



**PEMODELAN SEBARAN AIR PANAS *SPRAY POND*
DI PABRIK GULA MENGGUNAKAN METODE
VOLUME HINGGA**

SKRIPSI

Oleh

Novian Nur Fatihah

NIM 110210101071

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2015



**PEMODELAN SEBARAN AIR PANAS *SPRAY POND*
DI PABRIK GULA MENGGUNAKAN METODE
VOLUME HINGGA**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

Novian Nur Fatihah

NIM 110210101071

Dosen Pembimbing I : Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.

Dosen Pembimbing II : Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.

Dosen Penguji I : Prof.Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Dosen Penguji II : Prof.Drs. Slamini, M.Comp.Sc.,Ph.D.

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2015

HALAMAN PERSEMBAHAN

Atas berkah rahmat Allah yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam hidupku, teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Ayahanda tercinta Slamet Pujianto dan Ibunda tercinta Istiqomah, serta Adikku Alifah Antika yang selalu meberikan semangat, dorongan, cinta, dan kasih sayangnnya serta doa yang tiada pernah henti yang selalu mengiringi langkahku dalam meraih cita-cita selama masa studiku;
2. Ibu Susi Setiawani, S.Si., M.Sc. dan Bapak Arif Fatahillah, S.Pd.,M.Si. selaku pembimbing skripsi yang dengan sabar telah memberikan ilmu, arahan, dan bimbingan selama menyelesaikan skripsi saya;
3. Seluruh dosen FKIP Matematika yang telah memberikan pengalaman, memberikan ilmu, dan dorongan semangat selama saya menempuh masa studi di pendidikan matematika;
4. Sahabat-sahabatku di kampus dari maba Agnes, Iin, Melsi, dan Maulinda yang senantiasa memberikan semangat, menemani hari-hariku dalam menyelesaikan skripsi ini dan menorehkan berbagai pengalaman berharga selama masa studi,
5. Sahabatku dari kelas Akselerasi Bella, Hasan, Listia, Rahman, Shofi yang selalu menegurku disaat saya bosan mengerjakan, dan selalu memberikan semangat yang membara dalam menyelesaikan skripsi saya dengan cepat dan tepat,
6. Saudara diperantauan Kos LaluSyakur Kiki, Renata, Winda, Nia, Aya, Nofi, dan Dea yang selalu berada disampingku dan merawatku saat sakit serta terpuruk,
7. Seluruh teman-teman seperjuangan FKIP Matematika angkatan 2011,
8. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

MOTTO

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"

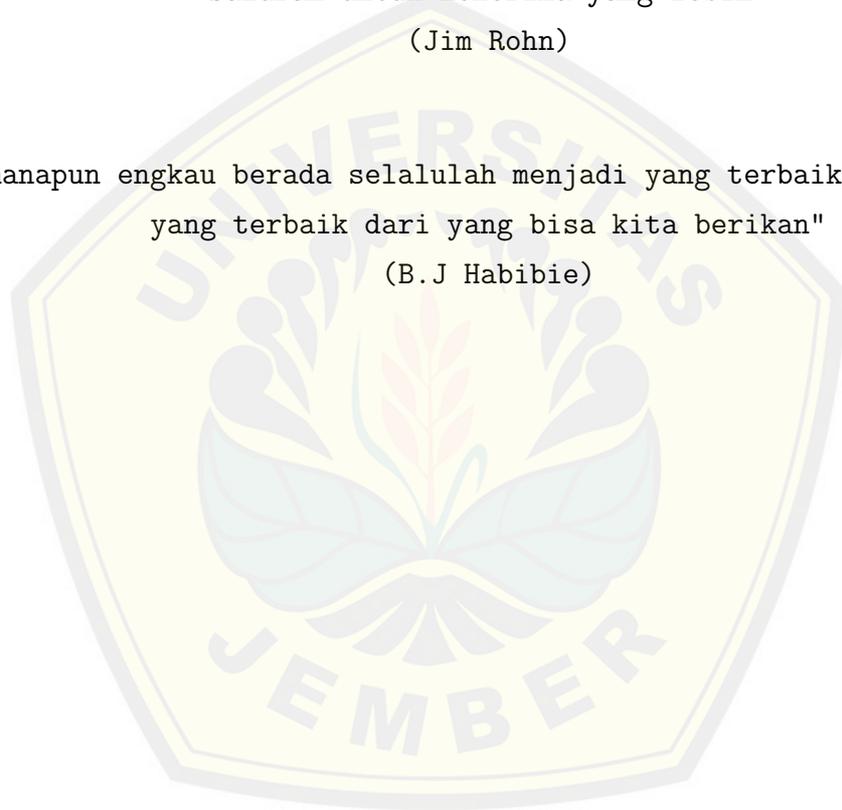
(Ash-Sharh:5)

"Bersyukurlah atas apa yang kamu punya, ucapan syukur membuka saluran untuk menerima yang lebih"

(Jim Rohn)

"Dimanapun engkau berada selalulah menjadi yang terbaik dan berikan yang terbaik dari yang bisa kita berikan"

(B.J Habibie)



HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Novian Nur Fatihah

NIM : 110210101071

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul "**Pemodelan Sebaran Air Panas *Spray Pond* di Pabrik Gula Menggunakan Metode Volume Hingga**" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 28 Mei 2015

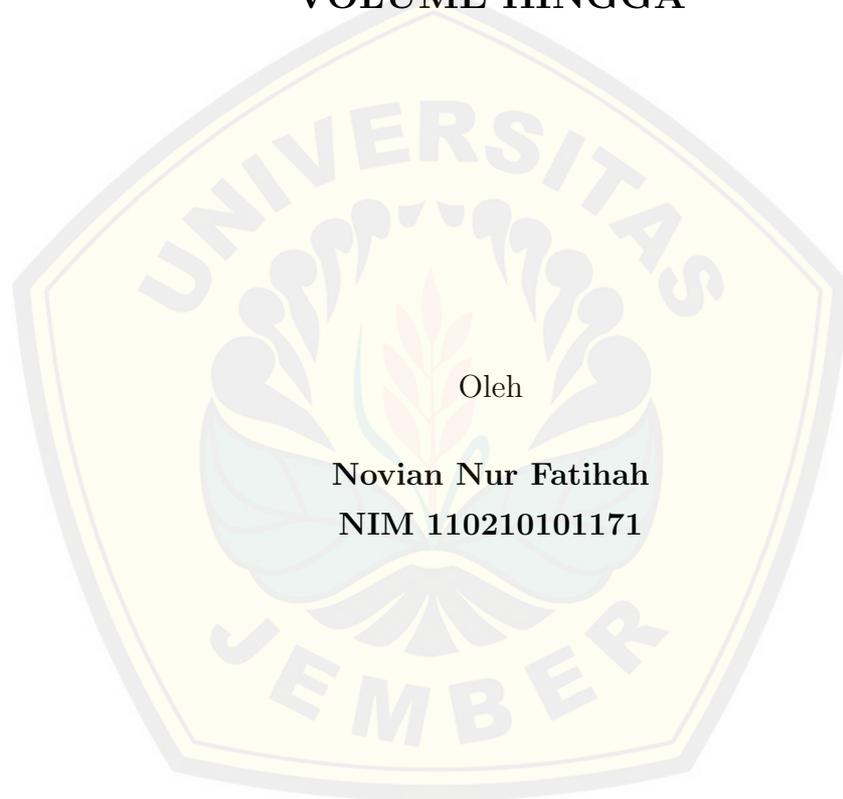
Yang menyatakan,

Novian Nur Fatihah

NIM. 110210101071

SKRIPSI

**PEMODELAN SEBARAN AIR PANAS *SPRAY POND*
DI PABRIK GULA MENGGUNAKAN METODE
VOLUME HINGGA**



Oleh

Novian Nur Fatimah

NIM 110210101171

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.

Dosen Pembimbing Anggota : Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.

PERSETUJUAN

**PEMODELAN SEBARAN AIR PANAS *SPRAY POND*
DI PABRIK GULA MENGGUNAKAN METODE
VOLUME HINGGA**

SKRIPSI

Diajukan untuk dipertahankan di depan Tim Penguji sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaikan pendidikan Program Sarjana Strata Satu Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Oleh:

Nama Mahasiswa : Novian Nur Fatihah
NIM : 110210101071
Jurusan : Pendidikan MIPA
Program Studi : Pendidikan Matematika
Angkatan Tahun : 2011
Daerah Asal : Jombang
Tempat, Tanggal Lahir : Jombang, 21 Nopember 1994

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.
NIP. 19700307 199512 2 001

Arif Fatahillah, S.Pd.,M.Si.
NIP. 19820529 200912 1 003

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul ”Pemodelan Sebaran Air Panas *Spray Pond* di Pabrik Gula Menggunakan Metode Volume Hingga” telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan pada:

Hari : Kamis

Tanggal : 4 Juni 2015

Tempat : Gedung 3 FKIP UNEJ

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Prof.Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D

NIP. 19680802 199303 1 004

Arif Fatahillah, S.Pd.,M.Si.

NIP. 19820529 200912 1 003

Anggota I,

Anggota 2,

Susi Setiawani, S.Si.,M.Sc.

NIP. 19700307 199512 2 001

Prof.Drs. Slamim, M.Comp.Sc.,Ph.D.

NIP. 19670420 199201 1 001

Mengesahkan,

Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Jember

Prof. Dr. Sunardi, M.Pd

NIP. 19540501 198303 1 005

RINGKASAN

Pemodelan Sebaran Air Panas *Spray Pond* di Pabrik Gula Menggunakan Metode Volume Hingga; Novian Nur Fatihah, 110210101071; 2015: 89 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Pencemaran lingkungan saat ini telah menjadi permasalahan yang umum dalam kehidupan sehari-hari. Hal ini disebabkan adanya peningkatan populasi manusia, selain itu juga disebabkan adanya perkembangan teknologi industri yang semakin maju. Pencemaran yang terjadi di alam tidak terbatas wilayah atau tempat dimana pencemaran itu terjadi. Salah satu contohnya adalah pencemaran adanya aktifitas pembuangan limbah air panas dari pembangkit tenaga listrik dan pendingin mesin-mesin industri yang ada di pabrik gula. Masuknya limbah air yang masih panas dari *spray pond* ke sungai dalam jumlah besar dapat memberikan dampak negatif bagi kehidupan biota sungai di sekitarnya. Oleh karena itu, pengkajian tentang pola sebaran air panas dari *spray pond* perlu dilakukan untuk dapat mengetahui temperatur air yang ada di *spray pond* dapat dialirkan ke sungai tanpa harus mengganggu biota sungai tersebut. Tujuan penelitian ini untuk: (1) mengetahui model matematika sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula menggunakan metode volume hingga, (2) mengetahui hasil analisis temperatur awal sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula menggunakan metode volume hingga, (3) mengetahui hasil analisis temperatur awal sebaran air panas terhadap tekanan air di *spray pond*, (4) mengetahui efektivitas metode volume hingga dalam menganalisis faktor temperatur sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula. Hasil penelitian diharapkan dapat menemukan solusi tentang penyebaran air panas *spray pond* agar penurunan temperatur air tidak mengganggu lingkungan.

Penelitian ini dilakukan dalam dua tahapan. Tahapan pertama yaitu pengumpulan bahan dari lapangan dan literatur buku maupun internet. Dari lapangan dilakukan metode observasi untuk mencari data secara langsung terhadap proses

sebaran air panas limbah yang berasal dari proses perindustrian, temperatur sebaran air panas *spray pond* yang ada di Pabrik Gula Djombang Baru. Dari literatur buku maupun internet diperoleh data tentang biota alam yang akan mati jika terkena limbah panas, temperatur lingkungan, dan efek jika limbah yang dikeluarkan masih berupa limbah panas.

Tahapan yang kedua yaitu menentukan model sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula menggunakan metode volume hingga. Kemudian menganalisis proses sebaran air panas menggunakan *software Matlab* dengan tekanan dan temperatur awal yang diberikan berbeda, dan hasilnya disimulasikan menggunakan *software Fluent*.

Hasil penelitian diperoleh model matematika sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula yang merupakan persamaan yang menyatakan persamaan momentum dan persamaan energi yang bergantung pada temperatur dan tekanan air semprotan pipa, sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \phi_w(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) - \phi_e(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) + \\ & \phi_s(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) - \phi_n(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) = \rho \left[-kT_0 \right. \\ & \left. \frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} - 2kT_0\Delta t - kT_0\frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} + \Delta y\Delta t(pu' + \frac{1}{2}\rho u'v' - \mu v' + \rho u^2v + \right. \\ & \left. \frac{1}{2}\rho uv^2 + p - \rho g) + \Delta x\Delta t(pv' + \frac{1}{2}\rho u'v' + \mu u' + \frac{1}{2}\rho u^2v + \rho uv^2 + p - \right. \\ & \left. \rho g) \right] + \frac{h}{\rho}2\mu u\Delta y\Delta t\left(\frac{u\Delta y\Delta t}{\Delta x}\phi_0 + v\phi_0\right) + \frac{h}{\rho}2\mu\Delta x\Delta t\left(u\phi_0 + \frac{v\Delta x\Delta t}{\Delta y}\phi_0 + \right. \\ & \left. \frac{gn^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2}(u + v) + (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

Analisis dilakukan dengan tekanan yang diberikan berbeda, yaitu 10 Pascal, 20 pascal, dan 30 pascal. Selain itu juga dengan temperatur awal yang dikeluarkan dari *spray pond* berbeda yaitu 313 Kelvin, 333 Kelvin, dan 353 Kelvin juga dianalisis. Dari seluruh simulasi yang telah dilakukan menggunakan *software Matlab* dan *Fluent*, dibutuhkan tekanan air yang tinggi agar proses penurunan temperatur air panas yang dikeluarkan dari *spray pond* semakin banyak dan penyebarannya air

semakin luas. Hasil tersebut dapat dijadikan acuan untuk menentukan tekanan dan temperatur awal air yang disemprotkan *spray pond* agar saat air keluar ke lingkungan sudah mengalami penurunan temperatur.



KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Pemodelan Sebaran Air Panas Spray Pond* di Pabrik Gula Menggunakan Metode Volume Hingga. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Ketua Laboratorium Komputer Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan MIPA FKIP;
5. Susi Setiawani, S.Si.,M.Sc selaku Dosen Pembimbing I dan AArif Fatahillah, S.Pd.,M.Si selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
6. Seluruh Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
7. PG.Djombang Baru yang telah memberikan izin penelitian mengenai topik skripsi ini;
8. Keluarga Besar Mahasiswa Pendidikan Matematika Angkatan 2011 yang telah memberikan semangat dan bantuan dalam proses penulisan skripsi ini;
9. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhir kata penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan memberikan motivasi kepada mahasiswa lain untuk melakukan penelitian sejenis.

Jember, Mei 2015

Penulis

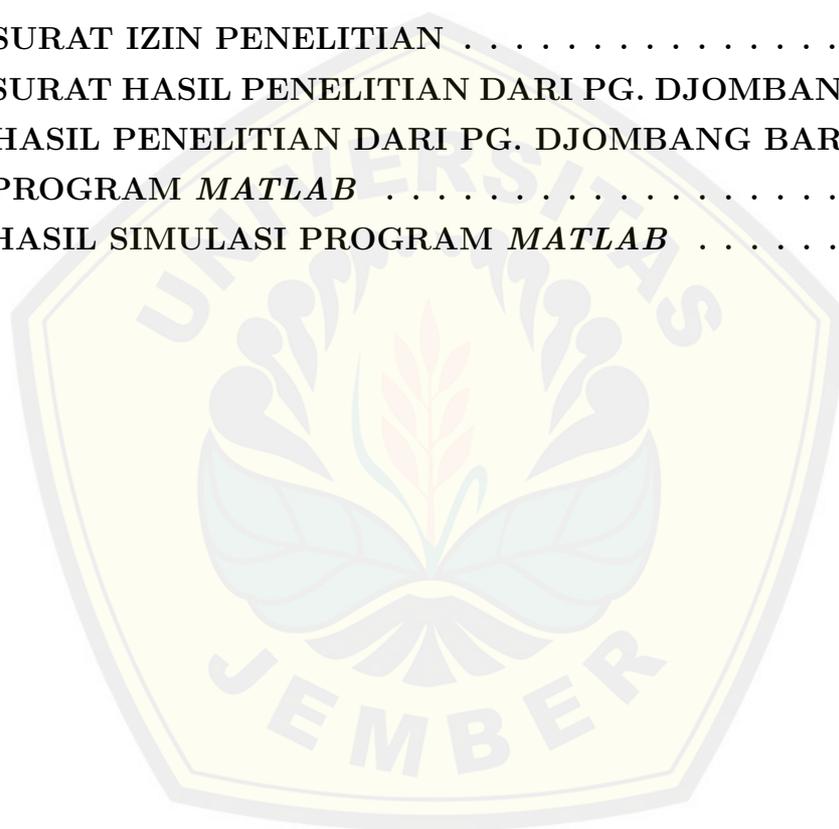


DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PERSETUJUAN	vi
HALAMAN PENGESAHAN	vii
RINGKASAN	viii
Kata Pengantar	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xviii
DAFTAR LAMBANG	xix
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan Penelitian	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
2 TINJAUAN PUSTAKA	6
2.1 <i>Spray pond</i> dan Cara Kerjanya	6
2.2 Temperatur Sebagai Faktor Lingkungan	8
2.3 Sebaran Air Panas	9
2.4 Fluida	10
2.4.1 Jenis-jenis Fluida	11
2.4.2 Jenis-jenis Aliran Fluida	12
2.5 Model dan Pemodelan Matematika	15
2.6 Metode Volume Hingga	16
2.6.1 Persamaan Momentum	18
2.6.2 Persamaan Energi	20

2.6.3	CFD (<i>Computational Fluid Dynamics</i>)	21
2.7	Teknik Diskritisasi <i>Quadratic Upwind Interpolation Confective Kinematics</i> (QUICK)	29
2.8	Algoritma dan Pemrograman <i>MATLAB</i>	31
2.8.1	<i>MATLAB</i> (<i>Matrix Laboratory</i>)	31
2.8.2	Metode Gauss Seidell	32
2.8.3	Galat atau <i>Error</i>	35
2.9	Perangkat Lunak CFD	38
3	METODE PENELITIAN	41
3.1	Jenis Penelitian	41
3.2	Prosedur Penelitian	41
3.3	Definisi Operasional	43
3.4	Tempat Penelitian	44
3.5	Metode Pengumpulan Data	45
3.6	Instrumen Penelitian	46
3.7	Data dan Analisis Data	46
4	HASIL DAN PEMBAHASAN	48
4.1	Persamaan Matematika Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> di Pabrik Gula	48
4.2	Penyelesaian Model Matematika Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> di Pabrik Gula	55
4.3	Diskritisasi	60
4.4	Efektivitas Metode Volume Hingga dengan Menggunakan Error Relatif Dalam Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> Di Pabrik Gula	67
4.4.1	Format Programing	68
4.4.2	Penggunaan Batas Error (Toleransi) Pada Metode Volume Hingga	69
4.4.3	Simulasi Pemodelan	70
4.5	Analisis dan Pembahasan	70
4.5.1	Komputasi <i>Matlab</i>	71
4.5.2	Simulasi <i>Fluent</i>	75

4.5.3 Analisis Efektivitas Metode Volume Hingga Pada Faktor Temperatur Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> Di Pabrik Gula	85
5 KESIMPULAN DAN SARAN	87
5.1 Kesimpulan	87
5.2 Saran	88
DAFTAR PUSTAKA	89
LAMPIRAN-LAMPIRAN	
A. PEDOMAN WAWANCARA	91
B. INSTRUMEN PENELITIAN METODE DOKUMENTASI	92
C. SURAT IZIN PENELITIAN	93
D. SURAT HASIL PENELITIAN DARI PG. DJOMBANG BARU	94
C. HASIL PENELITIAN DARI PG. DJOMBANG BARU	95
E. PROGRAM <i>MATLAB</i>	96
F. HASIL SIMULASI PROGRAM <i>MATLAB</i>	104



DAFTAR GAMBAR

2.1	<i>Spray Pond</i>	7
2.2	Contoh Fluida Cair	11
2.3	Contoh Fluida Gas	12
2.4	Aliran Fluida Laminar	13
2.5	Aliran Fluida Turbulen	13
2.6	Aliran Fluida Transisi	14
2.7	Sel Pusat dan Sel Vertex	18
2.8	Model Volume Kendali Dua Dimensi	19
2.9	Model Volume Kendali	19
2.10	Bagan Volume Kendali Persamaan Momentum	20
2.11	Bagan Volume Kendali Persamaan Energi	21
2.12	Contoh Simulasi CFD	22
2.13	Diskritisasi QUICK	29
2.14	Tampilan MATLAB	32
2.15	Tampilan GAMBIT	39
2.16	Tampilan <i>FLUENT</i>	40
3.1	Diagram Alur Penelitian	42
4.1	Bagan Volume Kendali Persamaan Momentum	50
4.2	Bagan Volume Kendali Persamaan Energi	53
4.3	Diskritisasi Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> di Pabrik Gula	65
4.4	Grafik Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> dipengaruhi Temperatur Awal	72
4.5	Grafik Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> dipengaruhi Temperatur Awal terhadap Tekanan	73
4.6	Bentuk geometri <i>spray pond</i>	76
4.7	<i>Path line</i> Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> dari sisi depan dengan tekanan 10 Pascal	77
4.8	<i>Path line</i> Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> dari sisi samping dengan tekanan 10 Pascal	77

4.9	<i>Path line</i> Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> dari sisi depan dengan tekanan 13 Pascal	78
4.10	<i>Path line</i> Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> dari sisi samping dengan tekanan 13 Pascal	78
4.11	<i>Path line</i> Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> dari sisi depan dengan tekanan 16 Pascal	79
4.12	<i>Path line</i> Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> dari sisi samping dengan tekanan 16 Pascal	79
4.13	Bentuk Geometri <i>Spray Pond</i> menggunakan 2 Dimensi	80
4.14	Kontur Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> dengan tekanan 10 Pascal	81
4.15	Kontur Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> dengan tekanan 20 Pascal	82
4.16	Kontur Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> dengan tekanan 30 Pascal	82
4.17	Kontur Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> dengan temperatur <i>in air</i> 313 K	83
4.18	Kontur Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> dengan temperatur <i>in air</i> 333 K	84
4.19	Kontur Sebaran Air Panas <i>Spray Pond</i> dengan temperatur <i>in air</i> 353 K	85

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Contoh Hasil Penelitian Murni	24
Tabel B1. Data tentang <i>Spray Pond</i>	51
Tabel B2. Data Suhu	51
Tabel B3. Data Kecepatan	51



DAFTAR LAMBANG

τ	=	Laju tegangan air
μ	=	Koefisien kekentalan air
$\frac{\partial}{\partial x}$	=	Turunan terhadap x
$\frac{\partial}{\partial y}$	=	Turunan terhadap y
$\frac{\partial}{\partial t}$	=	Turunan terhadap waktu
x	=	Jarak antar pipa(m)
h	=	Tinggi pipa (m)
ρ	=	Kerapatan (massa jenis air)
p	=	Tekanan
ϕ	=	Temperatur (Kelvin)
i	=	Komponen vektor pada sumbu X
j	=	Komponen vektor pada sumbu Y
u	=	Komponen kecepatan pada sumbu X
v	=	Komponen kecepatan pada sumbu Y
u'	=	Komponen kecepatan turbulen pada sumbu X
v'	=	Komponen kecepatan turbulen pada sumbu Y
F	=	Gaya
ϕ_0	=	Kecepatan awal udara
ϕ_s	=	Kontrol permukaan arah <i>south</i> atau selatan
ϕ_n	=	Kontrol permukaan arah <i>north</i> atau utara
ϕ_w	=	Kontrol permukaan arah <i>west</i> atau barat
ϕ_e	=	Kontrol permukaan arah <i>east</i> atau timur
g	=	Gaya gravitasi
a	=	Hasil perhitungan secara analitik (sebenarnya)
\hat{a}	=	Hasil perhitungan secara numerik

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang penting dalam kehidupan sehari-hari yang didefinisikan dengan jelas, cermat, akurat, dan representasinya lebih banyak menggunakan simbol-simbol. Matematika itu bukanlah ilmu pengetahuan menyendiri yang dapat sempurna karena dirinya sendiri, akan tetapi adanya hubungan dengan ilmu lainnya dapat menyelesaikan masalah yang ada di kehidupan sehari-hari dan mempermudah menyelesaikan permasalahan tersebut. Permasalahan dalam kehidupan sehari-hari dapat meliputi berbagai bidang, diantaranya adalah di bidang pendidikan, bidang industri, bidang pertanian, bidang perkebunan, dan sebagainya. Salah satu penerapan yang bisa di aplikasikan di bidang industri ialah penggunaan metode volume hingga pada sebaran air panas dari hasil pengolahan pabrik pada *spray pond* di pabrik gula.

Matematika terdiri dari beberapa cabang ilmu, antara lain: matematika analisis, matematika terapan, matematika murni, matematika komputasi, matematika statistik, matematika ekonomi, matematika diskrit, fisika matematika, biostatistika dan lain sebagainya. Suatu pembelajaran tentang matematika yang berhubungan dengan ilmu fisika adalah matematika dapat membantu dalam penentuan model matematika yang dapat diterapkan dalam masalah mekanika fluida, perpindahan, penyebaran panas pada fluida, dan lainnya.

Pencemaran lingkungan saat ini telah menjadi permasalahan yang umum dalam kehidupan sehari-hari. Hal ini disebabkan adanya peningkatan populasi manusia, selain itu juga disebabkan adanya perkembangan teknologi industri yang semakin maju. Pencemaran yang terjadi di alam tidak terbatas wilayah atau tempat dimana pencemaran itu terjadi. Salah satu contohnya adalah pencemaran adanya aktifitas pembuangan limbah air panas dari pembangkit tenaga listrik dan pendingin mesin-mesin industri yang ada di pabrik gula. Oleh karena itu, dampak dari buangan limbah air panas ini perlu dikaji dengan lebih mendalam.

Perubahan suhu dapat mengganggu proses metabolisme organisme sungai seperti semua jenis ikan, *insects*, *benthic invertebrata*, *zooplankton*, *phytoplankton* dan *microba*, sehingga kemampuan organisme sungai tersebut untuk bertahan hidup sangat diragukan. Perubahan suhu secara tidak alamiah berdampak tidak langsung terhadap biota dimana daya dukung habitatnya menjadi hilang.

Pengoperasian suatu instalasi di suatu pabrik yang berbahan bakar minyak bumi, batubara, maupun ampas padat limbah pabriknya, umumnya menggunakan air sungai sebagai pendingin. Air sungai yang telah digunakan sebagai pendingin ini dibuang kembali ke sungai. Untuk menurunkan suhu sebelum dibuang ke sungai, air pendingin dialirkan melalui suatu kolam pendingin yang disebut *spray pond*. Namun, air pendingin yang masuk kembali ke sungai masih saja memiliki suhu di atas suhu sungai. Masuknya limbah air yang masih panas dari *spray pond* ke sungai dalam jumlah besar dapat memberikan dampak negatif bagi kehidupan biota sungai di sekitarnya. Hanya ikan yang memiliki organ pernafasan tambahan berupa labirin, *crustaceae*, dan *molusca* yang dapat bertahan terhadap temperatur yang tinggi dan dapat hidup dalam lingkungan yang panas. Suhu tertinggi yang dapat ditoleransi oleh ikan adalah $38,1^{\circ}$ Celcius, krustasea $37,9^{\circ}$ Celcius dan moluska $36,7^{\circ}$ Celcius. (Mihardja dkk.,1999)

Hal ini akan mendorong manusia untuk mencari solusi atas pemecahan masalah-masalah tersebut yang secara tidak langsung dapat mendorong berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi. Sebaran polutan limbah air panas dari *spray pond* ke sungai tergantung pada beberapa faktor yaitu volume limbah air panas yang berada di *spray pond*, suhu limbah air panas, luas dari *spray pond*, banyaknya pipa penyemprot di *spray pond* dan sirkulasi air yang terdapat di *spray pond* tersebut. Pengkajian tentang pola sebaran air panas dari *spray pond* perlu dilakukan untuk dapat mengetahui temperatur dan tekanan air yang ada di *spray pond* dapat dialirkan ke sungai tanpa harus mengganggu biota sungai tersebut.

Berdasarkan penelitian sejenis yang telah dilakukan dan dipublikasikan dalam jurnal diantaranya adalah tentang Analisis Penyebaran Aliran Panas pada Oven Surya Berbantuan Software Fluent (Fatahillah, 2013:1-8), Pemodelan *Wind Turbine Rotor Tipe Hawt (Horizontal Axis Wind Turbine)* menggunakan Metode Vo-

lume Hingga (Zahroh:2014), Analisis Model Matematika Proses Penyebaran Limbah Cair pada Air Tanah (Gangga:2014), dan Model Sebaran Panas Air Kanal Pendingin Instalasi Pembangkit Listrik ke Badan Air Laut (Cahyana:2012) serta masih banyak lagi penelitian yang menggunakan metode volume hingga dalam penyelesaiannya. Dalam penelitian yang terdahulu mengenai sebaran air panas yang di modelkan adalah sebaran panas air kanal ke badan laut, dalam penelitian ini ingin mengembangkan menjadi sebaran air panas dari limbah pabrik kolam *spray pond* ke badan sungai. Salah satu pemodelan dalam kehidupan sehari-hari yang belum diketahui solusi adalah pemodelan sebaran air panas *spray pond* yang ada di pabrik gula. Perbedaan penelitian ini dengan penelitian sebelumnya yang sudah pernah dilakukan adalah benda yang akan dimodelkan berbeda, seperti contohnya penelitian ini memodelkan penyemprotan air yang dikeluarkan dari pipa *spray pond*.

Dari uraian di atas, peneliti tertarik untuk mengetahui simulasi proses sebaran air panas *spray pond* yang ada di pabrik gula menggunakan *software MATLAB* dan *FLUENT*. Dalam penelitian ini penulis memilih judul "**Pemodelan Sebaran Air Panas *Spray Pond* di Pabrik Gula Menggunakan Metode Volume Hingga**" yang akan dibangun suatu model matematika dari proses penyebaran panas. Model yang terbentuk akan diselesaikan secara numerik dengan metode volume hingga, karena metode numerik volume hingga dapat digunakan pada bentuk benda yang tidak teratur sehingga benda menjadi lebih mudah didiskritisasi untuk menentukan nilai-nilai yang akan dicari pada proses diskritisasi. Metode dengan menggunakan teknik diskritisasi yakni objek penelitian dibagi menjadi beberapa daerah, misalnya volume, kecepatan, temperatur, dan sirkulasi air.

Untuk menyelesaikan model matematika bisa menggunakan *MATLAB*, *software* ini memiliki tingkat akurasi yang tinggi. Untuk simulasi pemodelan matematika bisa menggunakan *Computational Fluid Dynamic (CFD)*. Di dalam *CFD* terdapat *GAMBIT* dan *FLUENT*. *GAMBIT* digunakan untuk mempermudah proses *meshing*. *FLUENT* adalah salah satu jenis program *CFD* yang menggunakan metode volume hingga.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. bagaimana model matematika sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula menggunakan metode volume hingga?
2. bagaimana hasil analisis temperatur awal sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula menggunakan metode volume hingga?
3. bagaimana hasil analisis temperatur awal sebaran air panas terhadap tekanan air di *spray pond*?
4. bagaimana efektivitas metode volume hingga dalam menganalisis faktor temperatur sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari luasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini permasalahan akan dibatasi pada:

1. pemodelan permasalahan sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula;
2. pemodelan yang akan dilakukan tidak memperhatikan kandungan senyawa-senyawa kimia yang terkandung di air panas limbah pabrik gula, yang diperhatikan hanya pada temperatur dan tekanan air panas buangan pabrik;
3. pemodelan yang akan dilakukan dengan keadaan *spray pond* berfungsi dengan baik;
4. pemodelan dilakukan dengan pengabaian cuaca yang ada di lingkungan sekitar *spray pond*;
5. metode yang digunakan adalah metode volume hingga dengan teknik diskritisasi menggunakan *Quadratic Upwind Interpolation Connective Kinematics (QUICK)*;
6. komputasi dengan *MATLAB* dan disimulasikan dengan *FLUENT*.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. untuk mengetahui model matematika sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula menggunakan metode volume hingga;
2. untuk mengetahui hasil analisis temperatur awal sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula menggunakan metode volume hingga;
3. untuk mengetahui hasil analisis temperatur awal sebaran air panas terhadap tekanan air di *spray pond*;
4. untuk mengetahui efektivitas metode volume hingga dalam menganalisis faktor temperatur sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian adalah:

1. menambah pengetahuan baru dalam bidang pemodelan matematika, yaitu mengetahui pemodelan sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula;
2. memberikan kontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru dalam bidang pemodelan matematika menggunakan metode volume hingga;
3. menjadi sumber bacaan bagi para peneliti lain yang ingin melakukan penelitian dalam bidang pemodelan matematika;
4. memberikan kontribusi kepada pabrik yang membuang limbah air panas ke lingkungan bagaimana pemodelan sebaran air panas *spray pond* agar tidak berbahaya bagi lingkungan saat sudah dikeluarkan dari *spray pond*;
5. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah pemodelan matematika pada sebaran panas;
6. sebagai bahan bacaan untuk mata kuliah Pemodelan Matematika.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Aliran air merupakan salah satu fenomena aliran fluida yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Industri-industri di daerah perkotaan memerlukan aliran air yang cukup untuk kebutuhan pengolahan bahan di industri tersebut. Proses penyebaran hasil aktifitas pembuangan limbah air panas dari pendingin mesin-mesin industri dan pembangkit tenaga listrik ke perairan sungai, lambat laun akan memiliki dampak yang cukup signifikan. Model matematika sebaran air panas yang terjadi di *spray pond* yang merupakan aktifitas pembuangan limbah air panas ke lingkungan akan dibentuk menggunakan metode volume hingga kemudian dianalisis secara numerik dengan bantuan *MATLAB*. Simulasi pola sebaran air panas yang terjadi di *spray pond* dilakukan dengan bantuan *FLUENT*. Oleh karena itu, pada bab 2 ini akan dibahas tentang teori-teori yang mendukung penyelesaian dari permasalahan yang ada pada penelitian ini.

2.1 *Spray pond* dan Cara Kerjanya

Berbagai mesin dan proses perindustrian pasti mengeluarkan panas yang nantinya akan dibuang ke lingkungan. Panas yang dikeluarkan oleh mesin atau proses industri tersebut merupakan salah satu bentuk energi yang disebut *kalor*. Sistem pengolahan air limbah untuk menurunkan suhu yang biasa digunakan adalah *spray pond*. Luasan *spray pond* mempengaruhi jumlah air limbah kondensor yang dapat diolah dan layak digunakan kembali sebagai air injeksi. Menurut Hugot (dalam Novarina, 2012) penghitungan luasan *spray pond* yang dibutuhkan dapat menggunakan rumus $Q_2/S = 750 \text{ kg/m}^2/\text{jam}$, Q_2 adalah berat air yang akan diolah (kg/h), S adalah luasan *spray pond* (m^2). Untuk kedalaman *spray pond* rata-rata 1 meter. Kedalaman ini tidak begitu berpengaruh terhadap penurunan suhu, yang menentukan adalah luasan dan kemampuan dalam menyemprotkan air. Dengan mengacu pada perhitungan tersebut dapat diketahui seberapa lu-

asan *spray pond* yang harus dimiliki pabrik gula agar dapat memakai kembali air jatuhnya kondensor sebagai air injeksi atau yang sudah bisa dialirkan ke sungai (Novarina, 2012:114). Di samping *spray pond* terdapat alat lain yang dapat digunakan untuk mendinginkan air panas hasil dari proses pabrik, alat tersebut dinamakan *Colling tower*. *Colling tower* dari sisi dimensi lebih kompak, tidak perlu lahan luas, namun operasional lebih tinggi karena perlu bahan kimia pengendali erosi. Untuk alasan pencapaian suhu dan ekonomi energi, *cooling tower* lebih efektif (IFC, 2009). Contoh air kolam *spray pond* dapat dilihat pada Gambar 2.1



Gambar 2.1 *Spray Pond*
(*Spray Pond* PG Djombang Baru, 2015)

Karakteristik *spray pond* lebih simple, biaya operasional lebih murah, tidak memerlukan bahan kimia untuk memelihara alat, perlu lahan yang luas, dan jika ada angin akan mengganggu lingkungan sekitar. Cara kerja dari *spray pond* ini adalah air yang berasal dari kondensor disemprotkan dari bagian atas pipa. Air kemudian semprotkan ke udara dan berubah menjadi partikel-partikel air yang lebih kecil sehingga terjadilah proses penguapan dan penurunan suhu air. Secara keseluruhan *spray pond* yang digunakan di pabrik-pabrik gula belum cukup efektif untuk menurunkan temperatur seluruh air limbah kondensor, maka dari itu air limbah kondensor yang keluar ke badan sungai masih memiliki temperatur di atas

temperatur normal sungai.

2.2 Temperatur Sebagai Faktor Lingkungan

Temperatur merupakan faktor penting di lingkungan bahari karena secara langsung mempengaruhi proses faali biota, terutama pada laju metabolisme dan reproduksi, dan secara tidak langsung melalui faktor-faktor lingkungan lain seperti kelarutan gas, viskositas air, dan sebaran densitas air. Suhu ambient untuk suatu wilayah spesifik berkaitan dengan faktor-faktor oseanografi dan geografi, dan dapat spesifik ekosistem.

Temperatur sangat berpengaruh terhadap proses-proses yang terjadi dalam badan air. Suhu air buangan kebanyakan lebih tinggi daripada suhu badan air. Hal ini erat hubungannya dengan proses *biodegradasi*. Kenaikan suhu air akan menimbulkan beberapa akibat sebagai berikut : (1) jumlah oksigen terlarut di dalam air menurun. (2) kecepatan reaksi kimia meningkat. (3) kehidupan ikan dan hewan air lainnya terganggu.(4) jika batas suhu yang mematikan terlampaui, ikan dan hewan air lainnya akan mati. (Fardiaz, 1992)

Menurut Hukum Van't Hoff, kenaikan suhu 10° akan menaikkan kecepatan reaksi kimia dua kali lipat. Walaupun hukum ini tidak dapat diterapkan begitu saja terhadap biota, namun dapat diperkirakan bahwa perubahan suhu lingkungan dapat mempengaruhi proses-proses hayati di dalam organisme karena proses-proses tersebut banyak yang bersifat kimiawi. Suhu juga merupakan faktor pembatas terhadap sebaran biota dan mempengaruhi viscositas air (Nikolsky, 1963:17-20). Viscositas air menurun dengan meningkatnya suhu. Mengingat hal-hal tersebut di atas, suhu merupakan faktor ekologis yang penting.

Suhu sering kali merupakan faktor fisik penentu dalam reproduksi, pertumbuhan, pendewasaan dan umur biota. Meskipun demikian, pengaruh suhu tidak sama untuk semua biota. Sebagai contoh, suhu dapat mempengaruhi pola perkembangbiakan. Apabila perubahan suhu lingkungan melebihi kisaran ambang batas normal, dapat menyebabkan terjadinya gangguan perkembangbiakan dan metabolisme pada ikan yang dapat berujung pada kematian (Nikolsky, 1963:20). Perubahan suhu lingkungan yang dapat menyebabkan kematian pada ikan dapat terjadi karena beberapa faktor. Faktor secara buatan dan faktor alami, pada ka-

sus ini faktor yang mempengaruhi adalah faktor buatan yang disebabkan karena adanya limbah berupa suhu (*thermal pollution*) dari hasil industri yang masuk ke dalam sungai (Wijaya, 2009:2). Penelitian ini, akan memodelkan sebaran air panas *spray pond* agar limbah panas yang berasal dari *spray pond* keluar ke lingkungan sudah mencapai suhu yang sama dengan suhu sungai 25 – 32° Celcius kisaran suhu normal dan tidak mengganggu kehidupan biota sungai. (Novarina: 2012)

2.3 Sebaran Air Panas

Secara kimia kenaikan temperatur berpengaruh terhadap kecepatan reaksi dimana reaksi pada kondisi yang setimbang akan berubah sejalan dengan perubahan temperatur. Banyak reaksi yang mempengaruhi kualitas air yaitu reaksi biokimia di sekitar pusat aktivitas mikroba. Rasa dan bau terjadi pada air yang hangat karena terjadinya penurunan kelarutan terutama gas H_2S , SO_2 , CH_4 , SO_x . Pengkajian tentang pola sebaran polutan panas dari kanal pendingin pembangkit listrik perlu dilakukan untuk dapat mengetahui luas daerah yang terkena dampak dan berapa besar perubahan temperatur yang terjadi. Pola sebaran polutan panas di laut dapat diprediksi dengan cara simulasi menggunakan pemodelan numerik hidrodinamika laut.

Penelitian yang sudah ada mengenai sebaran panas air kanal pendingin instalasi pembangkit listrik ke badan laut ini merupakan persamaan umum dalam konsep hidrodinamika dibentuk dari hukum kekekalan massa, hukum kekekalan momentum dan hukum kekekalan energi. *Resource Management Associates* - (RMA2) merupakan model hidrodinamik numerik dua dimensi untuk rata-rata kedalaman dengan metode elemen hingga. RMA2 menghitung solusi elemen hingga untuk bentuk *Reynold* dari persamaan *Navier-Stokes* untuk aliran turbulensi. Gaya gesekan dihitung dengan formula *Manning/Chezy*, sedangkan koefisien viskositas olakan digunakan untuk mendefinisikan karakteristik turbulensi. Sistem persamaan yang digunakan dalam RMA2 terdiri dari dua persamaan gerak (persamaan 1 dan 2) dalam koordinat Cartesian, serta satu persamaan kontinuitas

(persamaan 3) untuk fluida *incompressible* sebagai berikut: (Cahyana:2012)

$$h \frac{\partial u}{\partial t} + hu \frac{\partial u}{\partial x} + hv \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{h}{\rho} (E_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + gh \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{gun^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2} + (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

Persamaan 1, 2 dan 3 diselesaikan dengan metode elemen hingga menggunakan metode residu berpemberat Galerkin. Elemen yang digunakan dapat berupa garis satu dimensi, segi empat dua dimensi atau segi tiga, serta dapat juga memiliki sisi yang melengkung (parabolic). Fungsi dari bentuk elemen adalah kuadratik untuk kecepatan dan linear untuk kedalaman. Integrasi dalam ruang dilakukan dengan integral Gaussian. Turunan terhadap waktu diganti dengan pendekatan beda hingga non linear.

Dari persamaan tersebut, peneliti dapat mengembangkan dan menciptakan model matematika pada sebaran air panas *spray pond* dengan menggunakan rumus awal persamaan momentum dan persamaan energi menggunakan metode volume hingga.

2.4 Fluida

Menurut Victor L. Streeter & E. Benjamin Wylie terjemahan Arko Prijono fluida merupakan zat yang berubah bentuk secara kontinu (terus menerus) jika memperoleh gaya. Artinya fluida merupakan suatu zat yang bisa bergerak dan berubah bentuk jika terdapat gaya yang bekerja pada zat tersebut. Gaya yang bekerja pada fluida tidak bergantung besar atau kecil. Gaya tersebut adalah tegangan geser, yaitu perbandingan antara besarnya gaya geser dengan luas permukaan. Gaya geser merupakan komponen gaya yang menyinggung permukaan. Kebanyakan fluida biasa disebut sebagai zat padat, zat cair, atau gas. Walaupun sebagian diantaranya memiliki sifat yang memungkinkan diperoleh sebutan ganda. Sebuah zat padat umumnya mempunyai bentuk tertentu, sedangkan zat cair dan gas mempunyai bentuk yang ditetapkan oleh wadahnya sendiri. Perbedaan dasar antara zat cair dan gas (keduanya digolongkan sebagai fluida) adalah bahwa gas yang menyebar yang mengisi seluruh wadah yang ditempatinya.

Definisi yang lebih tepat untuk membedakan zat padat dengan fluida adalah dari karakteristik deformasi bahan tersebut. Zat padat dianggap sebagai bahan yang menunjukkan reaksi deformasi yang terbatas ketika menerima suatu gaya geser *shear*. Fluida dapat didefinisikan sebagai suatu zat yang terus menerus berubah bentuk apabila mengalami tegangan geser, fluida tidak mampu menahan tegangan geser tanpa berubah bentuk. Definisi tentang fluida ini mengingatkan bahwa tegangan geser ada apabila sebuah fluida sedang mengalami deformasi (dalam Munabil,2012). Fluida memiliki sifat yang mendasari diberikannya gaya (tahanan) terhadap tegangan geser oleh fluida tersebut. Sifat ini disebut viskositas (kekentalan). Jika suatu fluida mengalami pergeseran (berubah), maka fluida tersebut mulai bergerak dengan laju tegangan (τ) yang berbanding terbalik dengan suatu besaran yang disebut koefisien kekentalan (μ). Maka tegangan geser yang bekerja juga berbanding langsung dengan gradien kecepatan.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2)$$

2.4.1 Jenis-jenis Fluida

Berdasarkan bentuknya fluida dibedakan menjadi dua, yaitu:

1. Cair



Gambar 2.2 Contoh Fluida Cair

Dalam fisika, zat cair atau cairan adalah zat yang secara terus-menerus

mengalami deformasi (arus) di bawah tegangan geser. Cairan ini disebut jenis media yang bersifat kontinu dengan gaya tarik lemah. Zat cair merupakan suatu zat yang berubah bentuk sesuai dengan tempat yang ditempatinya dan cenderung mempertahankan volumenya. Contoh fluida cair dapat dilihat pada Gambar 2.2

2. Gas

Gas merupakan salah satu bentuk fluida. Definisi gas yaitu suatu keadaan zat dalam hal ini molekul-molekulnya dapat bergerak sangat bebas, dan dapat mengisi seluruh ruangan yang ditempatinya. Gas tidak memiliki permukaan bebas dan masanya selalu berkembang mengisi seluruh ruangan dan dapat dimampatkan. Salah satu contoh dari fluida gas adalah bahan bakar elpiji. Contoh fluida gas dapat dilihat pada Gambar 2.3



Gambar 2.3 Contoh Fluida Gas

Jenis fluida berdasarkan bentuknya yang terkait dengan penelitian ini adalah fluida cair, karena yang akan dimodelkan adalah proses sebaran air panas yang ada di dalam kolam *spray pond*.

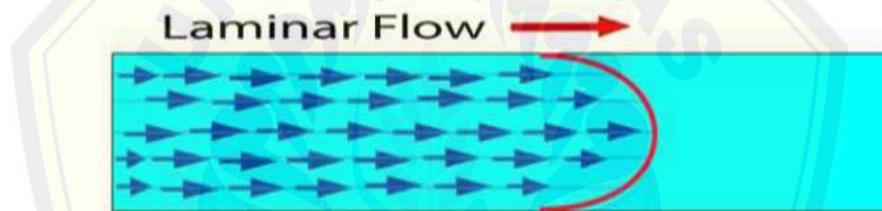
2.4.2 Jenis-jenis Aliran Fluida

Fluida pada dasarnya merupakan suatu zat yang bergerak atau zat alir. Dalam fluida, banyak hal yang dapat mempengaruhi satu sama lain. Jenis zat,

kekentalan, kecepatan alir menjadi dasar tema perbincangan. Berdasarkan karakteristik struktur internal aliran, aliran fluida dapat dibedakan menjadi tiga macam yaitu aliran liminer, turbulen, dan transisi. Sedangkan berdasarkan waktu fluida pada saat mengalir, aliran fluida dibagi menjadi dua yaitu aliran *steady* dan aliran *unsteady*.

1. Berdasarkan Bentuk Aliran

Berdasarkan bentuknya aliran fluida dibagi menjadi tiga cara yaitu aliran laminar, aliran turbulen, dan aliran transisi. Aliran laminar seperti pada Gambar 2.4 merupakan aliran-aliran yang bergerak dengan kondisi (lamina-lamina) membentuk garis-garis alir yang tidak berpotongan satu sama lain. Aliran laminar mempunyai kecepatan air yang rendah dengan kekentalan yang besar. Contoh aliran fluida laminar adalah aliran air di dalam pipa, hanya terdapat satu komponen kecepatan.



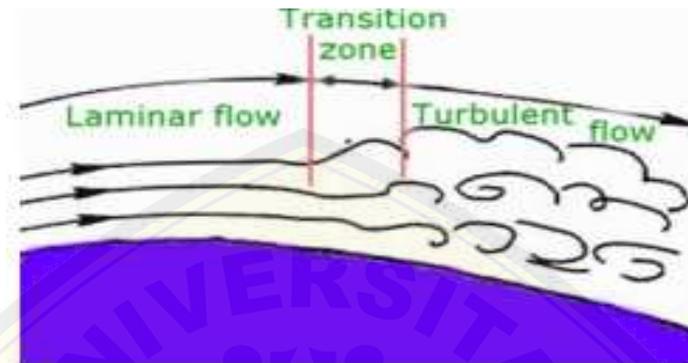
Gambar 2.4 Aliran Fluida Laminar
(www.howequipmentworks.com, 2014)



Gambar 2.5 Aliran Fluida Turbulen
(www.howequipmentworks.com, 2014)

Suatu aliran fluida disebut aliran turbulen jika partikel-partikel fluida bergerak secara tidak teratur pada semua arah tapi dengan jaring pergerakan dalam arah transportasi, dapat dilihat pada Gambar 2.5. Aliran

turbulen terjadi apabila partikel-partikel fluida bergerak tidak teratur dan garis lintasannya saling berpotongan. Contoh aliran fluida turbulen yaitu udara, udara mengalir tidak konstan pada satu arah, tetapi menyebar ke segala arah. Contohnya ialah aliran udara pada AC menyebar keseluruhan ruangan dan sirkulasi (aliran) udara pada tanaman kopi yang bergerak ke segala arah.



Gambar 2.6 Aliran Fluida Transisi
(www.howequipmentworks.com, 2014)

Aliran transisi pada Gambar 2.6 merupakan aliran peralihan dari aliran laminar ke aliran turbulen. Transisi dari aliran laminar dan aliran turbulen terjadi karena suatu gangguan kecil diberikan pada aliran, pengaruh aliran ini semakin besar dengan bertambahnya waktu selanjutnya aliran laminar menjadi tidak stabil dan terjadilah aliran turbulen.

Aliran laminar mempunyai bilangan Reynolds < 2000 . Sedangkan Aliran turbulen mempunyai bilangan Reynold > 4000 . Jika bilangan Reynolds diantara 2000 dan 4000 maka aliran tersebut tergolong aliran transisi. Profil kecepatan vertikal dari angin (udara) diturunkan dari suatu hukum pangkat. Karakteristik turbulen dan profil kecepatan aliran udara vertikal dipengaruhi oleh keadaan atmosfer dan tipe lahan. Profil vertikal kecepatan aliran udara diberikan menurut hukum pangkat sebagai berikut (Kindangen,2005):

$$\frac{v_y}{v_r} = \left(\frac{x}{x_r} \right)^\alpha \quad (2.3)$$

2. Berdasarkan Waktu Aliran

Berdasarkan waktu fluida pada saat mengalir, aliran fluida dibagi menjadi dua yaitu aliran *steady* dan aliran *unsteady*.

Aliran *steady* adalah aliran fluida dimana kondisi titik dimanapun bila kondisi seperti kecepatan, tekanan, dan kondisi lintasan partikel pada fluida tidak berubah terhadap waktu. Dengan kata lain $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ dan koordinat titik-titik dalam ruang (x, y, z) adalah konstan. Selain itu menurut Victor L. Streeter dan E. Benjamin Wylie, pada aliran *steady* juga tidak terjadi perubahan kerapatan (ρ), tekanan (p), atau suhu (T), sehingga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Contoh aliran *steady* yaitu aliran air didalam pipa dengan kecepatan konstan.

Aliran *unsteady* adalah aliran fluida pada sebuah garis arus tertentu variabel aliran, seperti kecepatan, tekanan, kerapatan, dan debit fluida, tidak hanya dalam fungsi jarak melainkan juga dalam fungsi waktu, dimana kondisi titik-titik dimanapun pada fluida berubah terhadap waktu, dengan kata lain $\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0$. Dalam penelitian ini, air yang mengalir dari pipa-pipa di *spray pond* merupakan jenis aliran turbulen dan *unsteady*, karena di dalam aliran air yang terjadi tidak tetap, selalu berubah-ubah setiap saat. Oleh karena itu yang akan digunakan untuk penelitian ini adalah aliran turbulen dan *unsteady*.

2.5 Model dan Pemodelan Matematika

Model matematika dapat dikatakan sebagai deskripsi atau verifikasi suatu fenomena yang dicoba atau diperoleh dengan menggunakan kaedah-kaedah atau bahasa matematika. Model matematika terdiri dari himpunan besaran-besaran kuantitatif terobsesi dan relasi-relasi yang terdapat dalam suatu fenomena. Dalam model matematika terdapat dua besaran kuantitatif yaitu variabel dan parameter yang dikaitkan dalam suatu relasi, seperti persamaan, ketaksamaan dan lain-lain

(Parlaungan,2008). Jadi model matematika merupakan suatu model atau representasi matematika yang dihasilkan dari suatu proses yang terdiri dari konsep-konsep matematika seperti konstanta-konstanta, variabel, fungsi, persamaan, ketaksamaan dan sebagainya.

Proses pemodelan matematika dapat dipandang sebagai terjemahan dari fenomena-fenomena atau masalah dunia nyata menjadi masalah matematika. Informasi yang diperoleh dengan melakukan kajian matematika atas model dengan menggunakan kaidah-kaidah matematika. Informasi yang diperoleh merupakan bahasa matematika tentang fenomena atau masalah yang dimodelkan tersebut. (Parlaungan, 2008)

Seperti dikatakan sebelumnya,proses pemodelan matematika dapat dipandang sebagai terjemahan dari fenomena atau masalah dunia nyata menjadi masalah matematika. Oleh karena itu, pada pemodelan matematika pada sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula juga melihat dari kejadian nyata berdasarkan data-data yang telah ada kemudian dimodelkan dalam suatu persamaan matematika. Dengan melihat proses penyemprotan air *spray pond* yang ada di pabrik gula berdasarkan data yang ada maka bisa diketahui yang berpengaruh dalam pemodelan matematika.

2.6 Metode Volume Hingga

Metode volume hingga adalah suatu metode untuk menyelesaikan suatu persamaan pemodelan matematika dengan suatu titik-titik diskrit yang kontinu, jarak antara titik-titik tersebut teratur membentuk suatu *grid* atau *mesh*. Menurut Apsley (dalam Niam, 2011:20) metode volume hingga sangat cocok diterapkan pada masalah aliran fluida dan aerodinamik. Pada penelitian ini memilih metode volume hingga dikarenakan yang akan dimodelkan adalah aliran fluida berupa fluida cair dan ketelitian menggunakan metode ini sangat tinggi. Aliran fluida memenuhi sifat fisis tertentu, dengan memperhatikan sifat-sifat fisis tersebut dapat dibangun persamaan matematika. Pada umumnya fluida memenuhi hukum kekekalan massa, kekekalan energi, hukum kekekalan momentum, dan hukum fisika lain yang sesuai dengan permasalahannya.

Pada metode volume hingga harus diketahui dengan jelas domainnya dan

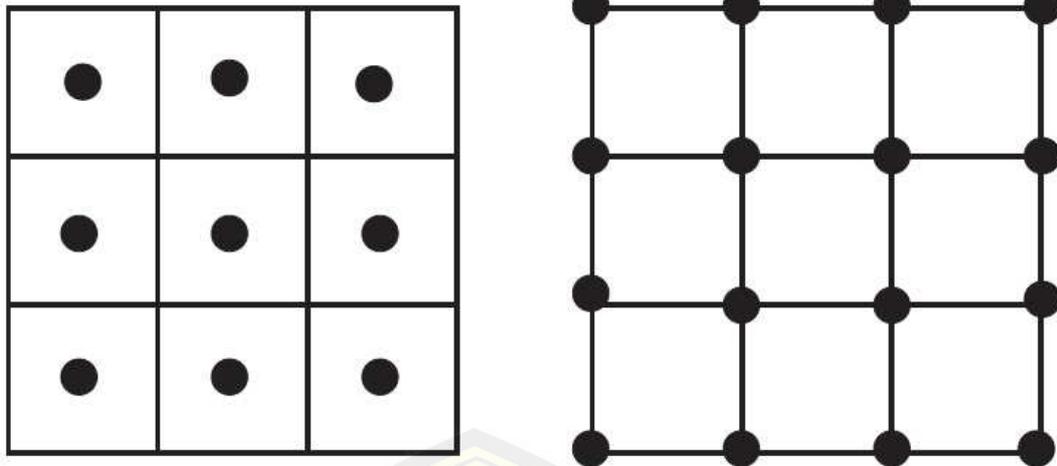
dibagi menjadi bagian-bagian atau grid-grid baik terstruktur atau tidak terstruktur. Agar tidak saling tumpang tindih, persamaan yang terbentuk dalam face (sisi atau permukaan) diubah menjadi node (titik). Dalam metode ini perlu dilakukan diskritisasi sehingga persamaan yang terbentuk merupakan nilai node. Terdapat beberapa teknik diskritisasi yang diselesaikan dengan masalah-masalah yang akan diselesaikan. Teknik-teknik pendiskritan tersebut diantaranya dengan menggunakan metode *Upwind Interpolation System (UDS)*, *Linier Interpolation System (CDS)*, *Quadratic Upwind Interpolation Confective Kinematics (QUICK)*, *Higher Order Schemes*, dan *Other Schemes*.

Pemodelan matematika pada model sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula menggunakan teknik diskritisasi *Quadratic Upwind Interpolation Confective Kinematics (QUICK)* karena penyelesaian pemodelan matematika menggunakan metode volume hingga dan grid pada domain terstruktur. Prosedur dalam metode volume hingga menurut Apsley (dalam Saptaningtyas, 2010:7) adalah:

1. mendefinisikan bentuk geometri aliran;
2. domain dari aliran diuraikan dalam *mesh* atau *grid* dari volume kontrol yang tidak tumpang tindih dan dapat membentuk persamaan yang telah dimodelkan;
3. persamaan yang didiskritkan nilainya merupakan pendekatan dari nilai masing-masing pada titik;
4. persamaan yang didiskritkan diselesaikan secara numerik.

Persamaan matematika yang akan dimodelkan pada penelitian ini dengan berdasarkan pada konservasi fisis pada suatu volume kendali sebarang. Seperti pada Gambar 2.7 menunjukkan sebuah sel terfokus pada struktur dengan menggunakan penempatan sel pusat volume kendali. Sel pusat digunakan sebagai kontrol kendali pada metode volume hingga karena sel atau titik-titik itu mewakili model dari setiap partisi. Sedangkan sel *vertex* digunakan untuk mendiskritisasi pada metode elemen hingga. Sel pusat dan sel *vertex* pada Gambar 2.7 mewakili sebagai *face* atau permukaan yang akan dimodelkan.

Pada Gambar 2.8 kumpulan sel pusat (P) dinotasikan dengan barat, timur, utara, dan selatan dengan:



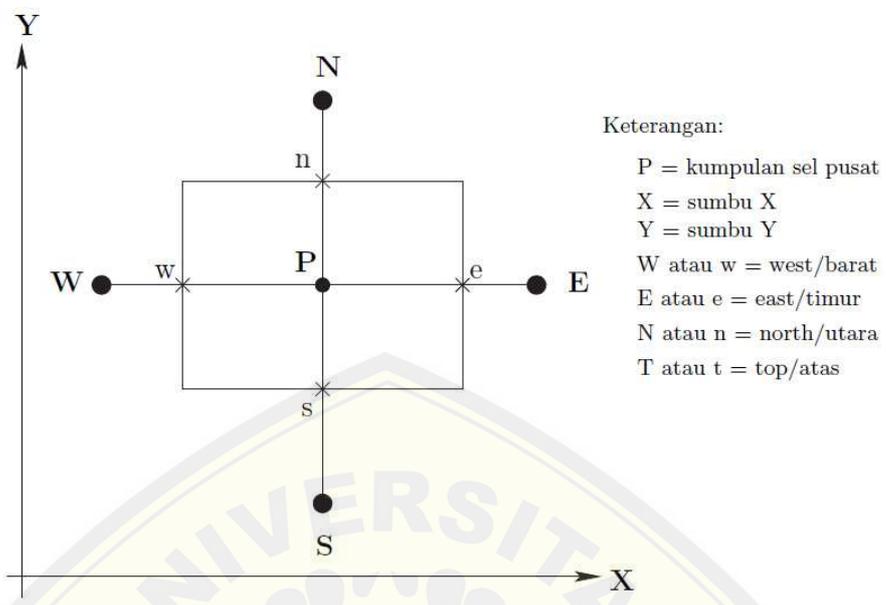
Gambar 2.7 Sel Pusat dan Sel Vertex

- Huruf kecil seperti w , e , n , s diberikan untuk permukaan volume kendali.
- Huruf besar, seperti W , E , N , S diberikan untuk titik-titik yang saling berdekatan dengan yang lain.

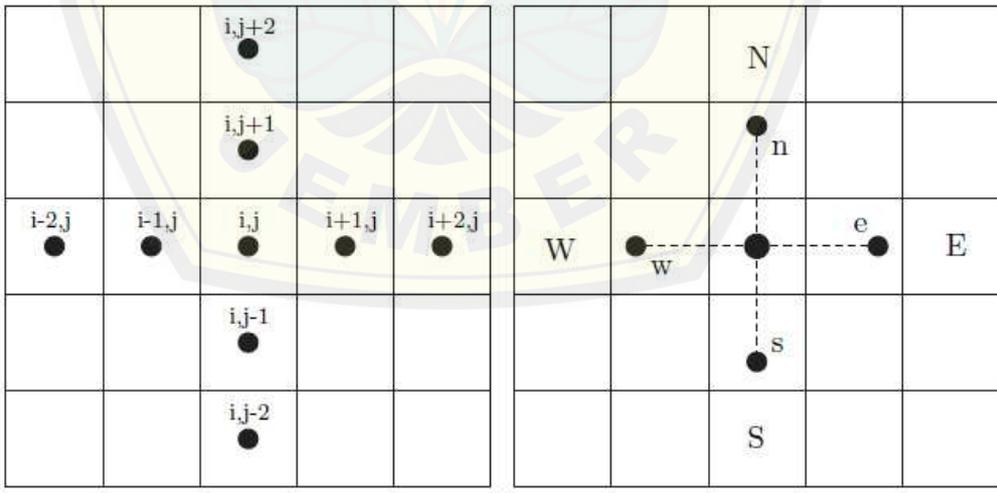
Luasan dari masing-masing permukaan volume kendali dinotasikan A_w , A_e , A_n , dan A_s . Sedangkan volume kendalinya dinyatakan dengan V . Bagan berstruktur pada gambar 2.8 adalah masing-masing titik yang ditunjukkan dengan i, j , $\phi_P = \phi_{ij}$, $\phi_E = \phi_{i+ij}$ dan seterusnya (Fatahillah, 2014). Bagan volume kendali ditunjukkan pada gambar 2.9.

2.6.1 Persamaan Momentum

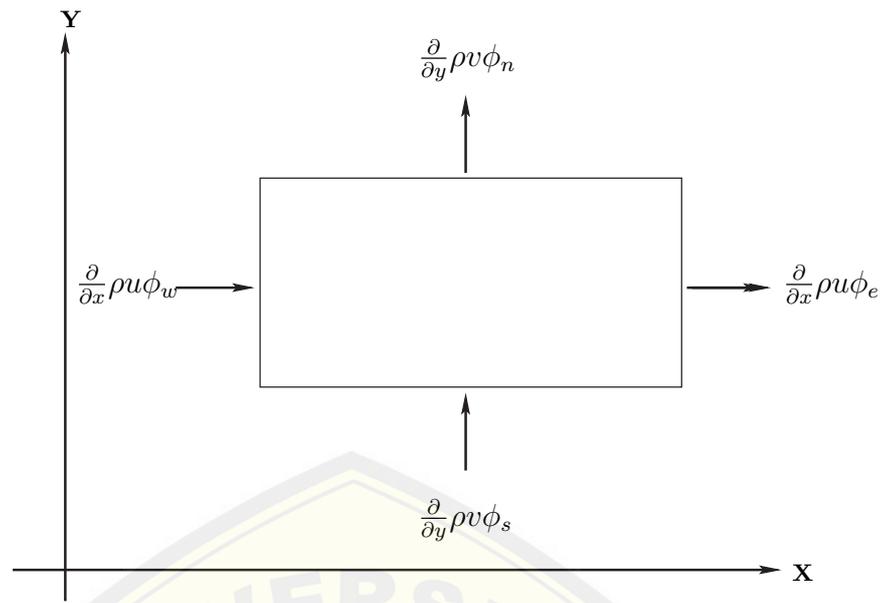
Persamaan momentum dibentuk berdasarkan hukum kekekalan momentum yang diturunkan melalui persamaan diferensial gerak fluida dengan meninjau volume keunsuran atau sistem keunsuran (White, 1998:223). Persamaan momentum merupakan bentuk persamaan diferensial yang menghubungkan dengan gaya-gaya yang bekerja pada volume kendali, salah satunya adalah tekanan (p). Gaya yang lain terdiri dari dua jenis, yaitu gaya beban dan gaya permukaan. Gaya beban disebabkan oleh medan dari luar (gravitasi, magnet, elektromagnet) yang bekerja pada keseluruhan massa dalam unsur tersebut (White, 1986:209). Sedangkan gaya permukaan disebabkan oleh tegangan pada sisi-sisi permukaan volume kendali.



Gambar 2.8 Model Volume Kendali Dua Dimensi



Gambar 2.9 Model Volume Kendali



Gambar 2.10 Bagan Volume Kendali Persamaan Momentum

Persamaan umum untuk momentum adalah:

$$\frac{\partial \rho \phi_0}{\partial t} + [pure\ rate] = \sum F \tag{2.4}$$

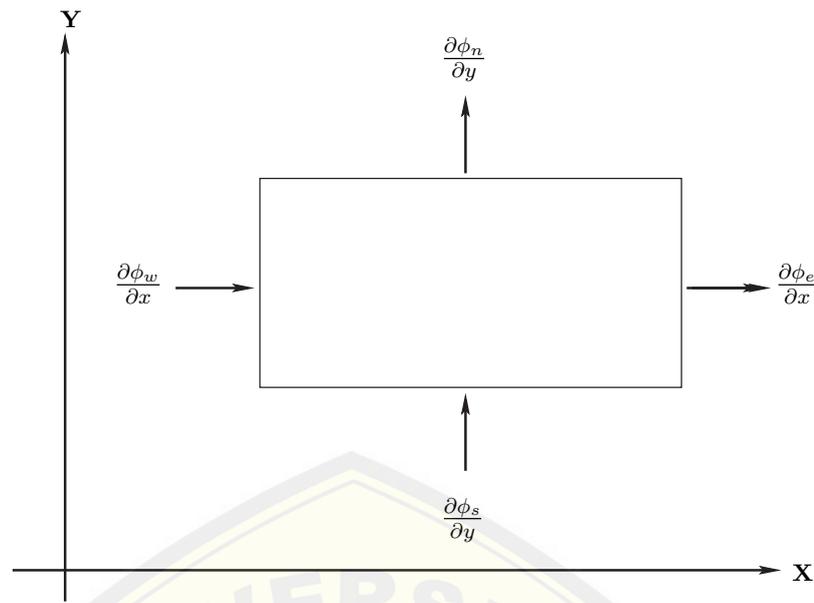
Karena objek yang diamati merupakan zat air, maka $pure\ rate = output - input$.

$$\frac{\partial \rho \phi_0}{\partial t} + [output - input] = \sum F \tag{2.5}$$

Fluks momentum terjadi di keempat sisi seperti pada Gambar 2.10, yaitu dua masuk dan dua keluar. F adalah gaya-gaya yang bekerja pada volume kendali yaitu *pressure*/tekanan (p), gravitasi (g), dan gaya kekentalan (μ).

2.6.2 Persamaan Energi

Semua persamaan diferensial dasar gerak fluida dapat diturunkan dengan meninjau sebuah volume keunsuran atau suatu sistem keunsuran (White, 1986: 202). Dalam penelitian ini, dipilih sebuah volume kendali keunsuran yang letaknya tetap. Dalam penelitian ini aliran air merupakan aliran fluida yang turbulen, sehingga persamaan energi yang dibentuk merupakan persamaan energi untuk aliran turbulen.



Gambar 2.11 Bagan Volume Kendali Persamaan Energi

Bentuk umum persamaan energi adalah:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + [pure\ rate] = S \tag{2.6}$$

Karena objek yang diamati merupakan zat cair, maka $pure\ rate = output - input$.

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + [output - input] = S \tag{2.7}$$

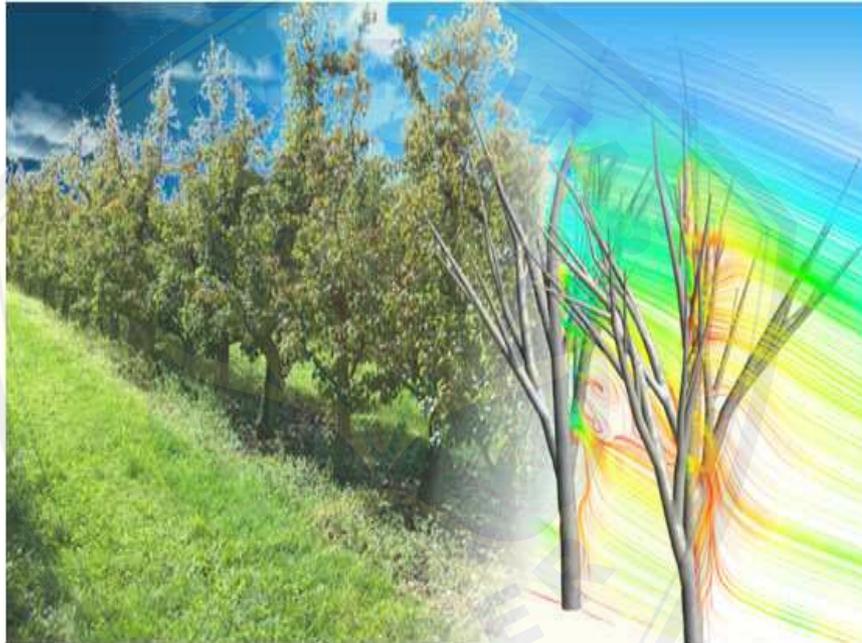
Fluks energi terjadi di keempat sisi seperti pada Gambar 2.11, yaitu dua masuk dan dua keluar. S (*source*) adalah energi sistem pada persamaan energi.

2.6.3 CFD (*Computational Fluid Dynamics*)

Aliran fluida, baik cair maupun gas, adalah suatu zat yang sering ditemukan dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya pada fenomena meteorologi (angin, hujan, dan badai), zat-zat berbahaya bagi lingkungan (polusi udara dan pergerakan kontaminan), pengkondisian udara bagi bangunan dan mobil, aliran sungai dan banjir, proses di dalam tubuh manusia (aliran darah, bernafas, minum), aliran darah melalui pembuluh darah arteri-vena dan pembakaran pada mesin serta masih ba-

nyak lainnya. Untuk kebutuhan penelitian, fenomena-fenomena tersebut dapat dianalisis atau diprediksi dengan cepat dan akurat menggunakan Komputasi Aliran Fluida atau *Computational Fluid Dynamics (CFD)*. (Tuakia,2008:1)

CFD(*Computational Fluid Dynamics*) dapat diartikan suatu sistem analisis yang melibatkan aliran fluida, perpindahan panas dan fenomena terkait seperti reaksi kimia dengan cara simulasi berbasis komputer. CFD adalah ilmu yang mempelajari cara memprediksi aliran fluida, perpindahan panas, reaksi kimia, dan fenomena lainnya dengan menyelesaikan persamaan-persamaan matematika atau model matematika (Tuakia, 2008:2). Contoh simulasi CFD ditunjukkan dengan Gambar 2.12.



Gambar 2.12 Contoh Simulasi CFD
(www.ilvo.vlaanderen.be, 2014)

Menurut Zhang (2005:9) pada dasarnya persamaan-persamaan dalam memprediksi fenomena dinamika fluida seperti CFD dapat dibangun dan dianalisis berdasarkan persamaan-persamaan diferensial parsial (PDE = *Partial Differential Equation*) yang mempresentasikan hukum-hukum konservasi massa, momentum, dan energi. Penyelesaian persamaan diferensial yang cukup kompleks

tidak dapat dieksekusi langsung oleh komputer. Oleh karena itu, persamaan tersebut ditransformasikan terlebih dahulu menjadi persamaan aljabar diskrit yang lebih sederhana, sehingga komputer dapat mengeksekusinya dengan ringan. Metode penyerderhanaan ini disebut metode diskritisasi (Varsteeg and Malalasekera, 1995:9).

Sebuah *software* CFD dapat mensimulasikan aliran fluida dengan pemodelan di komputer. Dengan menggunakan software ini pengguna dapat membuat *virtual prototype* dari sebuah sistem atau alat-alat yang ingin dianalisis dengan menerapkan kondisi nyata di lapangan. *Software* CFD akan memberikan data-data, gambar-gambar, atau kurva-kurva yang menunjukkan prediksi dari performansi keandalan sistem yang telah didesain (Tuakia,2008:2). Simulasi CFD terdiri dari tiga tahapan utama, yaitu:

1. *Pre-processing*

Preprocessing merupakan tahap awal dalam membangun dan menganalisis sebuah model CFD (Tuakia,2008:6). Pada *preprocessing* sebuah model dibuat menjadi model yang dapat diterjemahkan oleh *software* simulasi. Langkah *preprocessing* merupakan langkah awal dimana bahasa pemrograman desain model akan diterjemahkan oleh *solver manager*. Model akan dibentuk sedemikian rupa sehingga terdapat beberapa bagian untuk memberikan batasan-batasan aliran fluida yang di jalankan dan membuat model menjadi suatu objek yang akan di aliri fluida.

Dalam tahap ini objek yang dibentuk kemudian diberikan kondisi batas dan kondisi dari fluida yang akan mengalir. Dalam kondisi batas tersebut untuk dapat di analisa. Kondisi batas atau *boundary* ini berupa *inlet* (saluran fluida masuk), *outlet* (saluran fluida keluar) dan *wall* (dinding pembatas). Sedangkan fluida dalam *software* CFD biasanya disebut domain. (Yusuf et al,2010)

Tahap *pre-processor* terdiri atas input (masukan) dari permasalahan yang akan diselesaikan dengan CFD. Pada tahap ini hal-hal yang perlu dilakukan adalah:

- mendefinisikan bentuk geometri yang digunakan (dua dimensi atau tiga

- dimensi);
- membuat grid (mesh) pada domain;
- pemilihan model berdasarkan fenomena fisik dan kimia;
- menentukan sifat-sifat fluida (aliran fluida, viskositas, massa jenis, dll);
- menentukan kondisi batas yang sesuai dengan bentuk geometri dan fluida.

2. *Solver Manager*

Pada *software solver* ini CFD menghitung kondisi-kondisi yang diterapkan pada saat *Preprocessing* dalam program solver semua parameter yang telah dimasukkan akan diolah pada software. Proses perhitungan atau iterasi harus menentukan kriteria konvergensi yang akan dihitung. Konvergensi yang dimaksud adalah kesalahan atau perbedaan antara estimasi awal dan hasil akhir dari iterasi yang dilakukan oleh *solver manager* (Yusuf et al,2010). Tahap *solver* merupakan tahap proses pemecahan secara numerik pada CFD. Metode penyelesaian yang digunakan yaitu, metode beda hingga, volume hingga, dan elemen hingga. Penyelesaian pada tahap *solver* memiliki 3 tahapan yaitu:

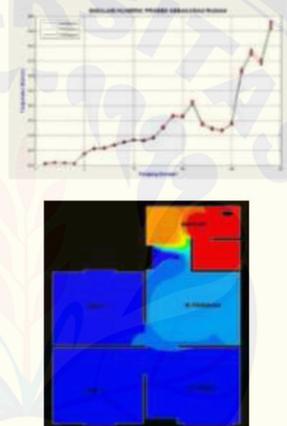
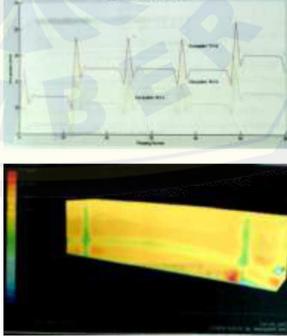
- aproksimasi aliran yang tidak diketahui dengan fungsi sederhana;
- diskritisasi dengan mensubstitusikan hasil aproksimasi ke dalam persamaan aliran yang dibangun disertai manipulasi matematik;
- penyelesaian persamaan secara aljabar.

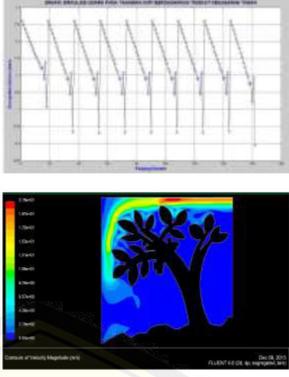
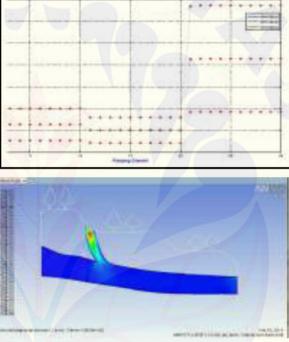
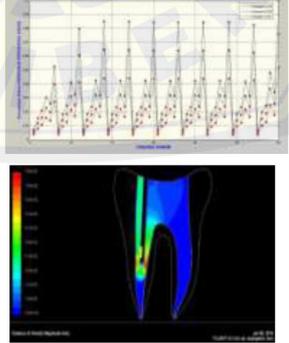
3. *Postprocessing*

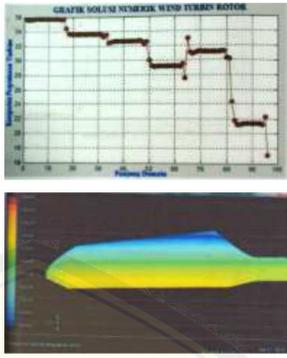
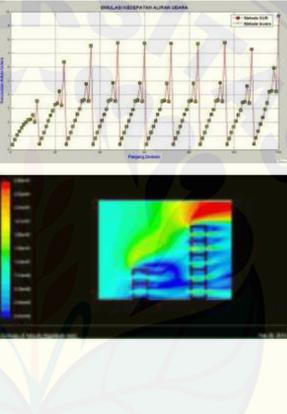
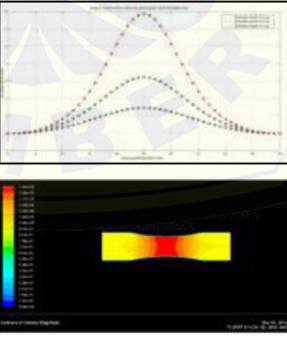
Postprocessing langkah akhir dalam analisa CFD, dimana hasil perhitungan dari *Solver Manager* yang diinterpretasikan ke dalam bentuk grafik atau gambar dengan pola warna tertentu yang menjelaskan aliran fluida. Hasil perhitungan dapat dilihat data numerik dan data visualisasi aliran fluida pada model (Yusuf et Al, 2010). Tampilan dapat berupa tampilan domain geometri dan grid, plot vektor, plot garis dan bidang, plot 2 dimensi atau 3 dimensi, pergerakan partikel, manipulasi tampilan (rotasi, perbesaran, dll), dan output warna.

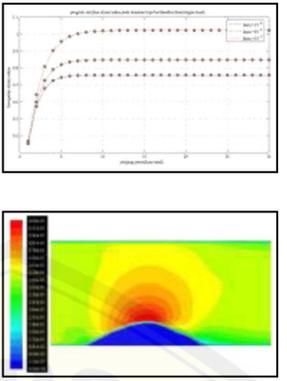
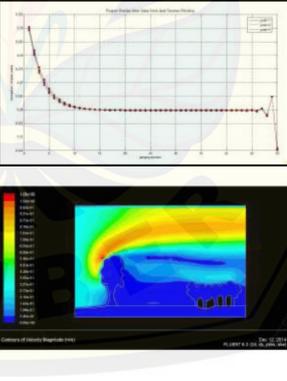
CFD sebenarnya mengganti persamaan-persamaan diferensial parsial dari kontinuitas, momentum, dan energi dengan persamaan-persamaan aljabar. CFD merupakan pendekatan dari persoalan yang asalnya kontinu (memiliki jumlah sel yang tak terhingga) menjadi model yang diskrit (jumlah sel terhingga). Ada beberapa metode dalam perhitungan atau komputasi aljabar untuk memecahkan persamaan-persamaan diferensial parsial, yaitu diantaranya metode beda hingga, metode volume hingga, metode elemen hingga, metode elemen batas, dan metode skema resolusi tinggi (Tuakia,2008:7).

Beberapa contoh hasil penelitian murni menggunakan CFD dapat dilihat dalam Tabel 2.1.

No	Metode Volume Hingga	Simulasi CFD	Publikasi
1.	<p>Model Matematika :</p> $[(\rho u - \rho)\phi_e \Delta y + (-\rho u + \rho)\phi_w \Delta y] + [(\rho v - \rho)\phi_n \Delta x + (-\rho v + \rho)\phi_s \Delta x] = \left[\left(\frac{u \rho p}{k} - p + \rho g \right) \Delta y \right] + \left[\left(\frac{v \rho p}{k} - p + \rho g \right) \Delta x \right] + \left[\left(\frac{\rho \mu h}{k P_r} + \frac{\rho \mu_1 h}{k P_{r1}} + 2\mu u + \mu v \right) \frac{\Delta y}{\Delta x} \right] + \left[\left(\frac{\rho \mu h}{k P_r} + \frac{\rho \mu_1 h}{k P_{r1}} + 2\mu v + \mu u \right) \frac{\Delta x}{\Delta y} \right] + (\mu u + \mu v)$		<p>Fadli.M.2013. <i>Analisis Model Matematika Penyebaran Asap pada Kebakaran Rumah</i>. Repositori UNEJ. Jember: Program Studi Pendidikan Matematika FKIP.</p>
2.	<p>Model Matematika :</p> $(c_x - u)\phi_w \rho \Delta y + (c_y - u)\phi_s \rho \Delta x + (u - c_x)\phi_e \rho \Delta y + (v - c_y)\phi_n \rho \Delta x = (\rho g - p)\Delta x + (\rho g - p)\Delta y + (2\mu u + \mu v - K\phi_0) \frac{\Delta y}{\Delta x} + (2\mu v + \mu u - K\phi_0) \frac{\Delta x}{\Delta y} + (u + v)\mu$		<p>Aprianto.D.2013. <i>Analisis Aliran Udara pada Jembatan Suramadu dengan Menggunakan Metode Volume Hingga</i>. Repositori UNEJ. Jember: Program Studi Pendidikan Matematika FKIP.</p>

No	Metode Volume Hingga	Simulasi CFD	Publikasi
3.	<p>Model Matematika:</p> $(\phi_w - \phi_e)\rho\Delta y\Delta t - (\phi_w - \phi_e)\rho u \cos \theta\Delta y\Delta t + (\phi_s - \phi_n)\rho\Delta x\Delta t - (\phi_s - \phi_n)\rho u \sin \theta\Delta x\Delta t = \Delta y\Delta t \left(\rho g - p - \rho \left(-pv' + 2\mu v' - \frac{1}{2}\rho u'v' \right) \right) + \Delta x\Delta t \left(\rho g - p - \rho \left(-pv' + 2\mu v' - \frac{1}{2}\rho u'v' \right) \right) + 2\rho\mu \left(u'\Delta y\Delta t + \frac{1}{2}(u'\Delta x\Delta t + v'\Delta y\Delta t) + v'\Delta x\Delta t \right) + \rho^2 u'v' \left(u\Delta y\Delta t + \frac{1}{2}(u\Delta x\Delta t + v\Delta y\Delta t) + v\Delta x\Delta t \right) + \mu v_x \left(2\frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} + \frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} \right) + \left(\frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} + 2\frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} \right)$		<p>Nurrohim, M.2014. <i>Analisis Sirkulasi Udara pada Tanaman Kopi Berdasarkan Tingkat Kekasaran Tanah dan Pola Tanam Graf Tangga Segitiga menggunakan Metode Volume Hingga.</i> Repositori UNEJ. Jember: Program Studi Pendidikan Matematika FKIP.</p>
4.	<p>Model Matematika :</p> $v_x\Delta y\Delta t(1-\rho)C_e + v_x\Delta y\Delta t(\rho-1)C_w + v_y\Delta x\Delta t(1-\rho)C_n + v_y\Delta x\Delta t(\rho-1)C_s = \rho g\Delta y\Delta t + \rho g\Delta x\Delta t - \rho\Delta y\Delta t + \rho\Delta x\Delta t + 2\mu \left(v_x\frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} + v_y\frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} \right) + \mu(v_x\Delta t + v_y\Delta t) + \mu \left(v_x\frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} + v_y\frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} \right) - D_x\frac{C\Delta y\Delta t}{\Delta x} - D_y\frac{C\Delta x\Delta t}{\Delta y}$		<p>Gangga, M.2014. <i>Analisis Model Matematika Proses Penyebaran Limbah Cair pada Air Tanah.</i> Repositori UNEJ. Jember: Program Studi Pendidikan Matematika FKIP.</p>
5.	<p>Model Matematika :</p> $\phi_e(-\rho\Delta y\Delta t - \rho u \cos \theta\Delta y\Delta t) + \phi_w(\rho\Delta y\Delta t + \rho u \cos \theta\Delta y\Delta t) + \phi_n(-\rho\Delta x\Delta t - \rho v \sin \theta\Delta x\Delta t) + \phi_s(\rho\Delta x\Delta t - \rho v \sin \theta\Delta x\Delta t) = -\rho\Delta y\Delta t - \rho\Delta x\Delta t + \rho g\Delta y\Delta t + \rho g\Delta x\Delta t + 2\mu\frac{u}{\Delta x}\Delta y\Delta t + \mu\frac{v}{\Delta x}\Delta y\Delta t + \mu\frac{u}{\Delta x}\Delta x\Delta t + 2\mu\frac{v}{\Delta x}\Delta x\Delta t$		<p>Hardiyanti, S. A. 2014. <i>Analisis Sterilisasi Saluran Akar Gigi dengan menggunakan Metode Numerik Volume Hingga.</i> Repositori UNEJ. Jember: Program Studi Pendidikan Matematika FKIP.</p>

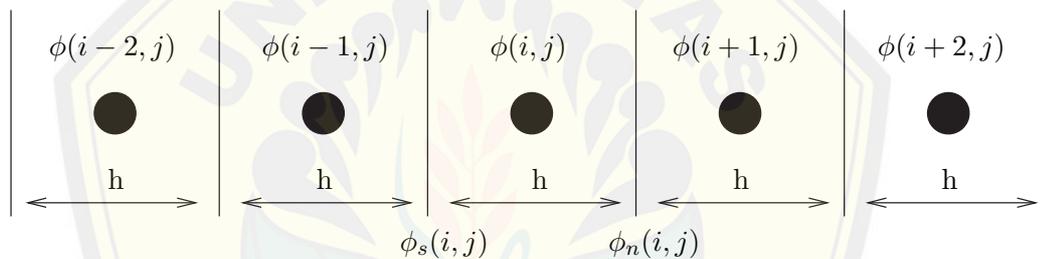
No	Metode Volume Hingga	Simulasi CFD	Publikasi
6.	<p>Model Matematika :</p> $((u - w)\rho\phi_e\Delta y + (-u + w)\rho\phi_w\Delta y) + ((v - w)\rho\phi_n\Delta x + (-v + w)\rho\phi_s\Delta x) = ((-P + \rho f)\Delta y) + ((-P + \rho f)\Delta x) + \left((2\mu u + \mu v - \tau_w w) \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) + \left((2\mu v + \mu u - \tau_w w) \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) + ((Y_w - G_w - D_w - S_w)\Delta x\Delta y) + (\mu u + \mu v - 2\tau_w w)$		<p>Zahroh, M. 2014. <i>Pemodelan Wind Turbine Rotor Tipe HAWT (Horizontal Axis Wind Turbine) menggunakan Metode Volume Hingga</i>. Repositori UNEJ. Jember: Program Studi Pendidikan Matematika FKIP.</p>
7.	<p>Model Matematika :</p> $(\rho u\Delta y - u\Delta y)\phi_e + (u\Delta y - \rho u\Delta y)\phi_w + (\rho v\Delta x - v\Delta x)\phi_n + (v\Delta x - \rho v\Delta x)\phi_s = -C\phi_0\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y}\right) - 2\mu(u\Delta y)^2 - \mu(u\Delta x + u\Delta y)^2 - 2\mu(u\Delta x)^2 - P\Delta y - P\Delta x + \rho(g\Delta y + g\Delta x) + 2\mu u \frac{\Delta y}{\Delta x} + \mu\left(u + v \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) + \mu\left(u \frac{\Delta x}{\Delta y} + v\right) + 2\mu v \frac{\Delta x}{\Delta y}$		<p>Susanto, J. 2014. <i>Analisis Kecepatan Aliran Udara pada Gedung Bertingkat karena Pengaruh Penghalang di depannya</i>. Repositori UNEJ. Jember: Program Studi Pendidikan Matematika FKIP.</p>
8.	$\phi_w \rho u \Delta t - \phi_w \rho \Delta t + \phi_e \rho \Delta t - \phi_e \rho u \Delta t = -p \Delta t + 2\mu \frac{u}{\Delta x} \Delta t$ <p>dimana,</p> $p = \frac{Q8\eta l}{\pi r^4}$		<p>Zauri, A.S. 2014. <i>Analisis Numerik Aliran Darah pada Penyempitan Pembuluh Darah Arteri menggunakan Metode Volume Hingga</i>. Repositori UNEJ. Jember: Program Studi Pendidikan Matematika FKIP.</p>

No	Metode Volume Hingga	Simulasi CFD	Publikasi
9.	<p>Model Matematika :</p> $\phi_e(\rho u - \rho)\Delta y\Delta t - \phi_w(\rho u - \rho)\Delta y\Delta t + \phi_n(\rho v - \rho)\Delta x\Delta t - \phi_s(\rho v - \rho)\Delta x\Delta t =$ $-P\Delta y\Delta t - P\Delta x\Delta t + \frac{\mu u\Delta y\Delta t}{\Delta x} + 2\mu u\Delta t + \frac{\mu v\Delta y\Delta t}{\Delta x} + \frac{\mu u\Delta y\Delta t}{\Delta y} + 2\mu v\Delta t + \frac{\mu v\Delta x\Delta t}{\Delta y} +$ $\mu\left(\frac{2u}{\Delta x}\Delta y\Delta t + \frac{v}{\Delta x}\Delta y\Delta t\right)(\rho - \rho u)$ $- \rho\left(\vartheta + \frac{\vartheta_T}{\sigma_K}\right)K\frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} - 2\rho\left(\vartheta + \frac{\vartheta_T}{\sigma_K}\right)K\Delta t - \rho\left(\vartheta + \frac{\vartheta_T}{\sigma_K}\right)K\frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y}$		<p>Rizal. A.S. 2014. <i>Analisis Sirkulasi Udara pada Tanaman Kopi Berdasarkan Tingkat Kemiringan Tanah dan Pola Tanam Graf Tangga Segitiga menggunakan Metode Volume Hingga</i>. Repositori UNEJ. Jember: Program Studi Pendidikan Matematika FKIP.</p>
10.	<p>Model Matematika :</p> $\phi_e(\rho u\Delta y\Delta t - \rho\Delta y\Delta t) + \phi_w(-\rho u\Delta y\Delta t + \rho\Delta y\Delta t) + \phi_n(\rho v\Delta x\Delta t - \rho\Delta x\Delta t) + \phi_s(-\rho v\Delta x\Delta t + \rho\Delta x\Delta t) =$ $-2\rho\mu u\frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} - 2\rho\eta v\frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} - \rho\eta v\frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} - 2\rho\eta uv\Delta t - \rho\eta u\frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} -$ $p\Delta y\Delta t - p\Delta x\Delta t + \rho g\Delta y\Delta t + \rho g\Delta x\Delta t + 2\mu u\frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} + 2\mu v\frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} +$ $\mu v\frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} + \mu v\frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} + \mu u\Delta t + \mu v\Delta t$		<p>Trisnani. D. 2014. <i>Analisis Sirkulasi Udara pada Tanaman Kopi Berdasarkan Faktor Tanaman Pelindung dan Pola Tanam Graf Tangga menggunakan Metode Volume Hingga</i>. Repositori UNEJ. Jember: Program Studi Pendidikan Matematika FKIP.</p>

2.7 Teknik Diskritisasi *Quadratic Upwind Interpolation Convective Kinematics* (QUICK)

Bentuk geometris dari aliran fluida pada masing-masing domain dibuat dalam bentuk *grid*. *Grid* dari domain dapat berupa *grid* yang berstruktur, ataupun *grid* dalam koordinat kartesius atau *grid* non kartesius. Masing-masing *grid* memiliki kontrol bidang (*face*) dan kontrol titik (*node*). Kontrol bidang untuk tiga dimensi terdiri dari $\phi_w, \phi_e, \phi_s, \phi_n, \phi_b, \phi_t$ sedangkan kontrol titik terdiri dari $\phi_W, \phi_E, \phi_S, \phi_N, \phi_B, \phi_T$. Dalam penelitian ini akan dibuat model matematika dua dimensi proses sebaran air kolam *spray pond* di pabrik gula (arah sumbu x, y). Kontrol *face* untuk dua dimensi terdiri dari $\phi_w, \phi_e, \phi_n, \phi_s$ sedangkan kontrol *node* terdiri dari $\phi_W, \phi_E, \phi_N, \phi_S$ (Fatahillah, 2014).

Pendiskritisasian dengan menggunakan metode *QUICK* untuk merubah nilai pada bidang menjadi nilai pada titik, diilustrasikan seperti pada Gambar 2.13.



Gambar 2.13 Diskritisasi QUICK (Fatahillah, 2014)

QUICK scheme pada Apsley (dalam Fatahillah, 2014), untuk kecepatan lebih besar dari nol adalah:

$$\phi_n(i, j) = \phi(i, j) + g_1(\phi(i+1, j) - \phi(i, j)) + g_2(\phi(i, j) - \phi(i-1, j)) \quad (2.8)$$

dengan bobot g_1 :

$$g_1 = \frac{[\phi_n(i, j) - \phi(i, j)][\phi_n(i, j) - \phi(i-1, j)]}{[\phi(i+1, j) - \phi(i, j)][\phi(i+1, j) - \phi(i-1, j)]} \quad (2.9)$$

dan bobot untuk g_2 yaitu:

$$g_2 = \frac{[\phi_n(i, j) - \phi(i, j)][\phi_n(i + 1, j) - \phi(i, j)]}{[\phi(i + 1, j) - \phi(i, j)][\phi(i + 1, j) - \phi(i - 1, j)]} \quad (2.10)$$

Berdasarkan diskritisasi QUICK pada Gambar 2.13, maka diperoleh nilai untuk g_1 dan g_2 , yaitu:

$$g_1 = \frac{(\frac{1}{2}h)(\frac{3}{2}h)}{(h)(2h)} = \frac{3}{8} \quad (2.11)$$

$$g_2 = \frac{(\frac{1}{2}h)(\frac{1}{2}h)}{(h)(2h)} = \frac{1}{8} \quad (2.12)$$

Substitusikan nilai g_1 dan g_2 ke Persamaan (2.8), sehingga diperoleh rumus untuk $\phi_n(i, j)$:

$$\begin{aligned} \phi_n(i, j) &= \phi(i, j) + g_1 [\phi(i + 1, j) - \phi(i, j)] + g_2 [\phi(i, j) - \phi(i - 1, j)] \\ &= \phi(i, j) + \frac{3}{8} [\phi(i + 1, j) - \phi(i, j)] + \frac{1}{8} [\phi(i, j) - \phi(i - 1, j)] \\ &= -\frac{1}{8}\phi(i - 1, j) + \frac{3}{4}\phi(i, j) + \frac{3}{8}\phi(i + 1, j) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dengan cara yang sama, diperoleh nilai $\phi_s(i, j)$, $\phi_e(i, j)$, dan $\phi_w(i, j)$ yaitu:

$$\phi_s(i, j) = -\frac{1}{8}\phi(i - 2, j) + \frac{3}{4}\phi(i - 1, j) + \frac{3}{8}\phi(i, j) \quad (2.14)$$

$$\phi_e(i, j) = -\frac{1}{8}\phi(i, j - 1) + \frac{3}{4}\phi(i, j) + \frac{3}{8}\phi(i, j + 1) \quad (2.15)$$

$$\phi_w(i, j) = -\frac{1}{8}\phi(i, j - 2) + \frac{3}{4}\phi(i, j - 1) + \frac{3}{8}\phi(i, j) \quad (2.16)$$

Keterangan :

g_1 = gaya permukaan 1,

g_2 = gaya permukaan 2,

i = diskritisasi pada sumbu x ,

j = diskritisasi pada sumbu y ,

ϕ_e = kontrol permukaan *east* atau timur,

ϕ_w = kontrol permukaan *west* atau barat,

ϕ_n = kontrol permukaan *north* atau utara,
 ϕ_s = kontrol permukaan *south* atau selatan.

2.8 Algoritma dan Pemrograman *MATLAB*

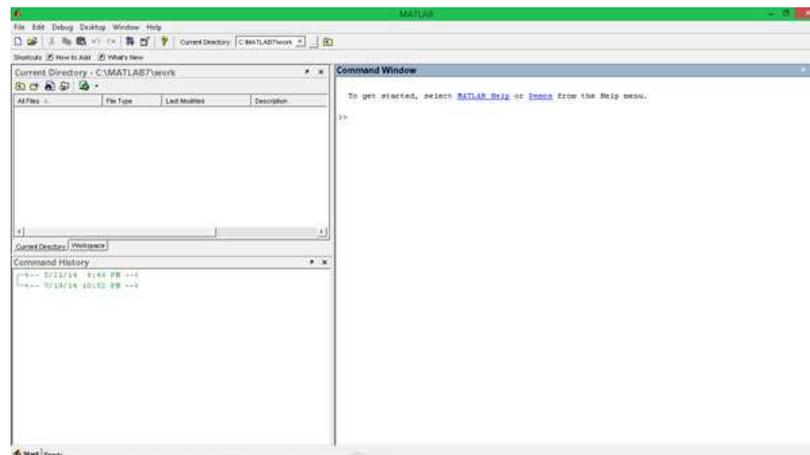
Algoritma adalah urutan langkah-langkah logis penyelesaian masalah yang disusun secara sistematis dan logis. Kata Logis merupakan kata kunci dalam Algoritma. Logis berarti langkah-langkah dalam algoritma harus dapat ditentukan bernilai benar atau salah. Pada umumnya, langkah-langkah pada algoritma dibagi menjadi tiga, yaitu masukan (*input*), proses, dan keluaran (*output*).

Program adalah kumpulan pernyataan komputer, sedangkan metode dan tahapan sistematis dalam program adalah algoritma. Program ditulis dengan menggunakan bahasa pemrograman. Jadi bisa disebut bahwa program adalah suatu implementasi dari bahasa pemrograman. Urutan langkah-langkah pada algoritma secara sistematis dan logis dapat ditulis di dalam program komputer. Program komputer dijalankan dengan menggunakan bahasa pemrograman. Sehingga langkah-langkah pada algoritma dapat dijalankan atau "dieksekusi" dengan menggunakan komputer.

2.8.1 *MATLAB (Matrix Laboratory)*

Menurut Arhami dan Desiani (2004:1) *MATLAB (Matrix Laboratory)* adalah sebuah program untuk analisis dan komputasi numerik, merupakan suatu bahasa pemrograman matematika lanjutan yang dibentuk dengan dasar pemikiran menggunakan sifat dan bentuk matriks. Dan menurut Dafik (dalam Hardiyanti, 2014:26) *MATLAB* adalah *software* aplikasi yang dilengkapi oleh fungsi-fungsi khusus hingga mudah dan cepat menyelesaikan beberapa masalah sains dan teknologi. *Software* ini juga dilengkapi piranti program *nonprocedural* yang memberikan keleluasaan dan kemudahan bagi pengguna. Sebagaimana bahasa pemrograman pada umumnya, *MATLAB* juga memiliki metode dan simbol tersendiri dalam penulisan bahasa pemrogramannya (sintak). Tampilan *MATLAB* dapat dilihat pada Gambar 2.14

Seperti namanya, *MATLAB (Matrix Laboratory)* merupakan bahasa pemrograman tingkat tinggi berbasis pada matriks, sehingga sering digunakan untuk



Gambar 2.14 Tampilan MATLAB

teknik komputasi numerik, untuk menyelesaikan masalah-masalah yang melibatkan operasi matematika elemen, matrik, optimasi, aproksimasi, dll. Sehingga *MATLAB* banyak digunakan pada:

- matematika dan komputansi,
- pengembangan dan algoritma,
- pemrograman modeling, simulasi, dan pembuatan prototipe,
- analisis data, eksplorasi dan visualisasi,
- analisis numerik dan statistik,
- pengembangan aplikasi teknik.

2.8.2 Metode Gauss Seidell

Secara umum, penyelesaian suatu persamaan linier dapat menggunakan dua metode yaitu metode langsung dan metode iteratif (metode tak langsung). Metode langsung seperti metode invers, eliminasi Gauss, dan dekomposisi LU. Metode iteratif merupakan metode dengan penentuan nilai awal x_0 untuk membangun sebuah urutan aproksimasi terbaik terhadap pemecahan eksak. Termasuk metode iteratif seperti iterasi Jacobi, iterasi Gauss-Seidell, dan iterasi SOR.

Suatu sistem persamaan linier dapat dituliskan dengan bentuk $AX = B$, dengan A merupakan matriks koefisien dari x , X merupakan matriks variabel sistem persamaan, dan B merupakan matriks konstanta dari sistem persamaan.

Sistem $AX = B$ dan Q adalah matriks *non-singular* dapat dituliskan dalam bentuk:

$$AX = B \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} (Q - A)X + AX &= (Q - A)X + B \\ QX &= (Q - A)X + B \end{aligned} \quad (2.18)$$

Selanjutnya dapat dituliskan dalam bentuk iterasi ke- k :

$$QX^{(k)} = (Q - A)X^{(k-1)} + B, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.19)$$

Sebuah matriks A dapat dituliskan dalam bentuk $A = L + D + U$, dengan L adalah matriks segitiga bawah, D adalah matriks diagonal, dan U adalah matriks segitiga atas. Pada iterasi Gauss-Seidel dipilih $Q = D + L$, tetapi pada iterasi SOR dipilih $Q = \frac{1}{\omega}D + L$ dengan ω adalah faktor skala. Sehingga Persamaan (2.19) menjadi:

$$\begin{aligned} QX^{(k)} &= (Q - A)X^{(k-1)} + B \\ \left(\frac{1}{\omega}D + L\right) X^{(k)} &= \left(\frac{1}{\omega}D + L - A\right) X^{(k-1)} + B \\ \frac{1}{\omega}DX^{(k)} &= -LX^{(k)} + \left(\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D + D + L - A\right) X^{(k-1)} + B \\ \frac{1}{\omega}DX^{(k)} &= -LX^{(k)} + \left(\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D - U\right) X^{(k-1)} + B \\ \omega D^{-1} \left(\frac{1}{\omega}DX^{(k)}\right) &= \omega D^{-1} \left(-LX^{(k)} + \left(\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)D - U\right) X^{(k-1)} + B\right) \\ X^{(k)} &= \omega D^{-1} \left(-LX^{(k)} + \left(\frac{1}{\omega}D - D - U\right) X^{(k-1)} + B\right) \\ X^{(k)} &= -\omega D^{-1}LX^{(k)} + (1 - \omega - \omega D^{-1}U) X^{(k-1)} + \omega D^{-1}B \\ X^{(k)} &= (1 - \omega)X^{(k-1)} - \omega D^{-1}LX^{(k)} - \omega D^{-1}UX^{(k-1)} + \omega D^{-1}B \\ X^{(k)} &= (1 - \omega)X^{(k-1)} - \omega D^{-1} (LX^{(k)} + UX^{(k-1)} - B) \end{aligned} \quad (2.20)$$

untuk $k = 1, 2, 3, \dots$. Sistem persamaan linier merupakan sistem persamaan dengan pangkat dari variabelnya adalah 1. Sistem persamaan linier dengan n persamaan dan n variabel dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{2.21}$$

dapat dituliskan dalam bentuk pemecahan mulai x_1 sampai x_n seperti berikut:

$$\begin{aligned} x_1^k &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2^k &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ x_3^k &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \dots - a_{3n}x_n) \\ &\vdots \\ x_n^k &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{aligned} \tag{2.22}$$

dengan $k = \text{iterasi}$

Iterasi SOR merupakan pengembangan iterasi Gauss-Seidel. Pada iterasi Gauss-Seidel nilai x_1 yang telah diperoleh dimasukkan kedalam x_2 yang akan dicari, karena nilai x_1 yang diperoleh lebih dekat dengan nilai eksak. Selanjutnya untuk mencari nilai x_3 maka tinggal memasukkan nilai x_1 dan x_2 yang telah diperoleh. Dan seterusnya sampai diperoleh akar dari sistem persamaan tersebut. Sehingga untuk mencari nilai x_i menggunakan iterasi Gauss-Seidel dengan langkah $k = 1, 2, 3, \dots$ adalah,

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{k-1} \right) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{2.23}$$

sedangkan untuk mencari nilai x_i menggunakan iterasi SOR dengan $i =$

1, 2, 3, \dots , n untuk langkah k adalah,

$$x_i^k = (1 - \omega)x_i^{k-1} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{k-1} \right) \quad (2.24)$$

Pada Persamaan (2.20) dan Persamaan (2.24), untuk $\omega = 1$ akan diperoleh metode Gauss-Seidel. Untuk $0 < \omega < 1$, prosesnya dinamakan metode *under-relaxation* dan dapat digunakan untuk memperoleh konvergensi dari beberapa sistem persamaan linier yang tidak konvergen oleh metode Gauss-Seidel. Untuk $\omega > 1$, prosesnya dinamakan metode *overrelaxation* dan dapat digunakan untuk mempercepat konvergensi bagi sistem persamaan linier yang konvergen oleh metode Gauss-Seidel. Penelitian ini menggunakan iterasi Gauss Seidel, dengan menggunakan nilai awal x_0 untuk membangun urutan aproksimasi dalam pemecahan eksak.

2.8.3 Galat atau *Error*

Galat atau kesalahan (*error*) adalah selisih antara nilai sejati (sebenarnya) dengan nilai hampirannya. Dalam metode numerik, *error* (*error* mutlak) berarti selisih antara nilai hasil perhitungan analitik (a) dengan nilai hasil perhitungan numerik (\hat{a}). Dalam perhitungan secara numerik selain dibutuhkan *error* yang kecil juga perlu diketahui ketelitian hasil perhitungan yang diperoleh secara numerik dengan nilai sebenarnya. Akan selalu ada selisih karena hasil yang didapat dengan metode numerik merupakan hasil yang diperoleh dengan proses iterasi (*looping*) untuk menghampiri nilai sebenarnya. Walaupun demikian bukan berarti hasil yang didapat dengan metode numerik salah, karena galat tersebut bisa ditekan sekecil mungkin sehingga hasil yang didapat mendekati nol.

1. **Galat pemotongan**, yaitu galat yang ditimbulkan oleh pembatasan jumlah komputasi yang digunakan pada proses metode numerik. Banyak metode dalam metode numerik yang penurunan rumusnya menggunakan proses iterasi yang jumlahnya tak terhingga, sehingga untuk membatasi proses penghitungan, jumlah iterasi dibatasi sampai langkah ke n . Hasil penghitungan sampai langkah ke n akan menjadi hasil hampiran dan nilai penghitungan

langkah n keatas akan menjadi galat pemotongan. Galat pemotongan akan menjadi sangat kecil sekali jika nilai n di perbesar. Konsekuensinya tentu saja jumlah proses penghitungannya akan semakin banyak.

2. **Galat pembulatan**, yaitu galat yang ditimbulkan oleh keterbatasan komputer dalam menyajikan bilangan real. Hampir semua proses penghitungan dalam metode numerik menggunakan bilangan real. Penyajian bilangan real yang panjangnya tak terhingga tidak bisa disajikan secara tepat. Sehingga terjadilah galat pembulatan.

Selain dari definisi di atas dapat juga digolongkan menjadi empat jenis galat yaitu:

1. **Galat Mutlak** adalah selisih numerik antara besar nilai sebenarnya dengan nilai aproksimasinya. Jadi, bila x besar nilai yang sebenarnya, dan x_1 nilai pendekatannya (aproksimasinya), maka galat mutlak (*Absolut Error*) E_a didefinisikan dengan:

$$E_a = x - x_1 = \delta x$$

2. **Galat Relatif** (E_a) didefinisikan dengan:

$$E_R = \frac{E_a}{x} = \frac{\delta x}{x}$$

Kemudian persentase galat dihitung dari galat relatif yang diberikan dalam bentuk :

$$P_R = 100E_R$$

3. **Galat Global**

Misal $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ adalah fungsi dengan variabel banyak $x_i = (1, 2, \dots, n)$, dan misalkan galat dari tiap x_i adalah Δx_i . Galat Δu dan u di berikan dalam bentuk:

$$u + \Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) \quad (2.25)$$

Perluasan ruas kanan dari galat global tersebut oleh deret Taylor menghasilkan :

$$u + \Delta u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\delta f}{\delta(x_i)} \Delta x_i + \text{semua suku yang memuat } (\Delta x_i)^2 + \text{semua suku yang lain} \quad (2.26)$$

Anggap bahwa galat dalam x_i adalah kecil dan $\frac{\Delta x_i}{x_i} \subset 1$. Kemudian semua suku setelah suku ke dua pada ruas kanan persamaan (2.26) diabaikan, maka persamaan (2.26) menjadi:

$$\Delta u \approx \sum_{i=1}^n \frac{\delta f}{x_i} \Delta x_i = \frac{\delta f}{x_1} \Delta x_1 + \frac{\delta f}{x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\delta f}{x_n} \Delta x_n \quad (2.27)$$

Formula (2.27) bentuknya sama dengan diferensial total dari u . Formula untuk galat relatif adalah sebagai berikut:

$$E_R = \frac{\delta u}{\delta x_1} \frac{\Delta x_1}{u} + \frac{\delta u}{\delta x_2} \frac{\Delta x_2}{u} + \dots + \frac{\delta u}{\delta x_n} \frac{\Delta x_n}{u} \quad (2.28)$$

4. Galat dalam Aproksimasi deret

Galat yang ada dalam aproksimasi suatu deret dapat dievaluasi oleh sisa sesudah suku-suku ke- n . Pandang deret Taylor untuk $f(x)$ pada $x = a$ yang diberikan dalam bentuk:

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x - a)^{n-1}}{(n - 1)!} f^{n-1}(a) + R_n(x) \quad (2.29)$$

Suku terakhir dalam deret (2.29) dikenal dengan sebutan suku sisa deret Taylor yang didefinisikan sebagai berikut:

$$R_n(x) = \frac{(x - a)^n}{n!} f^n(a), \quad a < \alpha < x$$

Untuk suatu barisan yang konvergen, suku-suku sisa akan mendekati nol

untuk $n \leftarrow \infty$. Jadi bila mengaproksimasikan $f(x)$ oleh n suku pertama dari deret tersebut maka galat maksimum yang dibuat dalam aproksimasi tersebut diberikan oleh suku sisa (Jack, 2006: 7-9)

Galat yang digunakan dalam penelitian ini adalah galat relatif yang terdapat pada metode Gauss Seidell. Galat relatif ini baik digunakan karena kesalahan tersebut hanya 1 persen sehingga menandakan kesalahan tersebut cukup kecil, selain itu memilih galat relatif karena yang dibandingkan lebih dari 1 data jadi yang efektif menggunakan galat relatif.

2.9 Perangkat Lunak CFD

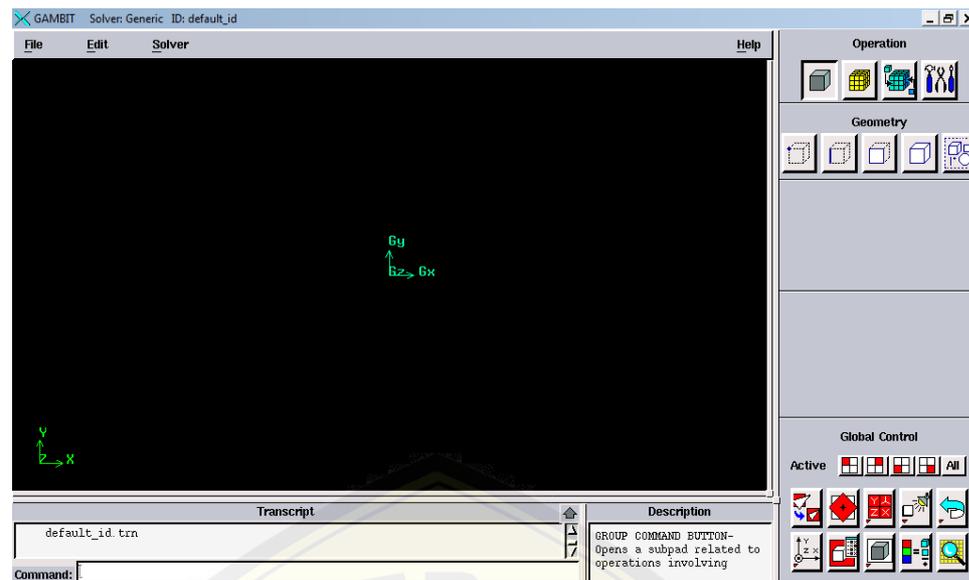
Perangkat lunak *Computational fluid dynamics* (CFD) merupakan alat yang ampuh untuk menyelidiki pola aliran dan fenomena fisik dan kimia dengan pemodelan matematika dan komputer. Perangkat lunak pada CFD yaitu:

1. GAMBIT (*Geometry And Mesh Building Intelligent Toolkit*)

GAMBIT (*Geometry And Mesh Building Intelligent Toolkit*) merupakan salah satu *pre-processor* yang didesain untuk membantu membuat model dan melakukan diskritisasi (*meshing*) pada model untuk analisis CFD (Tuakia, 2008:9). GAMBIT sangat membantu dalam proses menyketsa atau mengkonstruksi suatu model. *Software* ini dibekali dengan beberapa alat atau menu yang memudahkan kita untuk mengonstruksi serta menganalisis suatu objek.

GAMBIT dapat membuat model dan melakukan diskritisasi (*meshing*) untuk berbagai macam bentuk (2 dimensi atau 3 dimensi), termasuk bentuk-bentuk yang rumit dan tidak beraturan. Hal ini dikarenakan GAMBIT dapat melakukan *meshing* dengan berbagai macam *mesh*, yaitu *mesh* heksahedral terstruktur dan tidak terstruktur, tetrahedral, piramid, dan prisma. *Meshing* pada GAMBIT akan mempartisi serta membagi sketsa dari objek yang akan diteliti sehingga akan memudahkan peneliti untuk melakukan komputasi. Tampilan Gambit dapat dilihat pada Gambar 2.15

2. FLUENT



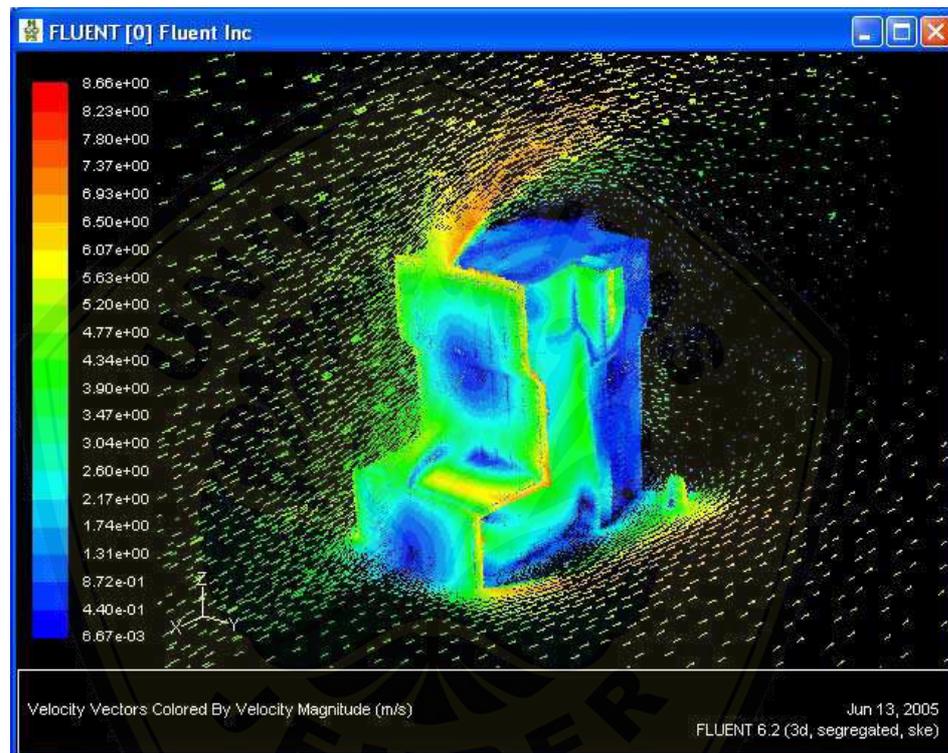
Gambar 2.15 Tampilan GAMBIT

Fluent adalah salah satu jenis program CFD yang menggunakan metode volume hingga (Tuakia, 2008:133). *Fluent* menyediakan fleksibilitas *mesh* yang lengkap, sehingga dapat menyelesaikan kasus aliran fluida dengan *mesh* (*grid*) yang tidak terstruktur sekalipun dengan cara yang relatif mudah. Setelah merencanakan analisis CFD pada model, langkah-langkah umum penyelesaian analisis CFD pada *Fluent* sebagai berikut:

- membuat geometri dan *mesh* pada model;
- memilih *solver* yang tepat untuk model tersebut (2D atau 3D);
- mengimpor *mesh* model (*grid*);
- melakukan pemeriksaan pada *mesh* model;
- memilih *solver*;
- memilih persamaan dasar yang akan dipakai dalam analisis, misalnya laminar, turbulen, reaksi kimia, perpindahan kalor, dan lain-lain;
- menentukan sifat material yang akan dipakai;
- menentukan kondisi batas;
- mengatur parameter kontrol solusi;
- *Initialize the flow field*;
- melakukan perhitungan/iterasi;
- memeriksa hasil iterasi;

- menyimpan hasil iterasi.

Dari langkah-langkah di atas *Fluent* mampu memberikan gambaran yang mendekati kenyataan. Kita juga bisa memasukkan indikator-indikator yang sesuai dengan data-data yang kita peroleh dari pengamatan. Untuk fluida kita bisa memasukkan temperatur, kecepatan, serta tekanan yang ada pada objek sebenarnya (Tuakia, 2008:138). Tampilan *Fluent* dapat dilihat pada Gambar 2.16



Gambar 2.16 Tampilan *FLUENT*
(thermoanalytics.com, 2014)

BAB 3. METODE PENELITIAN

Bagian ini akan dipaparkan metode penelitian yang dilakukan oleh penulis. Metode penelitian memandu peneliti tentang urutan bagaimana penelitian dilakukan. Bagian ini mencakup desain penelitian yang berupa prosedur penelitian, definisi operasional untuk membatasi permasalahan, tempat penelitian, metode pengumpulan data, dan metode analisis data.

3.1 Jenis Penelitian

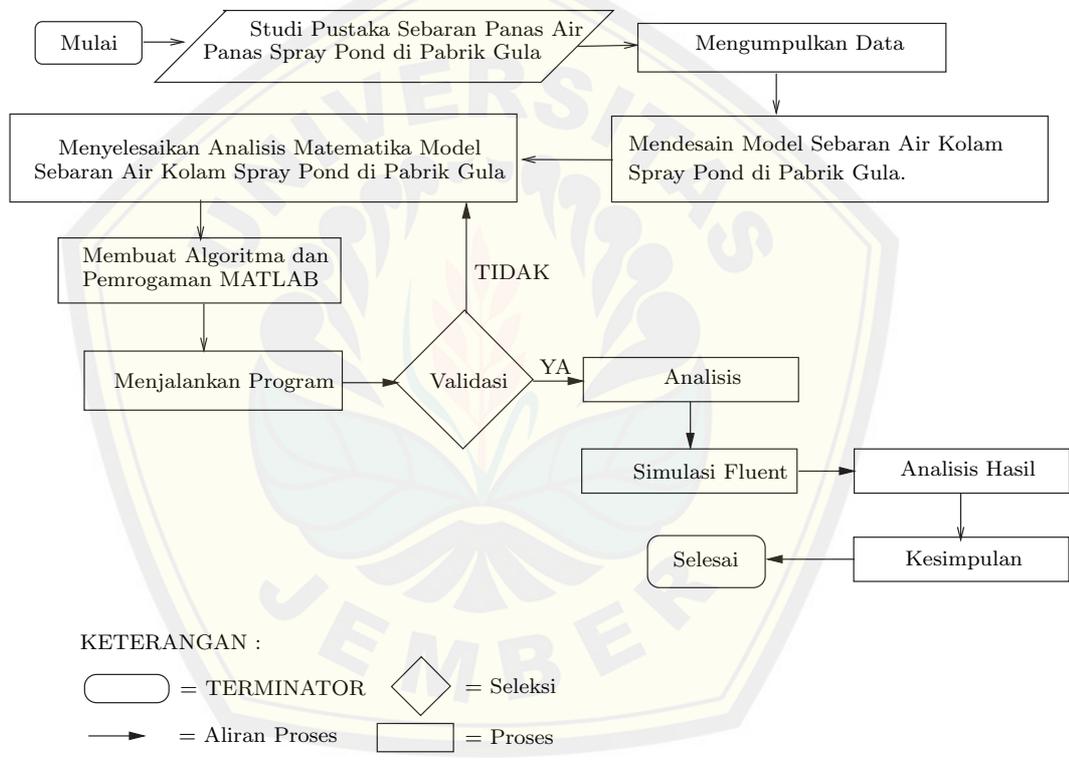
Berdasarkan jenisnya, penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian studi kasus (Yin, 2003:1). Dalam penelitian studi kasus, peneliti membandingkan variabel-variabel yang berpengaruh pada proses sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula berdasarkan faktor suhu dan kecepatan air, dalam pemodelan matematika menggunakan metode Volume Hingga dengan keadaan yang sebenarnya di lapangan. Model matematika yang telah diturunkan diselesaikan menggunakan *MATLAB* dan menganalisis hasil penyimulasian menggunakan *software FLUENT*.

3.2 Prosedur Penelitian

Penelitian ini membutuhkan langkah-langkah (prosedur penelitian) yang merupakan suatu tahapan yang dilakukan sampai diperoleh data-data untuk dianalisis hingga mencapai suatu kesimpulan yang sesuai dengan tujuan penelitian. Prosedur penelitian terdiri dari rancangan penelitian dan teknik penelitian. Rancangan penelitian merupakan rencana yang menggambarkan atau menjelaskan apa yang hendak diteliti dan bagaimana penelitian dilaksanakan (Sudjana, 1989:469).

Penelitian ini terlebih dahulu harus mempersiapkan segala sesuatu rancangan yang berhubungan dengan penelitian. Menurut Margono, (2010:100) rancangan itu adalah alur kegiatan peneliti dalam memecahkan masalah, disusun

secara matang dan cermat sehingga nantinya akan sangat membantu peneliti maupun orang yang membaca hasil penelitiannya dalam memahami masalah serta cara mengatasinya. Rancangan penelitian dapat juga dikatakan sebagai skema atau bagan karena rencana itu membuat atau memuat peta kegiatan yang akan kita laksanakan dan digunakan sebagai petunjuk agar mendapatkan hasil yang memuaskan. Teknik penelitian merupakan langkah-langkah yang dilakukan sampai diperoleh data-data untuk dianalisis sampai menghasilkan suatu kesimpulan sesuai dengan langkah-langkah dalam menyelesaikan pemodelan matematika secara numerik. Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas disajikan dalam sebuah diagram alur seperti Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian

1. melakukan studi pustaka tentang sebaran panas air kolam *spray pond* yang ada di pabrik gula;
2. mengumpulkan data pada keadaan sebenarnya yang terkait dengan suhu awal air panas, kecepatan awal sebaran air panas *spray pond*, dan tinggi pipa yang ada di *spray pond*

3. membuat model matematika dari persamaan energi dan persamaan momentum;
4. menyelesaikan model matematika dari suhu awal air dengan kecepatan awal air yang ada di *spray pond* menggunakan metode volume hingga;
5. membuat algoritma dari model matematika menggunakan *MATLAB*;
6. menjalankan pemrograman menggunakan *MATLAB*;
7. memvalidasi hasil pemrograman dengan cara membandingkan hasil pemrograman dengan data yang diperoleh dari keadaan sebenarnya;
8. menganalisis algoritma dan keadaan pada proses sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula;
9. simulasi model menggunakan *FLUENT*;
10. menganalisis hasil dari penyimulasian dengan *FLUENT*;
11. menarik kesimpulan dari hasil simulasi.

3.3 Definisi Operasional

Untuk menghindari perbedaan pemahaman beberapa istilah yang digunakan dalam penelitian, maka disajikan beberapa definisi operasional sebagai berikut:

1. Model Matematika

Model matematika adalah sekumpulan fungsi-fungsi yang menyatakan hubungan antara beberapa peubah-peubah yang berbeda. Peubah-peubah ini menyatakan variabel-variabel yang mempengaruhi dalam penelitian. Pe-modelan matematika adalah penurunan suatu kejadian atau fenomena ke dalam sekumpulan fungsi-fungsi yang menyatakan hubungan antara beberapa variabel-variabel yang mempengaruhi suatu kejadian ke dalam peubah-peubah yang berbeda.

2. *Spray pond*

Spray pond adalah suatu kolam penyemprot untuk pengolahan air limbah untuk menurunkan suhu. *Spray pond* ini dimaksudkan untuk mendinginkan air limbah yang berasal dari berbagai mesin dan proses perindustrian yang nantinya akan dibuang ke lingkungan agar biota yang ada di sungai

tidak mati. Luasan *spray pond* mempengaruhi jumlah air limbah kondensor yang dapat diolah dan layak digunakan kembali sebagai air injeksi.

3. CFD (*Computational Fluid Dynamics*)

CFD (*Computational Fluid Dynamics*) merupakan sistem analisis yang melibatkan aliran fluida, perpindahan panas dan fenomena terkait yang merupakan reaksi kimia dengan cara simulasi berbasis komputer.

4. Metode Volume Hingga

Metode volume hingga adalah salah satu metode yang dapat digunakan dalam pemodelan matematika. Metode volume hingga sesuai diterapkan pada masalah aliran fluida atau aerodinamika sehingga digunakan dalam penelitian ini. Metode volume hingga merupakan metode numerik yang dalam penerapannya membagi objek yang diteliti menjadi *grid*, *face* (permukaan), dan *node* (titik) kemudian memodelkannya menjadi persamaan matematika dengan melihat pada laju perubahan fisis benda.

5. MATLAB

MATLAB (*Matrix Laboratory*) merupakan sebuah *software* yang digunakan untuk analisis dan komputasi data numerik. Bahasa pemrograman yang digunakan merupakan bahasa pemrograman tingkat tinggi berbasis pada matriks. Atau dapat dikatakan sebagai *software* yang mampu melakukan perhitungan rumit dan memberikan solusi berupa data mentah dan grafik maupun gambar.

6. FLUENT

FLUENT merupakan *software* yang digunakan untuk mensimulasikan suatu objek pemodelan sehingga dapat memberikan gambaran yang jelas terhadap objek yang diamati. FLUENT adalah salah satu *software Computational Fluid Dynamics (CFD)* yang menggunakan metode volume hingga.

3.4 Tempat Penelitian

Daerah penelitian merupakan lokasi yang akan digunakan untuk proses penelitian berlangsung. Tempat penelitian dilakukan di Pabrik Gula Djombang Baru.

Peneliti memilih tempat tersebut karena tempat penelitian yang sesuai dengan topik peneliti tentang sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula.

Tempat penelitian merupakan tempat yang menjadi pusat pelaksanaan suatu kegiatan penelitian. Tempat untuk penyelesaian secara numerik dan pemodelan CFD (*Computational Fluid Dynamics*) dilakukan di Laboratorium Pendidikan Matematika Gedung III FKIP Universitas Jember, karena di laboratorium ini telah tersedia sarana dan prasarana yang mendukung penelitian dengan adanya komputer yang dilengkapi dengan program *MATLAB* 7.13 untuk penyelesaian numerik dan *FLUENT* 6.3.26 untuk simulasi pemodelan.

3.5 Metode Pengumpulan Data

Metode pengumpulan data adalah prosedur yang sistematis dan standar untuk memperoleh data yang diperlukan (Nazir, 2010:36). Metode pengumpulan data yang tepat merupakan salah satu syarat kesempurnaan penelitian. Data penelitian dikumpulkan sesuai dengan rancangan penelitian yang telah ditentukan. Data yang dikumpulkan merupakan pernyataan fakta mengenai objek yang diteliti.

Metode pengumpulan data penelitian yang digunakan yaitu:

1. Metode Observasi

Metode observasi digunakan untuk mencari data secara langsung terhadap proses sebaran panas air limbah yang berasal dari proses perindustrian, suhu awal air panas *spray pond*, kecepatan awal air panas *spray pond* yang ada di Pabrik Gula Djombang Baru. Observasi dilaksanakan di Pabrik Gula Djombang Baru Kabupaten Jombang.

2. Metode Dokumentasi

Metode dokumentasi yaitu metode pengumpulan data yang berupa hal-hal atau variabel yang terdiri dari catatan, transkrip, buku, surat kabar, majalah, prasasti, notulen rapat, agenda, dan lain sebagainya (Arikunto, 2006:234). Dengan menggunakan metode dokumentasi, data-data yang diperlukan dalam pemodelan matematika dan simulasi dengan *Fluent* dicatat. Data-data yang dibutuhkan adalah mengenai suhu awal air panas

spray pond sebelum disemprotkan dan kecepatan awal air panas yang ada di *spray pond*. Sifat-sifat fluida diperoleh dari studi literatur berupa buku dan melalui internet.

3.6 Instrumen Penelitian

Instrumen penelitian adalah alat atau fasilitas yang digunakan oleh peneliti dalam mengumpulkan data agar pekerjaannya lebih mudah dan hasilnya lebih baik, dalam arti lebih cermat, lengkap, dan sistematis sehingga lebih mudah diolah (Arikunto, 2006:160). Dengan demikian dapat kita simpulkan bahwa instrumen penelitian mempermudah dalam memperoleh data.

Untuk instrumen penelitian yang digunakan pada pedoman wawancara berbentuk butir-butir pertanyaan yang bersifat terstruktur yang berisi pertanyaan tentang cara kerja kolam *spray pond* sampai bisa air limbah panas bisa berubah suhunya menjadi suhu normal air. Butir pertanyaan pada pedoman wawancara dipilih karena data yang dibutuhkan mengenai cara kerja *spray pond* sehingga yang diperlukan adalah wawancara kepada salah satu karyawan yang bekerja di Pabrik Gula Djombang Baru ini. Pedoman wawancara dalam proses pengambilan data bisa dilihat di Lampiran A. Dalam penelitian ini, menggunakan tabel data suhu air *spray pond*, kecepatan aliran semprotan air dari *spray pond*, dan sifat-sifat fluida. Pemilihan data-data tentang sifat-sifat fluida dibutuhkan dalam penyelesaian numerik menggunakan *MATLAB* dan untuk validasi yaitu sebagai pembandingan antara keadaan sebenarnya dengan hasil simulasi menggunakan *MATLAB*. Data-data sifat fluida digunakan dalam penyimulasian menggunakan *MATLAB* pemilihan data tersebut diambil dari kegunaannya.

3.7 Data dan Analisis Data

Analisis data merupakan bagian akhir dari suatu penelitian. Data yang dikumpulkan selanjutnya diklasifikasikan dan diorganisasikan secara sistematis serta diolah dan dianalisa secara logis menurut rancangan penelitian yang telah ditetapkan. Analisis data merupakan suatu langkah yang sangat menentukan dalam mengolah data sehingga dapat menghasilkan suatu kesimpulan yang akurat. Analisis data dalam penelitian ini menggambarkan tentang ketercapaian dari

perhitungan indikator-indikator yang telah diukur dan diamati.

Setelah mencari model sebaran air panas *spray pond* yang ada di pabrik gula, langkah berikutnya ialah menyelesaikan dengan metode volume hingga, kemudian mendiskritisasi dengan teknik *QUICK*, hingga didapatkan matriks yang menyatakan persamaan dari setiap kontrol volume, maka persamaan ini akan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan *MATLAB* sehingga didapatkan penyelesaian numerik yang konvergen. Penyelesaian ini mendekati penyelesaian eksak dari persamaan diferensialnya.

Apabila perhitungan *MATLAB* sudah mendekati nilai sebenarnya atau dengan kata lain terdapat *error* yang kecil antara perhitungan *MATLAB* dengan nilai sebenarnya, maka hasil yang didapat sudah benar. Akan tetapi, apabila hasil dari perhitungan *MATLAB* dengan sebenarnya terdapat perbedaan yang jauh, maka akan dicari kesalahan saat memodelkan dan validasi ulang dari proses penurunan rumus dan juga penyelesaian dengan *MATLAB* hingga didapat hasil yang benar.

Error yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Error Relative*. Penghitungan *error* relatif menggunakan rumus:

$$\text{Error relatif} = \left| \frac{V_{n-1} - V_n}{V_n} \right| \times 100\% \quad (3.1)$$

Batasan untuk *error* adalah 0,01. *Error* 0,01 menggambarkan akurasi yang baik karena kesalahan tersebut hanya 1% sehingga menandakan kesalahan tersebut cukup kecil. Setelah melakukan simulasi model matematika sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula, maka keakurasian model sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula dapatlah ditentukan dengan menggunakan *error* relatif. Sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula disimulasikan dengan *FLUENT*. *Output* berupa gambar kontur sebaran air panas *spray pond*, sehingga bisa dilihat secara nyata bagaimana proses sebaran panas air kolam *spray pond* mulai dari temperatur tinggi hingga rendah.

Setelah mendapatkan hasil dari *MATLAB* berupa hasil *output* temperatur dan tekanan sebaran air panas *spray pond* dan *FLUENT* berupa gambar sebaran air panas *spray pond*, maka peneliti mendiskripsikan secara kualitatif.

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk menganalisis proses sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula, maka dalam bab ini akan diturunkan rumus sebaran air panas yang meliputi persamaan momentum dan persamaan energi. Pemodelan sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula menggunakan metode volume hingga serta diskritisasi menggunakan Teknik Diskritisasi *Quadratic Upwind Interpolation Convective Kinetics (QUICK)*. Selain itu juga akan disimulasikan menggunakan *MATLAB* dan *FLUENT*.

4.1 Persamaan Matematika Sebaran Air Panas *Spray Pond* di Pabrik Gula

Pada sub bab ini akan disajikan proses pembuatan model matematika dari hasil observasi penurunan persamaan momentum dan persamaan energi yang dipengaruhi oleh parameter h atau tinggi pipa dan n (koefisien kekasaran *Manning*) pada *spray pond* di pabrik gula yang membedakan dengan penelitian sebelumnya.

◇ **Observasi 4.1. (Persamaan Momentum dan Persamaan Energi Pada Proses Sebaran Air Panas *Spray Pond* di Pabrik Gula dengan Metode Volume Hingga).** *Jika menggunakan rumus kesetimbangan momentum dan memasukkan gaya yang bekerja serta menggunakan kesetimbangan energi dan memasukkan energi sistem maka persamaan momentum dan persamaan energi pada proses sebaran air panas pada *spray pond* adalah sebagai berikut :*

1. Persamaan Momentum Proses Sebaran Air Panas *Spray Pond*.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \phi_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho h u \phi_w}{\partial x} - \frac{\partial \rho h u \phi_e}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \rho h v \phi_s}{\partial y} - \frac{\partial \rho h v \phi_n}{\partial y} \right) &= \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} - \\ \rho \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{h}{\rho} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} \right) &+ \\ \frac{g n^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2} (u + v)(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} & \end{aligned} \quad (4.1)$$

2. Persamaan Energi Proses Sebaran Air Panas *Spray Pond*.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial u \phi_w}{\partial x} - \frac{\partial u \phi_e}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v \phi_s}{\partial y} - \frac{\partial v \phi_n}{\partial y} \right) &= k \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x^2} + 2k \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x \partial y} + \\ k \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-p u' - \frac{1}{2} \rho u' v' - \mu v' - \rho u^2 v - \frac{1}{2} \rho u v^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-p v' - \right. & \\ \left. \frac{1}{2} \rho u' v' - \mu u' - \frac{1}{2} \rho u^2 v - \rho u v^2 \right) & \end{aligned} \quad (4.2)$$

Bukti. Berdasarkan persamaan umum skalar *transport* dari konservasi momentum, maka dapat dituliskan:

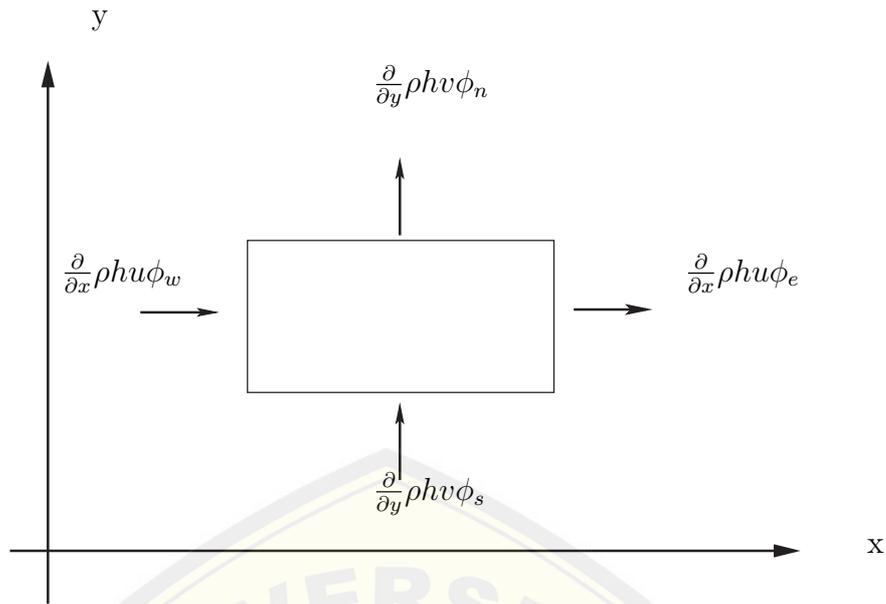
$$\frac{d}{dt}(\text{momentum}) + [\text{fluks momentum masuk} - \text{fluks momentum keluar}] = \text{force} \quad (4.3)$$

Pada kasus sebaran air panas *spray pond* menimbulkan perubahan momentum. Jika ditinjau dari sumbu *x* dan sumbu *y* maka akan bekerja momentum masuk dan momentum keluar sesuai dengan volume kendali dua dimensi yang dapat dimodelkan sesuai dengan gambar diagram alir momentum seperti pada Gambar 4.1.

Persamaan umum momentum adalah:

$$\frac{\partial \rho \phi_0}{\partial t} + [\text{pure rate}] = \sum F \quad (4.4)$$

Karena objek yang diteliti merupakan aliran fluida cair yang terlihat, maka



Gambar 4.1 Bagan Volume Kendali Persamaan Momentum

pure rate = input - output.

$$\frac{\partial \rho \phi_0}{\partial t} + [input - output] = \sum F \tag{4.5}$$

Pada Gambar 4.1 yang merupakan momentum masuk adalah $\frac{\partial \rho h u \phi_w}{\partial x}$ dan $\frac{\partial \rho h v \phi_s}{\partial y}$. Sedangkan persegi melambangkan area dari kolam *spray pond* yang ada di pabrik gula yang di dalamnya terdapat fluida dan momentum yang keluar adalah $\frac{\partial \rho h u \phi_e}{\partial x}$ dan $\frac{\partial \rho h v \phi_n}{\partial y}$.

Dari persamaan (4.3) dan Gambar 4.1 maka persamaan konservasi momentum sebaran air panas *spray pond* ditunjukkan pada persamaan berikut :

$$\frac{\partial \rho \phi_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho h u \phi_w}{\partial x} - \frac{\partial \rho h u \phi_e}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \rho h v \phi_s}{\partial y} - \frac{\partial \rho h v \phi_n}{\partial y} \right) = F \tag{4.6}$$

F pada persamaan (4.6) merupakan gaya. Gaya-gaya yang bekerja adalah gaya *preassure* (p), gaya gravitasi (g), dan ketinggian (h). Maka gaya yang bekerja dapat dituliskan sebagai berikut:

$$F = \nabla p - \rho \nabla g + \frac{h}{\rho} \tau_{i,j} \nabla (\nabla \phi_0) + \frac{gn^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2} u_i + (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.7}$$

F dalam persamaan (4.7) dapat dijabarkan menjadi seperti persamaan di bawah ini:

$$F = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} - \rho \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{h}{\rho} \left(\tau_{xx} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y} + \tau_{yy} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} \right) + \frac{gn^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2} u_i + (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

Jika persamaan (4.8) disubstitusikan ke persamaan (4.6) maka akan diperoleh persamaan:

$$\frac{\partial \rho \phi_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho h u \phi_w}{\partial x} - \frac{\partial \rho h u \phi_e}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \rho h v \phi_s}{\partial y} - \frac{\partial \rho h v \phi_n}{\partial y} \right) = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} - \rho \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{h}{\rho} \left(\tau_{xx} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y} + \tau_{yy} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} \right) + \frac{gn^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2} u_i + (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

dimana,

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Jika persamaan (4.10) disubstitusikan ke persamaan (4.9) maka didapat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \phi_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho h u \phi_w}{\partial x} - \frac{\partial \rho h u \phi_e}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \rho h v \phi_s}{\partial y} - \frac{\partial \rho h v \phi_n}{\partial y} \right) &= \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} - \\ \rho \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{h}{\rho} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} \right) + & \\ \frac{gn^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2} (u + v)(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} & \end{aligned} \quad (4.11)$$

Jadi, **terbukti** persamaan (4.11) merupakan persamaan momentum. Berdasarkan persamaan (4.11), maka persamaan momentum arah sumbu x adalah:

$$\frac{\partial \rho \phi_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho h u \phi_w}{\partial x} - \frac{\partial \rho h u \phi_e}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{h}{\rho} (2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}) + \frac{h}{\rho} (2\mu \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y}) + \frac{g n^2}{(h \frac{1}{6})^2} (u + v)(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

Sedangkan persamaan momentum arah sumbu y adalah:

$$\frac{\partial \rho \phi_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho h v \phi_s}{\partial y} - \frac{\partial \rho h v \phi_n}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} - \rho \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{h}{\rho} (2\mu \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y}) + \frac{h}{\rho} (2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2}) + \frac{g n^2}{(h \frac{1}{6})^2} (u + v)(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

Pada persamaan sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula, persamaan tersusun dari persamaan momentum dan persamaan energi. Persamaan energi merupakan bentuk persamaan diferensial yang berdasarkan persamaan umum skalar *transport* dari konversi energi, maka:

$$\frac{d}{dt}(\text{energi}) + [\text{fluks energi masuk} - \text{fluks energi keluar}] = \text{Source} \quad (4.14)$$

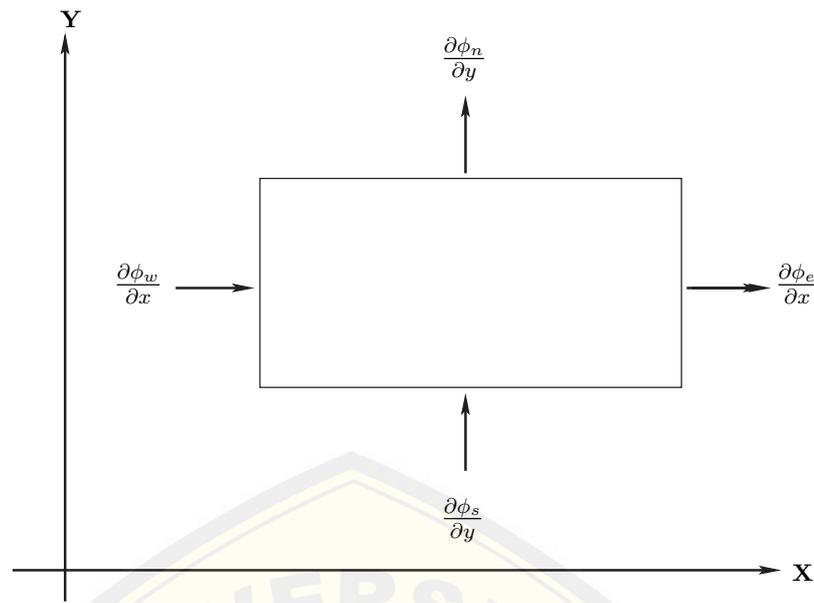
Persamaan umum energi adalah:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + [\text{pure rate}] = S \quad (4.15)$$

Objek yang diamati pada sebaran air panas *spray pond* terlihat yaitu air yang merupakan fluida cair, maka *pure rate* = *input* - *output*. S (*source*) merupakan energi sistem dalam persamaan energi.

Gambar 4.2 merupakan diagram alir energi untuk aliran fluida pada sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula. Untuk energi yang masuk $\frac{\partial u \phi_w}{\partial x}$ dan $\frac{\partial v \phi_s}{\partial y}$. Sedangkan persegi melambangkan luasan area kolam *spray pond* dan energi keluar adalah $\frac{\partial u \phi_e}{\partial x}$ dan $\frac{\partial v \phi_n}{\partial y}$.

Dengan memasukkan fluks energi masuk dan energi keluar dari Gambar 4.2



Gambar 4.2 Bagan Volume Kendali Persamaan Energi

ke persamaan (4.14) dapat ditulis:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial u \phi_w}{\partial x} - \frac{\partial u \phi_e}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v \phi_s}{\partial y} - \frac{\partial v \phi_n}{\partial y} \right) = \nabla k (\nabla T_0) + \frac{\partial}{\partial x} (-p u' + 2\mu u' - \frac{1}{2} \rho u' v') + \frac{\partial}{\partial y} (-p v' + 2\mu v' - \frac{1}{2} \rho u' v') - 2\mu e'_{i,j} - \rho uv E_{i,j} \quad (4.16)$$

Dengan komponen vektor bekerja pada sumbu x dan y

$$\begin{aligned} e'_{i,j} &= (e'_{xx} + e'_{xy} + e'_{yy}) \\ E_{i,j} &= (E_{xx} + E_{xy} + E_{yy}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Persamaan (4.16) dan (4.17) merupakan suatu persamaan vektor. Dengan mensubstitusikan persamaan (4.17) ke persamaan (4.16) dan menuliskan vektor-

vektor secara lengkap maka akan diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial u \phi_w}{\partial x} - \frac{\partial u \phi_e}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v \phi_s}{\partial y} - \frac{\partial v \phi_n}{\partial y} \right) &= k \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + 2k \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-p u' + 2\mu u' - \frac{1}{2} \rho u' v' \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-p v' + 2\mu v' - \frac{1}{2} \rho u' v' \right) - 2\mu (e'_{xx} + e'_{xy} + e'_{yy}) & \\ - \rho uv (E_{xx} + E_{xy} + E_{yy}) & \end{aligned} \quad (4.18)$$

Dengan ,

$$\begin{aligned} e'_{xx} &= \frac{\partial u'}{\partial x}, & e'_{xy} = e'_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right), & e'_{yy} &= \frac{\partial v'}{\partial y} \\ E_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & E_{xy} = E_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & E_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Jika persamaan (4.19) disubsituisikan ke persamaan (4.18) maka diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial u \phi_w}{\partial x} - \frac{\partial u \phi_e}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v \phi_s}{\partial y} - \frac{\partial v \phi_n}{\partial y} \right) &= k \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + 2k \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-p u' + 2\mu u' - \frac{1}{2} \rho u' v' \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-p v' + 2\mu v' - \frac{1}{2} \rho u' v' \right) - 2\mu & \\ \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) - \rho uv \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \end{aligned} \quad (4.20)$$

Dengan mendistribusikan $\frac{\partial}{\partial x}$ dan $\frac{\partial}{\partial y}$ maka persamaan (4.20) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial u \phi_w}{\partial x} - \frac{\partial u \phi_e}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v \phi_s}{\partial y} - \frac{\partial v \phi_n}{\partial y} \right) &= k \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + 2k \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-p u' + 2\mu u' - \frac{1}{2} \rho u' v' - 2\mu u' - \mu v' - \rho u^2 v - \frac{1}{2} \rho uv^2 \right) + & \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-p v' + 2\mu v' - \frac{1}{2} \rho u' v' - 2\mu v' - \mu u' - \frac{1}{2} \rho u^2 v - \rho uv^2 \right) & \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dan persamaan (4.21) bisa disederhanakan menjadi persamaan berikut ini:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial u \phi_w}{\partial x} - \frac{\partial u \phi_e}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v \phi_s}{\partial y} - \frac{\partial v \phi_n}{\partial y} \right) &= k \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + 2k \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho u' - \frac{1}{2} \rho u' v' - \mu v' - \rho u^2 v - \frac{1}{2} \rho u v^2 \right) &+ \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho v' - \frac{1}{2} \rho u' v' - \mu u' - \frac{1}{2} \rho u^2 v - \rho u v^2 \right) & \end{aligned} \quad (4.22)$$

Jadi, **terbukti** persamaan (4.22) merupakan suatu persamaan energi. Berdasarkan persamaan (4.22), maka persamaan energi arah sumbu x adalah:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial u \phi_w}{\partial x} - \frac{\partial u \phi_e}{\partial x} \right) &= k \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + 2k \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\rho u' - \frac{1}{2} \rho u' v' - \right. \\ \left. \mu v' - \rho u^2 v - \frac{1}{2} \rho u v^2 \right) & \end{aligned} \quad (4.23)$$

Sedangkan persamaan energi arah sumbu y adalah:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial v \phi_s}{\partial y} - \frac{\partial v \phi_n}{\partial y} \right) &= 2k \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\rho v' - \frac{1}{2} \rho u' v' - \right. \\ \left. \mu u' - \frac{1}{2} \rho u^2 v - \rho u v^2 \right) & \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.2 Penyelesaian Model Matematika Sebaran Air Panas *Spray Pond* di Pabrik Gula

Persamaan momentum dan persamaan energi pada model matematika merupakan persamaan diferensial parsial. Untuk menyelesaikan persamaan momentum dan persamaan energi yaitu dengan mengintegrasikan persamaan diferensial sebanyak variabel bebas yang ada. Berdasarkan hasil observasi, model juga dipengaruhi oleh h (tinggi pipa), n (koefisien kekasaran *Manning*), dan T (temperatur awal) dari proses sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula.

◇ **Observasi 4.2.** Jika ϕ adalah kecepatan fluida, Δt waktu aliran fluida, Δx dan Δy berturut-turut adalah ukuran panjang aliran fluida dalam pipa di *spray pond* pada sumbu X dan sumbu Y , sedangkannya u dan v berturut-turut adalah

kecepatan fluida pada saat masuk kolam, dan berturut-turut ρ , g , p , μ adalah massa jenis fluida, gaya gravitasi bumi, tekanan, serta kekentalan fluida yang keseluruhan membentuk persamaan sebaran air panas pada spray pond, maka persamaan sebaran air panas spray pond sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{3}{8}(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) - \frac{3}{8}(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) \right) \phi_{i,j} + \\ & \left(-\frac{3}{8}(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) \right) \phi_{i+1,j} + \left(\frac{7}{8}(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) \right) \phi_{i-1,j} + \\ & \left(-\frac{1}{8}(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) \right) \phi_{i-2,j} + \left(-\frac{3}{8}(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) \right) \phi_{i,j+1} + \\ & \left(\frac{7}{8}(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) \right) \phi_{i,j-1} + \left(-\frac{1}{8}(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) \right) \phi_{i,j-2} = \\ & \rho \left[-kT_0 \frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} - 2kT_0\Delta t - kT_0 \frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} + \Delta y\Delta t(pu' + \frac{1}{2}\rho u'v' - \mu v' + \rho u^2v + \right. \\ & \left. \frac{1}{2}\rho uv^2 + p - \rho g) + \Delta x\Delta t(pv' + \frac{1}{2}\rho u'v' + \mu u' + \frac{1}{2}\rho u^2v + \rho uv^2 + p - \rho g) \right] + \\ & \frac{h}{\rho} 2\mu\Delta y\Delta t \left(\frac{u\Delta y\Delta t}{\Delta x} \phi_0 + v\phi_0 \right) + \frac{h}{\rho} 2\mu\Delta x\Delta t \left(u\phi_0 + \frac{v\Delta x\Delta t}{\Delta y} \phi_0 \right) + \\ & \frac{gn^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2} (u+v) + (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Bukti. Persamaan momentum (4.11) mengandung variabel bebas x , y , dan t . Sehingga untuk menyelesaikannya harus diintegrasikan sebanyak tiga kali, hasilnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \int_t \int_y \int_x \left[\frac{\partial \rho \phi_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho hu \phi_w}{\partial x} - \frac{\partial \rho hu \phi_e}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \rho hv \phi_s}{\partial y} - \frac{\partial \rho hv \phi_n}{\partial y} \right) \right] dx dy dz \\ & = \int_t \int_y \int_x \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} - \rho \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{h}{\rho} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \partial y} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} \right) + \frac{gn^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2} (u+v) + (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

Batas-batas untuk integral adalah,

Variabel	Batas Bawah	Batas Atas
x	x	$x + \Delta x$
y	y	$y + \Delta y$
t	t	$t + \Delta t$

Sehingga hasil pengitegralannya diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} &\rho\phi_0\Delta x\Delta y + (\rho hu\phi_w - \rho hu\phi_e)\Delta y\Delta t + (\rho hv\phi_s - \rho hv\phi_n)\Delta x\Delta t = \\ &(p - \rho g)\Delta y\Delta t + (p - \rho g)\Delta x\Delta t + \frac{h}{\rho} \left[2\mu u\Delta y\Delta t \frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} \phi_0 + 2\mu(u\Delta x + \right. \\ &\left. v\Delta y)\phi_0 + 2\mu v\Delta x\Delta t \frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} \phi_0 \right] + \frac{gn^2}{(h\frac{1}{6})^2}(u + v) + (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Jadi, persamaan (4.26) disebut dengan persamaan momentum pada fluida.

Seperti pada persamaan momentum (4.11), persamaan energi (4.22) juga mengandung variabel bebas x , y , dan t . Sehingga untuk menyelesaikannya harus diintegrasikan sebanyak tiga kali, hasilnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\int_t \int_y \int_x \left[\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial u \phi_w}{\partial x} - \frac{\partial u \phi_e}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v \phi_s}{\partial y} - \frac{\partial v \phi_n}{\partial y} \right) \right] dx dy dz = \\ &\int_t \int_y \int_x \left[k \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + 2k \frac{\partial^2 T_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-p u' - \frac{1}{2} \rho u' v' - \mu v' - \rho u^2 v - \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{1}{2} \rho u v^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-p v' - \frac{1}{2} \rho u' v' - \mu u' - \frac{1}{2} \rho u^2 v - \rho u v^2 \right) \right] dx dy dt \end{aligned} \quad (4.27)$$

Batas-batas untuk integral adalah,

Variabel	Batas Bawah	Batas Atas
x	x	$x + \Delta x$
y	y	$y + \Delta y$
t	t	$t + \Delta t$

Sehingga diperoleh hasil dari pengintegralannya adalah:

$$\begin{aligned} \phi_0 \Delta x \Delta y + \Delta y \Delta t (u \phi_w - u \phi_e) + \Delta x \Delta t (v \phi_s - v \phi_n) &= kT_0 \frac{\Delta y \Delta t}{\Delta x} + \\ 2kT_0 \Delta t + kT_0 \frac{\Delta x \Delta t}{\Delta y} + \Delta y \Delta t (-pu' - \frac{1}{2} \rho u' v' - \mu v' - \rho u^2 v - \frac{1}{2} \rho uv^2) + \\ \Delta x \Delta t (-pv' - \frac{1}{2} \rho u' v' - \mu u' - \frac{1}{2} \rho u^2 v - \rho uv^2) &\quad (4.28) \end{aligned}$$

Persamaan (4.28) dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned} \phi_0 \Delta x \Delta y &= -\Delta y \Delta t (u \phi_w - u \phi_e) - \Delta x \Delta t (v \phi_s - v \phi_n) + kT_0 \frac{\Delta y \Delta t}{\Delta x} + \\ 2kT_0 \Delta t + kT_0 \frac{\Delta x \Delta t}{\Delta y} + \Delta y \Delta t (-pu' - \frac{1}{2} \rho u' v' - \mu v' - \rho u^2 v - \frac{1}{2} \rho uv^2) + \\ \Delta x \Delta t (-pv' - \frac{1}{2} \rho u' v' - \mu u' - \frac{1}{2} \rho u^2 v - \rho uv^2) &\quad (4.29) \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan persamaan momentum dan persamaan energi, maka langkah selanjutnya adalah mensubstitusikan persamaan (4.29) ke persamaan (4.26) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \rho \left[-\Delta y \Delta t (u \phi_w - u \phi_e) - \Delta x \Delta t (v \phi_s - v \phi_n) + kT_0 \frac{\Delta y \Delta t}{\Delta x} + \right. \\ 2kT_0 \Delta t + kT_0 \frac{\Delta x \Delta t}{\Delta y} + \Delta y \Delta t (-pu' - \frac{1}{2} \rho u' v' - \mu v' - \rho u^2 v - \frac{1}{2} \rho uv^2) + \\ \left. \Delta x \Delta t (-pv' - \frac{1}{2} \rho u' v' - \mu u' - \frac{1}{2} \rho u^2 v - \rho uv^2) \right] + (\rho hu \phi_w - \rho hu \phi_e) \Delta y \Delta t + \\ (\rho hv \phi_s - \rho hv \phi_n) \Delta x \Delta t = (p - \rho g) \Delta y \Delta t + (p - \rho g) \Delta x \Delta t + \\ \frac{h}{\rho} \left(2\mu u \Delta y \Delta t \frac{\Delta y \Delta t}{\Delta x} \phi_0 + 2\mu (u \Delta x + v \Delta y) \phi_0 + 2\mu v \Delta x \Delta t \frac{\Delta x \Delta t}{\Delta y} \phi_0 \right) + \\ \frac{gn^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2} (u + v) + (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.30) \end{aligned}$$

Kemudian mendistribusikan ρ , Δy , Δt , $\Delta x \Delta t$, $\frac{\Delta y \Delta t}{\Delta x}$, $\frac{\Delta x \Delta t}{\Delta y}$ sehingga persamaan

(4.30) menjadi:

$$\begin{aligned}
 & -\rho\Delta y\Delta t u\phi_w + \rho\Delta y\Delta t u\phi_e - \rho\Delta x\Delta t v\phi_s + \rho\Delta x\Delta t v\phi_n + \rho kT_0 \frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} + \\
 & \rho 2kT_0\Delta t + \rho kT_0 \frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} - \rho\Delta y\Delta t p u' - \rho\Delta y\Delta t \frac{1}{2}\rho u'v' - \rho\Delta y\Delta t \mu v' - \\
 & \rho\Delta y\Delta t \rho u^2v - \rho u\Delta y\Delta t \frac{1}{2}\rho uv^2 - \rho\Delta x\Delta t p v' - \rho\Delta x\Delta t \frac{1}{2}\rho u'v' - \\
 & \rho\Delta x\Delta t \mu u' - \rho\Delta x\Delta t \frac{1}{2}\rho u^2v - \rho\Delta x\Delta t \rho uv^2 + \rho hu\phi_w\Delta y\Delta t - \\
 & \rho hu\phi_e\Delta y\Delta t + \rho hv\phi_s\Delta x\Delta t - \rho hv\phi_n\Delta x\Delta t = p\Delta y\Delta t - \rho g\Delta y\Delta t + \\
 & p\Delta x\Delta t - \rho g\Delta x\Delta t + \frac{h}{\rho}2\mu u\Delta y\Delta t \frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x}\phi_0 + \frac{h}{\rho}2\mu u\Delta x\Delta t\phi_0 + \\
 & \frac{h}{\rho}2\mu v\Delta y\Delta t\phi_0 + \frac{h}{\rho}2\mu v\Delta x\Delta t \frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y}\phi_0 + \frac{gn^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2}(u+v) + (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya meletakkan suku-suku yang memiliki variabel $\phi_{e,w}, \Delta y, \Delta t$, dan $\phi_{n,s}, \Delta x, \Delta t$ di ruas kiri sedangkan suku-suku yang lainnya di ruas kanan, sehingga persamaan (4.31) menjadi:

$$\begin{aligned}
 & \phi_w(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) - \phi_e(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) + \\
 & \phi_s(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) - \phi_n(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) = \\
 & -\rho kT_0 \frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} - \rho 2kT_0\Delta t - \rho kT_0 \frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} + \rho\Delta y\Delta t p u' + \rho^2\Delta y\Delta t \frac{1}{2}u'v' + \\
 & \rho\Delta y\Delta t \mu v' + \rho^2\Delta y\Delta t u^2v + \rho^2u\Delta y\Delta t \frac{1}{2}uv^2 + \rho\Delta x\Delta t p v' + \rho^2\Delta x\Delta t \frac{1}{2}u'v' + \\
 & \rho\Delta x\Delta t \mu u' + \rho^2\Delta x\Delta t \frac{1}{2}u^2v + \rho^2\Delta x\Delta t \rho uv^2 + p\Delta y\Delta t - \rho g\Delta y\Delta t + \\
 & p\Delta x\Delta t - \rho g\Delta x\Delta t + \frac{h}{\rho}2\mu u\Delta y\Delta t \frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x}\phi_0 + \frac{h}{\rho}2\mu u\Delta x\Delta t\phi_0 + \\
 & \frac{h}{\rho}2\mu v\Delta y\Delta t\phi_0 + \frac{h}{\rho}2\mu v\Delta x\Delta t \frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y}\phi_0 + \frac{gn^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2}(u+v) + (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

Persamaan (4.32) bisa disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned}
 & \phi_w(\rho hu \Delta y \Delta t - \rho u \Delta y \Delta t) - \phi_e(\rho hu \Delta y \Delta t - \rho u \Delta y \Delta t) + \\
 & \phi_s(\rho hv \Delta x \Delta t - \rho v \Delta x \Delta t) - \phi_n(\rho hv \Delta x \Delta t - \rho v \Delta x \Delta t) = \rho \left[-kT_0 \frac{\Delta y \Delta t}{\Delta x} - \right. \\
 & 2kT_0 \Delta t - kT_0 \frac{\Delta x \Delta t}{\Delta y} + \Delta y \Delta t (pu' + \frac{1}{2} \rho u' v' - \mu v' + \rho u^2 v + \frac{1}{2} \rho uv^2 + p - \rho g) + \\
 & \left. \Delta x \Delta t (pv' + \frac{1}{2} \rho u' v' + \mu u' + \frac{1}{2} \rho u^2 v + \rho uv^2 + p - \rho g) \right] + \frac{h}{\rho} 2\mu u \Delta y \Delta t \\
 & \left(\frac{u \Delta y \Delta t}{\Delta x} \phi_0 + v \phi_0 \right) + \frac{h}{\rho} 2\mu \Delta x \Delta t (u \phi_0 + \frac{v \Delta x \Delta t}{\Delta y} \phi_0 + \frac{gn^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2} (u + v) + \\
 & (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Persamaan (4.33) merupakan penyelesaian akhir dari model matematika sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula. Setelah mendapatkan persamaan (4.33) maka tahapan selanjutnya dalam metode volume hingga adalah diskritisasi *QUICK*.

4.3 Diskritisasi

Pendiskritisasian dengan menggunakan metode *QUICK* adalah untuk mengubah nilai ϕ pada bidang (*face*) menjadi ϕ pada titik (*node*) dengan menggunakan teknik diskritisasi *QUICK* dalam dua dimensi sehingga akan didapatkan nilai numerik dari suatu masalah dengan metode volume hingga.

Dengan menggunakan diskritisasi teknik *QUICK* diperoleh nilai ϕ pada bidang menjadi ϕ pada titik sebagai berikut:

◊ Nilai input dari kontrol bidang adalah ϕ_w dan ϕ_s adalah:

$$\begin{aligned}
 \phi_w(i, j) &= -\frac{1}{8}\phi(i-2, j) + \frac{3}{4}\phi(i-1, j) + \frac{3}{8}\phi(i, j) \\
 \phi_s(i, j) &= -\frac{1}{8}\phi(i, j-2) + \frac{3}{4}\phi(i, j-1) + \frac{3}{8}\phi(i, j)
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

◊ Nilai input dari kontrol bidang adalah ϕ_e dan ϕ_n adalah:

$$\begin{aligned}\phi_e(i, j) &= -\frac{1}{8}\phi(i-1, j) + \frac{3}{4}\phi(i, j) + \frac{3}{8}\phi(i+1, j) \\ \phi_n(i, j) &= -\frac{1}{8}\phi(i, j-1) + \frac{3}{4}\phi(i, j) + \frac{3}{8}\phi(i, j+1)\end{aligned}\tag{4.35}$$

Selanjutnya mensubstitusikan nilai-nilai *input* dan *output* dari masing-masing kontrol bidang (*face*) ke persamaan (4.33) menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}& \left[-\frac{1}{8}\phi(i-2, j) + \frac{3}{4}\phi(i-1, j) + \frac{3}{8}\phi(i, j) \right] (\rho hu \Delta y \Delta t - \rho u \Delta y \Delta t) - \\ & \left[-\frac{1}{8}\phi(i-1, j) + \frac{3}{4}\phi(i, j) + \frac{3}{8}\phi(i+1, j) \right] (\rho hu \Delta y \Delta t - \rho u \Delta y \Delta t) + \\ & \left[-\frac{1}{8}\phi(i, j-2) + \frac{3}{4}\phi(i, j-1) + \frac{3}{8}\phi(i, j) \right] (\rho hv \Delta x \Delta t - \rho v \Delta x \Delta t) - \\ & \left[-\frac{1}{8}\phi(i, j-1) + \frac{3}{4}\phi(i, j) + \frac{3}{8}\phi(i, j+1) \right] (\rho hv \Delta x \Delta t - \rho v \Delta x \Delta t) = \\ & \rho \left[-kT_0 \frac{\Delta y \Delta t}{\Delta x} - 2kT_0 \Delta t - kT_0 \frac{\Delta x \Delta t}{\Delta y} + \Delta y \Delta t (p u' + \frac{1}{2} \rho u' v' - \mu v' + \rho u^2 v + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \rho u v^2 + p - \rho g) + \Delta x \Delta t (p v' + \frac{1}{2} \rho u' v' + \mu u' + \frac{1}{2} \rho u^2 v + \rho u v^2 + p - \rho g) \right] + \\ & \frac{h}{\rho} 2\mu u \Delta y \Delta t \left(\frac{u \Delta y \Delta t}{\Delta x} \phi_0 + v \phi_0 \right) + \frac{h}{\rho} 2\mu \Delta x \Delta t \left(u \phi_0 + \frac{v \Delta x \Delta t}{\Delta y} \phi_0 + \right. \\ & \left. \frac{gn^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2} (u+v) + (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \right)\end{aligned}\tag{4.36}$$

Berdasarkan persamaan (4.33) maka langkah selanjutnya adalah penggunaan hukum distributif dan asosiatif dengan melihat masing-masing jenis titiknya

(node), sehingga persamaan (4.36) menjadi:

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{3}{8}(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) - \frac{3}{8}(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) \right) \phi_{i,j} + \\
 & \left(-\frac{3}{8}(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) \right) \phi_{i+1,j} + \left(\frac{7}{8}(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) \right) \phi_{i-1,j} + \\
 & \left(-\frac{1}{8}(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) \right) \phi_{i-2,j} + \left(-\frac{3}{8}(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) \right) \phi_{i,j+1} + \\
 & \left(\frac{7}{8}(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) \right) \phi_{i,j-1} + \left(-\frac{1}{8}(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) \right) \phi_{i,j-2} = \\
 & \rho \left[-kT_0 \frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} - 2kT_0\Delta t - kT_0 \frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} + \Delta y\Delta t(pu' + \frac{1}{2}\rho u'v' - \mu v' + \rho u^2v + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2}\rho uv^2 + p - \rho g) + \Delta x\Delta t(pv' + \frac{1}{2}\rho u'v' + \mu u' + \frac{1}{2}\rho u^2v + \rho uv^2 + p - \rho g) \right] + \\
 & \frac{h}{\rho} 2\mu u\Delta y\Delta t \left(\frac{u\Delta y\Delta t}{\Delta x} \phi_0 + v\phi_0 \right) + \frac{h}{\rho} 2\mu \Delta x\Delta t \left(u\phi_0 + \frac{v\Delta x\Delta t}{\Delta y} \phi_0 + \right. \\
 & \left. \frac{gn^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2} (u+v) + (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \right) \tag{4.37}
 \end{aligned}$$

Jadi, **terbukti** persamaan (4.37) merupakan diskritisasi model matematika sebaran air panas *spray pond* yang ada di pabrik gula.

Setelah mendapatkan bentuk diskritisasi persamaan momentum dan persamaan energi, maka langkah selanjutnya adalah akan dibentuk matrik $m \times n$.

◇ **Observasi 4.1.** Jika A, B, C, D, E, F, G merupakan penyusun matrik $m \times n$ yang membuat semua koefisien ϕ , maka matrik $m \times n$ yang dapat dibentuk berdasarkan hasil diskritisasi persamaan momentum dan persamaan energi adalah:

$$\begin{bmatrix}
 A & B & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 C & A & B & 0 & 0 & 0 & E & 0 & \dots & 0 \\
 D & C & A & B & 0 & 0 & 0 & E & \dots & 0 \\
 0 & D & C & A & B & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & D & C & A & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 F & 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & 0 & \dots & 0 \\
 0 & F & 0 & 0 & 0 & C & A & B & \dots & 0 \\
 0 & 0 & F & 0 & 0 & D & C & A & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & F & 0 & 0 & D & C & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 & 0 & D & \dots & 0 \\
 G & 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & G & 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & G & 0 & 0 & 0 & 0 & F & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \phi_1 \\
 \phi_2 \\
 \phi_3 \\
 \phi_4 \\
 \phi_5 \\
 \phi_6 \\
 \phi_7 \\
 \phi_8 \\
 \phi_9 \\
 \phi_{10} \\
 \phi_{11} \\
 \phi_{12} \\
 \phi_{13} \\
 \phi_{13} \\
 \vdots \\
 \phi_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 H_1 \\
 H_2 \\
 H_3 \\
 H_4 \\
 H_5 \\
 H_6 \\
 H_7 \\
 H_8 \\
 H_9 \\
 H_{10} \\
 H_{11} \\
 H_{12} \\
 H_{13} \\
 H_{14} \\
 \vdots \\
 H
 \end{bmatrix}
 \quad (4.38)$$

Jika persamaan (4.37) dimisalkan dalam bentuk:

$$A \cdot \phi(i, j) + B \cdot \phi(i + 1, j) + C \cdot \phi(i - 1, j) + D \cdot \phi(i - 2, j) + \\
 E \cdot \phi(i, j + 1) + F \cdot \phi(i, j - 1) + G \cdot \phi(i, j - 2) = H \quad (4.39)$$

Maka persamaan (4.37) dapat dituliskan secara terpisah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{3}{8}(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) - \frac{3}{8}(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) \\
 B &= -\frac{3}{8}(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) \\
 C &= \frac{7}{8}(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) \\
 D &= -\frac{1}{8}(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) \\
 E &= -\frac{3}{8}(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) \\
 F &= \frac{7}{8}(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) \\
 G &= -\frac{1}{8}(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) \\
 H &= \rho \left[-kT_0 \frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} - 2kT_0\Delta t - kT_0 \frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} + \Delta y\Delta t(pu' + \frac{1}{2}\rho u'v' - \mu v' + \rho u^2v + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2}\rho uv^2 + p - \rho g) + \Delta x\Delta t(pv' + \frac{1}{2}\rho u'v' + \mu u' + \frac{1}{2}\rho u^2v + \rho uv^2 + p - \rho g) \right] + \\
 &\quad \frac{h}{\rho} 2\mu u\Delta y\Delta t \left(\frac{u\Delta y\Delta t}{\Delta x} \phi_0 + v\phi_0 \right) + \frac{h}{\rho} 2\mu \Delta x\Delta t \left(u\phi_0 + \frac{v\Delta x\Delta t}{\Delta y} \phi_0 + \right. \\
 &\quad \left. \frac{gn^2}{(h^{\frac{1}{8}})^2} (u+v) + (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \right) \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

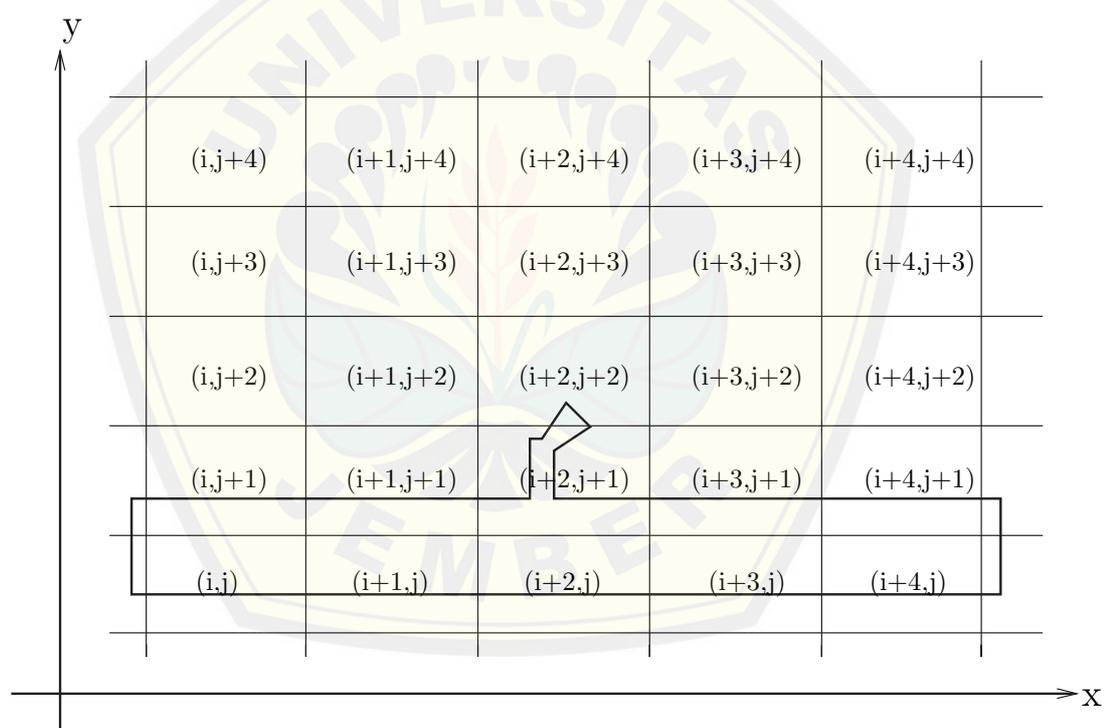
Untuk mendapatkan penyelesaian dari permasalahan sebaran air panas *spray pond* pada pabrik gula, maka akan dicari bentuk matrik dari persamaan (4.40). Untuk mendapatkan nilai $\phi_{i,j}$ pada persamaan (4.40) pada masing-masing titik menggunakan diskritisasi *QUICK* dengan dua dimensi, dan nilai masing-masing titik dipengaruhi nilai sekitarnya.

Persamaan (4.37) yang telah disederhanakan mejadi Persamaan (4.39) merupakan bentuk persamaan linear dengan variabel bebas ϕ . Sehingga nilai ϕ dapat ditentukan dengan persamaan matriks $K \times X = L$. Dengan K merupakan koe-

fisien dari ϕ , X merupakan ϕ , dan L atau konstanta merupakan nilai dari H :

$$\rho \left[-kT_0 \frac{\Delta y \Delta t}{\Delta x} - 2kT_0 \Delta t - kT_0 \frac{\Delta x \Delta t}{\Delta y} + \Delta y \Delta t (pu' + \frac{1}{2} \rho u' v' - \mu v' + \rho u^2 v + \frac{1}{2} \rho uv^2 + p - \rho g) + \Delta x \Delta t (pv' + \frac{1}{2} \rho u' v' + \mu u' + \frac{1}{2} \rho u^2 v + \rho uv^2 + p - \rho g) \right] + \frac{h}{\rho} 2\mu u \Delta y \Delta t (\frac{u \Delta y \Delta t}{\Delta x} \phi_0 + v \phi_0) + \frac{h}{\rho} 2\mu \Delta x \Delta t (u \phi_0 + \frac{v \Delta x \Delta t}{\Delta y} \phi_0 + \frac{gn^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2} (u + v) + (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.41}$$

Sehingga untuk menganalisis proses sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula digunakan perkalian matriks dengan persamaan : $K \cdot \phi = L \Leftrightarrow \phi = K^{-1} L$.



Gambar 4.3 Diskritisasi Sebaran Air Panas *Spray Pond* di Pabrik Gula

Pada diskritisasi QUICK sebaran air panas *spray pond* akan dipartisi menjadi $m \times n$ bagian yang masing-masing bagian akan menjadi satu bagian matriks mewakili satu bagian luasan pada kolam *spray pond*. Untuk diskritisasinya dapat

divisualisasikan seperti pada Gambar 4.3.

Untuk diskritisasi pertama sebaran air panas *spray pond* arah sumbu x dan arah sumbu y adalah seperti pada Gambar 4.3. Banyaknya persegi pada Gambar 4.3 merupakan banyaknya partisi yang merupakan diskritisasi yang berjalan searah sumbu x adalah 5 dan yang berjalan searah sumbu y adalah 5. i menunjukkan diskritisasi searah sumbu x sedangkan j menunjukkan diskritisasi searah sumbu y . Hanya i saja yang berjalan, karena masih berada ditingkat pertama. Titik (i, j) mewakili variabel $\phi(i, j)$, $(i + 1, j)$ mewakili variabel $\phi(i + 1, j)$, dan seterusnya mewakili variabel pada Persamaan (4.39). Jika titik pada Gambar 4.3 ada (memenuhi) di Persamaan (4.39), maka elemen matriks pada titik tersebut merupakan koefisien dari variabel pada titik tersebut. Sebaliknya, jika titik pada Gambar 4.3 tidak ada (tidak memenuhi) di Persamaan (4.39), maka elemen matriks pada titik tersebut bernilai 0 (nol). Dari Gambar 4.3 dapat dibuat matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} A & B & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \end{bmatrix}^\phi = \begin{bmatrix} H_i \end{bmatrix}^\phi \quad (4.42)$$

Untuk diskritisasi kedua sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula sama seperti pada Gambar 4.3, namun letak (i, j) bergeser ke persegi sebelah kanan mengikuti arah sumbu x . Sehingga matriks yang didapat untuk diskritisasi kedua adalah:

$$\begin{bmatrix} C & A & B & 0 & 0 & 0 & E & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \end{bmatrix}^\phi = \begin{bmatrix} H_i \end{bmatrix}^\phi \quad (4.43)$$

Dan seterusnya sampai diskritisasi ke- n . Kemudian, matrik-matrik tersebut disusun menjadi matrik $(m \times n)$. Susunan matriks tersebut adalah:

$$\begin{bmatrix}
 A & B & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 C & A & B & 0 & 0 & 0 & E & 0 & \dots & 0 \\
 D & C & A & B & 0 & 0 & 0 & E & \dots & 0 \\
 0 & D & C & A & B & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & D & C & A & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 F & 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & 0 & \dots & 0 \\
 0 & F & 0 & 0 & 0 & C & A & B & \dots & 0 \\
 0 & 0 & F & 0 & 0 & D & C & A & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & F & 0 & 0 & D & C & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 & 0 & D & \dots & 0 \\
 G & 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & G & 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & G & 0 & 0 & 0 & 0 & F & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \phi_1 \\
 \phi_2 \\
 \phi_3 \\
 \phi_4 \\
 \phi_5 \\
 \phi_6 \\
 \phi_7 \\
 \phi_8 \\
 \phi_9 \\
 \phi_{10} \\
 \phi_{11} \\
 \phi_{12} \\
 \phi_{13} \\
 \phi_{13} \\
 \vdots \\
 \phi_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 H_1 \\
 H_2 \\
 H_3 \\
 H_4 \\
 H_5 \\
 H_6 \\
 H_7 \\
 H_8 \\
 H_9 \\
 H_{10} \\
 H_{11} \\
 H_{12} \\
 H_{13} \\
 H_{14} \\
 \vdots \\
 H_n
 \end{bmatrix}
 \tag{4.44}$$

Jadi, *terbukti* bahwa matriks di atas adalah bentuk matriks ($m \times n$) hasil diskritisasi persamaan momentum dan persamaan energi.

Setelah mendapatkan matriks ($m \times n$), maka tahap selanjutnya adalah penyelesaian matriks ($m \times n$) dengan menggunakan *MATLAB*. Matriks yang telah didapatkan dapat dibuat persamaan $AX = B$. Dengan komputasi *MATLAB* maka nilai matriks X dapat dicari menggunakan eliminasi Gauss Seidel yakni $X = A^{-1}B$.

4.4 Efektivitas Metode Volume Hingga dengan Menggunakan Error Relatif Dalam Sebaran Air Panas *Spray Pond* Di Pabrik Gula

Langkah ketiga dari pemodelan matematika adalah melakukan verifikasi. Pada tahap ini akan dirancang suatu program sebaran air panas *spray pond* di Pabrik Gula dengan menggunakan *software MATLAB* dan gambar simulasi sebaran air panasnya dengan *FLUENT* berdasarkan model matematika yang telah

diselesaikan dengan menggunakan metode volume hingga.

4.4.1 Format Programing

Pembahasan selanjutnya adalah tentang tahap pemodelan, tahap formulasi numerik, dan tahap algoritma pada sebaran air panas *spray pond*. Pada tahap *programming* akan dijabarkan format *programming* dari metode volume hingga. Matriks yang diperoleh dengan diskritisasi menggunakan teknik *QUICK* pada Persamaan (4.44) diselesaikan dengan menggunakan algoritma pemrograman *Matlab*. Format *programming* dari metode volume hingga akan diatur untuk menghasilkan solusi numerik dan *error* dari proses sebaran air panas *spray pond*. Format *programming* dibagi menjadi dua tahap, yaitu:

1. Tahap Pemodelan

Dalam kasus sebaran air panas *spray pond*, akan dibuat suatu model matematika berdasarkan metode volume hingga untuk mengetahui simulasi sebaran air panas *spray pond* berdasarkan temperatur terhadap tekanan yang terjadi pada penyemprotan di *spray pond*.

2. Tahap Formulasi Numerik

Tahap formulasi numerik dalam penelitian ini dapat dikatakan sebagai konversi pemodelan matematika secara diskrit dari metode volume hingga dengan diskritisasi *QUICK*. Solusi numerik dari metode volume hingga dikonversikan sedemikian rupa sehingga pada akhirnya dapat diformulasikan dengan algoritma pemrograman *Matlab*. Adapun bentuk solusi numerik dalam *Matlab* untuk sebaran air panas *spray pond* sebagai berikut:

```
%Tahap Pendefinisian
A=(-3/8)*((rho*h*u*delty*deltt)-(rho*u*delty*deltt))-
(3/8)*((rho*h*v*deltx*deltt)-(rho*v*deltx*deltt));
B=(-3/8)*((rho*h*u*delty*deltt)-(rho*u*delty*deltt));
C=((7/8)*((rho*h*u*delty*deltt)-(rho*u*delty*deltt)));
D=(-1/8)*((rho*h*u*delty*deltt)-(rho*u*delty*deltt));
E=(-3/8)*((rho*h*v*deltx*deltt)-(rho*v*deltx*deltt));
```

```

F=((7/8)*((rho*h*v*deltx*deltt)-(rho*v*deltx*deltt)));
G=(-(1/8)*((rho*h*u*delty*deltt)-(rho*u*delty*deltt)));
H=rho*((-c*fai*(delty*deltt/deltx))-(2*c*fai*deltt)-
(c*fai*(deltx*deltt/delty))+delty*deltt*(p*U+(1/2)*rho
*U*V+miu*V+rho*(u^2)*v+rho*(1/2)*u*(v^2)+p-rho*gr)+
deltx*deltt*(p*V+rho*(1/2)*U*V+miu*U+(1/2)*rho*(u^2)*v+
rho*u*(v^2)+p-rho*gr))+ (h/rho)*2*miu*delty*deltt*
((u*delty*deltt/deltx)*fai+v*fai)+(h/rho)*2*miu*deltx*
deltt*(u*fai+(v*deltx*deltt/delty)*fai)+((gr*(nn^2))/
((h^(1/6))^2))*(u+v)+((u^2+v^2)^(1/2));
%Pembangunan matrik
f=zeros(m*n:m*n);
f(1:m*n+1:m^2*n^2)=A; % (i,j)
f(m*n+1:m*n+1:m^2*n^2-1)=B; % (i+1,j)
f(m^2*n+m:m*(m*n+1):m*n*(m*n-1))=0;
f(2:m*n+1:m*n*(m*n-1))=C; % (i-1,j)
f(m*n*(m-1)+m+1:m*(m*n+1):m*n*(m*n-1))=0;
f(3:m*n+1:m^2*n^2-2*(m*n))=D; % (i-2,j)
f(m*n*(m-2)+(m+1):(m*n+1)*m:m*m*n*n-2*m*n)=0;
f(m*n*(m-1)+(m+2):(m*n+1)*m:m*m*n*n-2*m*n)=0;
f(m^2*n+1:m*n+1:m^2*n^2-m)=E; % (i,j+1)
f(m+1:m*n+1:m^2*n*(n-1))=F; % (i,j-1)
f(m*2+1:m*n+1:m^2*n*(n-2))=G; % (i,j-2)
f;

```

4.4.2 Penggunaan Batas Error (Toleransi) Pada Metode Volume Hingga

Model matematika pada proses sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula menggunakan metode volume hingga merupakan persamaan differensial parsial yang dipengaruhi oleh temperatur dan tekanan yang ada pada air. Setelah disimulasikan menggunakan *Matlab*, nilai-nilai temperatur yang dihasilkan pada setiap iterasi pada metode Gauss Seidel akan dicari nilai error antara nilai pada

iterasi ke- $r+1$ dengan iterasi r untuk r adalah bilangan cacah. Saat selisih antara iterasi ke- $r+1$ dan iterasi r kurang dari atau sama dengan batas error (toleransi), maka nilai temperatur pada iterasi ke- $r+1$ tersebut merupakan nilai yang mendekati nilai sebenarnya.

Untuk melihat tingkat efektivitas metode volume hingga dengan menyelesaikan kasus sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula menggunakan nilai error (toleransi). Semakin kecil selisih antara iterasi satu dengan iterasi setelahnya dan semakin lebih kecil dari batas error maka nilai temperatur yang didapatkan akan semakin akurat, sehingga metode yang digunakan semakin efektif digunakan.

4.4.3 Simulasi Pemodelan

Simulasi program model sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula yang didasarkan pada temperatur terhadap tekanan air panas yang dikeluarkan dari pipa semprotnya. Selain itu, model matematika sebaran air panas *spray pond* ini dipengaruhi oleh beberapa faktor lain yaitu, temperatur awal (ϕ), kecepatan air (u dan v), massa jenis air (ρ), tekanan air pada pipa semprot (P), kekentalan air (μ), koefisien kekasaran Manning n , ketinggian pipa semprot (h), percepatan gravitasi (g), dan suatu konstanta (c).

Berdasarkan data yang diperoleh dari hasil penelitian di Pabrik Gula Djombang Baru di Kabupaten Jombang dan juga sumber internet adalah kecepatan pada sumbu $x = 0.6\text{m/s}$, kecepatan pada sumbu $y = 0.9\text{ m/s}$, tekanan = 10 Pascal, gaya gravitasi = $9,8\text{m/s}^2$, massa jenis air = 1.91kg/m^3 , kekentalan air = 6.5×10^{-4} , koefisien kekasaran Manning = 9.2, dan ketinggian pipa = 4 m. Nilai-nilai koefisien yang diperoleh kemudian disubstitusikan ke dalam program *Matlab* yang telah dibuat. Kemudian proses sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula disimulasikan menggunakan *software Fluent*.

4.5 Analisis dan Pembahasan

Keunggulan dari model matematika ini adalah susunan matriks yang dibuat adalah matrik $m \times n$, sehingga diskritisasi pada domain dalam penelitian ini adalah fluida tak terbatas sebanyak $m \times n$. Sehingga simulasi program lebih efisien karena diskritisasi yang diinginkan dapat ditentukan sesuai dengan kondisi

yang ada di tempat penelitian. Sedangkan perhitungan efektivitas metode volume hingga pada proses sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula menggunakan perhitungan *error* relatif pada iterasi Gauss Seidel dan perhitungan langsung. Perhitungan langsung kurang efisien untuk diskritisasi dalam jumlah banyak ($m > 100$).

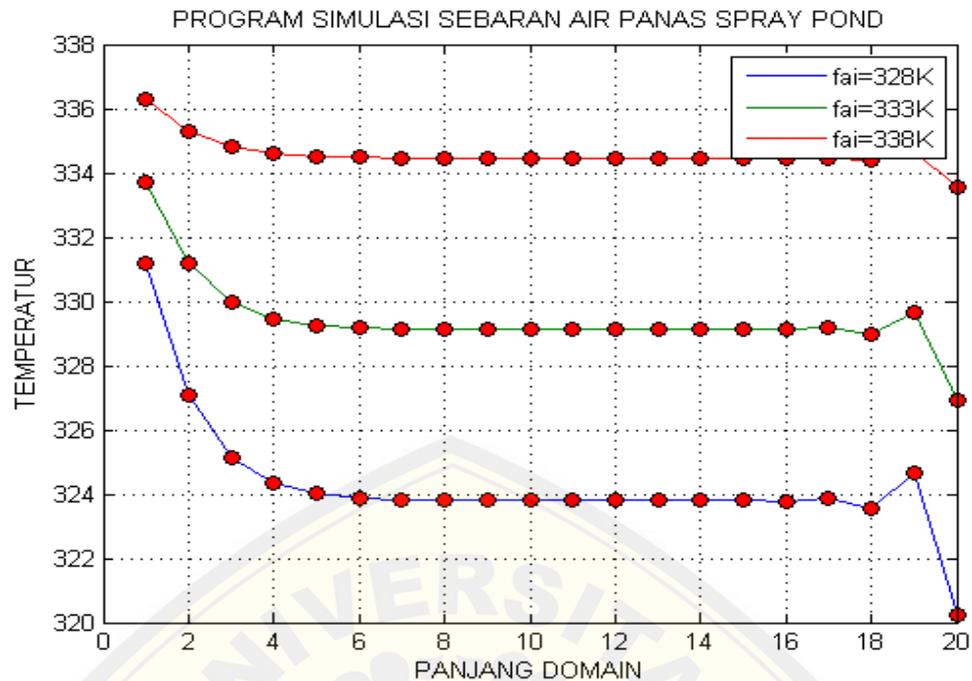
4.5.1 Komputasi *Matlab*

Setelah mendapatkan model matematika sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula menggunakan metode volume hingga yang berupa sistem persamaan diferensial maka dapat membentuk solusi numerik dalam program *Matlab*. Program dieksekusi dengan mensubstitusikan nilai koefisien yang diketahui pada proses sebaran air panas *spray pond*, maka program bisa dijalankan. Hasil yang diperoleh berupa data tabel temperatur dan grafik.

Dalam penelitian ini dilakukan dua kali tahap simulasi program *Matlab*. Simulasi pertama dilakukan untuk mengetahui pengaruh penurunan temperatur pada sebaran air panas *spray pond*. Simulasi kedua dilakukan untuk mengetahui pengaruh temperatur terhadap tekanan air yang dikeluarkan dari pipa *spray pond*. Setelah kedua simulasi tersebut, dilakukan perhitungan error antara iterasi terbaru dengan iterasi sebelumnya untuk mengetahui apakah nilai temperatur yang dihasilkan merupakan yang mendekati nilai sebenarnya.

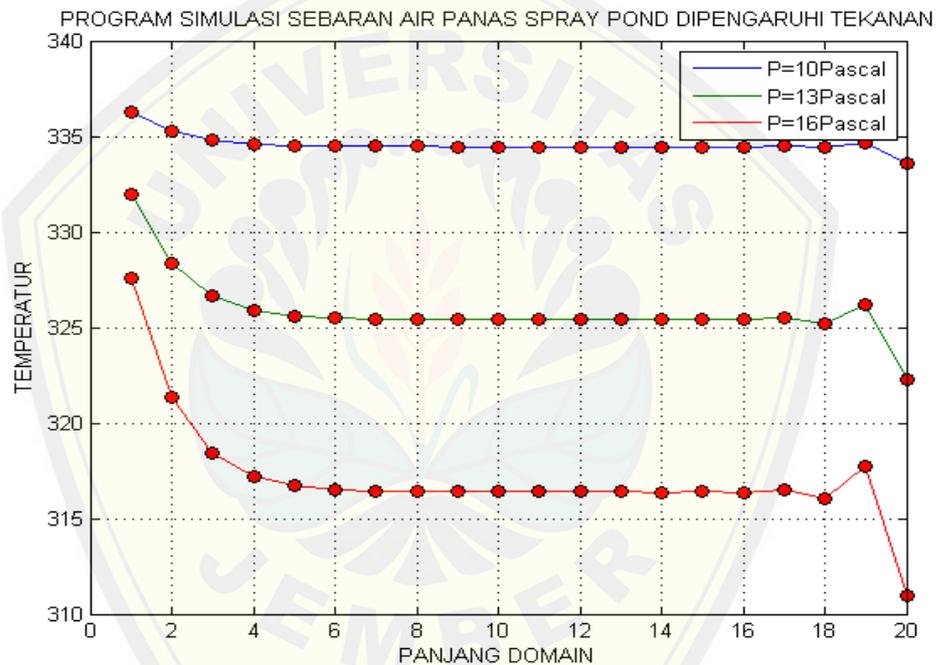
Simulasi pertama dilakukan dengan membandingkan nilai dari temperatur awal untuk mengetahui temperatur manakah yang mengalami penurunan lebih banyak sampai pada temperatur yang mendekati temperatur lingkungan. Grafik pada gambar 4.4 input yang dimasukkan yaitu diskritisasi sumbu- x sebesar 20 dan sumbu- y sebesar 1 dengan temperatur awal yang digunakan yaitu 328 Kelvin, 333 Kelvin, dan 338 Kelvin. Tekanan air yang digunakan yaitu 10 Pascal. Dengan mensubstitusikan ketiga temperatur awal air yang keluar dari *spray pond* kedalam program *Matlab* diperoleh hasil perhitungan seperti pada Lampiran 1. Grafik pada Gambar 4.4 merupakan representasi dari hasil simulasi menggunakan 3 temperatur awal yang berbeda.

Pada Gambar 4.4 terlihat bahwa grafik temperatur mengalami penurunan temperatur. Ketiga grafik yang berawal dari temperatur yang berbeda mengalami



Gambar 4.4 Grafik Sebaran Air Panas *Spray Pond* dipengaruhi Temperatur Awal penurunan temperatur. Semakin panjang domain, maka semakin turun temperatur air yang disemprotkan dari *spray pond*. Berdasarkan gambar 4.4 temperatur awal 338 K tidak bermula tepat pada titik 338 K, mengalami penurunan pada titik domain ke - 2 sampai 4, kemudian titik domain ke-4 temperatur konstan sampai domain ke- 18 dengan temperatur 334 K, akan tetapi pada titik domain ke-19 temperatur mengalami sedikit kenaikan, kemudian turun lagi di titik ke-20 dengan temperatur akhir 333 K. Temperatur awal yang kedua adalah sebesar 333 K mengalami penurunan temperatur pada titik domain ke - 2 sampai ke- 6, setelah itu temperatur konstan 329 K di titik domain ke - 6 sampai ke -18, kemudian mengalami kenaikan di titik domain ke - 19, akan tetapi mengalami penurunan drastis pada titik domain ke-20 sampai pada temperatur 327 K. Temperatur awal yang ketiga adalah 328 K mengalami penurunan temperatur menjadi 323,5 K dititik domain ke - 7, kemudian titik domain ke - 7 sampai ke- 18 temperatur konstan, titik domain ke -19 temperatur naik ke 325 K dan turun lagi menjadi 320 K di titik domain ke - 20.

Dari grafik tersebut dapat dilihat pula bahwa semakin rendah temperatur awal yang dikeluarkan oleh pipa semprot maka semakin cepat juga dalam proses penurunan temperaturnya. Secara lengkap hasil simulasi ketiga temperatur awal yang berbeda tersebut dapat dilihat pada Lampiran 2. Dengan semakin banyaknya temperatur yang berbeda digunakan untuk perbandingan dalam simulasi maka akan ditemukan temperatur awal yang paling tepat agar proses penurunan temperatur pada *spray pond* yang terbaik dan menghasilkan keluaran air panas sudah pada temperatur normal lingkungan. Dari ketiga temperatur awal yang sudah ditetapkan, temperatur pada 328 K yang mengalami penurunan temperatur paling banyak yaitu 8 K dibandingkan dengan temperatur awal 333 K atau 338 K.



Gambar 4.5 Grafik Sebaran Air Panas *Spray Pond* dipengaruhi Temperatur Awal terhadap Tekanan

Selain simulasi untuk mengetahui pengaruh temperatur awal dari air yang keluar dari pipa semprot *spray pond*, faktor lain yakni tekanan yang diberikan pada saat penyemprotan juga disimulasikan. Hasil dari simulasi ini dapat dilihat pada Gambar 4.5. Gambar 4.5 merupakan hasil simulasi dengan temperatur awal 328 K, 333 K, dan 338 K dan juga tekanan air yang berbeda 10 Pascal, 13

Pascal, dan 16 Pascal. Dari grafik yang dihasilkan, terlihat jelas bahwa terjadi penurunan temperatur. Semakin rendah tekanan air yang diberikan maka penurunan temperatur juga semakin rendah. Oleh karena itu dibutuhkan tekanan air yang tinggi agar proses penurunan temperatur air panas yang dikeluarkan dari *spray pond* semakin banyak. Pada grafik gambar 4.5, tekanan 16 pascal dengan temperatur awal 328 K mengalami penurunan temperatur terbanyak yaitu 17 K, tekanan 13 pascal dengan temperatur awal 333 K mengalami penurunan temperatur sebanyak 11 K, sedangkan tekanan 10 pascal mengalami penurunan temperatur paling sedikit dengan temperatur awal 328 K menjadi 311 K hanya terjadi penurunan 4 K. Hasil simulasi secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran 3. Dari beberapa gambar grafik simulasi pada sebaran air panas dapat diperoleh bahwa tekanan yang diberikan sangat mempengaruhi penurunan temperatur air.

Tahap berikutnya setelah menghitung simulasi pertama dan kedua adalah menghitung selisih antara iterasi ke $r+1$ dan r atau dapat dikatakan sebagai nilai *error*. Perhitungan *error* antara iterasi $r+1$ dan r dilakukan untuk mengetahui efektivitas dari metode volume hingga dalam menganalisis faktor temperatur sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula. Metode iteratif yang digunakan dalam perhitungan numerik pada metode volume hingga yaitu metode Gauss Seidel. Temperatur awal yang digunakan adalah 328 K, 333 K, dan 338 K dengan tekanan air yang sama yaitu 10 Pascal. Hasil iterasi yang disajikan pada tabel 4.5.1 merupakan hasil iterasi dari temperatur awal 328 K karena mengalami penurunan paling banyak yaitu 8 K menjadi temperatur akhir 320 K yang mendekati temperatur lingkungan.

Hasil iterasi yang disajikan pada tabel 4.5.1 merupakan nilai-nilai temperatur yang berawal dari 328 K dan kemudian mengalami penurunan hingga temperatur 320 K. Terdapat 3 kolom pada tabel tersebut, masing-masing kolom secara berturut-turut mewakili hasil dari iterasi ke-1, ke-2, dan ke-3. Nilai pada iterasi ke-1 merupakan suatu tebakan awal pada metode iterasi Gauss Seidel. Setelah dilakukan proses komputasi menggunakan program *Matlab* diperoleh iterasi ke-2 dan ke-3. Iterasi yang diperoleh hanya sampai pada iterasi ke-3, dikarenakan nilai selisih antara iterasi ke-3 dan ke-2 adalah nol, sehingga kurang dari toler-

ansi. Pada metode Gauss Seidel yang digunakan, saat selisih iterasi ke $r+1$ dan r kurang dari toleransi, maka iterasi akan berhenti atau dapat dikatakan *konvergen*.

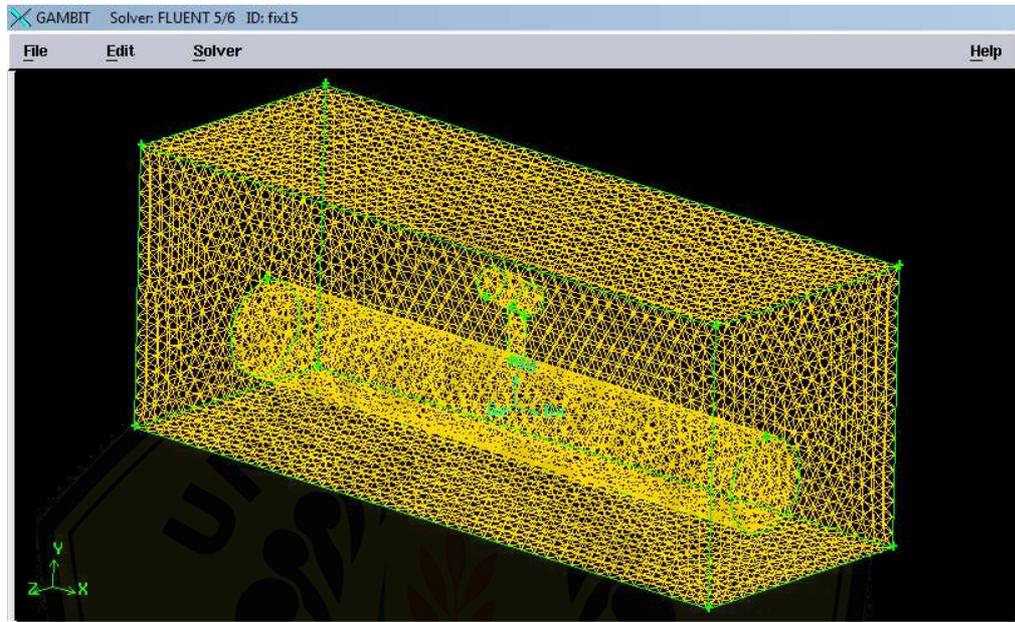
Tabel 4.5.1 Hasil Perhitungan temperatur awal pada sebaran air panas *Spray Pond* dengan Metode Gauss-Seidell

Titik Ke-	r_1	r_2	r_3
1	300.00000000	331.16780000	331.16780000
2	300.00000000	327.05370000	327.05370000
3	300.00000000	325.14390000	325.14390000
4	300.00000000	324.33560000	324.33560000
5	300.00000000	324.00760000	324.00760000
6	300.00000000	323.87720000	323.87720000
7	300.00000000	323.82590000	323.82590000
8	300.00000000	323.80580000	323.80580000
9	300.00000000	323.79800000	323.79800000
10	300.00000000	323.79500000	323.79500000
11	300.00000000	323.79380000	323.79380000
12	300.00000000	323.79330000	323.79330000
13	300.00000000	323.79340000	323.79340000
14	300.00000000	323.79230000	323.79230000
15	300.00000000	323.79650000	323.79650000
16	300.00000000	323.77940000	323.77940000
17	300.00000000	323.84780000	323.84780000
18	300.00000000	323.57320000	323.57320000
19	300.00000000	324.67530000	324.67530000
20	300.00000000	320.25270000	320.25270000

4.5.2 Simulasi *Fluent*

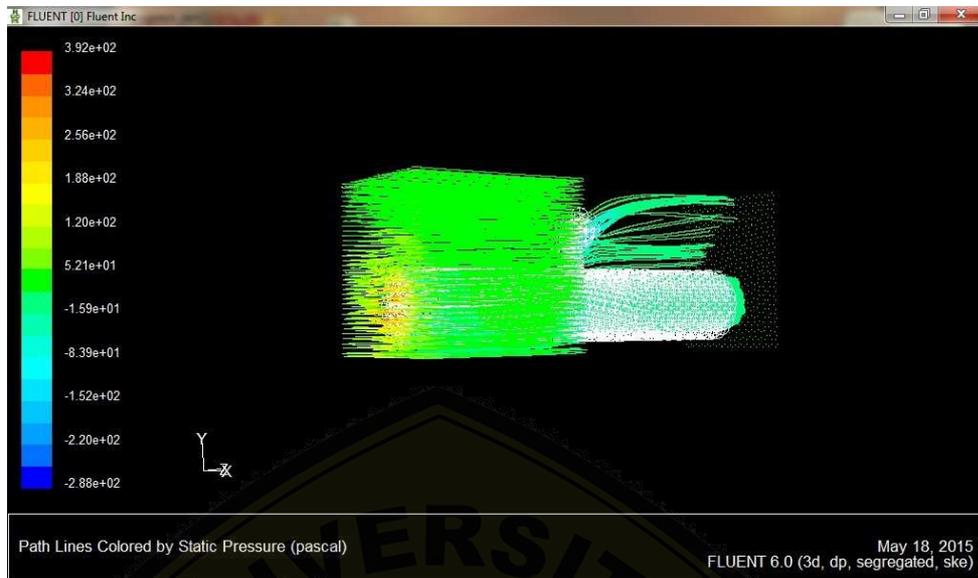
Pada hasil komputasi dengan *Fluent* ini akan disajikan gambar hasil simulasi temperatur awal yang diberikan terhadap tekanan air yang keluar dari pipa *spray pond*. Gambar simulasi ini didapat dengan pembentukan bentuk dan pendefi-

nisian serta *mesh* dengan *Gambit*, kemudian baru disimulasikan atau dijalankan menggunakan *software Fluent*. Bentuk geometri yang akan digunakan pada simulasi sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula seperti gambar 4.6 untuk simulasi gambar yang 3 dimensi.

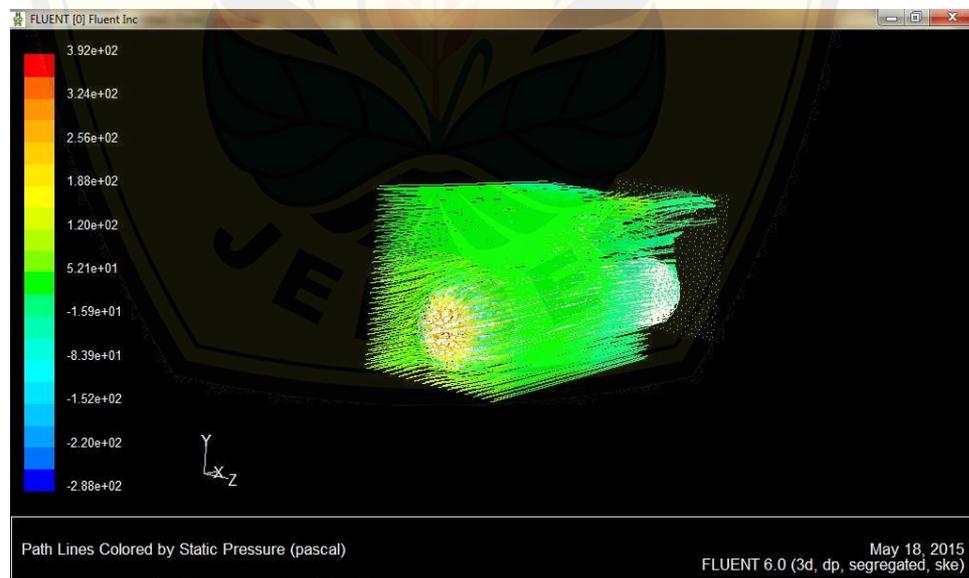


Gambar 4.6 Bentuk geometri *spray pond*

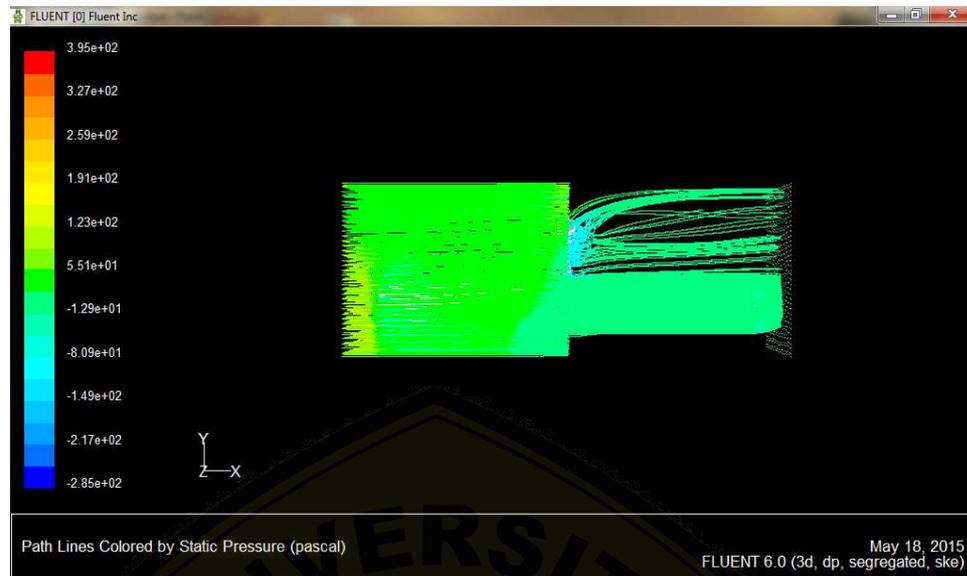
Untuk simulasi pertama model geometri pipa *spray pond* menggunakan simulasi *Fluent* 3 dimensi, visualisasi kecepatan air yang keluar dari pipa sebesar 0.9 m/s, 0.9 m/s, 0.9 m/s dengan tekanan yang berbeda berturut-turut 10 Pascal, 13 Pascal, dan 16 Pascal dapat dilihat pada gambar 4.7 hingga gambar 4.12. Berdasarkan gambar 4.7 diketahui bahwa arah datangnya angin atau udara berasal dari arah kiri pipa *spray pond* menuju ke arah kanan. Pada gambar 4.7 tekanan yang diberikan adalah 10 Pascal dan simulasi yang didapatkan air keluar mengarah sejalan dengan arah angin yaitu ke kanan pipa. Pewarnaan *path line* dari tekanan statis, tekanan dalam pipa cukup rendah yaitu ditandai dengan gambar berwarna merah, tekanan pada sekitar pipa dekat dinding pipa tekanan cukup tinggi, selain itu juga daerah yang di sekitar pipa bagian penyemprot juga tinggi tekanannya ditandai dengan warna hijau yaitu dengan tekanan statis $5.21e + 01$.



Gambar 4.7 *Path line* Sebaran Air Panas *Spray Pond* dari sisi depan dengan tekanan 10 Pascal



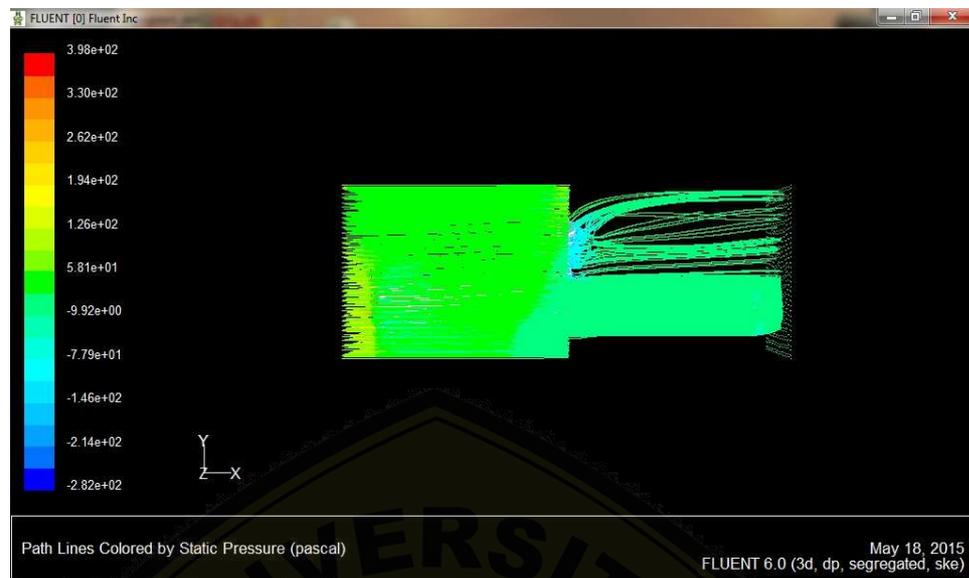
Gambar 4.8 *Path line* Sebaran Air Panas *Spray Pond* dari sisi samping dengan tekanan 10 Pascal



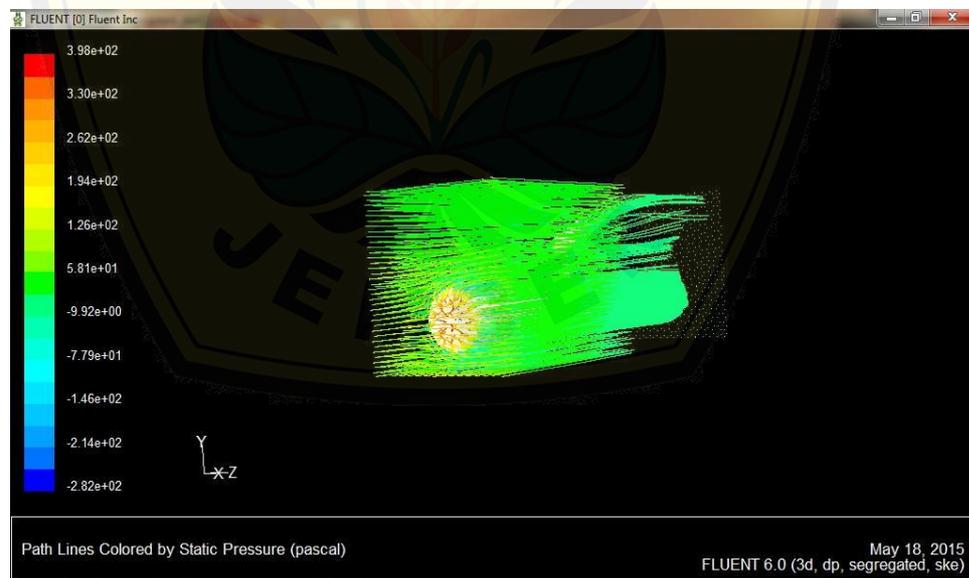
Gambar 4.9 *Path line* Sebaran Air Panas *Spray Pond* dari sisi depan dengan tekanan 13 Pascal



Gambar 4.10 *Path line* Sebaran Air Panas *Spray Pond* dari sisi samping dengan tekanan 13 Pascal

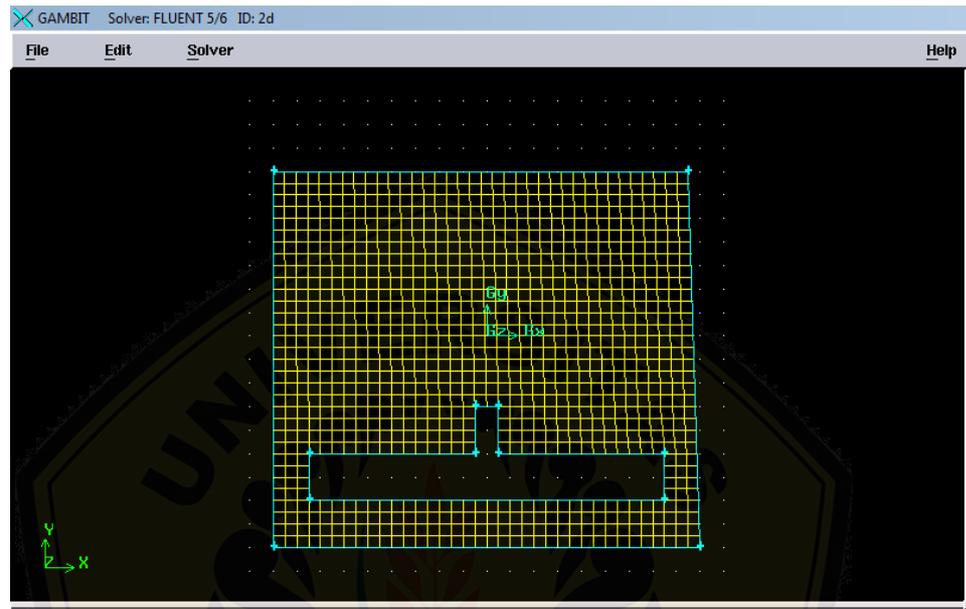


Gambar 4.11 *Path line* Sebaran Air Panas *Spray Pond* dari sisi depan dengan tekanan 16 Pascal



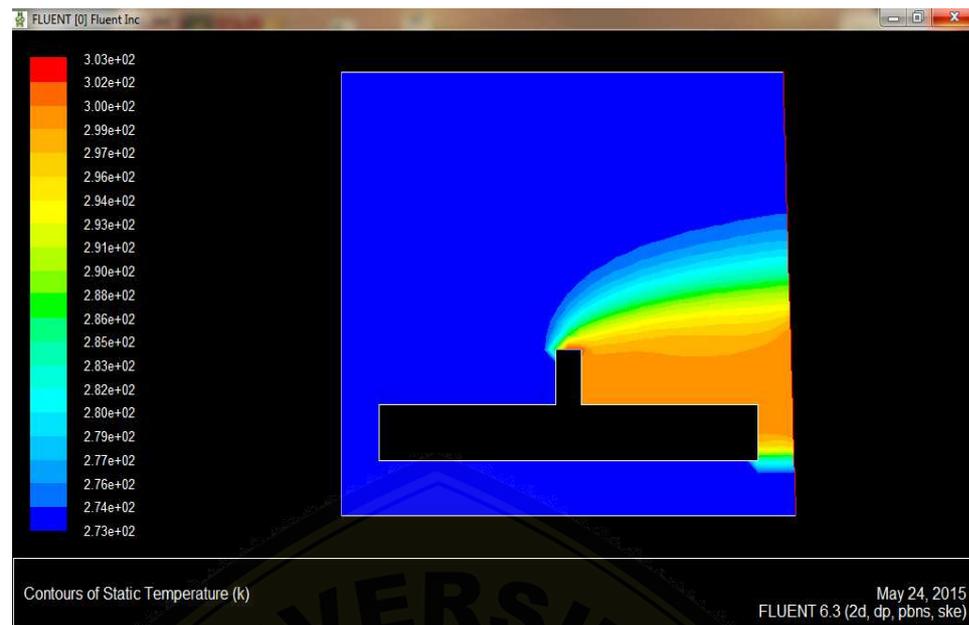
Gambar 4.12 *Path line* Sebaran Air Panas *Spray Pond* dari sisi samping dengan tekanan 16 Pascal

Simulasi menggunakan 3 dimensi tidak terlihat maksimal perbandingan penyebarannya, oleh karena itu ditampilkan simulasi sebaran air panas *sprary pond* menggunakan 2 dimensi. Bentuk geometri yang digunakan pada simulasi sebaran air panas *sprary pond* di pabrik gula seperti Gambar 4.13 untuk simulasi gambar yang 2 dimensi.



Gambar 4.13 Bentuk Geometri *Sprary Pond* menggunakan 2 Dimensi

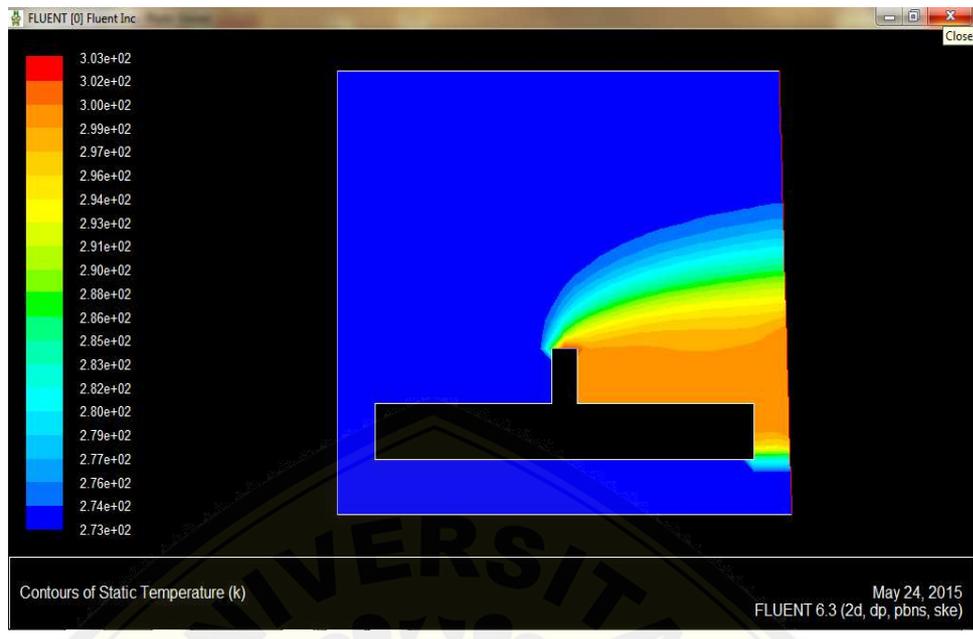
Berdasarkan Gambar 4.14 dapat dilihat bahwa terjadi penyebaran air yang keluar dari pipa *sprary pond* dengan tekanan yang diberikan adalah 10 pascal. Hasil simulasi dapat dilihat adalah temperatur awal air keluar dari pipa adalah 303 Kelvin, kemudian setelah disemprotkan temperatur dari air berkurang menjadi 299 Kelvin yang terletak di sekitar pipa, sedangkan air yang semprotannya lebih ke atas pipa penurunan temperaturnya lebih banyak yaitu sampai dengan temperatur 285 Kelvin mendekati temperatur udara sekitar. Proses pendinginan air panas yang keluar dari pipa ini sangat dipengaruhi oleh temperatur yang ada di luar pipa, oleh karena itu temperatur yang ada di luar pipa harus lebih dingin dibanding dengan temperatur air yang keluar agar pendinginan air lebih optimal. Simulasi pada Gambar 4.14 menunjukkan bahwa tekanan pada saat menyemprotkan air sangat berpengaruh pada sebaran penyemprotan air, karena semakin ke



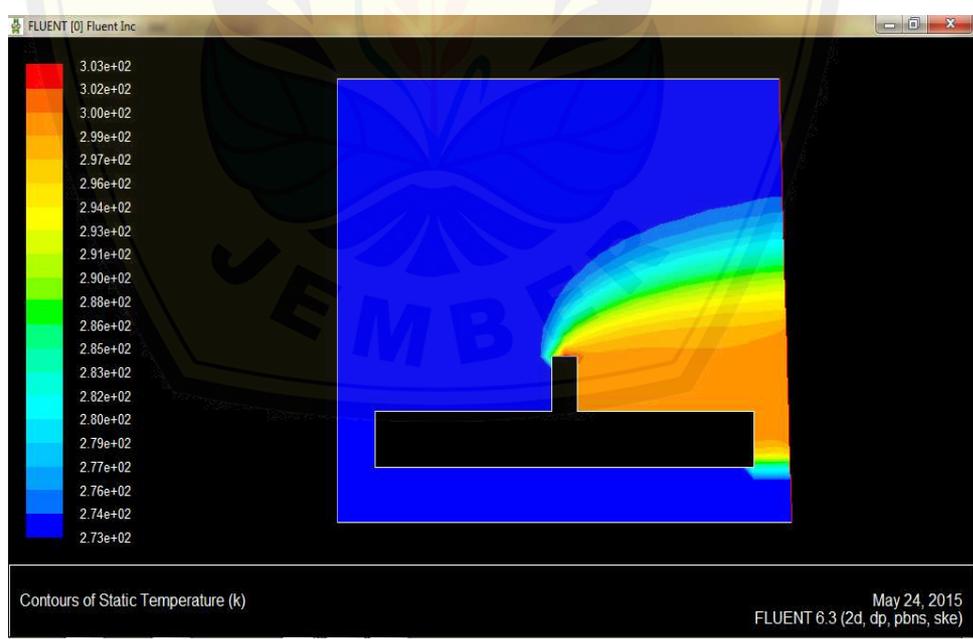
Gambar 4.14 Kontur Sebaran Air Panas *Spray Pond* dengan tekanan 10 Pascal atas sebaran air panas maka temperaturnya semakin rendah.

Simulasi kedua ditunjukkan pada Gambar 4.15 adalah penyebaran air yang keluar dari pipa *spray pond* dengan tekanan yang diberikan adalah 20 pascal, ternyata sebaran air panasnya semakin luas, simulasi sebarannya lebih menjulang ke atas pipa dibandingkan dengan tekanan awal yang diberikan 10 pascal. Temperatur awal yang diberikan adalah sama dengan simulasi pertama, yaitu 303 Kelvin. Proses sebaran air semprotan dari pipa lebih menjulang ke atas dan penurunan temperaturnya lebih meluas dengan suhu 299 Kelvin, temperatur air semprotan semakin ke atas semakin berkurang menuju temperatur sekitar lingkungan yaitu 282 Kelvin.

Simulasi ketiga pada proses sebaran air panas *spray pond* yang dipengaruhi oleh tekanan awal ditunjukkan oleh Gambar 4.16 dengan tekanan awal yang diberikan adalah 30 pascal. Perbedaan dengan simulasi sebelumnya tidak terlalu signifikan, akan tetapi proses sebaran lebih meluas lagi dibanding dengan tekanan awal 10 pascal atau 20 pascal. Temperatur awal yang diberikan adalah sama dengan simulasi pertama dan kedua, yaitu 303 Kelvin. Simulasi dengan tekanan awal 30 pascal lebih meluas di atas pipa penyebarannya dengan temperatur yang keluar



Gambar 4.15 Kontur Sebaran Air Panas *Spray Pond* dengan tekanan 20 Pascal



Gambar 4.16 Kontur Sebaran Air Panas *Spray Pond* dengan tekanan 30 Pascal

awal 303 Kelvin, kemudian teemperatur turun menjadi 299 Kelvin, semakin ke atas temperatur berkurang lagi menjadi 294 Kelvin, dan penyebaran paling atas temperatur sudah mendekati dengan temperatur sekitar lingkungan yaitu 280 Kelvin.

Dari Gambar 4.14 hingga Gambar 4.16 merupakan pengaruh tekanan terhadap temperatur, perbedaan simulasi tidak terlalu signifikan pada perubahan sebaran air panas *spray pond* dengan temperatur awal yang diberikan sama, akan tetapi semakin tinggi tekanan yang diberikan di awal keluar air maka semakin meluas juga proses sebarannya. Jadi air lebih menyebar ke lingkungan dan air semakin cepat mengalami pendinginan karena terkena temperatur lingkungan yang lebih rendah dibanding dengan temperatur air *spray pond* yang dikeluarkan.

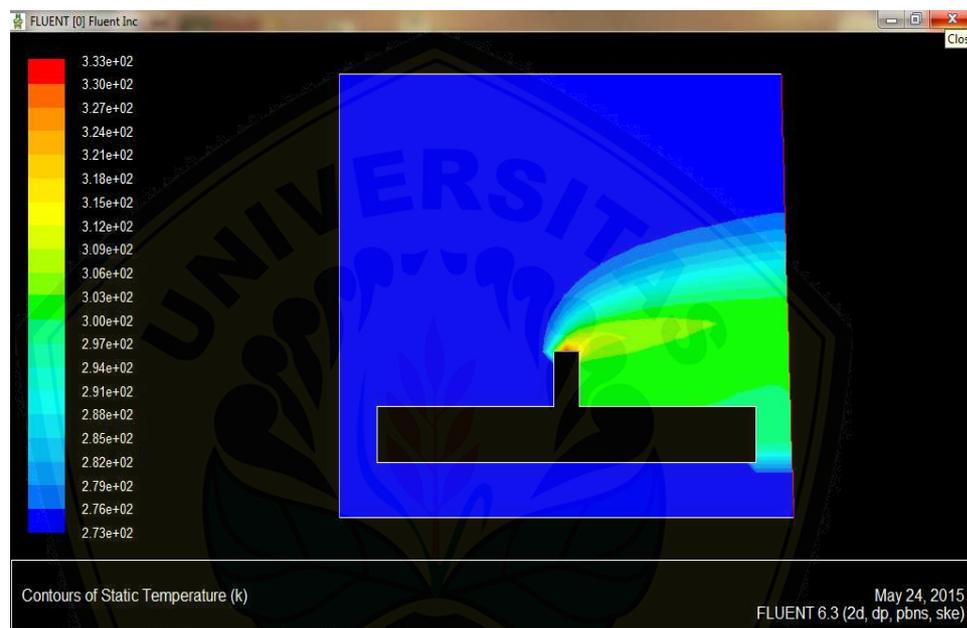
Selain pengaruh tekanan terhadap temperatur, simulasi berikutnya adalah yang dipengaruhi oleh temperatur awal air panas yang keluar dari pipa *spray pond*. Gambar 4.17 sampai Gambar 4.19 merupakan simulasi sebaran air panas *spray pond* dengan temperatur awal *in* air adalah 313 Kelvin, 333 Kelvin, dan 353 Kelvin.



Gambar 4.17 Kontur Sebaran Air Panas *Spray Pond* dengan temperatur *in* air 313 K

Berdasarkan simulasi pada gambar 4.17 adalah sebaran air panas *spray pond*

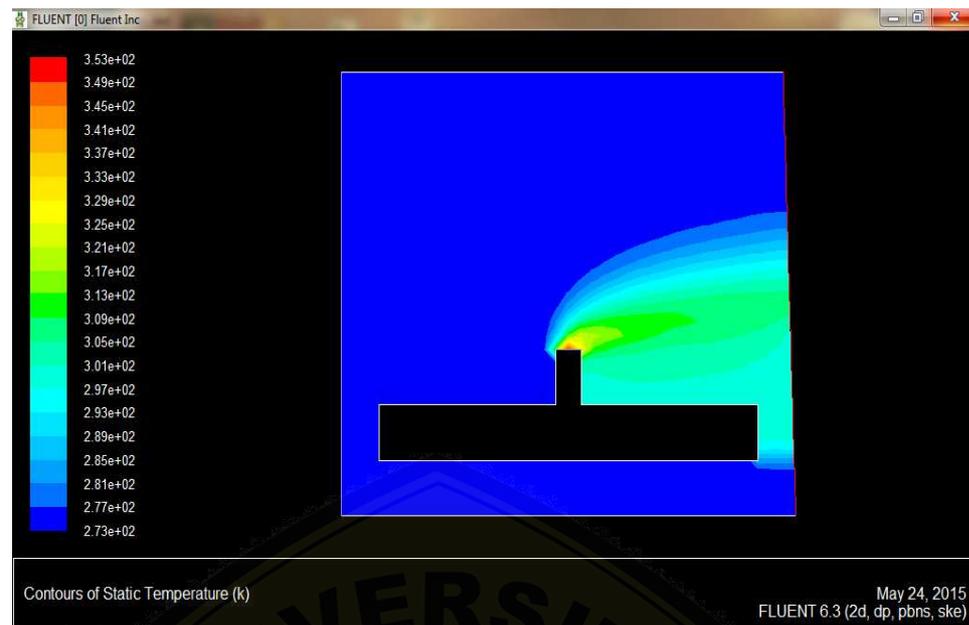
yang dipengaruhi temperatur awal 313 Kelvin dengan tekanan 10 Pascal. Air keluar dari pipa dengan temperatur 313 Kelvin kemudian menyebar ke arah samping kanan pipa mengikuti arah angin dengan penurunan temperatur yang ditunjukkan dengan warna kuning muda dengan temperatur 301 Kelvin, lebih ke atas penyebarannya warna menjadi hijau dengan penurunan temperatur menjadi lebih dingin 293 Kelvin, dan penyebaran paling maksimal mengalami penurunan temperatur hingga 277 Kelvin yang hampir sama dengan temperatur sekitar lingkungan.



Gambar 4.18 Kontur Sebaran Air Panas *Spray Pond* dengan temperatur *in* air 333 K

Selanjutnya adalah simulasi sebaran air panas *spray pond* yang dipengaruhi temperatur awal 333 Kelvin yang ditunjukkan pada Gambar 4.18. Temperatur air yang keluar dari pipa adalah 333 Kelvin kemudian menyemprot bergerak ke arah samping kanan dengan penurunan temperatur menjadi 309 Kelvin dan semakin jauh dengan pipa *spray pond* temperatur menjadi 303 Kelvin. Penyebaran air panas semakin ke atas pipa juga mengalami penurunan temperatur menjadi 282 Kelvin yang mendekati temperatur sekitar lingkungan.

Simulasi yang terakhir pada Gambar 4.19 merupakan simulasi sebaran air panas *spray pond* yang dipengaruhi temperatur awal sebesar 353 Kelvin. Proses



Gambar 4.19 Kontur Sebaran Air Panas *Spray Pond* dengan temperatur *in* air 353 K sebaran air panas sama dengan simulasi lainnya, akan tetapi pada keluaran air dengan temperatur 353 Kelvin ini mengalami penurunan temperatur lebih cepat, dikarenakan temperatur udara lingkungan jauh lebih dingin dibandingkan air yang disemprotkan. Mula-mula air menyemprot dengan temperatur 353 Kelvin, kemudian tidak jauh menyemprot air sudah mengalami penurunan temperatur menjadi 313 Kelvin. Meskipun demikian temperatur yang dihasilkan setelah penyemprotan masih belum mendekati temperatur lingkungan. Dengan begitu, temperatur awal yang dikeluarkan oleh pipa *spray pond* sangatlah mempengaruhi proses pendinginan air. Semakin tinggi temperatur yang dikeluarkan maka air yang didinginkan tidak mendekati temperatur lingkungan sekitar.

4.5.3 Analisis Efektivitas Metode Volume Hingga Pada Faktor Temperatur Sebaran Air Panas *Spray Pond* Di Pabrik Gula

Untuk mengetahui efektivitas metode volume hingga dalam menyelesaikan model sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula dapat dilihat dari besar *error* (kesalahan), selisih nilai iterasi terakhir dengan iterasi sebelumnya atau panjangnya iterasi dengan nilai toleransi yang diberikan. Apabila nilai selisih terse-

but kurang dari toleransi maka nilai pada iterasi terakhir merupakan nilai yang mendekati nilai sebenarnya. Nilai toleransi yang digunakan pada penelitian ini adalah 10×10^{-10} . Perhitungan numerik secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran F. Sehingga yang dibutuhkan untuk mendapatkan nilai menjadi konvergen adalah 66 iterasi, dengan besar toleransi 10×10^{-10} . Dari kedua hal tersebut dapat ditarik kesimpulan bahwa penggunaan metode volume hingga sangat efektif dalam menyelesaikan model sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula.



BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dari hasil penelitian yang dilakukan, maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula, merupakan persamaan yang menyatakan persamaan momentum dan persamaan energi yang bergantung pada temperatur dan tekanan air semprotan pipa, diselesaikan secara numerik dengan metode volume hingga dengan teknik diskritisasi *QUICK*.

$$\begin{aligned}
 & \phi_w(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) - \phi_e(\rho hu\Delta y\Delta t - \rho u\Delta y\Delta t) + \\
 & \phi_s(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) - \phi_n(\rho hv\Delta x\Delta t - \rho v\Delta x\Delta t) = \rho \left[-kT_0 \right. \\
 & \left. \frac{\Delta y\Delta t}{\Delta x} - 2kT_0\Delta t - kT_0 \frac{\Delta x\Delta t}{\Delta y} + \Delta y\Delta t(\rho u' + \frac{1}{2}\rho u'v' - \mu v' + \rho u^2v + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2}\rho uv^2 + p - \rho g) + \Delta x\Delta t(\rho v' + \frac{1}{2}\rho u'v' + \mu u' + \frac{1}{2}\rho u^2v + \rho uv^2 + p - \right. \\
 & \left. \rho g) \right] + \frac{h}{\rho}2\mu u\Delta y\Delta t\left(\frac{u\Delta y\Delta t}{\Delta x}\phi_0 + v\phi_0\right) + \frac{h}{\rho}2\mu\Delta x\Delta t\left(u\phi_0 + \frac{v\Delta x\Delta t}{\Delta y}\phi_0 + \right. \\
 & \left. \frac{gn^2}{(h^{\frac{1}{6}})^2}(u+v) + (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} \right. \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

2. Dari model matematika sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula menggunakan metode volume hingga dengan menggunakan *software Matlab* dan *Fluent* maka didapatkan hasil analisis temperatur awal sebaran air panas *spray pond* adalah semakin panjang domain, maka air yang disemprotkan semakin mengalami penurunan temperatur menuju ke temperatur normal lingkungan.

3. Hasil simulasi menunjukkan bahwa, hasil analisis temperatur awal sebaran air panas terhadap tekanan air di *spray pond* adalah semakin rendah tekanan air yang diberikan maka penurunan temperatur juga semakin rendah. Oleh karena itu dibutuhkan tekanan air yang tinggi agar proses penurunan temperatur air panas yang dikeluarkan dari *spray pond* semakin banyak dan penyebarannya air semakin luas.
4. Penggunaan metode volume hingga sangat efektif dalam menyelesaikan model matematika tentang sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula, karena nilai penurunan temperatur yang dihasilkan dari metode iterasi Gauss Seidell yang didapatkan kurang dari nilai toleransi yang ditentukan yaitu 0.0000000001, maka iterasi berhenti dan dapat dikatakan konvergen. Sehingga nilai tersebut mendekati nilai sebenarnya.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian tentang sebaran air panas *spray pond* di pabrik gula:

1. asumsi-asumsi yang digunakan pada penelitian ini dapat dihilangkan dengan melakukan penelitian lebih lanjut untuk melakukan penelitian yang baru;
2. pemodelan sebaran air panas *spray pond* yang telah dibentuk dapat dikembangkan lagi dengan metode lain;
3. pada simulasi sebaran air panas *spray pond* menggunakan metode volume hingga ini sebaiknya menggunakan laptop yang memiliki kapasitas *memory* yang cukup banyak agar saat *run* program tidak menunggu lama dan lebih efisien waktu pengerjaan.

DAFTAR PUSTAKA

- Apsley, D.D. 2007. *Quantitative Properties of F.D. Schemes, Lecture handout CFD*. Manchester: University of Manchester.
- Arhami, M. dan Desiani, A. 2004. *Pemrograman Matlab*. Yogyakarta: Andi.
- Arikunto, S. 2006. *Prosedur Penelitian*. Jakarta: PT. Asdi Mahasatya.
- Cahyana, Chevy. 2011. *Model Sebaran Panas Air Kanal Pendingin Instalasi Pembangkit Listrik ke Badan Air Laut*. Prosiding. Tangerang Selatan: Pusat Teknologi Limbah Radioaktif-BATAN
- Fardiaz, S. 1992. *Polusi Air dan Udara*. Yogyakarta: Penerbit Kanisius
- Fatahillah, Arif. dkk. 2014. *The Analysis of Air Circulation on Coffee Plantation Based on the Level of Plants Roughness and Diamond Ladder Graph Cropping Pattern using Finite Volume Method*. Scholargoogle. Jember: University of Jember.
- Jack. 2006. *Metode Numerik*. Lampung: UNILA.
- Margono. 2010. *Metodologi Penelitian Pendidikan*. Jakarta: Rineka Cipta
- Miharjda, D.K., et al. 1999. *Modelling of the Heated Water Spreading in Muara Karang Coastal Waters, Jakarta Bay*. Proceeding ITB, Vol.31, No.1.
- Nazir, M. 2003. *Metode Penelitian*. Cetakan V. Jakarta: Ghalia Indonesia.
- Nikolsky, G.S. 1963. *The Ecology of Fishes*. Departement of Ichtiology. Moscow: Biology Soil Faculty.
- Novarina, dkk. 2012. *Kajian Parameter Suhu dalam Baku Mutu Air Limbah Industri Gula Jenis Air Limbah Kondensor di Jawa Tengah*. Prosiding. Semarang: Universitas Diponegoro.
- Saptaningtyas, F. Y. 2010. *"Penerapan Estimasi Kalman Filter Untuk Mengetahui Pencemaran Air Sungai Di Kali Gajah Wong"*. Tidak Diterbitkan. Laporan Penelitian Dosen Junior. Yogyakarta: FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta.
- Tuakia, F. 2008. *Dasar-dasar CFD Menggunakan Fluent*. Bandung: Informatika. Universitas Jember. 2010. *Pedoman Penulisan Karya Ilmiah*. Jember: Jember University Press.
- Versteg, H. K. & Malalasekera, W. 1995. *An Introduction to Computational Fluid*

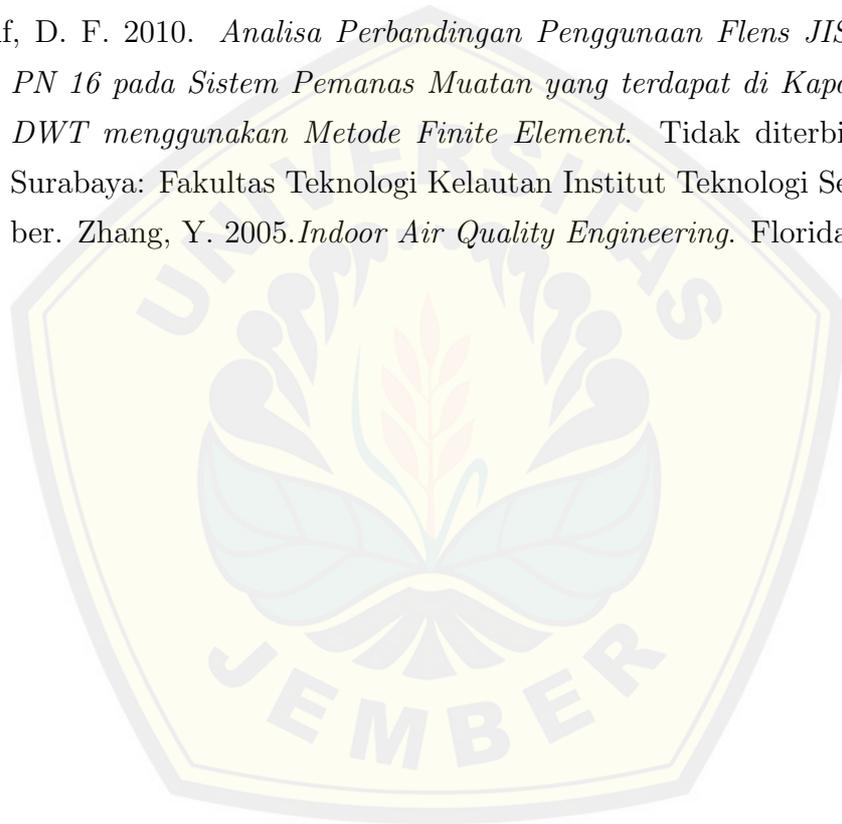
Dynamics : The Finite Volume Methode. Loughborough: Longman Scientific & Technical.

White, F. M. 1986. *Mekanika Fluida*. (Edisi Kedua Jilid 1). Alih Bahasa oleh Mahana Hariandja. 1994. Jakarta: Erlangga.

Wijaya, G.S. 2009. Struktur Mikroanatomis Ren dan Koefisien Nilai Nutrisi (NUC) Bioindikator Ikan Tawes (*Puntius javanicus*, Blkr yang Hidup pada Kolam Terpadu. PT APB BATAN. Jurnal Batan.

Yin, R. K. 2003. *Case Study Research: Design and Methods (3rd ed.)*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Yusuf, D. F. 2010. *Analisa Perbandingan Penggunaan Flens JIS 10 K dengan PN 16 pada Sistem Pemanas Muatan yang terdapat di Kapal Tanker 6300 DWT menggunakan Metode Finite Element*. Tidak diterbitkan. Skripsi. Surabaya: Fakultas Teknologi Kelautan Institut Teknologi Sepuluh November. Zhang, Y. 2005. *Indoor Air Quality Engineering*. Florida: CRC

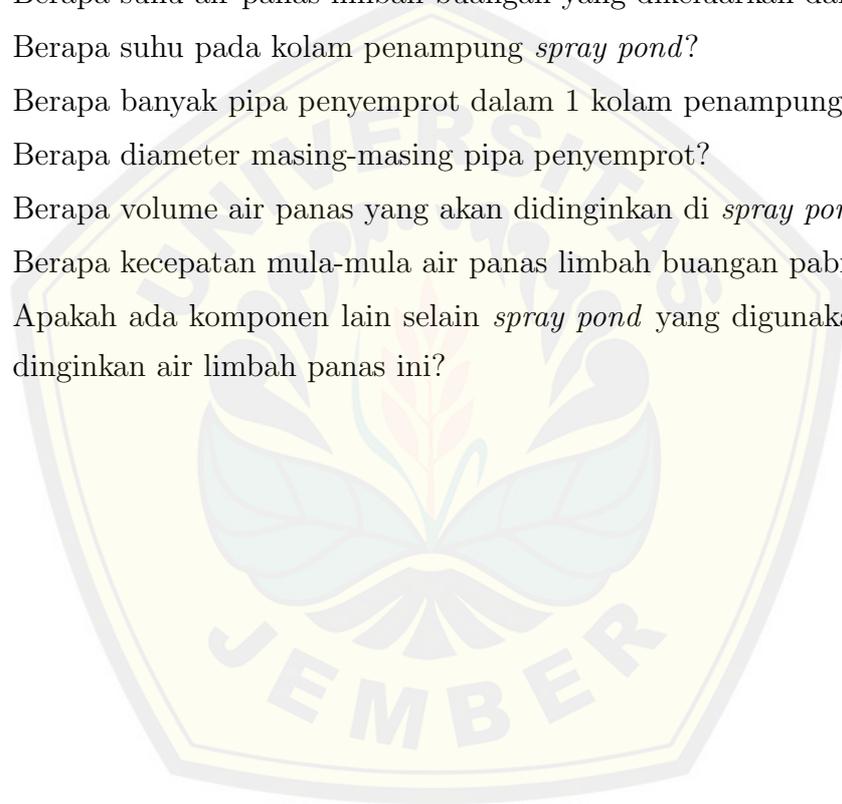


LAMPIRAN A. PEDOMAN WAWANCARA

NAMA :

NPK :

1. Apa saja komponen-komponen yang ada di *spray pond*?
2. Bagaimana cara kerja kolam *spray pond* ini?
3. Berapa luasan kolam *spray pond* dan tinggi pipa yang ada di *spray pond*?
4. Berapa suhu air panas limbah buangan yang dikeluarkan dari pabrik?
5. Berapa suhu pada kolam penampung *spray pond*?
6. Berapa banyak pipa penyemprot dalam 1 kolam penampung?
7. Berapa diameter masing-masing pipa penyemprot?
8. Berapa volume air panas yang akan didinginkan di *spray pond*?
9. Berapa kecepatan mula-mula air panas limbah buangan pabrik?
10. Apakah ada komponen lain selain *spray pond* yang digunakan untuk mendinginkan air limbah panas ini?



LAMPIRAN B. INSTRUMEN PENELITIAN METODE DOKUMENTASI

Tabel 5.1: Data tentang *Spray Pond*

Spesifikasi <i>Spray Pond</i>	Hasil Penelitian
Komponen-komponen yang ada di <i>spray pond</i>	
Jumlah pipa penyemprot pada <i>Spray Pond</i>	
Diameter pipa penyemprot	
Luasan kolam penampung air di <i>Spray Pond</i>	

Tabel 5.2: Data Suhu

Data suhu yg di butuhkan	Hasil Penelitian
Suhu air yang masuk ke <i>spray pond</i>	
Suhu air di kolam penampung <i>spray pond</i>	
Suhu air yang keluar dari <i>spray pond</i>	

Tabel 5.3: Data Kecepatan

Data kecepatan yg di butuhkan	Hasil Penelitian
Kecepatan air yang masuk ke <i>spray pond</i>	
Kecepatan air yang disemprotkan dari pipa	
Kecepatan air yang keluar dari <i>spray pond</i>	

LAMPIRAN C. SURAT IZIN PENELITIAN



KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS JEMBER
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
Jalan Kalimantan Nomor 37 Kampus Bumi Tegalboto Jember 68121
Telepon: 0331- 334988, 330738 Faks: 0331-334988
Laman: www.fkip.unej.ac.id

Nomor 8289 / UN25.1.5/LT/2014
Lampiran :
Perihal : Permohonan Izin Penelitian

23 DEC 2014

Yth. Pimpinan PTPN X Pabrik Gula Djombang Baru
Jombang

Dalam rangka memperoleh data-data yang diperlukan untuk penyusunan skripsi, mahasiswa FKIP Universitas Jember di bawah ini.

Nama : Novian Nur Fatihah
NIM : 110210101071
Jurusan : Pendidikan MIPA
Program Studi : Pendidikan Matematika

Bermaksud mengadakan penelitian tentang "*Pemodelan Sebaran Air Panas Spray Pond di Pabrik Gula menggunakan Metode Volume Hingga*" di PTPN X yang Saudara pimpin.

Sehubungan dengan hal tersebut mohon Saudara berkenan memberikan izin dan sekaligus memberikan bantuan informasi yang diperlukan.

Demikian atas perkenan dan kerjasama yang baik kami sampaikan terima kasih.



a.n. Dekan
Pembantu Dekan I,

Dr. Sukatman, M.Pd.
NIP. 19640123 199512 1 001

LAMPIRAN D. SURAT HASIL PENELITIAN DARI PG. DJOMBANG BARU



PT Perkebunan Nusantara X
 Jalan Jembatan Merah No. 3-11 Surabaya 60175
 Telepon : (031) 3523143 (Hunting) Fax : (031) 3523167
 Homepage : <http://www.ptpn10.co.id>
 E-mail : contact@ptpn10.co.id

Nomor : IC-RUPA-2/15.82
 Lampiran : -
 Perihal : IJIN PENELITIAN

24 Februari 2015

Kepada :

UNIVERSITAS JEMBER

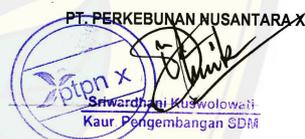
Jl. Kalimantan No.37, Kampus Bumi Tegalboto
 Jember 68121

Menunjuk surat Saudara No. 8289/UN25.1.5/LT/2014 tanggal 23 Desember 2014 perihal tersebut di atas, dengan ini diberitahukan bahwa pada dasarnya kami dapat menyetujui/memberikan ijin kepada Mahasiswa/i Lembaga Saudara untuk melaksanakan Penelitian dan pengumpulan data guna penyusunan Skripsi di unit kerja PT. Perkebunan Nusantara X.

- Nama : **Novian Nur Fatimah**
- Sekolah : Universitas Jember
- Fakultas/Jurusan : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan/Matematika
- Tingkat/Semester : -
- Waktu : **25 Februari s/d 4 Maret 2015**
- Judul : " **Pemodelan Sebaran Air Panas Spray Pond di Pabrik Gula Menggunakan Metode Volume Hingga** "
- Tempat : PG. Djombang Baru

Setelah selesai melaksanakan Penelitian, diminta untuk menyerahkan laporannya kepada Kantor Direksi PT. Perkebunan Nusantara X, Jl. Jembatan Merah No. 3 - 11 Surabaya.

Demikian hendaknya maklum.



Tindakan :

- General Manager PG. Djombang Baru

LAMPIRAN C. HASIL PENELITIAN DARI PG. DJOMBANG BARU

Data Hasil Wawancara di PG.Djombang Baru

Spesifikasi <i>Spray Pond</i>	Hasil Penelitian
Komponen yang ada di <i>Spray Pond</i>	Kolam Penampung, Nozzles, Pipa Induk 12 Inchi, Pipa Distribusi 8 In / 6 In
Jumlah pipa penyemprot pada <i>Spray Pond</i>	684 pieces
Diameter pipa penyemprot	In = 3 inchi dan Out 1.89 cm
Luasan kolam penampung air di <i>Spray Pond</i>	1167,2 m ²

Data suhu yang dibutuhkan	Hasil Penelitian
Suhu air yang masuk ke <i>Spray Pond</i>	50 ° C
Suhu air di kolam penampung <i>Spray Pond</i>	45 ° - 47 ° C
Suhu air yang keluar dari <i>Spray Pond</i>	35 ° - 37 ° C

Data kecepatan yang dibutuhkan	Hasil Penelitian
Kecepatan air yang masuk ke <i>Spray Pond</i>	3000 m ³ /jam
Kecepatan air yang disemprotkan dari pipa	22.86 m ³ /jam per nozzles
Kecepatan air yang keluar dari <i>Spray Pond</i>	200 m ³ /jam

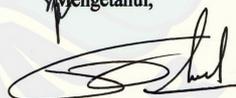
Sumber dari PG.DJOMBANG BARU

Jombang, 27 Februari 2015
Mengetahui,

Pembimbing Lapangan



Antonius Junet, ST
Asisten Manager



Kukuh Saputra
Manager Pengolahan

LAMPIRAN E. PROGRAM *MATLAB*E.1 Program Simulasi Sebaran Air Panas *Spray Pond* Berdasarkan Pengaruh Temperatur Awal Menggunakan Metode Gauss Seidell

```
clear all;
clc;
disp('=====');
disp('          pengaruh temperatur awal          ');
disp('===== By : =====');
disp('      Novian Nur Fatihah (110210101071)      ');
disp('=====');
disp('=====');

m=input('masukkan diskritisasi arah sumbu x=');
n=input('masukkan diskritisasi arah sumbu y=');
u=0.6;
v=0.9;
U=1.25;
V=0.65;
deltx=2.25;
delty=1.4;
deltt=0.5;
p=10;
h=4;
c=0.576;
rho=1.91;
miu=0.00065;
gr=9.8;
nn=9.2;
faimin=328;
faimaks=338;
fa=(faimaks-faimin)/2;
```

```

R=m*n;
w=input('masukkan koefisien omega = ');
Tol=input('masukkan toleransi error = ');
N=input('masukkan batas maksimum iterasi = ');
for i=1:m*n
    for k=1:1
        Xo(i,k)=300;
    end
end
end

Xall_plot=[]; for fai=(faimin:fa:faimaks)
    X_all=[];

A=(-3/8)*((rho*h*u*delty*deltt)-(rho*u*delty*deltt))-
(3/8)*((rho*h*v*deltx*deltt)-(rho*v*deltx*deltt));
B=(-3/8)*((rho*h*u*delty*deltt)-(rho*u*delty*deltt));
C=((7/8)*((rho*h*u*delty*deltt)-(rho*u*delty*deltt));
D=(-1/8)*((rho*h*u*delty*deltt)-(rho*u*delty*deltt));
E=(-3/8)*((rho*h*v*deltx*deltt)-(rho*v*deltx*deltt));
F=((7/8)*((rho*h*v*deltx*deltt)-(rho*v*deltx*deltt));
G=(-1/8)*((rho*h*u*delty*deltt)-(rho*u*delty*deltt));
H=rho*((-c*fai*(delty*deltt/deltx))-(2*c*fai*deltt)-
(c*fai*(deltx*deltt/delty))+delty*deltt*(p*U+(1/2)*rho*
U*V+miu*V+rho*(u^2)*v+rho*(1/2)*u*(v^2)+p-rho*gr)+deltx
*deltt*(p*V+rho*(1/2)*U*V+miu*U+(1/2)*rho*(u^2)*v+rho*u
*(v^2)+p-rho*gr))+(h/rho)*2*miu*delty*deltt*((u*delty*
deltt/deltx)*fai+v*fai)+(h/rho)*2*miu*deltx*deltt*
(u*fai+(v*deltx*deltt/delty)*fai)+((gr*(nn^2))/((h^(1/6))^2))
*(u+v)+((u^2+v^2)^(1/2));

%pembangunan matrik

```

```

f=zeros(m*n:m*n);
f(1:m*n+1:m^2*n^2)=A; % (i, j)
f(m*n+1:m*n+1:m^2*n^2-1)=B; % (i+1, j)
f(m^2*n+m:m*(m*n+1):m*n*(m*n-1))=0;
f(2:m*n+1:m*n*(m*n-1))=C; % (i-1, j)
f(m*n*(m-1)+m+1:m*(m*n+1):m*n*(m*n-1))=0;
f(3:m*n+1:m^2*n^2-2*(m*n))=D; % (i-2, j)
f(m*n*(m-2)+(m+1):(m*n+1)*m:m*m*n*n-2*m*n)=0;
f(m*n*(m-1)+(m+2):(m*n+1)*m:m*m*n*n-2*m*n)=0;
f(m^2*n+1:m*n+1:m^2*n^2-m)=E; % (i, j+1)
f(m+1:m*n+1:m^2*n*(n-1))=F; % (i, j-1)
f(m*2+1:m*n+1:m^2*n*(n-2))=G; % (i, j-2)
f;

%pendefinisian konstanta
L(1:(m*n),1)=H;
Z=Xo';
R=length(L);
X1=Xo;
for k=1:N,
    for i=1:m*n,
        S=L(i)-f(i,1:i-1)*X1(1:i-1)-f(i,i+1:m*n)*Xo(i+1:m*n);
        X1(i)=S/f(i,i);
    end
    g=abs(X1-Xo);
    error=norm(g);
    relerr=error/(norm(X1));
    Xo=X1;
    Z=[Z,Xo'];
    if(error<Tol)|(relerr<Tol),break,end
end

```

```
disp(['besarnya error = ',num2str(error)]);
disp(['besarnya relatif error = ',num2str(relerr)]);
Z;
X1;
X_all=[X_all X1];
Xall_plot=[Xall_plot X_all(:,end)];
fprintf('%8.20f\n',Z);
Xall_plot1=Xall_plot+fai; Xall_plot1; end
plot(1:(m*n),Xall_plot1(:,:),1:(m*n),Xall_plot1(:,:),'o',
'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','r');

%plot grafik
title('PROGRAM SIMULASI SEBARAN AIR PANAS SPRAY POND');
xlabel('PANJANG DOMAIN');
ylabel('TEMPERATUR');
legend(strcat('fai=',num2str((faimin:fa:faimaks)'),'K'));
grid on;
hold on;
disp('Gauss Seidell method converged');
```

E.2 Program Simulasi Sebaran Air Panas *Spray Pond* Berdasarkan Pengaruh Tekanan Terdapat Temperatur Awal Menggunakan Metode Gauss Seidell

```
clear all;
clc;
disp('=====');
disp('          pengaruh Tekanan awal          ');
disp('===== By : =====');
disp('    Novian Nur Fatihah (110210101071)    ');
disp('=====');
disp('=====');

m=input('masukkan diskritisasi arah sumbu x='); %m=20
n=input('masukkan diskritisasi arah sumbu y='); %n=1

u=0.6;
v=0.9;
U=1.25;
V=0.65;
deltx=2.25;
delty=1.4;
deltt=0.5;
fai=338;
h=4;
c=0.576;
rho=1.91;
miu=0.00065;
gr=9.8;
nn=9.2;
Pmin=10;
Pmaks=16;
Pa=(Pmaks-Pmin)/2;
```

```

R=m*n;
w=input('masukkan koefisien omega = '); %w=1
Tol=input('masukkan toleransi error = '); %Tol=0.0000000001
N=input('masukkan batas maksimum iterasi = '); %N=50
for i=1:m*n
    for k=1:1
        Xo(i,k)=300;
    end
end

Xall_plot=[];
for P=(Pmin:Pa:Pmaks)
    X_all=[];

A=(-3/8)*((rho*h*u*delty*deltt)-(rho*u*delty*deltt))-
(3/8)*((rho*h*v*deltx*deltt)-(rho*v*deltx*deltt));
B=(-3/8)*((rho*h*u*delty*deltt)-(rho*u*delty*deltt));
C=((7/8)*((rho*h*u*delty*deltt)-(rho*u*delty*deltt));
D=(-1/8)*((rho*h*u*delty*deltt)-(rho*u*delty*deltt));
E=(-3/8)*((rho*h*v*deltx*deltt)-(rho*v*deltx*deltt));
F=((7/8)*((rho*h*v*deltx*deltt)-(rho*v*deltx*deltt));
G=(-1/8)*((rho*h*u*delty*deltt)-(rho*u*delty*deltt));
H=rho*((-c*fai*(delty*deltt/deltx))-(2*c*fai*deltt)-
(c*fai*(deltx*deltt/delty))+delty*deltt*(P*U+(1/2)*rho*
U*V+miu*V+rho*(u^2)*v+rho*(1/2)*u*(v^2)+P-rho*gr)+deltx*
deltt*(P*V+rho*(1/2)*U*V+miu*U+(1/2)*rho*(u^2)*v+rho*u*
(v^2)+P-rho*gr))+(h/rho)*2*miu*delty*deltt*((u*delty*
deltt/deltx)*fai+v*fai)+(h/rho)*2*miu*deltx*deltt*(u*fai+
(v*deltx*deltt/delty)*fai)+((gr*(nn^2))/((h^(1/6))^2))*
(u+v)+((u^2+v^2)^(1/2));

```

```

%pembangunan matrik
f=zeros(m*n:m*n);
f(1:m*n+1:m^2*n^2)=A; % (i,j)
f(m*n+1:m*n+1:m^2*n^2-1)=B; % (i+1,j)
f(m^2*n+m:m*(m*n+1):m*n*(m*n-1))=0;
f(2:m*n+1:m*n*(m*n-1))=C; % (i-1,j)
f(m*n*(m-1)+m+1:m*(m*n+1):m*n*(m*n-1))=0;
f(3:m*n+1:m^2*n^2-2*(m*n))=D; % (i-2,j)
f(m*n*(m-2)+(m+1):(m*n+1)*m:m*m*n*n-2*m*n)=0;
f(m*n*(m-1)+(m+2):(m*n+1)*m:m*m*n*n-2*m*n)=0;
f(m^2*n+1:m*n+1:m^2*n^2-m)=E; % (i,j+1)
f(m+1:m*n+1:m^2*n*(n-1))=F; % (i,j-1)
f(m*2+1:m*n+1:m^2*n*(n-2))=G; % (i,j-2)
f;

%pendefinisian konstanta
L(1:(m*n),1)=H;
Z=Xo';
R=length(L);
X1=Xo;
for k=1:N,
    for i=1:m*n,
        S=L(i)-f(i,1:i-1)*X1(1:i-1)-f(i,i+1:m*n)*Xo(i+1:m*n);
        X1(i)=S/f(i,i);
    end
    g=abs(X1-Xo);
    error=norm(g);
    relerr=error/(norm(X1)+eps);
    Xo=X1;
    Z=[Z,Xo'];
    if(error<Tol)|(relerr<Tol),break,end

```

```
end
disp(['besarnya error = ',num2str(error)]);
disp(['besarnya relatif error = ',num2str(relerr)]);
Z;
X1;
X_all=[X_all X1];
Xall_plot=[Xall_plot X_all(:,end)];
fprintf('%8.20f\n',Z);
Xall_plot1=Xall_plot+fai;
Xall_plot1;
end
plot(1:(m*n),Xall_plot1(:,:),1:(m*n),Xall_plot1(:,:),'o',
'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','r');

%plot grafik
title('PROGRAM SIMULASI SEBARAN AIR PANAS SPRAY POND DIPENGARUHI
TEKANAN');
xlabel('PANJANG DOMAIN');
ylabel('TEMPERATUR');
legend(strcat('P=',num2str((Pmin:Pa:Pmaks)'),'Pascal'));
grid on;
hold on;
disp('Gauss Seidell method converged');
```

LAMPIRAN F. HASIL SIMULASI PROGRAM *MATLAB*F.1 Tabel Simulasi Sebaran Air Panas *Spray Pond* dengan Temperatur Awal 328 K Menggunakan Metode Gauss Seidell

Titik Ke-	r_1	r_2	r_3
1	300.00000000	331.16780000	331.16780000
2	300.00000000	327.05370000	327.05370000
3	300.00000000	325.14390000	325.14390000
4	300.00000000	324.33560000	324.33560000
5	300.00000000	324.00760000	324.00760000
6	300.00000000	323.87720000	323.87720000
7	300.00000000	323.82590000	323.82590000
8	300.00000000	323.80580000	323.80580000
9	300.00000000	323.79800000	323.79800000
10	300.00000000	323.79500000	323.79500000
11	300.00000000	323.79380000	323.79380000
12	300.00000000	323.79330000	323.79330000
13	300.00000000	323.79340000	323.79340000
14	300.00000000	323.79230000	323.79230000
15	300.00000000	323.79650000	323.79650000
16	300.00000000	323.77940000	323.77940000
17	300.00000000	323.84780000	323.84780000
18	300.00000000	323.57320000	323.57320000
19	300.00000000	324.67530000	324.67530000
20	300.00000000	320.25270000	320.25270000

F.2 Tabel Simulasi Sebaran Air Panas *Spray Pond* dengan Temperatur Awal 333 K Menggunakan Metode Gauss Seidell

Titik Ke-	r_1	r_2	r_3
1	300.00000000	333.73230000	333.73230000
2	300.00000000	331.16250000	331.16250000
3	300.00000000	329.96950000	329.96950000
4	300.00000000	329.46470000	329.46470000
5	300.00000000	329.25970000	329.25970000
6	300.00000000	329.17830000	329.17830000
7	300.00000000	329.14620000	329.14620000
8	300.00000000	329.13370000	329.13370000
9	300.00000000	329.12880000	329.12880000
10	300.00000000	329.12690000	329.12690000
11	300.00000000	329.12620000	329.12620000
12	300.00000000	329.12590000	329.12590000
13	300.00000000	329.12590000	329.12590000
14	300.00000000	329.12520000	329.12520000
15	300.00000000	329.12790000	329.12790000
16	300.00000000	329.11720000	329.11720000
17	300.00000000	329.16000000	329.16000000
18	300.00000000	328.98840000	328.98840000
19	300.00000000	329.67680000	329.67680000
20	300.00000000	326.91430000	326.91430000

F.3 Tabel Simulasi Sebaran Air Panas *Spray Pond* dengan Temperatur Awal 338 K Menggunakan Metode Gauss Seidell

Titik Ke-	r_1	r_2	r_3
1	300.00000000	336.29680000	336.29680000
2	300.00000000	335.27130000	335.27130000
3	300.00000000	334.79520000	334.79520000
4	300.00000000	334.59370000	334.59370000
5	300.00000000	334.51190000	334.51190000
6	300.00000000	334.47940000	334.47940000
7	300.00000000	334.46660000	334.46660000
8	300.00000000	334.46160000	334.46160000
9	300.00000000	334.45970000	334.45970000
10	300.00000000	334.45890000	334.45890000
11	300.00000000	334.45860000	334.45860000
12	300.00000000	334.45850000	334.45850000
13	300.00000000	334.45850000	334.45850000
14	300.00000000	334.45820000	334.45820000
15	300.00000000	334.45930000	334.45930000
16	300.00000000	334.45500000	334.45500000
17	300.00000000	334.47210000	334.47210000
18	300.00000000	334.40360000	334.40360000
19	300.00000000	334.67830000	334.67830000
20	300.00000000	333.57590000	333.57590000