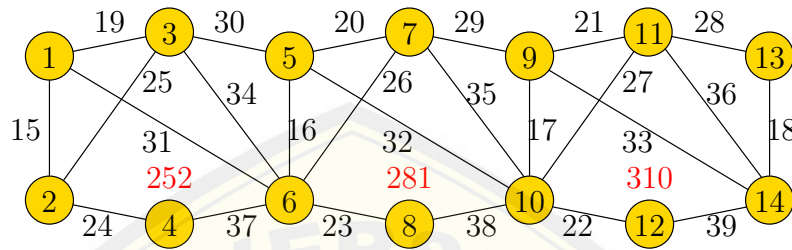
Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_8} = \{59n + 75, 59n + 104, \dots,$



$88n + 46$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 59n + 75 + (n - 1)29 = 88n + 46$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(59n + 75, 29) - (C_6^3, e, 3)$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .

□

Gambar 4.8 merupakan contoh pelabelan selimut  $(59n + 75, 29) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ .



Gambar 4.8 Pelabelan selimut  $(59n + 75, 29) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

◇ **Teorema 4.2.9.** *Ada pelabelan selimut  $(60n + 74, 27) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.9 dengan fungsi bijektif  $f_1(x_{i,j})$  untuk  $i = 2, 3$  dan  $i = 1, 4$  maka  $f_9(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$  sehingga  $w_{f_9} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Labeli sisi *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.5, teorema 4.2.7 juga teorema 4.2.8 ke dalam teorema 4.2.9 dimana  $f_9 = f_5, f_9 = f_7$  dan  $f_9 = f_8$ , maka label sisinya:  $f_9(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_5(x_{i,j}x_{i+1,j}), f_9(x_{3,j}x_{4,j}) = f_7(x_{3,j}x_{4,j}), f_9(x_{1,j}x_{3,j}) = f_7(x_{1,j}x_{3,j}), f_9(x_{1,j}x_{2,j+1}) = f_8(x_{1,j}x_{2,j+1}), f_9(x_{2,j}x_{3,j+1}) = f_8(x_{2,j}x_{3,j+1}), f_9(x_{4,j}x_{3,j+1}) = 9n + j + 6$  untuk  $1 \leq j \leq n$ , dan  $f_9(x_{1,j}x_{3,j+1}) = 11n - j + 7$  untuk  $1 \leq j \leq n$ .

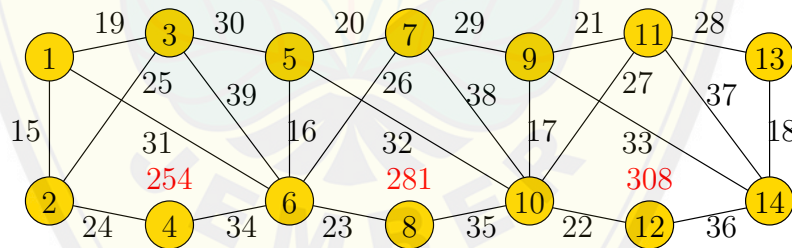
Jika  $W_{f_9}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_9}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut  $w_{f_9}$  dan rumus label sisi  $f_9$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan

sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_9} &= w_{f_9} + \bigcup_{i=1,2} f_9(x_{i,j}x_{i+1,j}) + f_9(x_{3,j}x_{4,j}) + f_9(x_{1,j}x_{3,j}) + f_9(x_{1,j}x_{2,j+1}) \\
 &\quad + f_9(x_{2,j}x_{3,j+1}) + f_9(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_9(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_9(x_{2,j}x_{3,j}) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - 4i + j + 10) + (6n \\
 &\quad - j + 7) + (6n + j + 6) + (8n - j + 7) + (8n + j + 6) + (9n + j + 6) + \\
 &\quad (11n - j + 7) + (4n - 8 + (j + 1) + 10) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - 4i + j + 10) + (52n \\
 &\quad + j + 42)
 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_9} = \{60n + 74, 60n + 101, \dots, 87n + 47\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 60n + 74 + (n - 1)27 = 87n + 47$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(60n + 74, 27) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.9 merupakan contoh pelabelan selimut  $(60n + 74, 27) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ .



Gambar 4.9 Pelabelan selimut  $(60n + 74, 27) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

◇ **Teorema 4.2.10.** *Ada pelabelan selimut  $(61n + 73, 25) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.10 dengan fungsi bijektif  $f_1(x_{i,j})$  untuk  $i = 2, 3$  dan  $i = 1, 4$

maka  $f_{10}(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$  sehingga  $w_{f_{10}} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4}(4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3}(8j + 2i - 6)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$ . Labeli sisi *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.5, teorema 4.2.7, teorema 4.2.8 juga teorema 4.2.9 ke dalam teorema 4.2.10 dimana  $f_{10} = f_5, f_{10} = f_7, f_{10} = f_8$  dan  $f_{10} = f_9$ , maka label sisinya:  $f_{10}(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_5(x_{i,j}x_{i+1,j}), f_{10}(x_{3,j}x_{4,j}) = f_7(x_{3,j}x_{4,j}), f_{10}(x_{1,j}x_{3,j}) = f_7(x_{1,j}x_{3,j}), f_{10}(x_{1,j}x_{2,j+1}) = f_8(x_{1,j}x_{2,j+1}), f_{10}(x_{2,j}x_{3,j+1}) = f_8(x_{2,j}x_{3,j+1}), f_{10}(x_{1,j}x_{3,j+1}) = f_9(x_{1,j}x_{3,j+1}), f_{10}(x_{4,j}x_{3,j+1}) = 10n - j + 7$  untuk  $1 \leq j \leq n$ .

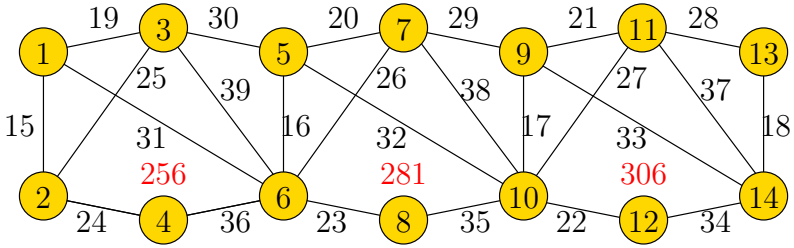
Jika  $W_{f_{10}}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_{10}}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut  $w_{f_{10}}$  dan rumus label sisi  $f_{10}$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{10}} &= w_{f_{10}} + \bigcup_{i=1,2} f_{10}(x_{i,j}x_{i+1,j}) + f_{10}(x_{3,j}x_{4,j}) + f_{10}(x_{1,j}x_{3,j}) + f_{10}(x_{1,j}x_{2,j+1}) \\ &\quad + f_{10}(x_{2,j}x_{3,j+1}) + f_{10}(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_{10}(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_{10}(x_{2,j}x_{3,j}) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - 4i + j + 10) + (6n \\ &\quad - j + 7) + (6n + j + 6) + (8n - j + 7) + (8n + j + 6) + (10n - j + 7) + \\ &\quad (11n - j + 7) + (4n - 8 + (j + 1) + 10) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - 4i + j + 10) + (53n \\ &\quad - j + 43) \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_{10}} = \{61n + 73, 61n + 98, \dots, 86n + 48\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 61n + 73 + (n - 1)25 = 86n + 48$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(61n + 73, 25) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.10 merupakan contoh pelabelan selimut  $(61n + 73, 25) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ .

$\diamond$  **Teorema 4.2.11.** *Ada pelabelan selimut  $(54n + 96, 23) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .*



Gambar 4.10 Pelabelan selimut  $(61n + 73, 25)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

**Bukti.** Labeli titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.11 dengan fungsi bijektif  $f_1(x_{i,j})$  untuk  $i = 2, 3$  dan  $i = 1, 4$  maka  $f_{11}(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$  sehingga  $w_{f_{11}} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$ . Labeli sisi *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  dengan fungsi bijektif  $f_{11}$  yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_{11}(x_{i,j}x_{i+1,j}) &= 4n - 10i + j + 22, \text{ untuk } i = 1, 2, 1 \leq j \leq n \\
 f_{11}(x_{1,j}x_{3,j}) &= 6n - j + 4, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
 f_{11}(x_{3,j}x_{4,j}) &= 7n - j + 4, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
 f_{11}(x_{1,j}x_{2,j+1}) &= 6n - j + 13, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
 f_{11}(x_{2,j}x_{3,j+1}) &= 6n + j + 12, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
 f_{11}(x_{4,j}x_{3,j+1}) &= 8n - j + 13, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
 f_{11}(x_{1,j}x_{3,j+1}) &= 9n - j + 13, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n
 \end{aligned}$$

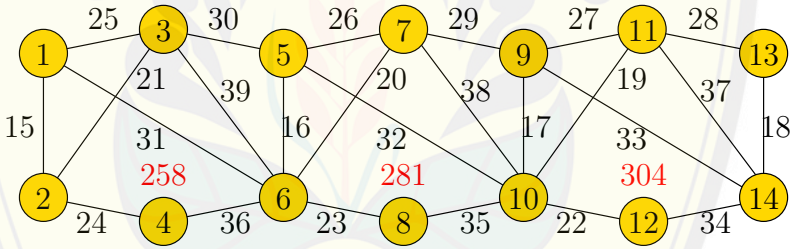
Jika  $W_{f_{11}}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_{11}}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut  $w_{f_{11}}$  dan rumus label sisi  $f_{11}$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$W_{f_{11}} = w_{f_{11}} + \bigcup_{i=1,2} (f_{11}(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_{11}(x_{1,j}x_{3,j}) + f_{11}(x_{3,j}x_{4,j}) + f_{11}(x_{1,j}x_{2,j+1})$$

$$\begin{aligned}
 &+f_{11}(x_{2,j}x_{3,j+1}) + f_{11}(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_{11}(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_{11}(x_{2,j}x_{3,j}) \\
 = &\bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - 10i + j + 22) + (6n \\
 &-j + 4) + (7n - j + 4) + (6n - j + 13) + (6n + j + 12) + (8n - j + 13) \\
 &+(9n - j + 13) + (4n - 20 + (j + 1) + 22) \\
 = &\bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - 10i + j + 22) + \\
 &(46n - 3j + 62)
 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_{11}} = \{54n+96, 54n+119, \dots, 77n + 73\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 54n + 96 + (n - 1)23 = 77n + 73$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(54n + 96, 23) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.11 merupakan contoh pelabelan selimut  $(54n + 96, 23) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ .



Gambar 4.11 Pelabelan selimut  $(54n+96, 23)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

$\diamond$  **Teorema 4.2.12.** *Ada pelabelan selimut  $(64n + 68, 21) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.12 dengan fungsi bijektif  $f_1(x_{i,j})$  untuk  $i = 2, 3$  dan  $i = 1, 4$  maka  $f_{12}(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$  sehingga  $w_{f_{12}} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$ . Labeli sisi *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada

teorema 4.2.5 ke dalam teorema 4.2.12 dimana  $f_{12} = f_5$ , maka label sisinya:  $f_{12}(x_{4,j}x_{3,j+1}) = f_5(x_{4,j}x_{3,j+1})$  juga dilabeli dengan label sisi  $f_{12}$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_{12}(x_{2,j}x_{3,j}) &= 4n + j + 2, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_{12}(x_{i,j}x_{i+1,j}) &= 6n - j + \frac{3i + 3}{2} + 1, \text{ untuk } i = 1, 3, 1 \leq j \leq n \\ f_{12}(x_{1,j}x_{3,j}) &= 7n - j + 7, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_{12}(x_{2,j}x_{3,j+1}) &= 8n - j + 7, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_{12}(x_{1,j}x_{2,j+1}) &= 9n - j + 7, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_{12}(x_{1,j}x_{3,j+1}) &= 10n - j + 7, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

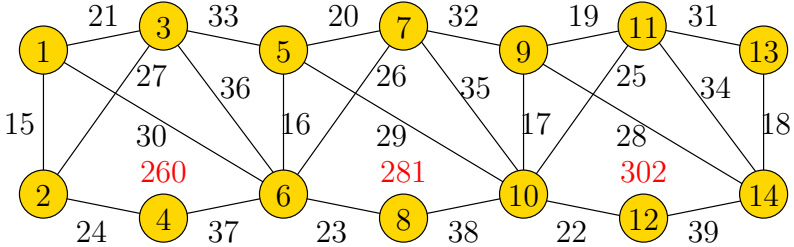
Jika  $W_{f_{12}}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_{12}}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut  $w_{f_{12}}$  dan rumus label sisi  $f_{12}$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{12}} &= w_{f_{12}} + \bigcup_{i=1,3} f_{12}(x_{i,j}x_{i+1,j}) + f_{12}(x_{2,j}x_{3,j}) + f_{12}(x_{1,j}x_{3,j}) + f_{12}(x_{2,j}x_{3,j+1}) \\ &\quad + f_{12}(x_{1,j}x_{2,j+1}) + f_{12}(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_{12}(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_{12}(x_{2,j}x_{3,j}) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,3} (6n - j + \frac{3i+3}{2} + 1) + \\ &\quad (4n + j + 2) + (7n - j + 7) + (8n - j + 7) + (9n - j + 7) + (10n - j \\ &\quad + 7) + (10n + j + 6) + (4n + j + 1 + 2) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,3} (6n - j + \frac{3i+3}{2} + 1) + \\ &\quad (44n - j + 39) \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_{12}} = \{64n + 68, 64n + 89, \dots, 85n + 47\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 64n + 68 + (n - 1)21 = 85n + 47$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(64n + 68, 21) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$



Gambar 4.12 merupakan contoh pelabelan selimut  $(64n + 68, 21) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ .



Gambar 4.12 Pelabelan selimut  $(64n + 68, 21) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

◇ **Teorema 4.2.13.** Ada pelabelan selimut  $(61n + 79, 19) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan Shack  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .

**Bukti.** Labeli titik Shack  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.13 dengan fungsi bijektif  $f_1(x_{i,j})$  untuk  $i = 2, 3$  dan  $i = 1, 4$  maka  $f_{13}(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$  sehingga  $w_{f_{13}} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$ . Labeli sisi Shack  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.12 ke dalam teorema 4.2.13 dimana  $f_{13} = f_{12}$ , maka label sisinya:  $f_{13}(x_{2,j}x_{3,j}) = f_{12}(x_{2,j}x_{3,j})$  juga dilabeli dengan label sisi  $f_{12}$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f_{13}(x_{i,j}x_{i+1,j}) &= 6n + 3i - j + 1, \text{ untuk } i = 1, 3, 1 \leq j \leq n \\
 f_{13}(x_{1,j}x_{3,j}) &= 7n - j + 4, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
 f_{13}(x_{2,j}x_{3,j+1}) &= 7n - j + 10, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
 f_{13}(x_{1,j}x_{2,j+1}) &= 8n - j + 10, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
 f_{13}(x_{1,j}x_{3,j+1}) &= 9n - j + 10, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
 f_{13}(x_{4,j}x_{3,j+1}) &= 10n - j + 10, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n
 \end{aligned}$$

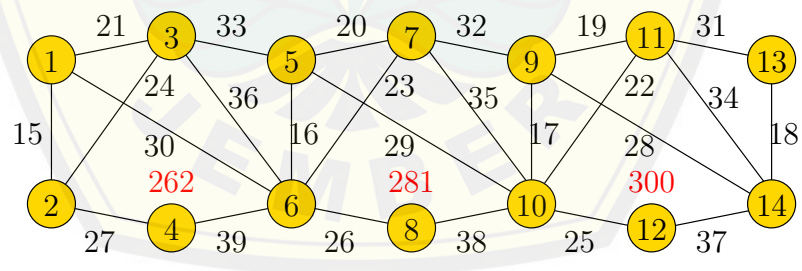
Jika  $W_{f_{13}}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada Shack  $(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_{13}}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut  $w_{f_{13}}$  dan rumus label

sisi  $f_{13}$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_{13}} &= w_{f_{13}} + \bigcup_{i=1,3} f_{13}(x_{i,j}x_{i+1,j}) + f_{13}(x_{2,j}x_{3,j}) + f_{13}(x_{1,j}x_{3,j}) + f_{13}(x_{2,j}x_{3,j+1}) \\
 &\quad + f_{13}(x_{1,j}x_{2,j+1}) + f_{13}(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_{13}(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_{13}(x_{2,j}x_{3,j}) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,3} (6n + 3i - j + 1) + (4n \\
 &\quad + j + 2) + (7n - j + 4) + (7n - j + 10) + (8n - j + 10) + (9n - j + 10) \\
 &\quad + (10n - j + 10) + (4n + j + 1 + 2) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,3} (6n + 3i - j + 1) + (49n \\
 &\quad - 3j + 49)
 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_{13}} = \{61n + 79, 61n + 98, \dots, 80n + 60\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 61n + 79 + (n - 1)19 = 80n + 60$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(61n + 79, 19) - C_6^3$  anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.13 merupakan contoh pelabelan selimut  $(61n + 79, 19) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ .



Gambar 4.13 Pelabelan selimut  $(61n + 79, 19) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

$\diamond$  **Teorema 4.2.14.** *Ada pelabelan selimut  $(72n + 48, 17) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.14 dengan fungsi bijektif  $f_1(x_{i,j})$  untuk  $i = 2, 3$  dan  $i = 1, 4$  maka  $f_{14}(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$  sehingga  $w_{f_{14}} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$ . Labeli sisi *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  dengan fungsi bijektif  $f_{14}$  yang dapat dituliskan sebagai berikut:

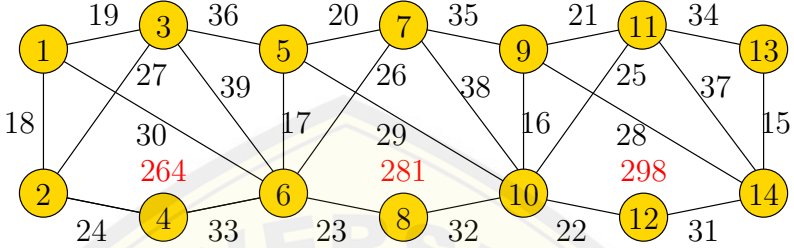
$$\begin{aligned} f_{14}(x_{2,j}x_{3,j}) &= 5n - j + 4, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_{14}(x_{1,j}x_{2,j}) &= 5n + j + 3, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_{14}(x_{3,j}x_{4,j}) &= 7n - j + 4, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_{14}(x_{1,j}x_{3,j}) &= 8n - j + 4, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_{14}(x_{2,j}x_{3,j+1}) &= 9n - j + 4, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_{14}(x_{4,j}x_{3,j+1}) &= 10n - j + 4, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_{14}(x_{1,j}x_{2,j+1}) &= 11n - j + 4, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f_{14}(x_{1,j}x_{3,j+1}) &= 12n - j + 4, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

Jika  $W_{f_{14}}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_{14}}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut  $w_{f_{14}}$  dan rumus label sisi  $f_{14}$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{14}} &= w_{f_{14}} + f_{14}(x_{2,j}x_{3,j}) + f_{14}(x_{1,j}x_{2,j}) + f_{14}(x_{3,j}x_{4,j}) + f_{14}(x_{1,j}x_{3,j}) + \\ &f_{14}(x_{2,j}x_{3,j+1}) + f_{14}(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_{14}(x_{1,j}x_{2,j+1}) + f_{14}(x_{1,j}x_{3,j+1}) + \\ &f_{14}(x_{2,j}x_{3,j}) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + (5n - j + 4) + (5n + j \\ &+ 3) + (7n - j + 4) + (8n - j + 4) + (9n - j + 4) + (10n - j + 4) + \\ &(11n - j + 4) + (12n - j + 4) + (5n - (j + 1) + 4) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + 72n - 7j + 34 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_{14}} = \{72n + 48, 72n + 65, \dots, 89n + 31\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 72n + 48 + (n - 1)17 = 89n + 31$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(72n + 48, 17) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.14 merupakan contoh pelabelan selimut  $(72n + 48, 17) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ .



Gambar 4.14 Pelabelan selimut  $(72n + 48, 17) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

$\diamond$  **Teorema 4.2.15.** *Ada pelabelan selimut  $(76n + 44, 16) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.15 dengan fungsi bijektif  $f_1(x_{i,j})$  untuk  $i = 2, 3$  dan  $i = 1, 4$  maka  $f_{15}(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$  sehingga  $w_{f_{15}} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$ . Labeli sisi *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.2, teorema 4.2.3, teorema 4.2.4 juga teorema 4.2.6 ke dalam teorema 4.2.15 di mana  $f_{15} = f_2, f_{15} = f_3, f_{15} = f_4, dan f_{15} = f_6$ , maka label sisinya:  $f_{15}(x_{3,j}x_{4,j}) = f_2(x_{3,j}x_{4,j}), f_{15}(x_{1,j}x_{2,j+1}) = f_3(x_{1,j}x_{2,j+1}), f_{15}(x_{4,j}x_{3,j+1}) = f_6(x_{4,j}x_{3,j+1}), f_{15}(x_{1,j}x_{3,j+1}) = f_4(x_{1,j}x_{3,j+1}), f_{15}(x_{i,j}x_{i+1,j}) = 4n - 3i + 8j + 1$  untuk  $i = 1, 2, 1 \leq j \leq n, f_{15}(x_{1,j}x_{3,j}) = 12n - 8j + 4$  untuk  $1 \leq j \leq n$ , dan  $f_{15}(x_{2,j}x_{3,j+1}) = 4n + 8j$  untuk  $1 \leq j \leq n$ .

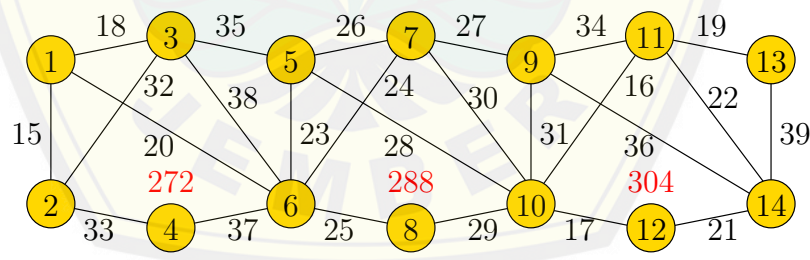
Jika  $W_{f_{15}}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_{15}}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut  $w_{f_{15}}$  dan rumus label

sisi  $f_{15}$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_{15}} &= w_{f_{15}} + \bigcup_{i=1,2} (f_{15}(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f_{15}(x_{1,j}x_{3,j}) + f_{15}(x_{3,j}x_{4,j}) + f_{15}(x_{1,j}x_{2,j+1}) + \\
 & f_{15}(x_{2,j}x_{3,j+1}) + f_{15}(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_{15}(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_{15}(x_{2,j}x_{3,j}) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - 3i + 8j + 1) + (12n - 8j + 4) + (12n - 8j + 5) + (12n - 8j + 7) + (4n + 8j) + (12n - 8j + 9) \\
 & + (12n - 8j + 10) + (4n - 6 + 8(j + 1) + 1) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - 3i + 8j + 1) + (68n - 24j + 38)
 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_{15}} = \{76n + 44, 76n + 60, \dots, 92n + 28\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 76n + 44 + (n - 1)16 = 92n + 28$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(60n + 60, 48) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.15 merupakan contoh pelabelan selimut  $(76n + 44, 16) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ .



Gambar 4.15 Pelabelan selimut  $(76n + 44, 16) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

$\diamond$  **Teorema 4.2.16.** *Ada pelabelan selimut  $(67n + 65, 15) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.16 dengan fungsi bijektif  $f_1(x_{i,j})$  untuk  $i = 2, 3$  dan  $i = 1, 4$  maka  $f_{16}(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$  sehingga  $w_{f_{16}} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$ . Labeli sisi *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.9, teorema 4.2.12 juga teorema 4.2.14 ke dalam teorema 4.2.16 dimana  $f_{16} = f_9, f_{16} = f_{12}, dan f_{16} = f_{14}$  maka label sisinya:  $f_{16}(x_{2,j}x_{3,j}) = f_{14}(x_{2,j}x_{3,j}), f_{16}(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_{12}(x_{i,j}x_{i+1,j}), f_{16}(x_{1,j}x_{3,j}) = f_{12}(x_{1,j}x_{3,j}), f_{16}(x_{2,j}x_{3,j}) = f_{12}(x_{2,j}x_{3,j}), f_{16}(x_{1,j}x_{3,j+1}) = f_9(x_{1,j}x_{3,j+1}), f_{16}(x_{4,j}x_{3,j+1}) = 9n - j + 7$  untuk  $1 \leq j \leq n, f_{16}(x_{1,j}x_{2,j+1}) = 10n - j + 7$  untuk  $1 \leq j \leq n$ .

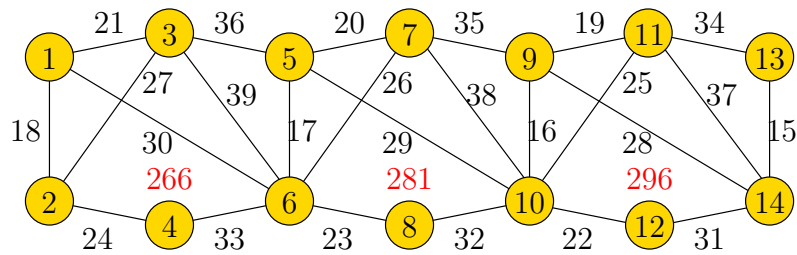
Jika  $W_{f_{16}}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_{16}}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut  $w_{f_{16}}$  dan rumus label sisi  $f_{16}$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{16}} &= w_{f_{16}} + \bigcup_{i=1,3} f_{16}(x_{i,j}x_{i+1,j}) + f_{16}(x_{2,j}x_{3,j}) + f_{16}(x_{1,j}x_{3,j}) + f_{16}(x_{2,j}x_{3,j}) + \\ &\quad f_{16}(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_{16}(x_{1,j}x_{2,j+1}) + f_{16}(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_{16}(x_{2,j}x_{3,j}) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,3} (6n - j + \frac{3i+3}{2} + 1) + \\ &\quad (5n - j + 4) + (7n - j + 7) + (8n - j + 7) + (9n - j + 7) + (10n - j \\ &\quad + 7) + (11n - j + 7) + (5n - (j + 1) + 4) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,3} (6n - j + \frac{3i+3}{2} + 1) + \\ &\quad (55n - 7j + 42) \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_{16}} = \{67n + 65, 67n + 80, \dots, 82n + 50\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 67n + 65 + (n - 1)15 = 82n + 50$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(67n + 65, 15) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.16 merupakan contoh pelabelan selimut  $(67n + 65, 15) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ .





Gambar 4.16 Pelabelan selimut  $(67n + 65, 15)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

◇ **Teorema 4.2.17.** *Ada pelabelan selimut  $(84n + 36, 0) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan Shack  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik Shack  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1 ke dalam teorema 4.2.17 dengan fungsi bijektif  $f_1(x_{i,j})$  untuk  $i = 2, 3$  dan  $i = 1, 4$  maka  $f_{17}(x_{i,j}) = f_1(x_{i,j})$  sehingga  $w_{f_{17}} = w_{f_1} = \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$ . Labeli sisi Shack  $(C_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.2.1, teorema 4.2.2, teorema 4.2.3, teorema 4.2.4 juga teorema 4.2.6 ke dalam teorema 4.2.17 dimana  $f_17 = f_1, f_17 = f_2, f_17 = f_3, f_17 = f_4$  dan  $f_17 = f_6$  maka label sisinya:  $f_{17}(x_{i,j}x_{i+1,j}) = f_1(x_{i,j}x_{i+1,j}), f_{17}(x_{3,j}x_{4,j}) = f_2(x_{3,j}x_{4,j}), f_{17}(x_{1,j}x_{2,j+1}) = f_3(x_{1,j}x_{2,j+1}), f_{17}(x_{4,j}x_{3,j+1}) = f_6(x_{4,j}x_{3,j+1}), f_{17}(x_{1,j}x_{3,j+1}) = f_4(x_{1,j}x_{3,j+1}), f_{17}(x_{1,j}x_{3,j}) = 12n - 8j + 6$  untuk  $1 \leq j \leq n$ , dan  $f_{17}(x_{2,j}x_{3,j+1}) = 12n - 8j + 8$  untuk  $1 \leq j \leq n$ .

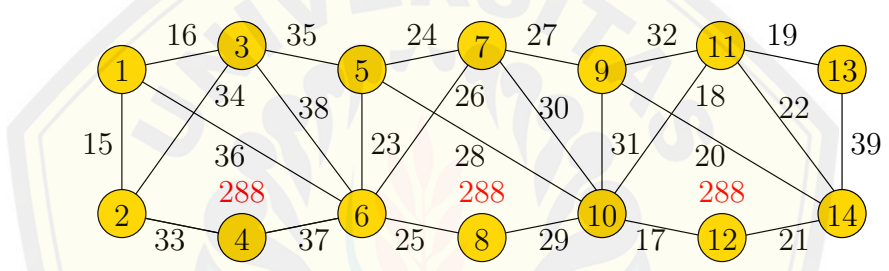
Jika  $W_{f_{17}}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada Shack  $(C_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka  $W_{f_{17}}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot titik selimut  $w_{f_{17}}$  dan rumus label sisi  $f_{17}$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{17}} &= w_{f_{17}} + \bigcup_{i=1,2} f_{17}(x_{i,j}x_{i+1,j}) + f_{17}(x_{3,j}x_{4,j}) + f_{17}(x_{1,j}x_{3,j}) + f_{17}(x_{1,j}x_{2,j+1}) + \\ &\quad f_{17}(x_{2,j}x_{3,j+1}) + f_{17}(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f_{17}(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f_{17}(x_{2,j}x_{3,j}) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (12n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -8j + 5) + (12n - 8j + 6) + (12n - 8j + 7) + (12n - 8j + 8) + (12n - \\
 & 8j + 9) + (12n - 8j + 10) + (4n - 2 + 8(j + 1) - 3) \\
 = & \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (76n \\
 & - 40j + 48)
 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{f_{17}} = \{84n + 36, 84n + 36, \dots, 84n + 36\}$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)b = 84n + 36 + (n - 1)0 = 84n + 36$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(84n + 36, 0) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.17 merupakan contoh pelabelan selimut  $(84n + 36, 0) - C_6^3$  anti ajaib pada shackle dari graf  $C_6^3$



Gambar 4.17 Pelabelan selimut  $(84n + 36, 0) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$

**4.3 Pelabelan Selimut  $(a, d) - C_6^3$ -Anti Ajaib Super pada Gabungan Shackle dari Graf Siklus dengan Busur yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$**

Penentuan fungsi bijektif pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  akan disesuaikan dengan nilai beda  $(d)$  yang telah ditetapkan, maka sama seperti shackle dari graf  $C_6^3$  konektif juga digunakan metode yang terdiri dari beberapa langkah untuk menentukan pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$ . Metode ini diawali dengan menggunakan pendeteksian

pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku pada batas  $i, j$  yang telah ditemukan. Dalam penentuan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi barisan aritmatika yang pada akhirnya fungsi ini merupakan fungsi bijektif pada graf yang diteliti. Setelah fungsi bijektif diketahui, selanjutnya dilakukan pembuktian secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema yang didapat. Sebagai catatan, teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Berdasarkan hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

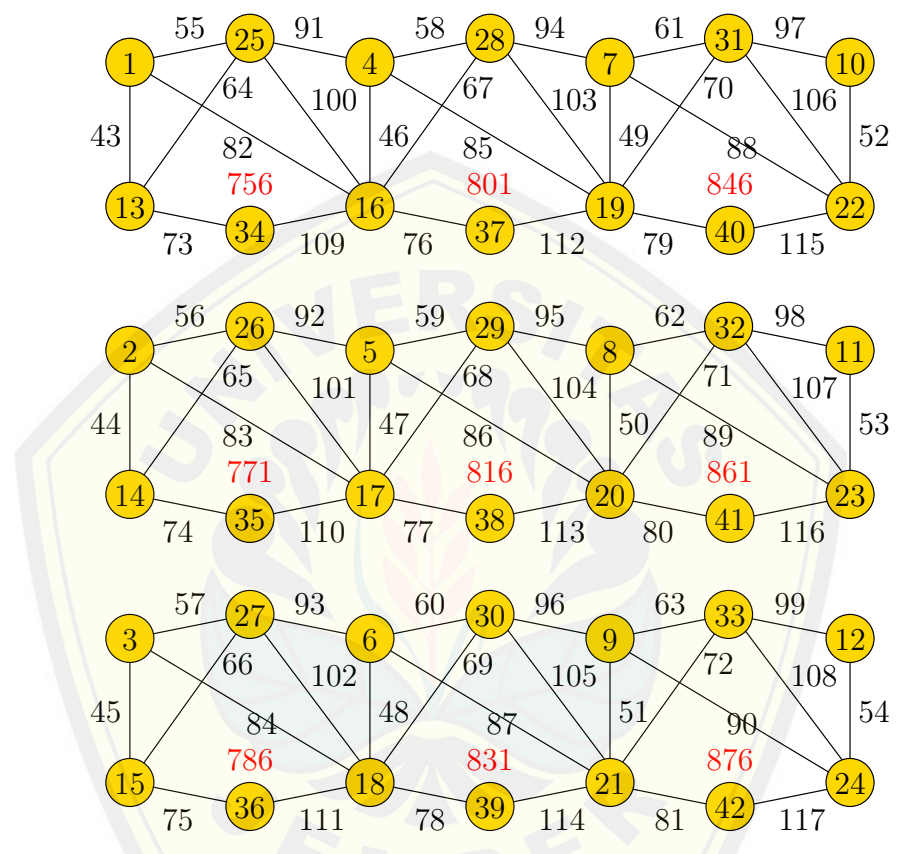
Setelah mengetahui batas atas nilai beda ( $d$ ), langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dengan terlebih dahulu menentukan fungsi bijektif melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika dari titik dan sisi pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$ . Adapun teorema-teorema yang telah ditemukan sebagai berikut:

◇ **Teorema 4.3.1.** *Ada pelabelan selimut  $(41mn+124m+15, 15)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dengan fungsi bijektif  $g_1$  dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g_1(x_{i,j}^k) &= 4mi + mj - 9m + k, \text{ untuk } i^k = 2, 3, 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g_1(x_{i,j}^k) &= mn + mi + mj + 3m + k, \text{ untuk } i^k = 1, 4, 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Jika  $w_{g_1}$  didefinisikan sebagai bobot titik selimut dari pelabelan selimut total pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dimana bobot selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 6 label titik dari  $(mC_6^3, e, n)$  yang menjadi selimut pada gabungan



Gambar 4.18 Pelabelan selimut  $(41mn + 124m + 15, 15)-C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$

*Shack*  $(mC_6^3, e, n)$ , maka fungsi bijektif  $w_{g_1}$  dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 w_{g_1} &= \bigcup_{i=2,3} g_1(x_{i,j}^k) + \bigcup_{i=1,4} g_1(x_{i,j}^k) + \bigcup_{i=2,3} g_1(x_{i,j+1}^k) \\
 &= \bigcup_{i=2,3} (4mi + mj - 9m + k) + \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \\
 &\quad \bigcup_{i=2,3} (4mi + m(j+1) - 9m + k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (4mi + mj - 9m + k + \\
 &\quad 4mi + m(j+1) - 9m + k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k)
 \end{aligned}$$

Labeli sisi gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dengan fungsi bijektif  $g_1$  yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 g_1(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) &= 2mn - 4mi + mj + 15m + k, \text{ untuk } i^k = 1, 2, 1 \leq j^k \leq n, \\
 &\quad 1 \leq k \leq m \\
 g_1(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) &= 3mn + mj + 11m + k, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 g_1(x_{3,j}^k x_{4,j}^k) &= 4mn + mj + 11m + k, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 g_1(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) &= 5mn + mj + 11m + k, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 g_1(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) &= 6mn + mj + 11m + k, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 g_1(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) &= 7mn + mj + 11m + k, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 g_1(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) &= 8mn + mj + 11m + k, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m
 \end{aligned}$$

Jika  $W_{g_1}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut  $w_{g_1}$  dengan label sisinya maka  $W_{g_1}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah 6 label titik dari  $mC_6^3, e, n$  yang menjadi selimut pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dan merumuskan 9 label sisi  $g_1$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan

sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{g_1} &= w_{g_1} + \bigcup_{i=1,2} g_1(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) + g_1(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) + g_1(x_{3,j}^k x_{4,j}^k) + g_1(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) + \\
 &\quad g_1(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) + g_1(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_1(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_1(x_{2,j}^k x_{3,j}^k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\
 &\quad \bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + (3mn + mj + 11m + k) + (4mn + \\
 &\quad mj + 11m + k) + (5mn + mj + 11m + k) + (6mn + mj + 11m + k) + \\
 &\quad (7mn + mj + 11m + k) + (8mn + mj + 11m + k) + (2mn - 8m + \\
 &\quad m(j + 1) + 15m + k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\
 &\quad \bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + 35mn + 7mj + 74m + 7k
 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{g_1} = \{41mn + 124m + 15, 41mn + 124m + 30, \dots, 56mn + 124m\}$ . Karena  $U_n = a + (s - 1)b = 41mn + 124m + 15 + (mn - 1)15 = 56mn + 124m$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(41mn + 124m + 15, 15)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

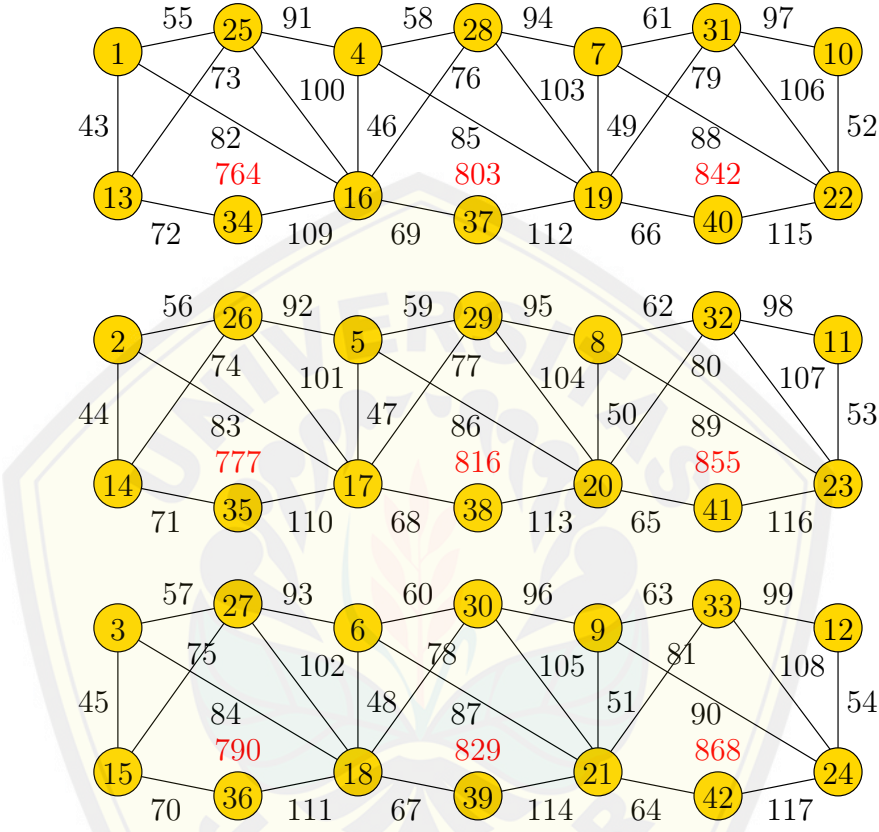
Gambar 4.18 merupakan contoh pelabelan selimut  $(41mn + 124m + 15, 15)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$ .

$\diamond$  **Teorema 4.3.2.** *Ada pelabelan selimut  $(42mn + 124m + 14, 13)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.3.1 ke dalam teorema 4.3.2 dengan fungsi bijektif  $g_1(x_{1,j}^k)$  untuk  $i^k = 2, 3$  dan  $i^k = 1, 4$  maka  $g_2(x_{1,j}^k) = g_1(x_{1,j}^k)$  sehingga  $w_{g_2} = w_{g_1} = \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$  dan  $1 \leq k \leq m$ . Labeli sisi gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema



4.3.1 ke dalam teorema 4.3.2 dimana  $g_2 = g_1$ , maka label sisinya:  $g_2(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) = g_1(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k)$ ,  $g_2(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) = g_1(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k)$ ,  $g_2(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) = g_1(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k)$ ,  $g_2(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) = g_1(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k)$ ,  $g_2(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) = g_1(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k)$ ,  $g_2(x_{3,j}^k x_{4,j}^k) = 4mn - mj + 13m - k + 1$  untuk  $1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m$ , dan  $g_2(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) = 4mn + mj + 11m + k$  untuk  $1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m$ .



Gambar 4.19 Pelabelan selimut  $(42mn + 124m + 14, 13)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$

Jika  $W_{g_2}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut  $w_{g_2}$  dengan label sisinya maka  $W_{g_2}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah 6 label titik dari  $mC_6^3, e, 3$  yang menjadi selimut pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dan merumuskan 9 label sisi  $g_2$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan

sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{g_2} &= w_{g_2} + \bigcup_{i=1,2} g_2(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) + g_2(x_{3,j}^k x_{4,j}^k) + g_2(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) + g_2(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) + \\
 &\quad g_2(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) + g_2(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_2(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_2(x_{2,j}^k x_{3,j}^k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\
 &\quad \bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + (4mn - mj + 13m - k + 1) + (4mn \\
 &\quad + mj + 11m + k) + (5mn + mj + 11m + k) + (6mn + mj + 11m + k) + \\
 &\quad (7mn + mj + 11m + k) + (8mn + mj + 11m + k) + (2mn - 8m + \\
 &\quad m(j + 1) + 15m + k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\
 &\quad \bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + 36mn + 5mj + 76m + 5k + 1
 \end{aligned}$$

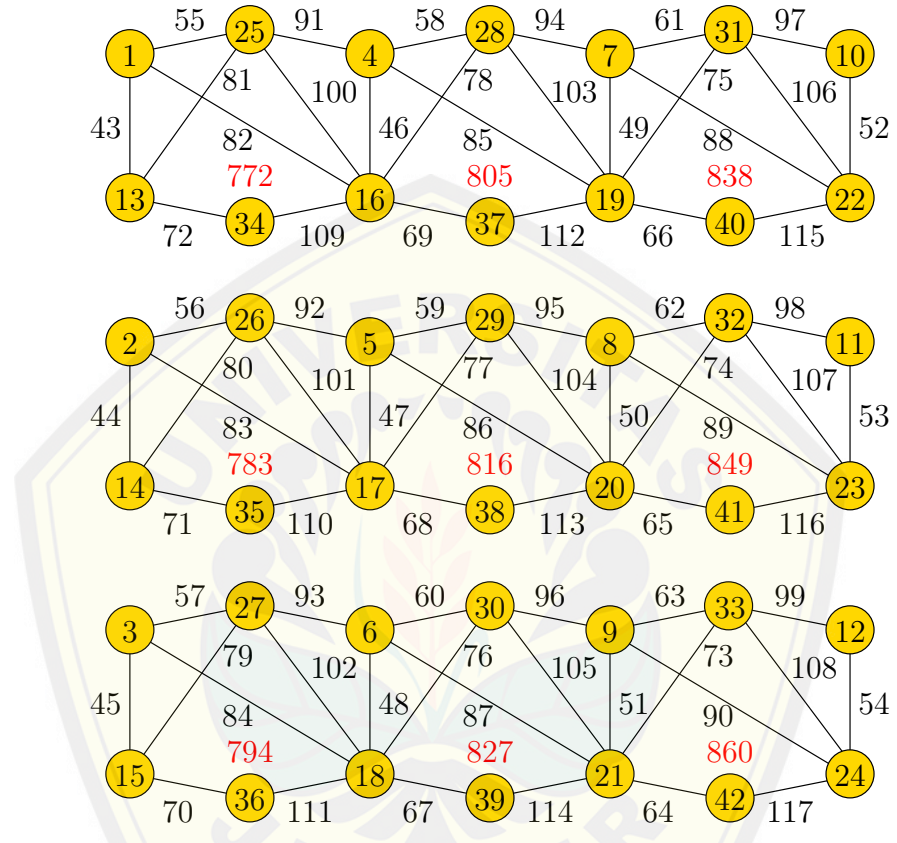
Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{g_2} = \{42mn + 124m + 14, 42mn + 124m + 27, \dots, 56mn + 124m\}$ . Karena  $U_n = a + (s - 1)b = 42mn + 124m + 14 + (mn - 1)13 = 55mn + 124m + 1$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(42mn + 124m + 14, 13)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.19 merupakan contoh pelabelan selimut  $(42mn + 124m + 14, 13)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$ .

$\diamond$  **Teorema 4.3.3.** *Ada pelabelan selimut  $(43mn + 124m + 13, 11)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.3.1 ke dalam teorema 4.3.3 dengan fungsi bijektif  $g_1(x_{1,j}^k)$  untuk  $i^k = 2, 3$  dan  $i^k = 1, 4$  maka  $g_3(x_{1,j}^k) = g_1(x_{1,j}^k)$  sehingga  $w_{g_3} = w_{g_{18}} = \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$  dan  $1 \leq k \leq m$ . Labeli sisi gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.3.1 juga

teorema 4.3.2 ke dalam teorema 4.3.3 dimana  $g_3 = g_1$  dan  $g_3 = g_2$ , maka label sisinya:  $g_3(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) = g_1(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k), g_3(x_{3,j}^k x_{4,j}^k) = g_2(x_{3,j}^k x_{4,j}^k), g_3(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) = g_1(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k), g_3(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) = g_1(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k), g_3(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) = g_1(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k), g_3(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) = g_1(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k), g_3(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) = 5mn - mj + 13m - k + 1$  untuk  $1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m$ .



Gambar 4.20 Pelabelan selimut  $(43mn + 124m + 13, 11)-C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$

Jika  $W_{g_3}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut  $w_{g_3}$  dengan label sisinya maka  $W_{g_3}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah 6 label titik dari  $mC_6^3, e, 3$  yang menjadi selimut pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dan merumuskan 9 label sisi  $g_3$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan

sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{g_3} &= w_{g_3} + \bigcup_{i=1,2} g_3(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) + g_3(x_{3,j}^k x_{4,j}^k) + g_3(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) + g_3(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) + \\
 &\quad g_3(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) + g_3(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_3(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_3(x_{2,j}^k x_{3,j}^k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\
 &\quad \bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + (4mn - mj + 13m - k + 1) + (5mn \\
 &\quad -mj + 13m - k + 1) + (5mn + mj + 11m + k) + (6mn + mj + 11m \\
 &\quad +k) + (7mn + mj + 11m + k) + (8mn + mj + 11m + k) + (2mn - 8m \\
 &\quad +m(j + 1) + 15m + k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\
 &\quad \bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + 37mn + 3mj + 78m + 3k + 2
 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{g_3} = \{43mn + 124m + 13, 43mn + 124m + 24, \dots, 54mn + 124m + 2\}$ . Karena  $U_n = a + (s - 1)b = 43mn + 124m + 13 + (mn - 1)11 = 54mn + 124m + 2$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(43mn + 124m + 13, 11)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.20 merupakan contoh pelabelan selimut  $(42mn + 124m + 14, 11)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan *shackle* dari graf  $C_6^3$ .

$\diamond$  **Teorema 4.3.4.** *Ada pelabelan selimut  $(44mn + 124m + 12, 9)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan *shackle* dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.3.1 ke dalam teorema 4.3.4 dengan fungsi bijektif  $g_1(x_{1,j}^k)$  untuk  $i^k = 2, 3$  dan  $i^k = 1, 4$  maka  $g_4(x_{1,j}^k) = g_1(x_{1,j}^k)$  sehingga  $w_{g_4} = w_{g_1} = \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$  dan  $1 \leq k \leq m$ . Labeli sisi gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.3.1, teo-

rema 4.3.2 juga teorema 4.3.3 ke dalam teorema 4.3.4 dimana  $g_4 = g_1, g_4 = g_2$  dan  $g_4 = g_3$ , maka label sisinya:  $g_4(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) = g_1(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k), g_4(x_{3,j}^k x_{4,j}^k) = g_2(x_{3,j}^k x_{4,j}^k), g_4(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) = g_3(x_{1,j}^k x_{3,j}^k), g_4(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) = g_1(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k), g_4(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) = g_1(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k), g_4(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) = 6mn - mj + 13m - k + 1$  untuk  $1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m$  dan  $g_4(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) = 6mn + mj + 11m + k$  untuk  $1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m$ .

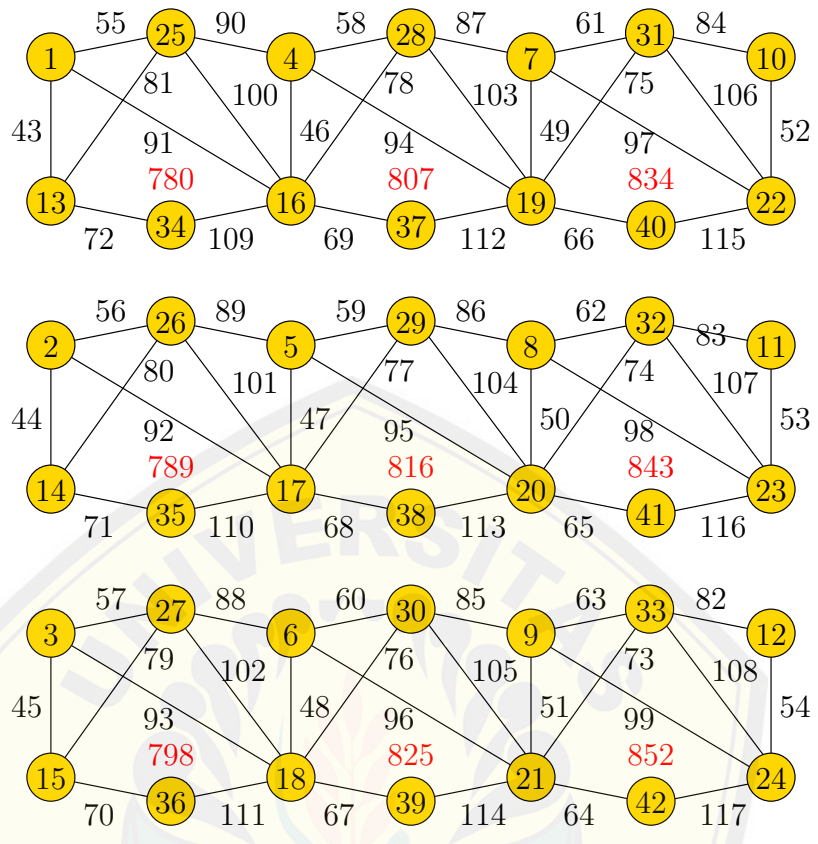
Jika  $W_{g_4}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut  $w_{g_4}$  dengan label sisinya maka  $W_{g_4}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah 6 label titik dari  $mC_6^3, e, 3$  yang menjadi selimut pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dan merumuskan 9 label sisi  $g_4$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{g_4} &= w_{g_4} + \bigcup_{i=1,2} g_4(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) + g_4(x_{3,j}^k x_{4,j}^k) + g_4(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) + g_4(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) + \\ &g_4(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_4(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_4(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_4(x_{2,j}^k x_{3,j}^k) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\ &\bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + (4mn - mj + 13m - k + 1) + (5mn \\ &- mj + 13m - k + 1) + (6mn - mj + 13m - k + 1) + (6mn + mj + 11m \\ &+ k) + (7mn + mj + 11m + k) + (8mn + mj + 11m + k) + (2mn - 8m + \\ &m(j + 1) + 15m + k) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\ &\bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + 38mn + mj + 80m + k + 3 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{g_4} = \{44mn + 124m + 12, 44mn + 124m + 21, \dots, 53mn + 124m + 3\}$ . Karena  $U_n = a + (s - 1)b = 44mn + 124m + 12 + (mn - 1)9 = 53mn + 124m + 3$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(44mn + 124m + 12, 9)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.21 merupakan contoh pelabelan selimut  $(44mn + 124m + 12, 11)$ -

$C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$ .



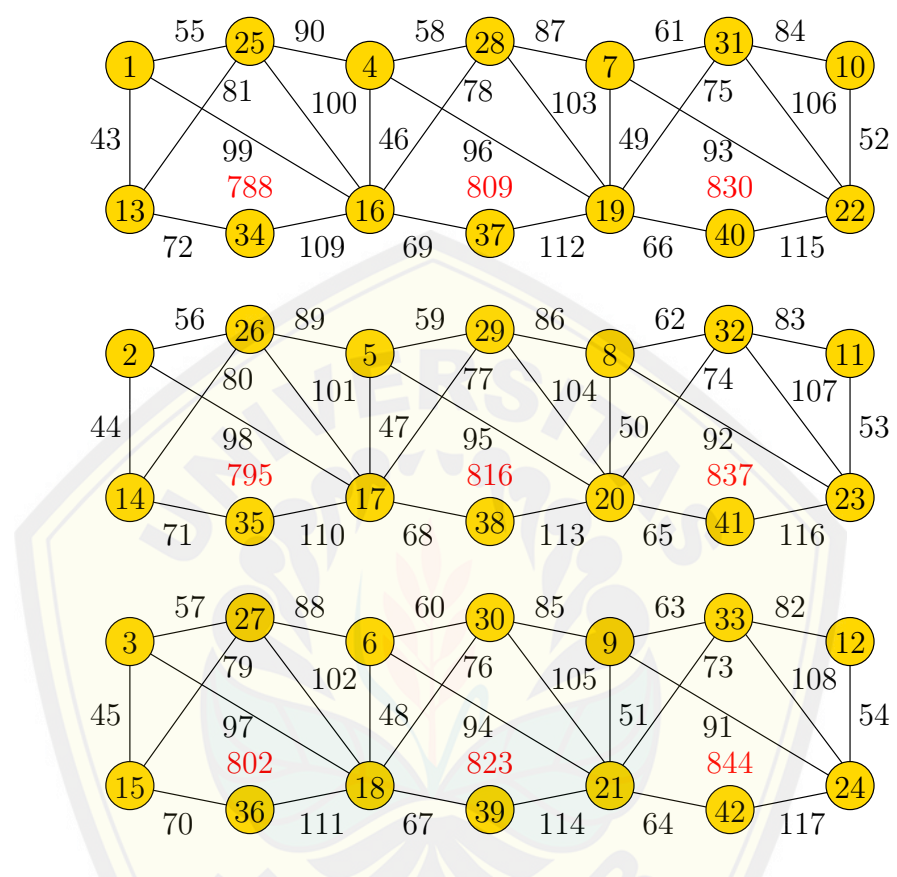
Gambar 4.21 Pelabelan selimut  $(44mn + 124m + 12, 9)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$

◇ **Teorema 4.3.5.** *Ada pelabelan selimut  $(45mn + 124m + 11, 7)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik gabungan  $Shack(mC_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.3.1 ke dalam teorema 4.3.5 dengan fungsi bijektif  $g_1(x_{1,j}^k)$  untuk  $i^k = 2, 3$  dan  $i^k = 1, 4$  maka  $g_5(x_{1,j}^k) = g_1(x_{1,j}^k)$  sehingga  $w_{g_5} = w_{g_1} = \bigcup_{i=1,4}(mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3}(8mi + 2mj - 17m + 2k)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$  dan  $1 \leq k \leq m$ . Labeli sisi gabungan  $Shack(mC_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.3.1, teorema 4.3.2, teorema 4.3.3 juga teorema 4.3.4 ke dalam teorema 4.3.5



dimana  $g_5 = g_1, g_5 = g_2, g_5 = g_3$  dan  $g_5 = g_4$ , maka label sisinya:  $g_5(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) = g_1(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k), g_5(x_{3,j}^k x_{4,j}^k) = g_2(x_{3,j}^k x_{4,j}^k), g_5(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) = g_3(x_{1,j}^k x_{3,j}^k), g_5(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) = g_4(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k), g_5(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) = g_1(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k), g_5(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) = g_1(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k), g_5(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) = 7mn - mj + 13m - k + 1$  untuk  $1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m$ .



Gambar 4.22 Pelabelan selimut  $(45mn + 124m + 11, 7)-C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$

Jika  $W_{g_5}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut  $w_{g_5}$  dengan label sisinya maka  $W_{g_5}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah 6 label titik dari  $(mC_6^3, e, 3)$  yang menjadi selimut pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dan merumuskan 9 label sisi  $g_5$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan

sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{g_5} &= w_{g_5} + \bigcup_{i=1,2} g_5(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) + g_5(x_{3,j}^k x_{4,j}^k) + g_5(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) + g_5(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) + \\
 &\quad g_5(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_5(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_5(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_5(x_{2,j}^k x_{3,j}^k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\
 &\quad \bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + (4mn - mj + 13m - k + 1) + (5mn \\
 &\quad - mj + 13m - k + 1) + (6mn - mj + 13m - k + 1) + (7mn - mj + \\
 &\quad 13m - k + 1) + (7mn + mj + 11m + k) + (8mn + mj + 11m + k) + \\
 &\quad (2mn - 8m + m(j + 1) + 15m + k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\
 &\quad \bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + 39mn - mj + 82m - k + 4
 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{g_5} = \{45mn + 124m + 11, 45mn + 124m + 18, \dots, 54mn + 124m + 2\}$ . Karena  $U_n = a + (s - 1)b = 45mn + 124m + 11 + (mn - 1)7 = 52mn + 124m + 4$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(45mn + 124m + 11, 7)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.22 merupakan contoh pelabelan selimut  $(45mn + 124m + 11, 7)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$ .

$\diamond$  **Teorema 4.3.6.** *Ada pelabelan selimut  $(46mn + 124m + 10, 5)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.3.1 ke dalam teorema 4.3.6 dengan fungsi bijektif  $g_1(x_{1,j}^k)$  untuk  $i^k = 2, 3$  dan  $i^k = 1, 4$  maka  $g_6(x_{1,j}^k) = g_1(x_{1,j}^k)$  sehingga  $w_{g_6} = w_{g_1} = \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$  dan  $1 \leq k \leq m$ . Labeli sisi gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema

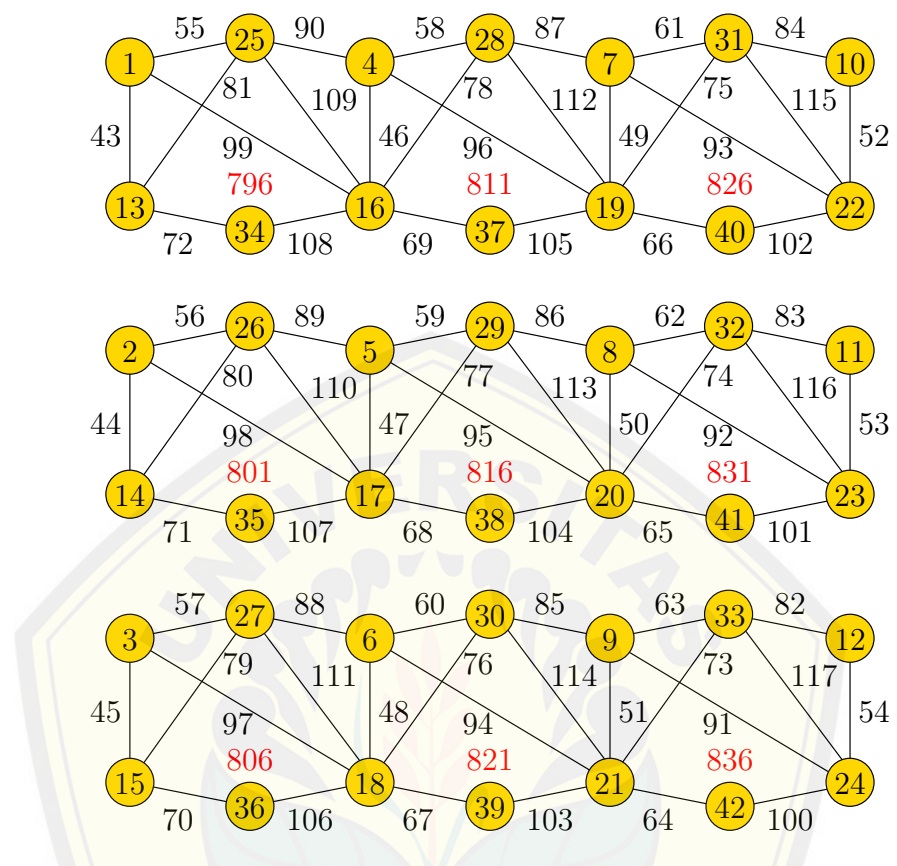
4.3.1, teorema 4.3.2, teorema 4.3.3, teorema 4.3.4 juga teorema 4.3.5 ke dalam teorema 4.3.6 dimana  $g_6 = g_1, g_6 = g_2, g_6 = g_3, g_6 = g_4$  dan  $g_6 = g_5$ , maka label sisinya:  $g_6(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) = g_1(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k), g_6(x_{3,j}^k x_{4,j}^k) = g_2(x_{3,j}^k x_{4,j}^k), g_6(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) = g_3(x_{1,j}^k x_{3,j}^k), g_6(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) = g_4(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k), g_6(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) = g_5(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k), g_6(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) = g_1(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k)$  dan  $g_6(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) = 8mn - mj + 13m - k + 1$  untuk  $1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m$ .

Jika  $W_{g_6}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut  $w_{g_6}$  dengan label sisinya maka  $W_{g_6}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah 6 label titik dari  $mC_6^3, e, 3$  yang menjadi selimut pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dan merumuskan 9 label sisi  $g_6$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{g_6} &= w_{g_6} + \bigcup_{i=1,2} g_6(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) + g_6(x_{3,j}^k x_{4,j}^k) + g_6(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) + g_6(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) + \\
 &g_6(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_6(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_6(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_6(x_{2,j}^k x_{3,j}^k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\
 &\bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + (4mn - mj + 13m - k + 1) + (5mn \\
 &- mj + 13m - k + 1) + (6mn - mj + 13m - k + 1) + (7mn - mj + 13m \\
 &- k + 1) + (8mn - mj + 13m - k + 1) + (8mn + mj + 11m + k) + (2mn \\
 &- 8m + m(j + 1) + 15m + k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\
 &\bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + 40mn - 3mj + 84m - 3k + 5
 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{g_6} = \{46mn + 124m + 10, 46mn + 124m + 15, \dots, 51mn + 124m + 5\}$ . Karena  $U_n = a + (s - 1)b = 46mn + 124m + 10 + (mn - 1)5 = 51mn + 124m + 5$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(46mn + 124m + 10, 5)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.23 merupakan contoh pelabelan selimut  $(46mn + 124m + 10, 5)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$ .

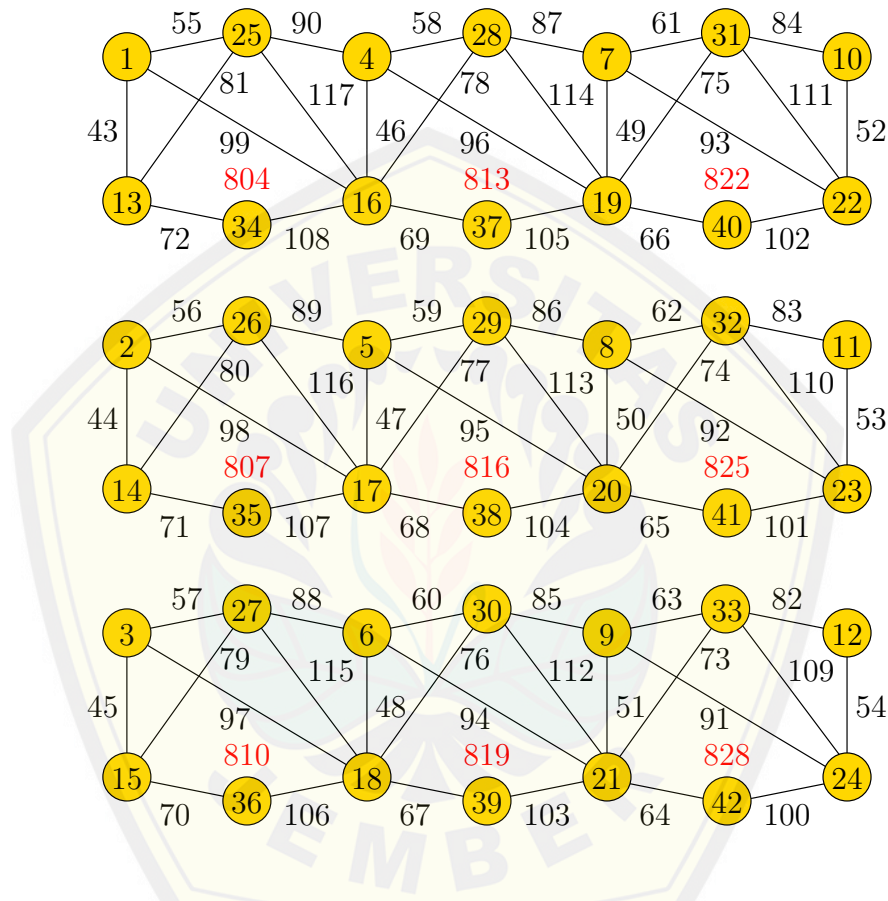


Gambar 4.23 Pelabelan selimut  $(46mn + 124m + 10, 5)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$

◇ **Teorema 4.3.7.** *Ada pelabelan selimut  $(47mn+124m+9, 3)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan Shack  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik gabungan Shack  $(mC_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.3.1 ke dalam teorema 4.3.7 dengan fungsi bijektif  $g_1(x_{1,j}^k)$  untuk  $i^k = 2, 3$  dan  $i^k = 1, 4$  maka  $g_7(x_{1,j}^k) = g_1(x_{1,j}^k)$  sehingga  $w_{g_7} = w_{g_1} = \bigcup_{i=1,4}(mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3}(8mi + 2mj - 17m + 2k)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$  dan  $1 \leq k \leq m$ . Labeli sisi gabungan Shack  $(mC_6^3, e, n)$  yang terdapat pada teorema 4.3.1, teorema 4.3.2,

teorema 4.3.3, teorema 4.3.4, teorema 4.3.5 juga teorema 4.3.6 ke dalam teorema 4.3.7 dimana  $g_7 = g_1, g_7 = g_2, g_7 = g_3, g_7 = g_4, g_7 = g_5$  dan  $g_7 = g_6$ , maka label sisinya:  $g_7(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) = g_1(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k), g_7(x_{3,j}^k x_{4,j}^k) = g_2(x_{3,j}^k x_{4,j}^k), g_7(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) = g_3(x_{1,j}^k x_{3,j}^k), g_7(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) = g_4(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k), g_7(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) = g_5(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k), g_7(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) = g_6(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k)$  dan  $g_7(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) = 9mn - mj + 13m - k + 1$  untuk  $1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m$ .



Gambar 4.24 Pelabelan selimut  $(47mn+124m+9, 3)-C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$

Jika  $W_{g_7}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut  $w_{g_7}$  dengan label sisinya maka  $W_{g_7}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah 6 label titik dari  $mC_6^3, e, 3$  yang menjadi selimut pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dan merumuskan 9 label sisi  $g_7$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan

sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{g_7} &= w_{g_7} + \bigcup_{i=1,2} g_7(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) + g_7(x_{3,j}^k x_{4,j}^k) + g_7(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) + g_7(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) + \\
 &\quad g_7(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_7(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_7(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_7(x_{2,j}^k x_{3,j}^k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\
 &\quad \bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + (4mn - mj + 13m - k + 1) + (5mn \\
 &\quad - mj + 13m - k + 1) + (6mn - mj + 13m - k + 1) + (7mn - mj + 13m \\
 &\quad - k + 1) + (8mn - mj + 13m - k + 1) + (9mn - mj + 13m - k + 1) + \\
 &\quad (2mn - 8m + m(j + 1) + 15m + k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\
 &\quad \bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + 41mn - 5mj + 86m - 5k + 6
 \end{aligned}$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{g_7} = \{47mn + 124m + 9, 47mn + 124m + 12, \dots, 54mn + 124m + 2\}$ . Karena  $U_n = a + (s - 1)b = 47mn + 124m + 9 + (mn - 1)3 = 50mn + 124m + 6$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(47mn + 124m + 9, 3)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.24 merupakan contoh pelabelan selimut  $(47mn + 124m + 9, 3)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$ .

$\diamond$  **Teorema 4.3.8.** *Ada pelabelan selimut  $(49mn + 114m + 29, 1)$ - $C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dengan fungsi bijektif  $g_1(x_{1,j}^k)$  untuk  $i^k = 2, 3$  dan  $i^k = 1, 4$  maka  $g_8(x_{1,j}^k) = g_1(x_{1,j}^k)$  sehingga  $w_{g_8} = w_{g_1} = \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$  dan  $1 \leq k \leq m$ . Labeli sisi gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dengan fungsi



bijektif  $g_8$  yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 g_8(x_{2,j}^k x_{3,j}^k) &= 2mn + mj + 7m + k, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 g_8(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) &= 4mn - \frac{3mi + 3m}{2} - mj + 15m - k + 4, \text{ untuk } i^k = 1, 3, \\
 &1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 g_8(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) &= 5mn - mj + 12m - k + 4, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 g_8(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) &= 6mn - mj + 12m - k + 4, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 g_8(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) &= 7mn - mj + 12m - k + 4, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 g_8(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) &= 8mn - mj + 12m - k + 4, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\
 g_8(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) &= 9mn - mj + 12m - k + 4, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m
 \end{aligned}$$

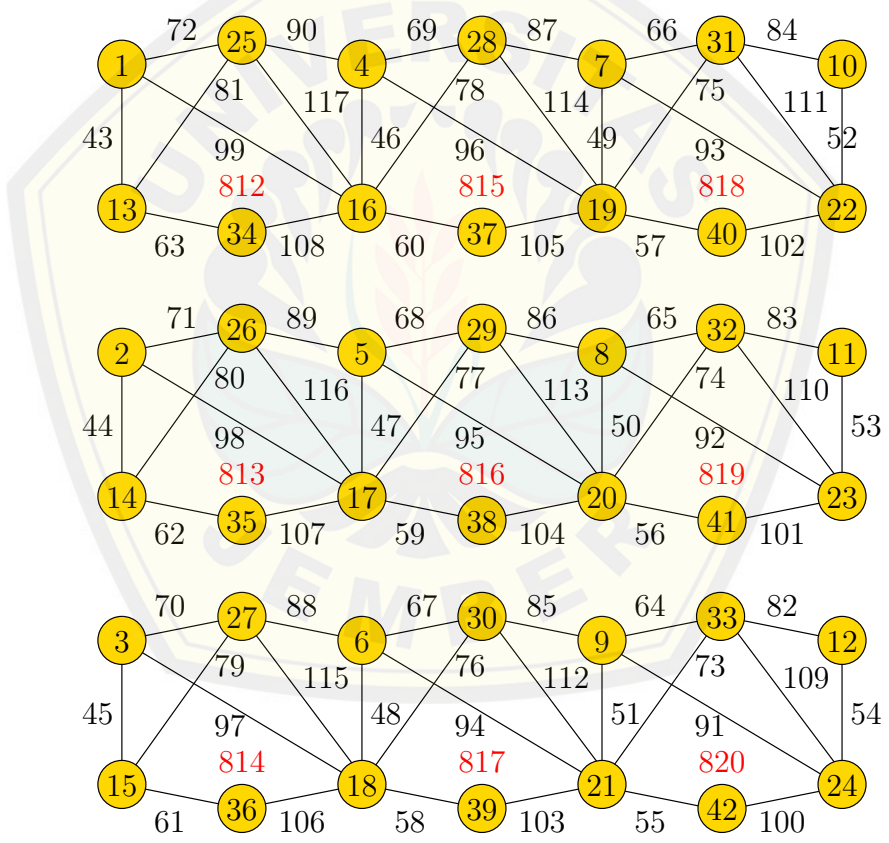
Jika  $W_{g_8}$  didefinisikan sebagai bobot selimut total pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut  $w_{g_8}$  dengan label sisinya maka  $W_{g_8}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah 6 label titik dari  $mC_6^3, e, 3$  yang menjadi selimut pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dan merumuskan 9 label sisi  $g_8$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{g_8} &= w_{g_8} + \bigcup_{i=1,3} g_8(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) + g_8(x_{2,j}^k x_{3,j}^k) + g_8(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) + g_8(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) + \\
 &g_8(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_8(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_8(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) + g_8(x_{2,j}^k x_{3,j}^k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\
 &\bigcup_{1,3} (4mn - \frac{3mi + 3m}{2} - mj + 15m - k + 4) + (2mn + mj + 7m + k) \\
 &+ (5mn - mj + 12m - k + 4) + (6mn - mj + 12m - k + 4) + \\
 &(7mn - mj + 12m - k + 4) + (8mn - mj + 12m - k + 4) + (9mn - mj \\
 &+ 12m - k + 4) + (2mn + m(j + 1) + 7m + k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) +
 \end{aligned}$$

$$\bigcup_{1,3} (4mn - \frac{3mi + 3m}{2} - mj + 15m - k + 4) + 39mn - 3mj + 75m - 3k + 20$$

Dengan demikian barisan aritmatika dari  $W_{gs} = \{49mn + 114m + 29, 49mn + 114m + 30, \dots, 54mn + 124m + 2\}$ . Karena  $U_n = a + (s - 1)b = 49mn + 114m + 29 + (mn - 1)1 = 50mn + 114m + 28$  maka terbukti bahwa ada pelabelan selimut  $(49mn + 114m + 29, 1)-C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.25 merupakan contoh pelabelan selimut  $(49mn + 114m + 29, 1)-C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$ .



Gambar 4.25 Pelabelan selimut  $(49mn + 114m + 29, 1)-C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$

#### 4.4 Berpikir Tingkat Tinggi dalam Pelabelan Selimut $(a, d) - C_6^3$ -Anti Ajaib Super pada Shackle dari Graf Siklus dengan Busur yang dinotasikan dengan shack $(C_6^3, e, n)$

Subbab ini menjelaskan keterkaitan antara level berpikir tingkat tinggi taksonomi Bloom yang telah direvisi dengan proses pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$ . Adapun keterkaitan proses pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  tersebut akan dijelaskan dalam enam tahapan taksonomi Bloom yang telah direvisi.

##### Tahap 1. Mengingat

**Kata kerja operasional:** Mengidentifikasi famili graf

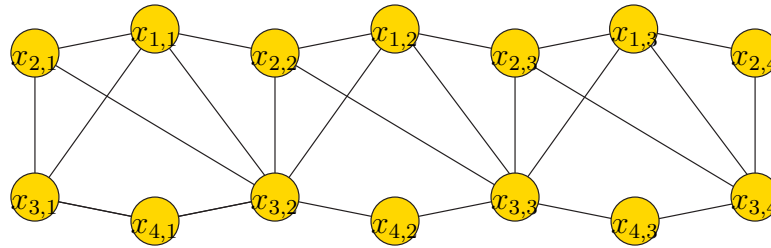
Pada tahap pertama, peneliti mengingat kembali famili graf yaitu dengan cara mengidentifikasi famili graf. Graf yang digunakan pada penelitian ini adalah graf berhingga, sederhana, dan graf tak berarah. Graf yang akan dibentuk adalah graf yang jumlah titiknya  $n$  berhingga yang dihubungkan oleh sebuah sisi yang menghubungkan graf lainnya dan sisi yang terbentuk tidak memiliki orientasi arah. Oleh karena itu, graf yang akan diambil untuk penelitian adalah shackle dari graf  $C_6^3$ .

Istilah lain dari shackle adalah belunggu yang berarti sesuatu yang mengikat. Graf siklus dengan busur ( $C_s^t$ ) adalah famili dari graf siklus ( $C_s$ ). Shackle dari graf  $C_6^3$  adalah graf yang terbentuk dari beberapa graf  $C_6^3$  yang dikaitkan oleh 1 buah sisi sehingga membentuk shackle dari graf  $C_6^3$ . Shackle dari graf  $C_6^3$  merupakan shackle sisi yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$ , shackle dari graf  $C_6^3$  memiliki 3 buah busur,  $e = 1$  yang berarti ada 1 sisi yang digunakan bersama-sama oleh graf  $C_6^3$  yang pertama dan graf  $C_6^3$  yang kedua, 1 sisi dari graf  $C_6^3$  yang kedua juga digunakan bersama-sama oleh graf  $C_6^3$  yang ketiga. Jadi, satu selimut pada shackle dari graf  $C_6^3$  merupakan graf  $C_6^3$ . Gambar 4.26 merupakan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$ , untuk  $e = 1$  dan  $n \geq 2$ .

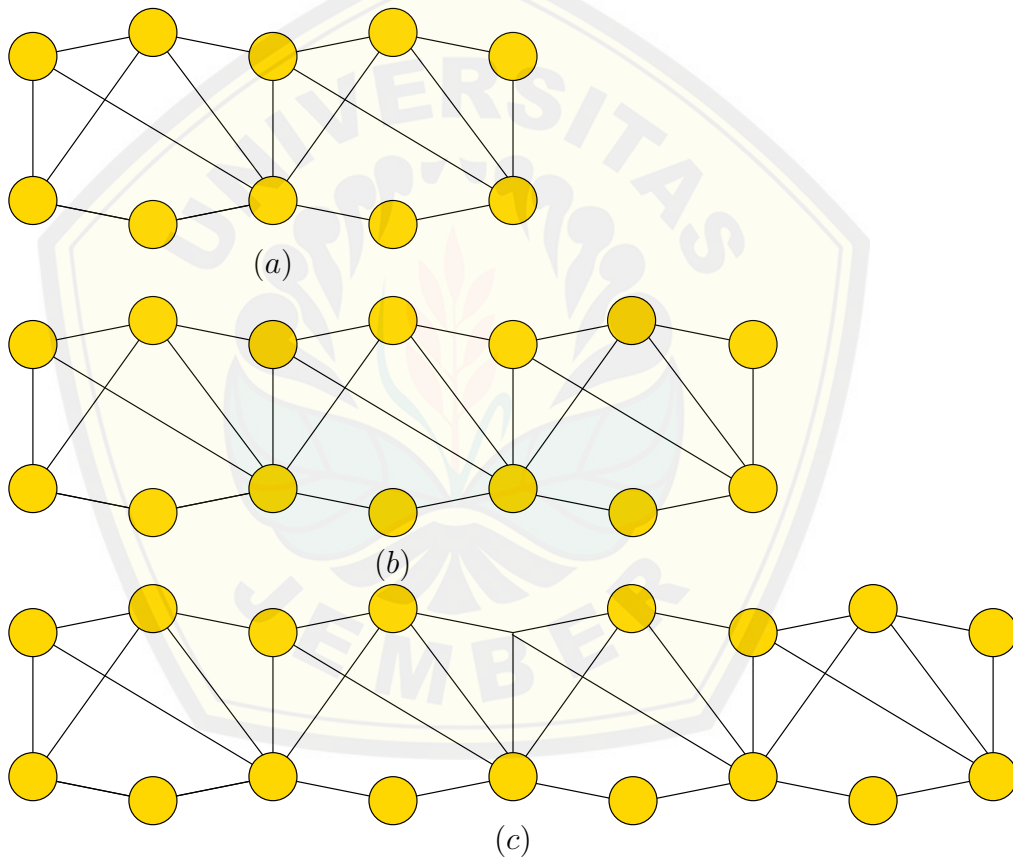
##### Tahap 2. Memahami

**Kata kerja operasional:** Menghitung jumlah titik  $p$  dan sisi  $q$  pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  serta menentukan batas atas nilai beda ( $d$ )

Tahapan yang kedua yaitu memahami, setelah mengidentifikasi famili graf,



Gambar 4.26 Shack  $(C_6^3, e, n)$ , untuk  $e = 1$  dan  $n \geq 2$



Gambar 4.27 Jumlah titik dan sisi pada (a). Shack  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $e = 1$  dan  $n = 2$ ; (b). Shack  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $e = 1$  dan  $n = 3$ ; (c). Shack  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $e = 1$  dan  $n = 4$

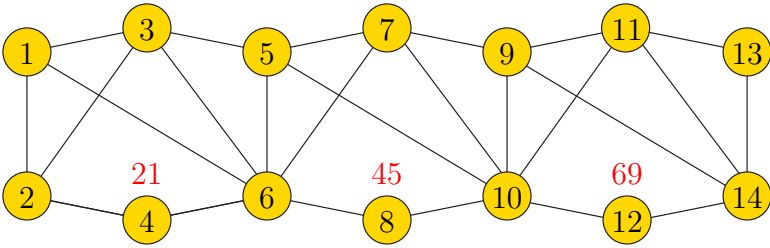
peneliti memahami bagaimana cara menghitung jumlah titik  $p$  dan sisi  $q$  pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  baik tunggal maupun gabungan saling lepasnya serta menentukan batas atas nilai beda ( $d$ ). Menghitung jumlah titik  $p$  dan sisi  $q$  pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  berarti menghitung kardinalitasnya. Hal yang perlu dilakukan adalah menentukan jumlah titik dan sisi pada graf tersebut.

Pendefinisian titik pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  menggunakan indeks  $i$  dan  $j$ . Indeks  $i$  menggambarkan titik  $x$  yang mempunyai batas  $1 \leq i \leq 4$  dan indeks  $j$  juga menggambarkan titik  $x$  yang mempunyai batas  $1 \leq j \leq n$  yang berarti titik  $x$  terdapat sebanyak  $n$  pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$ . Berdasarkan Gambar 4.26 pendefinisian sisi pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  adalah sebagai berikut: (a) Titik  $x_{1,j}$  bertetangga dengan  $x_{2,j}$ ,  $x_{2,j}$  bertetangga dengan  $x_{3,j}$ , dan  $x_{3,j}$  bertetangga dengan  $x_{4,j}$  yang kemudian didefinisikan  $x_{i,j}x_{i+1,j}$ , (b) titik  $x_{1,j}$  bertetangga dengan  $x_{3,j}$  yang kemudian didefinisikan  $x_{1,j}x_{3,j}$ , (c) titik  $x_{1,j}$  bertetangga dengan  $x_{3,j+1}$  yang kemudian didefinisikan  $x_{1,j}x_{3,j+1}$ , (d) titik  $x_{2,j}$  bertetangga dengan  $x_{3,j+1}$  yang kemudian didefinisikan  $x_{2,j}x_{3,j+1}$ , (e) titik  $x_{1,j}$  bertetangga dengan  $x_{2,j+1}$  yang kemudian didefinisikan  $x_{1,j}x_{2,j+1}$ , dan (f) titik  $x_{4,j}$  bertetangga dengan  $x_{3,j+1}$  yang kemudian didefinisikan  $x_{4,j}x_{3,j+1}$ .

Berdasarkan Gambar 4.27 bahwa (a). *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $e = 1$  dan  $n = 2$ , memiliki  $|n| = 2$ , jumlah titik=10, jumlah sisi=17; (b). *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $e = 1$  dan  $n = 3$ , memiliki  $|n| = 3$ , jumlah titik=14, jumlah sisi=25; dan (c). *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $e = 1$  dan  $n = 2$ , memiliki  $|n| = 4$ , jumlah titik=18, jumlah sisi=33.

$x_{2,j}$	1	5	9
$x_{3,j}$	2	6	10
$x_{1,j}$	3	7	11
$x_{4,j}$	4	8	12
$x_{2,j+1}$	5	9	13
$x_{3,j+1}$	6	10	14
	21   45   69		
			+

Gambar 4.28 Penjumlahan bobot titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $e = 1$  dan  $n = 3$



Gambar 4.29 Pelabelan titik *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) untuk  $e = 1$  dan  $n = 3$

Pada kardinalitas, terdapat istilah *order* ( $|V|$ ) dan *size* ( $|E|$ ) yang diperlukan untuk menghitung jumlah titik dan jumlah sisi. Gambar 4.27 menunjukkan *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) yang memiliki *order* ( $|V|$ ) =  $4n + 2$  yang didapatkan dari banyaknya titik graf  $C_6^3$  yang dibentuk oleh *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ), untuk  $e = 1$  dan  $n \geq 2$  sedangkan *size* ( $|E|$ ) =  $8n + 1$  didapatkan dari banyaknya sisi graf  $C_6^3$  yang dibentuk oleh *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ), untuk  $e = 1$  dan  $n \geq 2$ .

Setelah menghitung jumlah titik dan jumlah sisi, tahap selanjutnya adalah menentukan batas atas nilai  $d$ . Batas atas  $d$  pada *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 4.1.1.

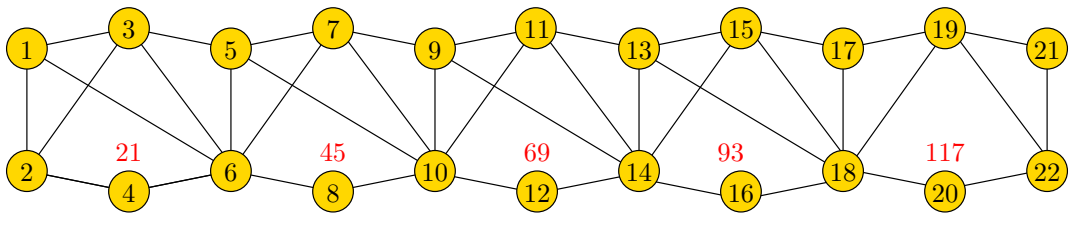
**Tahap 3. Menerapkan**

**Kata kerja operasional:** Menentukan label titik dan mengembangkan fungsi bijektif bobot titik pada *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) tunggal maupun gabungan saling lepas

Tahap ketiga adalah menerapkan, setelah menghitung jumlah titik dan sisi serta menentukan batas atas  $d$ , langkah selanjutnya adalah menentukan label titik dan mengembangkan fungsi bijektif bobot titik pada *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) tunggal dan gabungan *Shack* ( $mC_6^3, e, n$ ). Label titik yang akan digunakan pada *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) tunggal berbeda dengan label titik pada gabungan *Shack* ( $mC_6^3, e, n$ ). Pola label titik pada *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) konektif sebagai berikut: (a) label pertama dimulai dari ujung *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) yaitu titik  $x_{2,j}$ , (2) label kedua di titik  $x_{3,j}$ , (c) label ketiga di titik  $x_{1,j}$ , (d) selanjutnya label keempat di titik  $x_{4,j}$ , (e) kemudian label kelima di titik  $x_{2,j+1}$ , (f) paling akhir yang dilabeli adalah akhir dari selimut graf siklus dengan busur yaitu  $x_{3,j+1}$ , dan (g) label titik paling terakhir adalah di titik  $x_{3,j+3}$ .

*Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) merupakan shackle sisi sehingga ada dua titik yang dilabeli





Gambar 4.30 Pelabelan titik *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) untuk  $n = 5$

$x_{2,j}$	1	5	9	13	17
$x_{3,j}$	2	6	10	14	18
$x_{1,j}$	3	7	11	15	19
$x_{4,j}$	4	8	12	16	20
$x_{2,j+1}$	5	9	13	17	21
$x_{3,j+1}$	6	10	14	18	22
	+-----+				
	21	45	69	93	117

Gambar 4.31 Penjumlahan bobot titik *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) untuk  $n = 5$

$k$	1			2			3		
$x_{2,j}^k$	1	4	7	2	5	8	3	6	9
$x_{3,j}^k$	13	16	19	14	17	20	15	18	21
$x_{1,j}^k$	25	28	31	26	29	32	27	30	33
$x_{4,j}^k$	34	37	40	35	38	41	36	39	42
$x_{2,j+1}^k$	4	7	10	5	8	11	6	9	12
$x_{3,j+1}^k$	16	19	22	17	20	23	18	21	24
	93	99	105	111	117	123	129	135	141

Gambar 4.32 Penjumlahan bobot titik *Shack* ( $mC_6^3, e, n$ ) untuk  $n = 3$  dan  $m = 3$

terlebih dahulu yaitu dua titik atau satu sisi paling ujung yang setara dengan dua titik atau satu sisi yang dipakai bersama-sama oleh selimut berikutnya. Dari pola label titik di atas dapat digunakan untuk menghitung bobot titik masing-masing selimut pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$ . Penjumlahan masing-masing selimut graf terdiri dari 6 titik dengan 2 titik atau satu sisi yang dipakai 2 kali. Gambar 4.28 merupakan penjumlahan dari bobot titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  dimana bobot titiknya membentuk barisan aritmatika.

Berdasarkan Gambar 4.28 dapat diketahui bahwa bobot titik selimut pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  tunggal adalah  $\{21, 45, 69\}$ . Bobot titik tersebut membentuk barisan aritmatika yang memiliki beda 24. Sebelum ke tahapan berikutnya harus dilakukan pemeriksaan apakah label titik tersebut *expandable* atau *unexpandable*. Gambar 4.29 merupakan pelabelan titik pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n = 3$ . Peneliti mencoba melakukan pelabelan titik pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n = 5$  seperti pada Gambar 4.30 dan Gambar 4.31 merupakan penjumlahan bobot titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$ .

Berdasarkan Gambar 4.31 dapat diketahui bahwa bobot titik selimut pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  untuk  $n = 5$  adalah  $\{21, 45, 69, 93, 117\}$ . Bobot titik tersebut membentuk barisan aritmatika yang memiliki beda 24. Berdasarkan Gambar 4.30 dapat diketahui bahwa pelabelan titik pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  merupakan pelabelan titik yang *expandable* sehingga bisa dilanjutkan ke tahap selanjutnya yaitu mengembangkan fungsi bijektif bobot titik pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$ .

Setelah mengetahui pola label titik pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  tunggal untuk yang selanjutnya adalah menentukan pola label titik pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$ . Adapun pola label titik pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  sebagai berikut: (a) label pertama dimulai dari titik  $x_{2,j}^1$  dimana  $1 = k$  yang menunjukkan *copy* pertama; (b) label kedua di titik  $x_{2,j}^2$ ; (c) label selanjutnya di titik  $x_{2,j}^3$ ; (d) selanjutnya di titik  $x_{3,j}^k, k$  merupakan *copy* gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dan label titiknya berurutan dari *copy* pertama hingga ke- $k$ , untuk  $1 \leq k \leq m$ ; (e) selanjutnya di titik  $x_{1,j}^k, k$  merupakan *copy* gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dan label titiknya berurutan dari *copy* pertama hingga ke- $k$ , untuk  $1 \leq k \leq m$ ; (f) selanjutnya di titik  $x_{4,j}^k, k$  merupakan *copy* gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dan label titiknya

berurutan dari *copy* pertama hingga ke- $k$ , untuk  $1 \leq k \leq m$ ;

Dari pola label titik di atas dapat juga digunakan untuk menghitung bobot titik masing-masing selimut pada gabungan *Shack* ( $mC_6^3, e, n$ ). Penjumlahan masing-masing selimut graf terdiri dari 6 titik dengan 2 titik atau satu sisi yang dipakai 2 kali. Gambar 4.32 merupakan penjumlahan dari bobot titik gabungan *Shack* ( $mC_6^3, e, n$ ) dimana bobot titiknya membentuk barisan aritmatika. Gambar 4.33 merupakan pelabelan titik pada gabungan *Shack* ( $mC_6^3, e, n$ ) untuk  $n = 3$  dan  $m = 3$ . Peneliti mencoba melakukan pelabelan titik pada gabungan *Shack* ( $mC_6^3, e, n$ ) untuk  $n = 3$  dan  $m = 5$  seperti pada Gambar 4.34.

Berdasarkan Gambar 4.30 dan Gambar 4.34 dapat diketahui bahwa pola pelabelan titik *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) tunggal maupun gabungan *Shack* ( $mC_6^3, e, n$ ) merupakan pelabelan titik yang *expandable* sehingga dapat melanjutkan pada tahap selanjutnya yaitu mengembangkan fungsi bijektif bobot titik *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ).

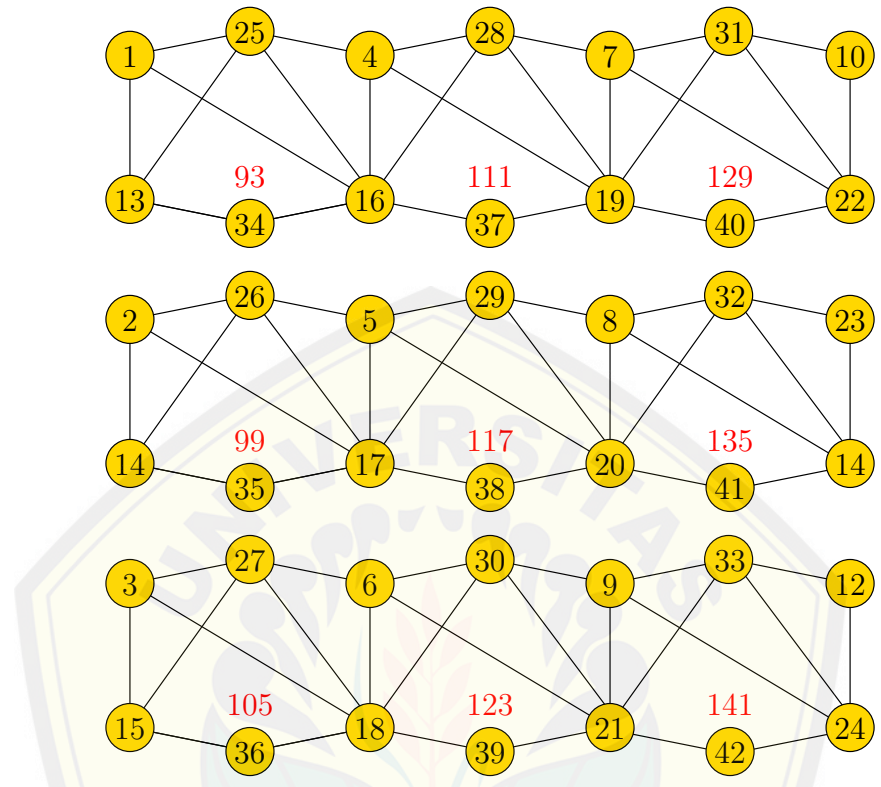
Labeli titik *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) tunggal dengan fungsi bijektif  $f$  dengan label sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_{i,j}) &= 4j + i - 5, \text{ untuk } i = 2, 3, 1 \leq j \leq n \\ f(x_{i,j}) &= 4j + \frac{i+2}{3} - 2, \text{ untuk } i = 1, 4, 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

$f$  adalah fungsi bijektif yang memetakan *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, 4n + 2\}$ . Jika  $w_f$  didefinisikan sebagai bobot titik selimut dari pelabelan total selimut pada *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) dimana bobot titik selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 6 label titik dari  $C_6^3$  yang menjadi selimut pada *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ), maka fungsi bijektif  $w_f$  dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_f &= \bigcup_{i=2,3} (f(x_{i,j})) + \bigcup_{i=1,4} (f(x_{i,j})) + \bigcup_{i=2,3} (f(x_{i,j+1})) \\ &= \bigcup_{i=2,3} (4j + i - 5) + \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (4(j+1) + i - 5) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (4j + i - 5 + 4(j+1) + i - 5) \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)$$



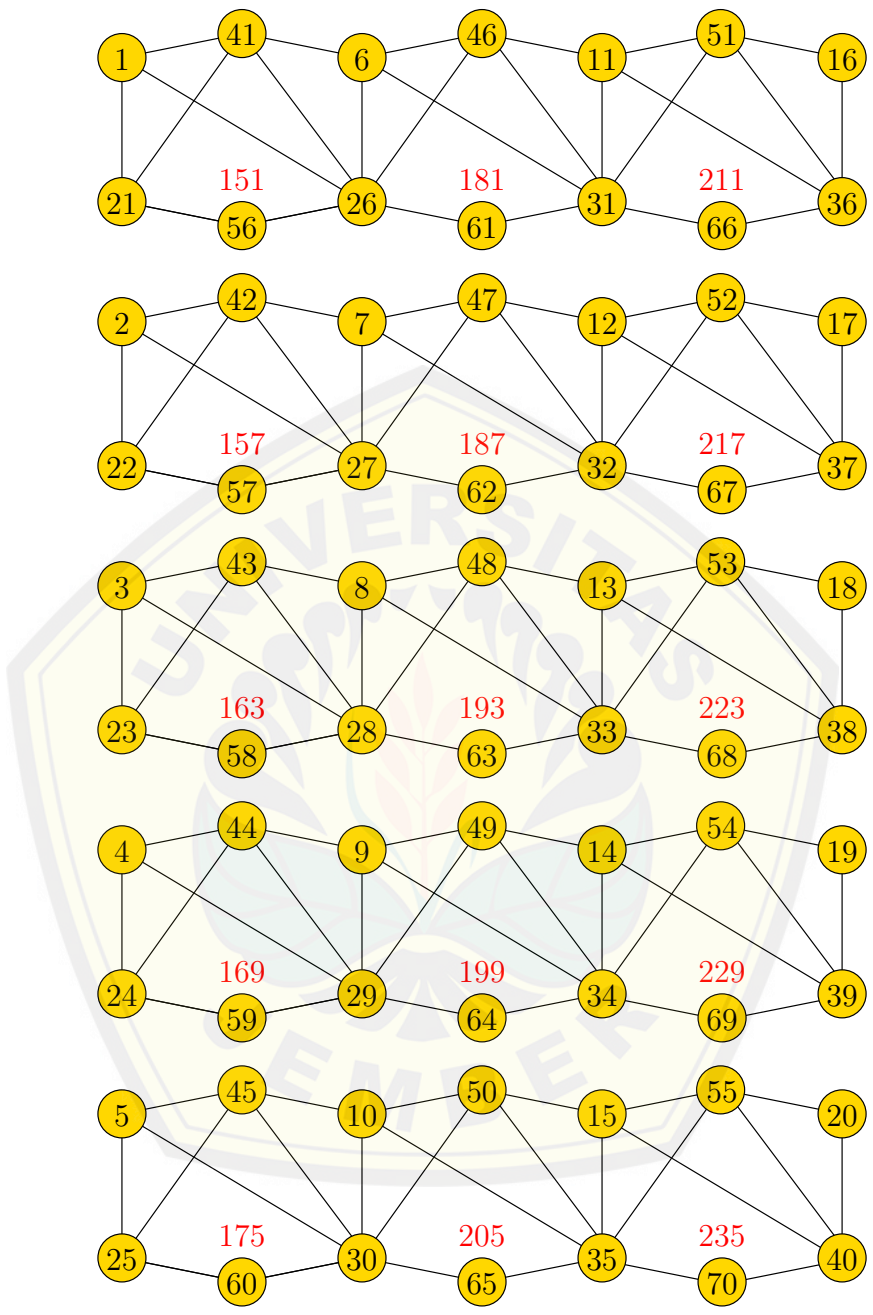
Gambar 4.33 Pelabelan titik *Shack* ( $mC_6^3, e, n$ ) untuk  $n = 3$  dan  $m = 3$

Labeli titik gabungan *Shack* ( $mC_6^3, e, n$ ) dengan fungsi bijektif  $g$  dengan label sebagai berikut:

$$g(x_{i,j}^k) = 4mi + mj - 9m + k, \text{ untuk } i^k = 2, 3, 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m$$

$$g(x_{i,j}^k) = mn + mi + mj + 3m + k, \text{ untuk } i^k = 1, 4, 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m$$

Jika  $w_g$  didefinisikan sebagai bobot titik selimut dari pelabelan total selimut pada gabungan *Shack* ( $mC_6^3, e, n$ ) dimana bobot titik selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 6 label titik dari  $C_6^3$  yang menjadi selimut pada gabungan *Shack*



Gambar 4.34 Pelabelan titik  $Shack (mC_6^3, e, n)$  untuk  $n = 3$  dan  $m = 5$

$(mC_6^3, e, n)$ , maka fungsi bijektif  $w_g$  dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 w_g &= \bigcup_{i=2,3} g(x_{i,j}^k) + \bigcup_{i=1,4} g(x_{i,j}^k) + \bigcup_{i=2,3} g(x_{i,j+1}^k) \\
 &= \bigcup_{i=2,3} (4mi + mj - 9m + k) + \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \\
 &\quad \bigcup_{i=2,3} (4mi + m(j + 1) - 9m + k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (4mi + mj - 9m + k + \\
 &\quad 4mi + m(j + 1) - 9m + k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k)
 \end{aligned}$$

#### Tahap 4. Menganalisa

**Kata kerja operasional:** Menentukan label sisi dan fungsi bijektif sisi serta mengembangkan fungsi sisi dan bobot total

Tahap keempat adalah menganalisa yaitu menentukan label sisi dan fungsi bijektif sisi serta mengembangkan fungsi sisi dan bobot total. Graf yang memiliki batas atas  $\{0, 1, 2, \dots, 96\}$  berarti memiliki label sisi dengan menggunakan pola yang ada pada setiap batas atas yang telah ditemukan. Bobot titik *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  tunggal telah membentuk barisan aritmatika sehingga untuk melabeli sisinya dapat menggunakan permutasi. Begitu pula gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  yang bobot titiknya membentuk barisan aritmatika sehingga pelabelan sisinya dapat menggunakan metode permutasi pula. Sehingga didapatkan nilai beda  $d$  yang telah di jelaskan sebelumnya. Sampel fungsi sisi pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$   $d = 96$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f(x_{i,j}x_{i+1,j}) &= 4n - i + 8j - 3, \text{ untuk } i = 1, 2, 1 \leq j \leq n \\
 f(x_{1,j}x_{3,j}) &= 4n + 8j - 3, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
 f(x_{3,j}x_{4,j}) &= 4n + 8j - 2, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\
 f(x_{2,j}x_{3,j+1}) &= 4n + 8j - 1, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f(x_{1,j}x_{2,j+1}) &= 4n + 8j, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f(x_{1,j}x_{3,j+1}) &= 4n + 8j + 1, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \\ f(x_{4,j}x_{3,j+1}) &= 4n + 8j + 2, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n \end{aligned}$$

Bobot total merupakan jumlah bobot titik selimut  $w_f$  dan rumus label sisi  $f$ . Bobot total disimbolkan  $W_f$  sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_f &= w_f + \bigcup_{i=1,2} (f(x_{i,j}x_{i+1,j})) + f(x_{1,j}x_{3,j}) + f(x_{3,j}x_{4,j}) + f(x_{2,j}x_{3,j+1}) + \\ &\quad f(x_{1,j}x_{2,j+1}) + f(x_{1,j}x_{3,j+1}) + f(x_{4,j}x_{3,j+1}) + f(x_{2,j}x_{3,j}) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (4n \\ &\quad + 8j - 3) + (4n + 8j - 2) + (4n + 8j - 1) + (4n + 8j) + (4n + 8j + 1) \\ &\quad + (4n + 8j + 2) + (4n - 2 + 8(j + 1) - 3) \\ &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (28n \\ &\quad + 56j) \end{aligned}$$

Rumus bobot total *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  tunggal adalah  $\bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (28n + 56j)$ , untuk  $1 \leq j \leq n$ . Sampel fungsi sisi pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$   $d = 15$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) &= 2mn - 4mi + mj + 15m + k, \text{ untuk } i^k = 1, 2, 1 \leq j^k \leq n, \\ &\quad 1 \leq k \leq m \\ g(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) &= 3mn + mj + 11m + k, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g(x_{3,j}^k x_{4,j}^k) &= 4mn + mj + 11m + k, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) &= 5mn + mj + 11m + k, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) &= 6mn + mj + 11m + k, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) &= 7mn + mj + 11m + k, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \\ g(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) &= 8mn + mj + 11m + k, \text{ untuk } 1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m \end{aligned}$$

Bobot total merupakan jumlah bobot titik selimut  $w_g$  dan rumus label sisi

g. Bobot total disimbolkan  $W_g$  sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_g &= w_g + \bigcup_{i=1,2} g(x_{i,j}^k x_{i+1,j}^k) + g(x_{1,j}^k x_{3,j}^k) + g(x_{3,j}^k x_{4,j}^k) + g(x_{2,j}^k x_{3,j+1}^k) + \\
 &\quad g(x_{1,j}^k x_{2,j+1}^k) + g(x_{1,j}^k x_{3,j+1}^k) + g(x_{4,j}^k x_{3,j+1}^k) + g(x_{2,j}^k x_{3,j}^k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\
 &\quad \bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + (3mn + mj + 11m + k) + (4mn + \\
 &\quad mj + 11m + k) + (5mn + mj + 11m + k) + (6mn + mj + 11m + k) + \\
 &\quad (7mn + mj + 11m + k) + (8mn + mj + 11m + k) + (2mn - 8m + \\
 &\quad m(j + 1) + 15m + k) \\
 &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\
 &\quad \bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + 35mn + 7mj + 74m + 7k
 \end{aligned}$$

Rumus bobot total gabungan *Shack* ( $mC_6^3, e, n$ ) adalah  $\bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + 35mn + 7mj + 74m + 7k$ , untuk  $1 \leq j^k \leq n, 1 \leq k \leq m$ .

#### Tahap 5. Mengevaluasi

**Kata kerja operasional:** *Membuktikan kebenaran fungsi*

Tahap kelima adalah mengevaluasi. Pada tahap ini yang dilakukan adalah membuktikan kebenaran fungsi yang telah dirumuskan. Ambil sampel rumus fungsi bobot titik *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) tunggal adalah  $\bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6)$ , misal saat  $j = 1$  maka bobot titik dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 w_f &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) \\
 &= (4 + \frac{1+2}{3} - 2 + (4 + \frac{4+2}{3} - 2)) + (8 + 4 - 6 + (8 + 6 - 6)) \\
 &= (3 + 4) + (6 + 8) \\
 &= 21
 \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa fungsi bobot titik *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) tunggal adalah  $\bigcup_{i=1,4}(4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3}(8j + 2i - 6)$ . Fungsi bobot total *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) tunggal  $d = 96$  adalah  $\bigcup_{i=1,4}(4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3}(8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2}(4n - i + 8j - 3) + (28n + 56j)$ . Misal saat  $j = 1$  dan  $n = 3$  maka bobot total dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_f &= \bigcup_{i=1,4} (4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3} (8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2} (4n - i + 8j - 3) + (28n \\ &\quad + 56j) \\ &= (4 + \frac{1+2}{3} - 2 + (4 + \frac{4+2}{3} - 2)) + (8 + 4 - 6 + (8 + 6 - 6)) + (12 - 1 \\ &\quad + 8 - 3 + (12 - 2 + 8 - 3)) + (84 + 56) \\ &= (3 + 4) + (6 + 8) + (16 + 15) + 140 \\ &= 192. \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian diatas terbukti bahwa fungsi Bobot total *Shack* ( $C_6^3, e, n$ ) tunggal  $d = 96$  adalah  $\bigcup_{i=1,4}(4j + \frac{i+2}{3} - 2) + \bigcup_{i=2,3}(8j + 2i - 6) + \bigcup_{i=1,2}(4n - i + 8j - 3) + (28n + 56j)$ . Sedangkan bobot titik gabungan *Shack* ( $mC_6^3, e, n$ ) memiliki fungsi bobot titik  $\bigcup_{i=1,4}(mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3}(8mi + 2mj - 17m + 2k)$ . Misal  $j = 1, n = 3, m = 3,$  dan  $k = 1$  maka bobot titik dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_g &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) \\ &= (9 + 3 + 3 + 9 + 1 + (9 + 12 + 3 + 9 + 1)) + (48 + 6 - 51 + 2 + (72 + 6 \\ &\quad - 51 + 2)) \\ &= (25 + 34) + (5 + 29) \\ &= 93 \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa fungsi bobot titik  $\bigcup_{i=1,4}(mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3}(8mi + 2mj - 17m + 2k)$ . Bobot total gabungan *Shack* ( $mC_6^3, e, n$ ) adalah  $\bigcup_{i=1,4}(mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3}(8mi + 2mj - 17m + 2k) + \bigcup_{i=1,2}(2mn - 4mi + mj + 15m + k) + 35mn + 7mj + 74m + 7k$ . Misal  $j = 1,$

$n = 3$ ,  $m = 3$ , dan  $k = 1$  maka bobot total dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_g &= \bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \\
 &\quad \bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + 35mn + 7mj + 74m + 7k \\
 &= (9 + 9 + 3 + 3 + 1 + (9 + 9 + 12 + 3 + 1)) + (48 - 21 + 6 + 2 + (72 - 21 \\
 &\quad + 6 + 2)) + (45 + 18 - 12 + 3 + 1 + (45 + 18 - 24 + 3 + 1)) + 221 + 315 \\
 &\quad + 21 + 7 \\
 &= (25 + 34) + (5 + 29) + (55 + 43) + 565 \\
 &= 756
 \end{aligned}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa fungsi bobot total gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  adalah  $\bigcup_{i=1,4} (mn + mi + mj + 3m + k) + \bigcup_{i=2,3} (8mi + 2mj - 17m + 2k) + \bigcup_{1,2} (2mn - 4mi + mj + 15m + k) + 35mn + 7mj + 74m + 7k$ .

#### Tahap 6. Mencipta

**Kata kerja operasional:** Menemukan teorema baru

Tahapan yang terakhir adalah mencipta, kata kerja operasional yang digunakan pada tahapan ini adalah menemukan teorema. Menemukan teorema yang dimaksud adalah bagaimana fungsi yang ditemukan setelah proses pada tahapan sebelumnya yakni pengelompokan pada beda yang konsisten. Sesuai dengan tujuan penelitian yaitu menemukan pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  tunggal dan gabungan saling lepas,  $a$  adalah bobot sisi terkecil dan  $d$  adalah nilai bedanya. Berikut merupakan hasil dari pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super yang dijadikan suatu teorema dan konjektur *Shack*  $(C_6^3, e, n)$ , diantaranya:

1. untuk *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  tunggal:

- (a) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 96$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 36n + 84$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(36n + 84, 96) - C_6^3$ -anti ajaib super;

- (b) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 80$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 44n + 76$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(44n + 76, 80) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (c) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 64$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 52n + 68$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(52n + 68, 64) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (d) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 48$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 60n + 60$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(60n + 60, 48) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (e) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 33$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 57n + 77$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(57n + 77, 33) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (f) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 32$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 68n + 52$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(68n + 52, 32) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (g) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 31$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 58n + 76$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(58n + 76, 31) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (h) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 29$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 59n + 75$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(59n + 75, 29) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (i) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 27$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a =$

- $60n + 74$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(60n + 74, 27) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (j) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 25$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 61n + 73$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(61n + 73, 25) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (k) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 23$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 54n + 96$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(54n + 96, 23) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (l) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 21$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 64n + 68$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(64n + 68, 21) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (m) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 19$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 61n + 79$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(61n + 79, 19) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (n) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 17$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 72n + 48$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(72n + 48, 17) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (o) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 16$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 76n + 44$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(76n + 44, 16) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (p) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 15$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 67n + 65$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(67n + 65, 15) - C_6^3$ -anti ajaib super;



- (q) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 0$  ditemukan bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 84n + 36$ , dengan kata lain *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(84n + 36, 0) - C_6^3$ -anti ajaib super.

2. untuk gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$ :

- (a) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 15$  ditemukan bahwa gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 41mn + 124m + 15$  atau gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(41mn + 124m + 15, 15) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (b) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 13$  ditemukan bahwa gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 42mn + 124m + 14$  atau gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(42mn + 124m + 14, 13) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (c) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 11$  ditemukan bahwa gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 43mn + 124m + 13$  atau gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(43mn + 124m + 13, 11) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (d) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 9$  ditemukan bahwa gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 44mn + 124m + 12$  atau gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(44mn + 124m + 12, 9) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (e) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 7$  ditemukan bahwa gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 45mn + 124m + 11$  atau gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(45mn + 124m + 11, 7) - C_6^3$ -anti ajaib super;

- (f) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 5$  ditemukan bahwa gabungan  $Shack (mC_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 46mn + 124m + 10$  atau gabungan  $Shack (mC_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(46mn + 124m + 10, 5) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (g) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 3$  ditemukan bahwa gabungan  $Shack (mC_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 47mn + 124m + 9$  atau gabungan  $Shack (mC_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(47mn + 124m + 9, 3) - C_6^3$ -anti ajaib super;
- (h) untuk pelabelan selimut dengan  $d = 1$  ditemukan bahwa gabungan  $Shack (mC_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super dengan  $a = 49mn + 114m + 29$  atau gabungan  $Shack (mC_6^3, e, n)$  mempunyai pelabelan selimut  $(49mn + 114m + 29, 1) - C_6^3$ -anti ajaib super;

#### 4.5 Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan hasil penelitian untuk memperoleh nilai  $d$  yang mungkin untuk pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  tunggal adalah  $d \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 96\}$  dan gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  adalah  $d \in \{1, 2, 3, \dots, 106\}$ . Setelah menentukan nilai  $d$ , peneliti mencari pelabelan sesuai dengan nilai  $d$  yang telah ditentukan tersebut.

Dari hasil penelitian pada beberapa nilai  $d$  tersebut diatas, diperoleh 25 teorema baru tentang pelabelan shackle dari graf siklus dengan busur tunggal dan gabungan saling lepas.

1. teorema baru tentang pelabelan  $Shack (C_6^3, e, n)$ , yakni:

- (a) Ada pelabelan selimut  $(36n + 84, 96) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack (C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.1;

- (b) Ada pelabelan selimut  $(44n+76, 80) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.2;
- (c) Ada pelabelan selimut  $(52n+68, 64) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.3;
- (d) Ada pelabelan selimut  $(60n+60, 48) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.4;
- (e) Ada pelabelan selimut  $(57n+77, 33) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.5;
- (f) Ada pelabelan selimut  $(68n+52, 32) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.6;
- (g) Ada pelabelan selimut  $(58n+76, 31) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.7;
- (h) Ada pelabelan selimut  $(59n+75, 29) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.8;
- (i) Ada pelabelan selimut  $(60n+74, 27) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.9;
- (j) Ada pelabelan selimut  $(61n+73, 25) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.10;
- (k) Ada pelabelan selimut  $(54n+96, 23) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.11;

- (l) Ada pelabelan selimut  $(64n+68, 21) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.12;
- (m) Ada pelabelan selimut  $(61n+79, 19) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.13;
- (n) Ada pelabelan selimut  $(72n+48, 17) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.14;
- (o) Ada pelabelan selimut  $(76n+44, 16) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.15;
- (p) Ada pelabelan selimut  $(67n+65, 15) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.16;
- (q) Ada pelabelan selimut  $(84n+36, 0) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.2.17.

**Observasi 4.5.1.** *Ada pelabelan titik selimut  $(\frac{s^2+s}{2}, s^2 - 2s) - C_s^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_s^3$  yang dinotasikan dengan  $Shack(C_s^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.**  $s = 5 \Rightarrow$  selimut  $C_5^3$  sehingga bobot titik selimutnya  $\{15, 30, 45\}$

$s = 6 \Rightarrow$  selimut  $C_6^3$  sehingga bobot titik selimutnya  $\{21, 45, 69\}$

$s = 7 \Rightarrow$  selimut  $C_7^3$  sehingga bobot titik selimutnya  $\{28, 63, 98\}$

$s = 8 \Rightarrow$  selimut  $C_8^3$  sehingga bobot titik selimutnya  $\{36, 84, 132\}$

Berdasarkan uraian bobot titik selimut di atas, maka beda ( $d$ ) bobot titik selimut tersebut membentuk barisan aritmatika betingkat 2 dengan  $d = s^2 - 2s$  sedangkan bobot terkecil 15, 21, 28, 36 membentuk barisan aritmatika

bertingkat 2 dengan  $a = \frac{s^2+s}{2}$  maka terbukti *Shack*  $(C_s^3, e, n)$  mempunyai pelabelan titik selimut  $(\frac{s^2+s}{2}, s^2 - 2s)$  anti ajaib.  $\square$

Ilustrasi pelabelan titik selimut pada *Shack*  $(C_s^3, e, n)$  untuk  $s = 5, s = 6, s = 7$ , dan  $s = 8$  dapat dilihat pada Gambar 4.35.

Berdasarkan pelabelan titik di atas maka dapat ditarik konjektur sebagai berikut:

**Dugaan 4.5.1.** *Ada pelabelan titik selimut  $(\frac{s^2+s}{2}, s^2 - 2s) - C_s^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_s^3, e, n)$  untuk  $s \geq 5$  dan  $n \geq 2$ .*

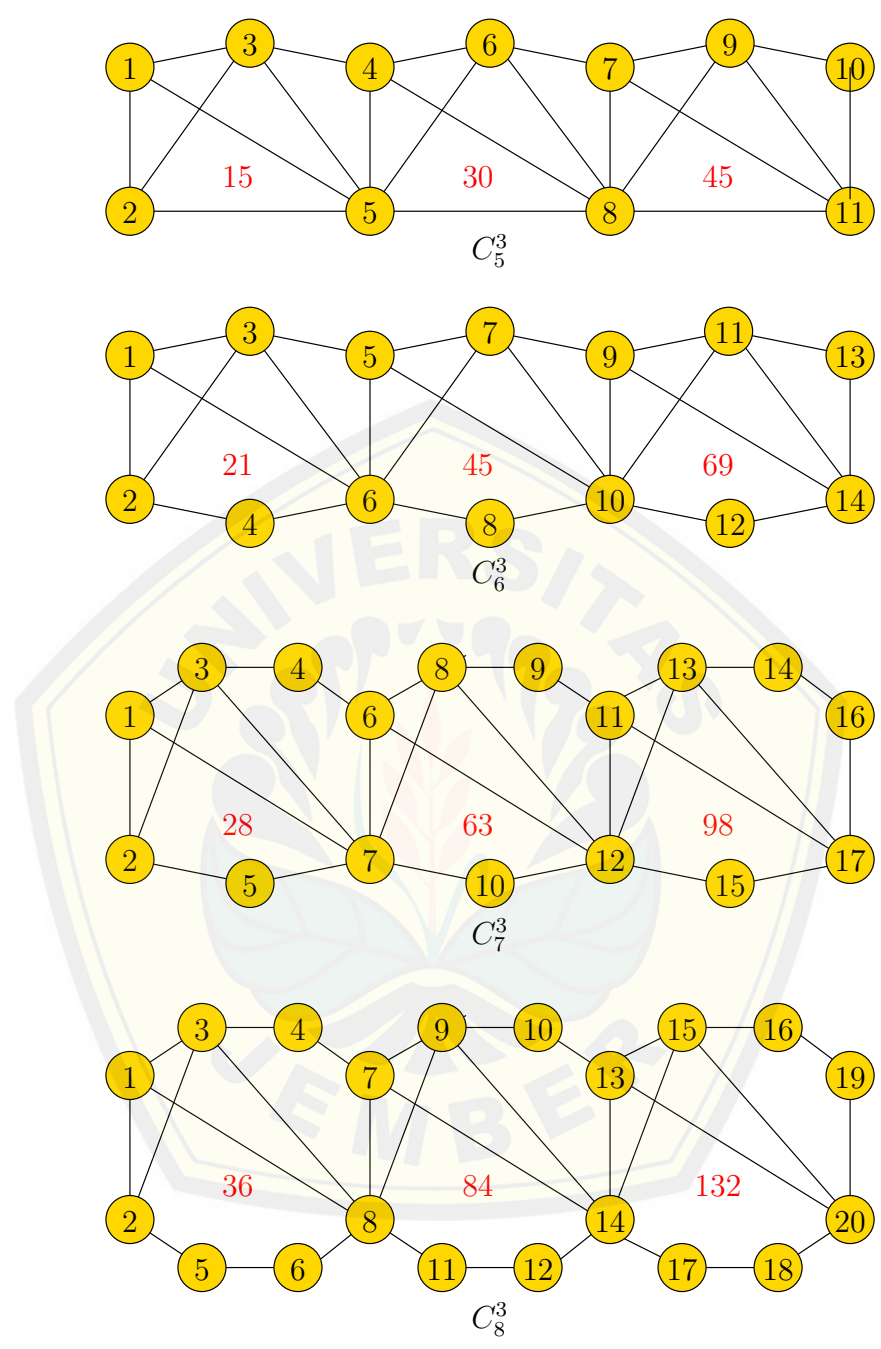
Diberikan ilustrasi pelabelan total selimut pada *Shack*  $(C_s^3, e, n)$  untuk  $s = 6, s = 7$ , dan  $s = 8$  dapat dilihat pada Gambar 4.36.

Berdasarkan ilustrasi pada Gambar 4.36, diketahui bahwa  $C_6^3$  dapat digeneralisasi menjadi  $C_7^3$  dan  $C_8^3$ . Adapun cara menggeneralisasi yaitu: (a) Ambil shackle dari graf  $C_6^3$  dengan sebarang beda, misal beda yang diambil adalah  $d = 96$ , (b) ikuti pola label titik pada ilustrasi Gambar 4.35 dan ikuti pola label sisi yang terdapat pada  $d = 96$ , (c) jumlahkan bobot titik dan bobot sisi hingga membentuk barisan aritmatika, jika jumlah setiap selimutnya membentuk barisan aritmatika maka dapat ditarik konjektur sebagai berikut:

**Dugaan 4.5.2.** *Ada pelabelan total selimut  $(a, d) - C_s^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_s^3, e, n)$  untuk  $s \geq 6$  dan  $n \geq 2$ .*

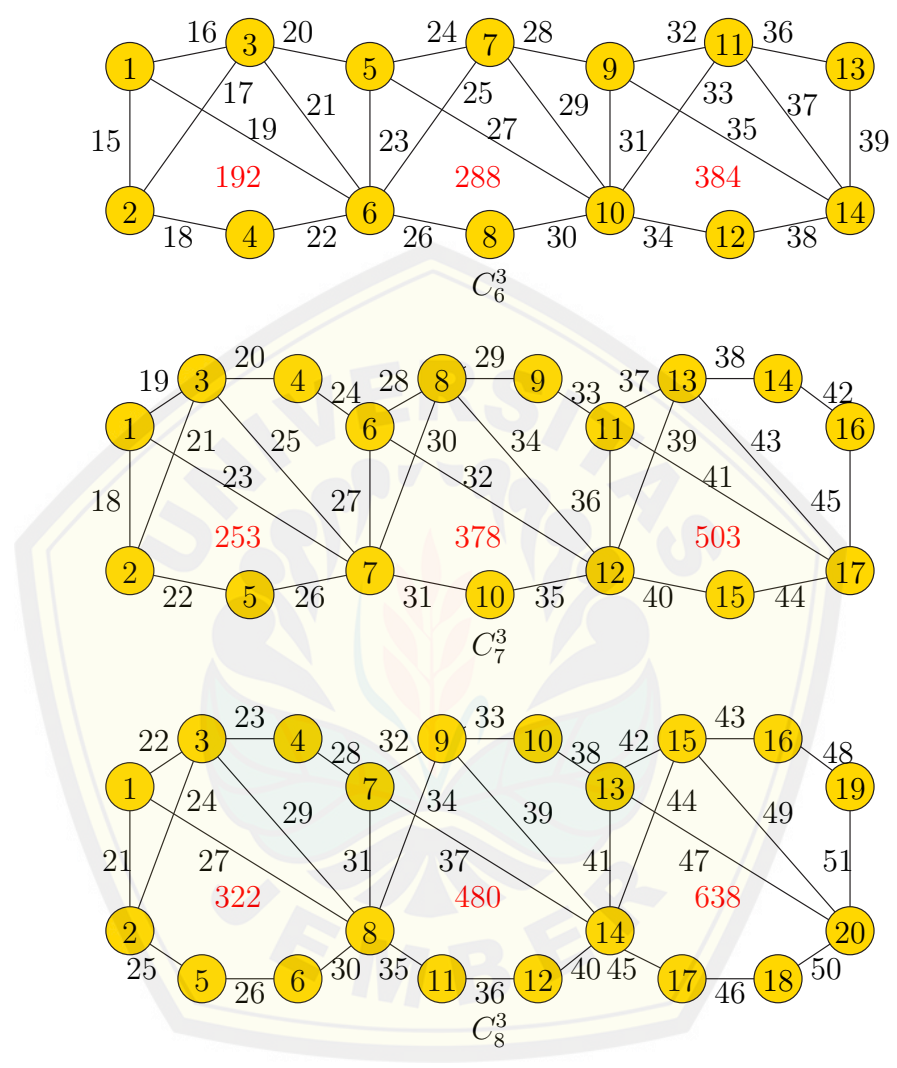
2. teorema baru tentang pelabelan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  diskonektif yaitu:

- (a) Ada pelabelan selimut  $(41mn + 124m + 15, 15) - C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.3.1;



Gambar 4.35 Pelabelan titik selimut  $Shack (C_s^3, e, n)$  untuk  $s = 5, s = 6, s = 7$ , dan  $s = 8$





Gambar 4.36 Pelabelan total selimut  $Shack (C_s^3, e, n)$  untuk  $s = 6, s = 7$ , dan  $s = 8$

- (b) Ada pelabelan selimut  $(42mn + 124m + 14, 13) - C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.3.2;
- (c) Ada pelabelan selimut  $(43mn + 124m + 13, 11) - C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.3.3;
- (d) Ada pelabelan selimut  $(44mn + 124m + 12, 9) - C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.3.4;
- (e) Ada pelabelan selimut  $(45mn + 124m + 11, 7) - C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.3.5;
- (f) Ada pelabelan selimut  $(46mn + 124m + 10, 5) - C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.3.6;
- (g) Ada pelabelan selimut  $(47mn + 124m + 9, 3) - C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.3.7;
- (h) Ada pelabelan selimut  $(49mn + 114m + 29, 1) - C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada teorema 4.3.8.

Menurut hasil penelitian tersebut, dapat diketahui bahwa jika diketahui nilai batas atas  $d$  yang berlainan maka nilai awal  $a$  juga akan berlainan. Namun

demikian seluruh label titik dan seluruh label sisi pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yang digunakan sama baik untuk semua nilai beda  $d$ , label titik yang digunakan adalah dari 1 hingga  $p_G$  dimana  $p_G$  adalah jumlah titik pada graf sedangkan label untuk sisi yang digunakan adalah dimulai dari  $p_G + 1$  hingga  $p_G + q_G$  dimana  $q_G$  merupakan jumlah sisi, sehingga  $p_G + q_G$  merupakan jumlah titik dan sisi pada graf. Jika kedua label tersebut digunakan untuk melabeli sebuah graf dengan aturan yang diberikan diatas maka pelabelan tersebut disebut sebagai pelabelan selimut total. Pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  tunggal dan gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$ , untuk seluruh nilai  $d \leq 96$  tersebut berlaku pada syarat yang sama yaitu  $n \geq 2$ .

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, peneliti telah menemukan pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  tunggal untuk  $d \in \{96, 80, 64, 48, 33, 32, 31, 29, 27, 25, 23, 21, 19, 17, 16, 15, 0\}$  dan pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$  anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$   $d \in \{15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1\}$ .

Penelitian pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  tunggal untuk  $d \leq 96$  selain  $d \in \{96, 80, 64, 48, 33, 32, 31, 29, 27, 25, 23, 21, 19, 17, 16, 15, 0\}$  maupun gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  untuk  $d < 106$  selain  $d \in \{15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1\}$  masih belum ditemukan oleh peneliti dikarenakan pola pelabelan sisi yang telah ditemukan menggunakan konsep permutasi. Beberapa pelabelan yang belum ditemukan disajikan pada *open problem* berikut:

**Masalah terbuka 4.5.1.** *Pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  tunggal dengan  $n \geq 2$  untuk  $d \leq 96$  selain  $d \in \{96, 80, 64, 48, 33, 32, 31, 29, 27, 25, 23, 21, 19, 17, 16, 15, 0\}$ .*

**Masalah terbuka 4.5.2.** *Pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$ , dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$  untuk  $d < 106$  selain  $d \in \{15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1\}$ .*

## BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

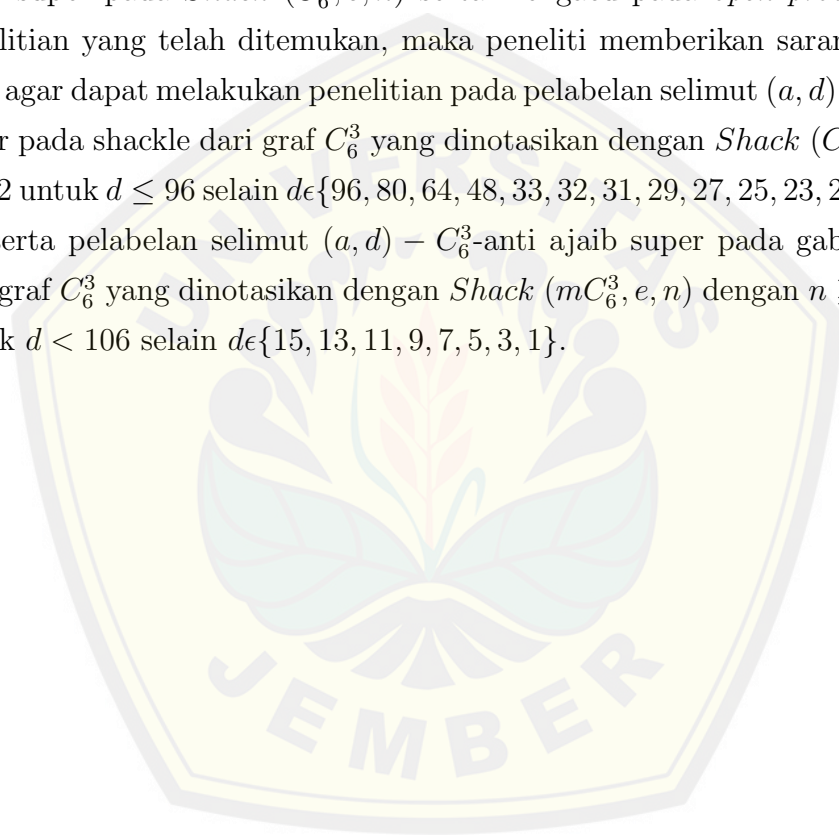
Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  tunggal memiliki batas atas  $d \leq 96$  dan gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  memiliki batas atas  $d < 107$ .
2. *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super untuk  $d = \{0, 1, 2, \dots, 96\}$ . Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  terdapat fungsi bijektif pelabelan selimut yaitu  $(36n + 84, 96), (44n + 76, 80), (52n + 68, 64), (60n + 60, 48), (57n + 77, 33), (68n + 52, 32), (58n + 76, 31), (59n + 75, 29), (60n + 74, 27), (61n + 73, 25), (54n + 96, 23), (64n + 68, 21), (61n + 79, 19), (72n + 48, 17), (76n + 44, 16), (67n + 65, 15), (84n + 36, 0) - C_6^3$ -anti ajaib super untuk  $n \geq 2$ . Terdapat 2 konjektur pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  yaitu pelabelan titik selimut  $(\frac{s^2+s}{2}, s^2 - 2s)$ -anti ajaib super untuk  $s \geq 5$  dan  $n \geq 2$  serta pelabelan total selimut  $(a, d) - C_s^3$ -anti ajaib super untuk  $s \geq 6$  dan  $n \geq 2$ .
3. Gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  memiliki pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super untuk  $d = \{1, 2, \dots, 106\}$ . Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa gabungan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  terdapat fungsi bijektif pelabelan selimut yaitu  $(41mn + 124m + 15, 15), (42mn + 124m + 14, 13), (43mn + 124m + 13, 11), (44mn + 124m + 12, 9), (45mn + 124m + 11, 7), (46mn + 124m + 10, 5), (47mn + 124m + 9, 3), (49mn + 114m + 29, 1) - C_6^3$ -anti ajaib super untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .
4. Kaitan antara keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super yakni dalam penemuan teorema pada batas atas yang telah ditentukan, yaitu dimulai dari mengingat dalam mengidentifikasi famili graf, memahami dalam menghitung jumlah titik  $p$  dan sisi  $q$

dan menentukan batas atas nilai beda  $d$  pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  menentukan label titik, menerapkan dalam menentukan fungsi bijektif bobot titik selimut, menganalisa dalam menentukan label sisi dan fungsi bijektif sisi dan mengembangkan fungsi sisi dan bobot total, mengevaluasi dalam membuktikan kebenaran fungsi, dan mencipta teorema baru.

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan selimut  $(a, d) - \mathcal{H}$ -anti ajaib super pada *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian pada pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super pada shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(C_6^3, e, n)$  dengan  $n \geq 2$  untuk  $d \leq 96$  selain  $d \in \{96, 80, 64, 48, 33, 32, 31, 29, 27, 25, 23, 21, 19, 17, 16, 15, 0\}$ , serta pelabelan selimut  $(a, d) - C_6^3$ -anti ajaib super pada gabungan shackle dari graf  $C_6^3$  yang dinotasikan dengan *Shack*  $(mC_6^3, e, n)$  dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$  untuk  $d < 106$  selain  $d \in \{15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1\}$ .



## DAFTAR PUSTAKA

- Citra, S., Hesti, Ika, dan Dafik. 2014. *Super  $(a, d)$  –  $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering pada Graf Semi Windmill*. *CGANT-Universitas Jember*. Vol. 1(1): 1-8.
- Dafik. 2014. *Batas Atas  $d$  dari Sebuah Graf yang Memiliki Super  $(a, d)$  –  $\mathcal{H}$ -Antimagic Covering*. Working Paper, FKIP UNEJ.
- Dafik. 2015. *Pidato Ilmiah Pengukuhan Guru Besar*. Jember: Repository Unej.
- Gracelia, Rara Rizhki. 2013. *Defisiensi Sisi-Ajaib Super dari Graf Rantai*. *Jurnal Matematika UNAND*. Vol.2(3): 116-120.
- Gutiérrez, A. dan Lladó, A. 2005. *Magic Covering*. *Of Combin Math and Combin Comput*. Vol. 55: 451-461.
- Hartsfield, N. and Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory*. Boston-San Diego-NewYork-London: Academic Press.
- Inayah, N., A.N.M. Salman and R. Simanjutak. 2013. *Australian Journal of Combinatorics*. Vol. 57: 127-138.
- Inayah, N. 2013. *Pelabelan  $(a, d)$  –  $\mathcal{H}$ -Anti Ajaib pada Beberapa Kelas Graf*. Tidak dipublikasikan (Disertasi). Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Komalasari, Kokom. 2010. *Pembelajaran Konstektual Konsep dan Aplikasi*. Bandung: Refika Aditama.
- Lipschutz, S. dan Lipson, Marc. 2008. *Schaum's Outlines Matematika Diskret Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.
- Muhammad, Fawwas. 2012. *Pemodelan Graf Berbobot dalam Penentuan Strategi Permainan Bola Keranjang*. *Makalah IF2091 Struktur Diskrit-Sem I Tahun 2012/2013*: 1-7
- Muharromah, Agustina. 2014. *Analisis Morfologi Jalan Kota dengan Penerapan Teori Graf Dominating Set*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.



- Munir, Rinaldi. 2003. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika Bandung.
- Murtadho, Fathiaty. 2013. *Berpikir Kritis dan Strategi Metakognisi: Alternatif Sarana Pengoptimalan Latihan Menulis Argumentasi. 2<sup>nd</sup> International Seminar on Quality and Affordable Education (ISQAE 2013)*: 530-541.
- Pangesti, Fida. 2012. *Pengembangan Bahan Ajar Pendidikan Berpikir (Kritis dan Kreatif) Berbahasa Indonesia SMA melalui Pembelajaran Lintas Mata Pelajaran. Jurnal Program Studi Pendidikan Bahasa, Sastra Indonesia, dan Daerah, Fakultas Sastra, Universitas Negeri Malang 2012*: 1-11.
- Rahman, A., Narwen, dan Baqi, Ahmad Iqbal. 2012. *Pelabelan Total  $(a, d)$ -Sisi Antiajaib pada Graf Petersen  $P(n, 2)$ , untuk  $n$  Ganjil,  $n \geq 3$ . Jurnal Matematika Unand. Vol. 1: 7-10.*
- Rezita, F., Nurtaatti, Dafik. 2014. *Pelabelan Super  $(a, d)$ -Face Antimagic Total dari Graf Siklus dengan Busur. CGANT-Universitas Jember. Vol. 1(1): 1-6.*
- Rizky, P., Hesti, Ika, dan Dafik. 2014. *Super  $(a, d)$  –  $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Selimut pada Shackle Graf Triangular Book. CGANT-Universitas Jember. Vol. 1(1): 1-10.*
- Rofiah, E., Aminah, Nonoh S., dan Ekawati, Elvin Yusliana. 2013. *Penyusunan Instrumen Tes Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi Fisika pada Siswa SMP. Jurnal Pendidikan Fisika Vol.1 (2): 17-22*
- Roosen, Kenneth. 2003. *Discrete Mathematics and Its Application*. New York: The McGraw-Hill Companies.
- Sedláček. 1963. *Problem 27 in Theory of Graphs and Its Applications. Proceeding of the Symposium held in Smolenice Praha 163, 163-167.*
- Slamin, Baca, M., Lin, Y., Miller, M., Simanjutak, R. 2002. *Edge-Magic Total Labelings of Wheels, fans and friendship graphs. Bull. ICA 35, 89-98.*
- Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Jember University Press.
- Soemanto, Wasti. 1990. *Psikologi Pendidikan*. Jakarta: Rineka Cipta.

- Susilo, Frans. 2012. *Landasan Matematika*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Utari, R. 2008. *Taksonomi Bloom: Apa dan Bagaimana Cara Menggunakannya*. Pusdiklat KNPk, Widyaaiswara.
- Wijaya, K. dan Baskoro, E.T. 2000. *Edge - Magic Total Labelling On Disconnected Graphs*. In Proc. Eleventh Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms (pp. 139-144).
- Yahya, Nicky I., Zakaria, P., dan Yahya, Lailany. (Tanpa Tahun). *Penerapan Konsep Graf dalam Penyusunan Jadwal Perkuliahan di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNG*. *Jurnal Mahasiswa Pendidikan Matematika*: 1-12.
- Yulianti, Kartika. 2008. *Hand Out Mata Kuliah Teori Graf (MT 424) Jilid Satu*. Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.
- Internet
- Yunimelawati. 2012 *Pengertian dari Aksioma, Definisi, Postulat, Proposisi, Teorema, Lemma, Corollary, Konjektur*. <https://yunimatematika09.wordpress.com/2012/11/23/pengertian-dari-aksioma-definisi-postulat-proposisi-teorema-lemma-corollary-konjektur-lemma/> [4 Januari 2015].