



**SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC TOTAL COVERING  
PADA AMALGAMASI GRAF KIPAS**

**SKRIPSI**

Oleh

**Siti Latifah**

**NIM 101810101043**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2015**



**SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC TOTAL COVERING  
PADA AMALGAMASI GRAF KIPAS**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar  
Sarjana Sains

Oleh

**Siti Latifah**

**NIM 101810101043**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2015**

Dengan menyebut nama Allah S.W.T yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan penggalan bait dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Bapak Suparmin dan Ibu Sunartik, serta Kakakku Moh. Imam Sahroni dan Adikku Slamet Waluyo yang senantiasa memberikan do'a, semangat serta dukungan yang tidak pernah putus untuk meraih cita-cita;
2. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku pembimbing skripsi yang telah dengan sabar memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan skripsi;
3. Bapak dan Ibu guru TK PGRI III Gambiran, SDN IV Gambiran, MTs Negeri Genteng, SMA Negeri 1 Genteng, serta Dosen Matematika FMIPA Universitas Jember yang selama ini telah sabar memberikan ilmunya;
4. Teman-teman "Mathgic" angkatan 2010 Matematika MIPA yang telah memberikan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
5. Teman-teman pejuang graf: (Rida, Ceppa, Mas Anang, Icha, Misi, Sari, Hendri, Chenul, Fia, Diana) yang selalu memberikan dukungan semangat untuk segera menyelesaikan skripsi ini;
6. Teman-teman "Ganxter 41A" yang senantiasa memberikan dukungan dan doa selama ini.

## MOTTO

"Pahlawan bukanlah orang yang berani menetakkan pedangnya ke pundak lawan, tetapi pahlawan sebenarnya ialah orang yang sanggup menguasai dirinya dikala ia marah."

(Sabda Nabi Muhammad SAW)

"Sesuatu mungkin mau mendatangi mereka yang mau menunggu, namun hanya didapatkan oleh mereka yang semangat mengejarnya."

(Abraham Lincoln)

"Jika anda sedang benar, jangan terlalu berani dan bila anda sedang salah, jangan terlalu takut. Karena keseimbangan sikap adalah penentu ketepatan perjalanan kesuksesan anda."

( Mario Teguh)

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Siti Latifah

NIM : 101810101043

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering pada Amalgamasi Graf Kipas adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2015

Yang menyatakan,

Siti Latifah

NIM. 101810101043

**SUPER  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -ANTIMAGIC TOTAL COVERING  
PADA AMALGAMASI GRAF KIPAS**

Oleh

**Siti Latifah**

**NIM 101810101043**

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Dosen Pembimbing Anggota : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

**PENGESAHAN**

Skripsi berjudul Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering pada Amalgamasi Graf Kipas telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

Hari / tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas  
Jember

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si  
NIP.19840801 200801 2 006

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D.  
NIP.19680802 199303 1 004

Anggota I,

Anggota 2,

Kosala Dwidja P., S.Si., M.Sc.  
NIP.19690828 199802 1 001

M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc.  
NIP.1985011 120081 2 1002

Mengesahkan,

Dekan

Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.  
NIP. 19610108 198602 1 001

## RINGKASAN

**Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering pada Amalgamasi Graf Kipas;** Siti Latifah, 101810101043; 2015: 82 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Pelabelan covering ajaib pertama kali diperkenalkan oleh *Gutierrez and Llado (2005)* yang dikembangkan dari pelabelan total ajaib. Pelabelan covering  $\mathcal{H}$  ajaib pada sebuah graf  $G = (V(G), E(G))$  jika setiap garis pada  $E(G)$  termuat dalam subgraf  $\mathcal{H}$  dari  $G$  yang isomorfik dengan  $\mathcal{H}$  dan  $\mathcal{H}$  merupakan subgraf dari  $G$ . Kemudian dikembangkan menjadi pelabelan selimut  $\mathcal{H}$ -*antimagic* oleh Inayah (2013) yaitu suatu pelabelan covering  $\mathcal{H}$ -*antimagic* pada graf  $G$  yang memiliki sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan barisan aritmatika  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (s - 1)d$ .

Pada penelitian ini mengkaji mengenai pelabelan super  $\mathcal{H}$ -antimagic covering pada amalgamasi graf kipas tunggal dan gabungan saling lepas. Amalgamasi graf kipas yang dinotasikan dengan  $amal(F_n, P_n, 2)$  adalah sebuah graf yang dikembangkan dari graf kipas. Amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  konektif memiliki himpunan *vertex*,  $V = \{a, x_i, b; 1 \leq i \leq n\}$  dan himpunan *edge*,  $E = \{ax_i, bx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ . Amalgamasi graf kipas  $m$   $amal(F_n, P_n, 2)$  diskonektif memiliki himpunan titik  $V = \{a^j, x_i^j, b^j; 1 \leq i \leq n \ 1 \leq j \leq m\}$  dan himpunan sisi  $E = \{ax_i^j, bx_i^j; 1 \leq i \leq n \ 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i x_{i+1}^j; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m\}$ .

Metode yang digunakan dalam penelitian ini, yaitu Pendeteksian pola (*pattern recognition*) kemudian dilakukan metode deduktif aksiomatik, yaitu menurunkan teorema tersebut, kemudian diterapkan dalam pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  baik yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Batas atas pada amalgamasi graf kipas konektif pada penelitian ini adalah  $d \leq 19$  sedangkan pada gabungan sal-

ing lepas adalah  $d \leq 41$ . Sehingga, teorema baru yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

1. ada pelabelan super  $(\frac{29n+32}{2}, 0)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan pelabelan super  $(\frac{29n+25}{2}, 0)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.1.1**;
2. ada pelabelan super  $(13n + 19, 1)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.1.2**;
3. ada pelabelan super  $(\frac{27n+36}{2}, 2)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan pelabelan super  $(\frac{27n+37}{2}, 2)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.1.3**;
4. ada pelabelan super  $(11n + 23, 3)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.1.4**;
5. ada pelabelan super  $(\frac{25n+40}{2}, 4)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan pelabelan super  $(\frac{25n+41}{2}, 4)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.1.5**;
6. ada pelabelan super  $(13n + 19, 5)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.1.6**;
7. ada pelabelan super  $(\frac{21n+48}{2}, 6)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan pelabelan

super  $(\frac{21n+49}{2}, 6)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.1.7**;

8. ada pelabelan super  $(9n + 27, 7)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.1.8**;
9. ada pelabelan super  $(\frac{21n+48}{2}, 8)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan pelabelan super  $(\frac{21n+49}{2}, 8)$ - $(B_2)$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.1.9**;
10. ada pelabelan super  $(11n + 23, 9)$ - $B_n$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.1.10**;
11. ada pelabelan super  $(\frac{15n+60}{2}, 10)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan pelabelan super  $(\frac{15n+61}{2}, 10)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.1.11**;
12. ada pelabelan super  $(8n + 29, 11)$ - $B_n$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.1.12**;
13. ada pelabelan super  $(7n + 31, 13)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan pelabelan super  $(7n + 33, 13)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.1.13**;

14. ada pelabelan super  $(\frac{15n+60}{2}, 14)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan pelabelan super  $(\frac{15n+63}{2}, 14)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.1.14**;
15. ada pelabelan super  $(6n + 33, 17)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.1.15**;
16. ada pelabelan super  $((m + \frac{5}{2})n^2 + (2m + \frac{13}{2})n + m + 4, 9)$ - $B_n$  antimagic total covering pada generalisasi amalgamasi graf kipas  $amal(F_m, P_m, n)$  untuk  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.1.16**;
17. ada pelabelan super  $(12mn + 16m + 5, 1)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas dari amalgamasi graf kipas  $m Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.1**;
18. ada pelabelan super  $(11nm + 17m + 6, 3)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas dari amalgamasi graf kipas  $m Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.2**;
19. ada pelabelan super  $(10nm + 18m + 7, 5)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas dari amalgamasi graf kipas  $m Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.3**;
20. ada pelabelan super  $(9nm + 19m + 8, 7)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas dari amalgamasi graf kipas  $m Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.4**;

21. ada pelabelan super  $(8nm + 20m + 9, 9)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas dari amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.5**;
22. ada pelabelan super  $(7nm + 21m + 10, 11)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas dari amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian pada **teorema 4.2.6**.

Dari kajian diatas ada beberapa pelabelan yang belum ditemukan oleh peneliti sehingga dalam penelitian ini diajukan open problem.

**Masalah terbuka 0.0.1.** *Pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  dengan  $n \geq 2$  untuk  $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 17\}$  dan  $d \in 9$  untuk expand dari amalgamasi graf kipas.*

**Masalah terbuka 0.0.2.** *Pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas  $m$   $amal(F_n, P_n, 2)$ , dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$  untuk  $d \leq 41$  selain  $d \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ .*

## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering pada Amalgamasi Graf Kipas. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing Utama dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Kosala Dwidja P., S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji Utama dan M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Penguji Anggota;
5. Dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. Bapak Suparmin dan Ibu Sunartik, serta Kakakku Moh. Imam Sahroni dan Adikku Slamet Waluyo yang senantiasa memberikan do'a, semangat serta dukungan yang tidak pernah putus untuk meraih cita-cita;
7. Teman-teman pejuang graf: (Rida, Ceppa, Mas Anang, Icha, Misi, Sari, Hendri, Chenul, Fia, Diana) yang selalu memberikan dukungan dan semangat untuk segera menyelesaikan skripsi ini;
8. Teman-teman "Mathgic" angkatan 2010 Matematika MIPA yang telah memberikan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;

## Digital Repository Universitas Jember

9. Bapak dan Ibu guru TK PGRI III Gambiran, SDN IV Gambiran, MTs Negeri Genteng, SMA Negeri 1 Genteng, serta Dosen Matematika FMIPA Universitas Jember yang selama ini telah sabar memberikan ilmunya;
10. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2015

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL . . . . .	i
HALAMAN PERSEMBAHAN . . . . .	ii
HALAMAN MOTTO . . . . .	iii
HALAMAN PERNYATAAN . . . . .	iv
HALAMAN PENGESAHAN . . . . .	vi
RINGKASAN . . . . .	vii
KATA PENGANTAR . . . . .	xii
DAFTAR ISI . . . . .	xiv
DAFTAR GAMBAR . . . . .	xvi
DAFTAR TABEL . . . . .	xviii
DAFTAR LAMBANG . . . . .	xix
<b>1 PENDAHULUAN . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	3
1.3 Batasan Masalah . . . . .	3
1.4 Tujuan Penelitian . . . . .	3
1.5 Manfaat Penelitian . . . . .	3
<b>2 TINJAUAN PUSTAKA . . . . .</b>	<b>5</b>
2.1 Terminologi Graf . . . . .	5
2.2 Amalgamasi . . . . .	8
2.3 Lemma untuk batas atas $d$ . . . . .	8
2.4 Fungsi dan Barisan Aritmatika . . . . .	10
2.5 Graf Khusus . . . . .	12
2.6 Pelabelan Graf . . . . .	14
2.6.1 Definisi Pelabelan Graf . . . . .	14
2.6.2 Pelabelan Super- $\mathcal{H}$ Antimagic Total Covering . . . . .	15
2.7 Aplikasi Graf . . . . .	16
2.8 Hasil-hasil Pelabelan Selimut Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic . . . . .	17
<b>3 METODE PENELITIAN . . . . .</b>	<b>20</b>

3.1	Metode Penelitian . . . . .	20
3.2	Rancangan Penelitian . . . . .	20
3.2.1	Penotasian Titik dan Sisi . . . . .	20
3.2.2	Indikator Pelabelan . . . . .	21
3.3	Teknik Penelitian . . . . .	22
<b>4</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN . . . . .</b>	<b>24</b>
4.1	Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering pada Amalgamasi Graf Kipas $amal(F_n, P_n, 2)$ Konektif . . . . .	24
4.2	Pelabelan Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ Antimagic Total Covering pada Amalgamasi Graf Kipas $m Amal(F_n, P_n, 2)$ Diskonektif . . . . .	63
4.3	Hasil dan Pembahasan . . . . .	80
<b>5</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN . . . . .</b>	<b>82</b>
5.1	Kesimpulan . . . . .	82
5.2	Saran . . . . .	83
	<b>DAFTAR SUMBER RUJUKAN . . . . .</b>	<b>84</b>

DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh Graf $G$ . . . . .	5
2.2	Graf Isomorpis . . . . .	6
2.3	Graf $G$ , Subgraf $G$ dan Spanning Subgraf $G$ . . . . .	7
2.4	Contoh Operasi <i>Amalgamation</i> pada Graf Kipas . . . . .	8
2.5	Contoh Grafik Fungsi . . . . .	11
2.6	Graf Bintang $S_5$ dan $S_8$ . . . . .	12
2.7	Graf Cycle . . . . .	13
2.8	Graf Lintasan $P_6$ dan $P_7$ . . . . .	13
2.9	Graf Roda $W_4$ dan $W_6$ . . . . .	13
2.10	Graf Lengkap $K_5$ dan $K_6$ . . . . .	14
2.11	Graf Kipas $F_6$ . . . . .	14
2.12	Pelabelan Graf . . . . .	15
2.13	Graf Konektif $Amal(F_5, P_5, 2)$ . . . . .	16
2.14	Graf Tree $Amal(F_5, P_5, 2)$ . . . . .	17
3.1	Graf Kipas $Amal(F_n, P_n, 2)$ . . . . .	21
3.2	Bagan Teknik Penelitian . . . . .	23
4.1	Jumlah Titik dan Sisi Graf $Amal(F_n, P_n, 2)$ . . . . .	25
4.2	Super $(103, 0)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . . .	30
4.3	Super $(118, 0)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_7, P_7, 2)$ . . . . .	30
4.4	Super $(97, 1)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . . .	33
4.5	Super $(99, 2)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . . .	35
4.6	Super $(113, 2)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_7, P_7, 2)$ . . . . .	35
4.7	Super $(89, 3)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . . .	38
4.8	Super $(95, 4)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . . .	40
4.9	Super $(108, 4)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_7, P_7, 2)$ . . . . .	40
4.10	Super $(97, 5)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . . .	42
4.11	Super $(87, 6)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . . .	44
4.12	Super $(98, 6)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_7, P_7, 2)$ . . . . .	44

4.13	Super $(81, 7)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . .	46
4.14	Super $(87, 8)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . .	48
4.15	Super $(98, 8)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_7, P_7, 2)$ . . . .	48
4.16	Super $(89, 9)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . .	50
4.17	Super $(75, 10)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . .	52
4.18	Super $(83, 10)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_7, P_7, 2)$ . . . .	52
4.19	Super $(77, 11)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . .	54
4.20	Super $(73, 13)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . .	56
4.21	Super $(82, 13)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_7, P_7, 2)$ . . . .	56
4.22	Super $(75, 14)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . .	58
4.23	Super $(84, 14)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_7, P_7, 2)$ . . . .	59
4.24	super $(69, 17)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . .	60
4.25	super $(126, 9)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $Amal(F_5, P_5, 3)$ . . . .	62
4.26	super $(269, 1)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $m Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . .	68
4.27	Super $(255, 3)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $m Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . .	70
4.28	Super $(241, 5)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $m Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . .	72
4.29	Super $(227, 7)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $m Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . .	75
4.30	Super $(213, 9)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $m Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . .	77
4.31	Super $(199, 11)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering $m Amal(F_6, P_6, 2)$ . . . .	79

DAFTAR TABEL

2.1	Ringkasan pelabelan selimut super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic pada graf konektif. . . . .	18
2.2	Ringkasan pelabelan selimut super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic pada graf diskonektif. . . . .	18



## DAFTAR LAMBANG

$G$	=	Graf $G$
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan $V$ adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan $E$ adalah himpunan sisi
$ V(G) $	=	Himpunan titik dari graf $G$ yang disebut <i>order</i>
$ E(G) $	=	Himpunan sisi dari graf $G$ yang disebut ukuran ( <i>size</i> )
$\mathcal{H}AVC$	=	$\mathcal{H}$ <i>antimagic vertex covering</i> atau pelabelan titik $\mathcal{H}$ antiajaib selimut
$\mathcal{SHATC}$	=	<i>Super <math>\mathcal{H}</math> antimagic total covering</i> atau super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ antiajaib total selimut
$d$	=	Nilai beda barisan bobot total selimut pada $\mathcal{SHATC}$
$a$	=	Bobot total selimut terkecil yang merupakan suku pertama barisan
$n$	=	Banyaknya titik pada amalgamasi graf kipas
$m$	=	Banyaknya gabungan saling lepas pada amalgamasi graf kipas
$a$	=	Titik yang menghubungkan sisi pada amalgamasi graf kipas $amal(F_n, P_n, 2)$
$b$	=	Titik yang menghubungkan sisi pada amalgamasi graf kipas $amal(F_n, P_n, 2)$
$x_i$	=	Titik ke- $i$ pada amalgamasi graf kipas $amal(F_n, P_n, 2)$
$ax_i$	=	Titik ke- $i$ dalam komponen ke- $a$ amalgamasi graf kipas $amal(F_n, P_n, 2)$
$bx_i$	=	Titik ke- $i$ dalam komponen ke- $b$ amalgamasi graf kipas $amal(F_n, P_n, 2)$

- $f(a)$  = Fungsi bijektif pelabelan titik  $a$  pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$
- $f(b)$  = Fungsi bijektif pelabelan titik  $b$  pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$
- $f(x_i)$  = Fungsi bijektif pelabelan titik  $x_i$  pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$
- $f(ax_i)$  = Fungsi bijektif pelabelan sisi  $ax_i$  pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$
- $f(bx_i)$  = Fungsi bijektif pelabelan sisi  $bx_i$  pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$
- $f(x_i x_{i+1})$  = Fungsi bijektif pelabelan sisi  $x_i x_{i+1}$  pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$
- $w_f$  = Bobot selimut pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$
- $W_f$  = Bobot total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Teori graf pertama kali digunakan untuk memecahkan masalah mengenai jembatan yang terletak di Konisberg. Kota Konisberg memiliki tujuh buah jembatan yang menghubungkan empat wilayah di kota tersebut. Beberapa warga Kota Konisberg mengajukan pertanyaan kepada Leonard Euler, seorang matematikawan yang berasal dari Swiss mengenai mungkin tidaknya melakukan perjalanan melewati ketujuh jembatan tetapi tidak boleh melewati jembatan yang sama lebih dari satu kali. Leonard Euler mempresentasikan empat wilayah di Kota Konisberg sebagai titik, dan tujuh jembatan sebagai sisi. Euler memberikan jawaban bahwa perjalanan melewati ketujuh jembatan tetapi tidak boleh melewati jembatan yang sama lebih dari satu kali tidak mungkin dilakukan. Masalah ini menjadi awal perkembangan dari teori graf.

Teori graf dapat memberikan kerangka dalam menyelesaikan berbagai persoalan yang berhubungan dengan struktur dan hubungan antara suatu objek diskrit. Banyak masalah dapat dinyatakan dalam bentuk graph dan dipecahkan dengan menggunakan graf. Kajian-kajian yang muncul dari teori graf misalnya, *dominating set*, *rainbow connection*, *SEATL*, pewarnaan (*colouring*), dan pelabelan graf.

Salah satu topik kajian dalam teori graf yaitu pelabelan graf. Pelabelan graf direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Sampai saat ini dikenal beberapa jenis pelabelan, antara lain pelabelan sisi, pelabelan titik, pelabelan total, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Pelabelan (*labelling*) pada sebuah graf  $G$  jika domain dari pemetaan tersebut berupa himpunan *vertex* maka pelabelan tersebut dinamakan *vertex labelling*, sedangkan jika domainnya adalah himpunan *edge* maka pelabelannya dinamakan *edge labelling*. Dan terdapat pula *total labelling* yaitu pelabelan yang terjadi jika domainnya merupakan penggabungan dari himpunan *vertex* dan

himpunan *edge* (Kotzig and Rosa, 1970). Pelabelan ajaib adalah pelabelan graf dimana setiap titik dan sisi yang terkait (*incident*) jika dijumlahkan menghasilkan bilangan bulat yang sama. Sedangkan pelabelan anti ajaib adalah pelabelan graf dimana setiap titik dan sisi memiliki bobot yang berbeda dan membentuk barisan aritmatika dengan  $a$  sebagai suku pertama dan  $d$  sebagai batas atasnya.

Pelabelan covering ajaib pertama kali diperkenalkan oleh *Gutierrez and Llado (2005)* yang dikembangkan dari pelabelan total ajaib. Pelabelan covering  $\mathcal{H}$  ajaib pada sebuah graf  $G = (V(G), E(G))$  jika setiap garis pada  $E(G)$  termuat dalam subgraf  $\mathcal{H}$  dari  $G$  yang isomorfik dengan  $\mathcal{H}$  dan  $\mathcal{H}$  merupakan subgraf dari  $G$ . Kemudian dikembangkan menjadi pelabelan selimut  $\mathcal{H}$ -*antimagic* oleh Inayah (2013) yaitu suatu pelabelan covering  $\mathcal{H}$ -*antimagic* pada graf  $G$  yang memiliki sebuah fungsi bijektif sehingga terdapat jumlahan yang merupakan barisan aritmatika  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (s - 1)d$ . Fungsi bijektif pada suatu graf tersebut berbeda dan berurutan. Setiap pelabelan graf memiliki nilai batas atas  $d$  yang berbeda dan nilai  $d$  tidak tunggal (Dafik et al., 2009). Nilai  $d \leq s$  dengan  $d$  adalah bilangan bulat non negatif dan  $s$  merupakan nilai terbesar  $d$  dalam suatu graf. Nilai batas atas digunakan untuk mengetahui nilai beda maksimum dalam mencari pelabelan super  $(a, d) - \mathcal{H}$ -*antimagic* total covering.

Beberapa penelitian sejenis yang telah dipublikasikan antara lain, Inayah (2013) meneliti mengenai suatu pelabelan  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* covering pada graf kipas  $F_n$  dan graf roda  $W_n$ , *Dewi and Darmaji (2014)* meneliti pelabelan total super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Covering pada amalgamasi star, *Pudyaningrum et al. (2014)* meneliti Pengembangan Total Selimut Super pada Graf Shackle Triangular Book, *Wuni et al. (2014)* meneliti super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering pada Gabungan Saling Lepas Graf Semi Windmill dan *Jamil et al. (2014)* meneliti super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering pada Gabungan Saling Lepas Graf Triangular Ladder. Berdasarkan beberapa penelitian tersebut, amalgamasi dari graf kipas yang dinotasikan dengan  $amal(F_n, P_n, 2)$ . Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai graf konektif dan gabungan diskonektif pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$ . Untuk menyelesaikan pelabelan selimut dari amalgamasi graf kipas diperlukan batas atas dan fungsi bijektif.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. berapa batas atas super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  konektif dan diskonektif?
- b. bagaimana fungsi bijektif super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  konektif dan diskonektif?

## 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. graf berhingga sederhana, yaitu graf yang tidak mempunyai loop dan sisi ganda (paralel) serta bukan graf berarah (*directed graph*);
- b. super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* total covering pada amalgamasi graf kipas yang disimbolkan dengan  $amal(F_n, P_n, 2)$  dengan  $n \geq 2$ .

## 1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang diatas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. menentukan batas atas super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  konektif dan diskonektif;
- b. menentukan fungsi bijektif super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  konektif dan diskonektif.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

- a. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya mengenai *covering* pada graf kipas;

- b. memberikan motivasi dan referensi pada peneliti lain untuk meneliti pada jenis graf lainnya;
- c. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan ilmu dan aplikasi graf lainnya.

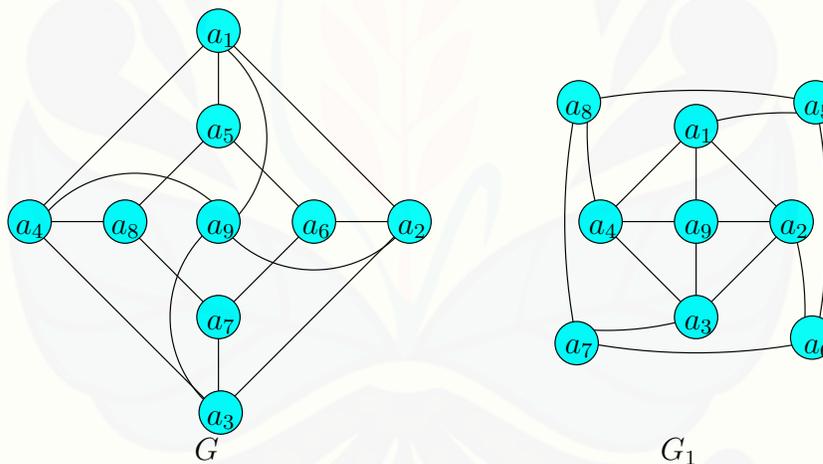




mempunyai sisi rangkap dan *loop*.

Derajat (*degree*) dari titik  $v$  dinotasikan dengan  $d(v)$  adalah jumlah sisi yang berada di titik  $v$  tersebut. Derajat total graf adalah jumlah derajat semua titik graf. Jalan (*walk*) pada sebuah graf adalah barisan titik (*edge*) dan sisi (*vertex*) yang diawali dan diakhiri dengan titik. Jalan (*walk*) dikatakan tertutup jika titik awal dan titik akhirnya sama atau *identik*. Jika titik jalan yang berbeda maka disebut lintasan (*path*), sedangkan jika semua sisinya yang berbeda maka jalan tersebut disebut jejak (*trail*). Sikel (*cycle*) adalah jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda (lintasan yang tertutup).

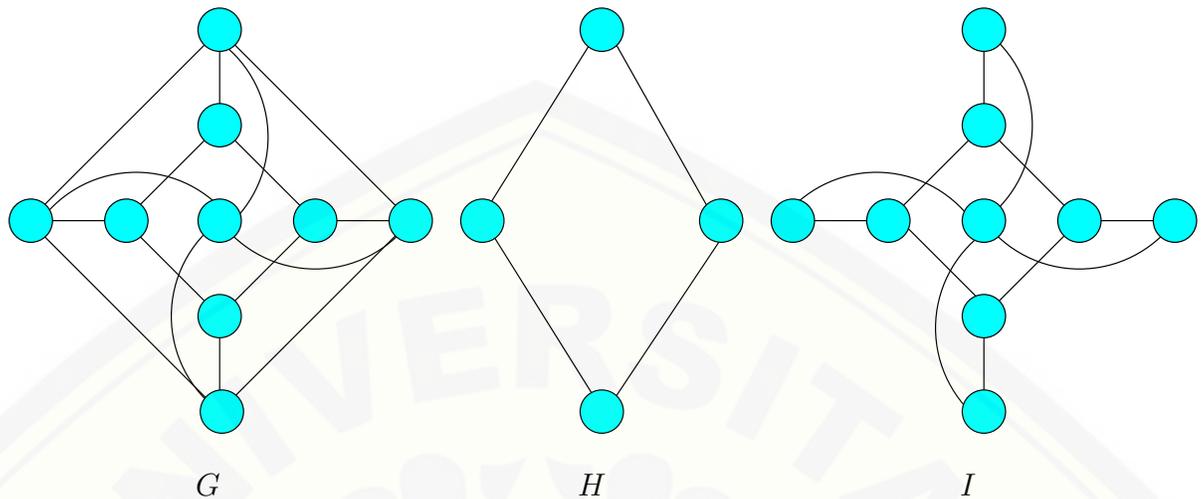
Dua graf  $G$  dan  $G_1$  dikatakan graf isomorfis jika graf  $G$  dan  $G_1$  dapat dipresentasikan sehingga tampak identik dan tidak merubah ketetanggaan. Graf  $V(G) \cong V(G_1)$  terdapat korespondensi satu-satu  $f : V(G) \rightarrow V(G_1)$ , jika  $(u, v) \in E(G)$  maka  $(f(u), f(v)) \in E(G_1)$ . Dengan demikian, jika  $G \cong G_1$  maka  $|V(G)| = |V(G_1)|$  dan  $|E(G)| = |E(G_1)|$ . Kesamaan jumlah *vertex* dan *edge* dari graf tidak menjamin bahwa graf tersebut isomorfis. Sehingga untuk membuktikan dua graf isomorfis yaitu dengan mencari korespondensi satu-satu dari  $V(G)$  ke  $V(G_1)$ . Sebagai contoh Gambar 2.2 adalah graf isomorfis.



Gambar 2.2 Graf Isomorfis

Graf  $H$  adalah subgraf dari graf  $G$  jika setiap titik dan sisi dari graf  $G$  adalah titik dan sisi dari graf  $H$ . Graf  $G$  adalah subgraf dari graf  $H$  dapat dinotasikan dengan  $V(H) \subseteq V(G)$  dan  $E(H) \subseteq E(G)$ . Spanning subgraf dari graf  $G$  adalah

subgraf yang dihasilkan dari graf  $G$  dengan menghapus sisi. Contoh Gambar 2.3 adalah graf  $G$ , graf  $H$  subgraf dari graf  $G$  dan graf  $I$  spanning subgraf dari graf  $G$ .



Gambar 2.3 Graf  $G$ , Subgraf  $G$  dan Spanning Subgraf  $G$

Graf selain dengan menggunakan titik dan garis, juga dapat dipresentasikan menggunakan matriks. Matriks yang sering digunakan yaitu matriks adjacent dan matriks incident. Matriks adjacent adalah matriks persegi berordo  $n$  dan dinotasikan dengan  $A(G) = [a_{ij}]$ ,  $a_{ij}$  menyatakan banyaknya sisi yang menghubungkan titik  $v_i$  dan titik  $v_j$ , dimana:

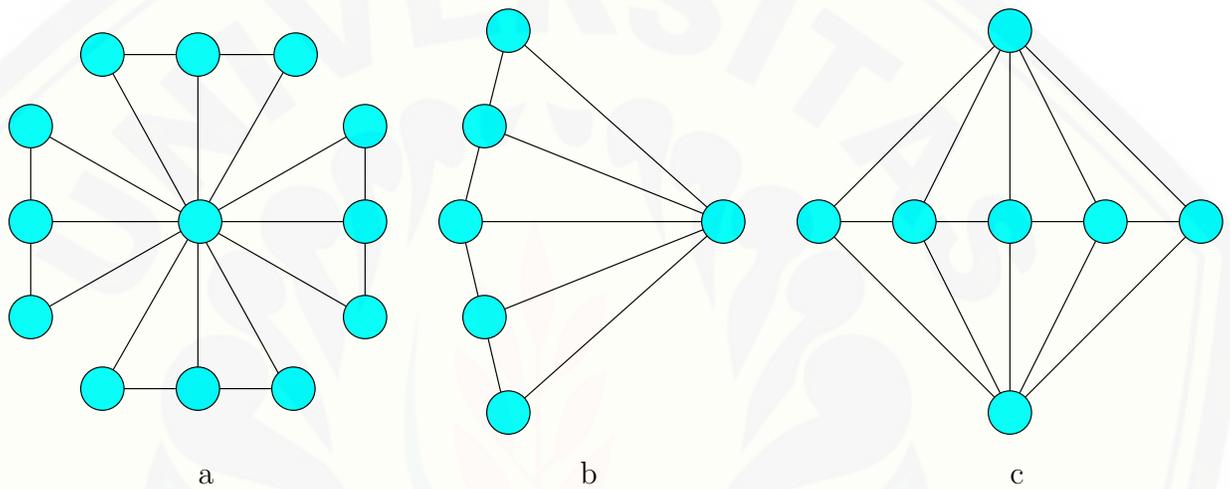
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika titik } v_i \text{ adjacent dengan titik } v_j \\ 0 & \text{jika titik } v_i \text{ tidak adjacent dengan titik } v_j. \end{cases}$$

Matriks incident adalah matriks dengan ordo  $n \times m$  dan dinotasikan dengan  $M(G) = [m_{ij}]$ , dimana:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{jika sisi } e_j \text{ tidak incident dengan titik } v_i \\ 1 & \text{jika sisi } e_j \text{ incident dengan titik } v_i \text{ dan } e_j \text{ bukan loop} \\ 2 & \text{jika sisi } e_j \text{ incident dengan titik } v_i \text{ dan } e_j \text{ loop.} \end{cases}$$

## 2.2 Amalgamasi

Carlson (2006) mendefinisikan amalgamasi titik dari graf misalkan  $H_i$  adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap  $H_i$  mempunyai suatu titik ( $v_{0i}$ ) yang disebut titik terminal. Amalgamasi titik yang dinotasikan dengan  $amal(H, v, k)$  yaitu ketika seluruh titik terminal direkatkan menjadi satu titik. Sedangkan amalgamasi sisi yaitu ketika seluruh titik terminal direkatkan menjadi satu sisi dan dinotasikan dengan  $amal(H, e, k)$ . Jika terminalnya adalah sebuah subgraf terhubung taktrivial, maka amalgamasi tersebut dinamakan amalgamasi subgraf yang dinotasikan dengan  $amal(H, S, k)$ . Gambar 2.4 menunjukkan contoh operasi amalgamasi pada graf kipas.



Gambar 2.4 Contoh Operasi *Amalgamation* pada Graf Kipas

Pada Gambar 2.4 (a) adalah contoh amalgamasi titik pada graf kipas yang dinotasikan dengan  $amal(F_3, v, 4)$ , (b) adalah contoh amalgamasi sisi pada graf kipas yang dinotasikan dengan  $amal(F_3, e, 2)$ , (c) adalah contoh amalgamasi subgraf pada graf kipas yang dinotasikan dengan  $amal(F_5, P_5, 2)$ .

## 2.3 Lemma untuk batas atas $d$

Batas atas  $d$  pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma sebagai berikut:

**Lemma 2.3.1.** *Jika sebuah graf  $G(V, E)$  adalah pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering maka*

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1}$$

untuk  $s = |H_i|$ ,  $p_G = |V|$ ,  $q_G = |E|$ ,  $p_H = |V'|$ ,  $q_H = |E'|$

**Bukti.**  $f(V) = 1, 2, 3, \dots, p_G$  dan  $f(E) = p_G + 1, p_G + 2, p_G + 2, \dots, p_G + q_G$ . Misalkan graf  $(p_G, q_G)$  mempunyai pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total dengan fungsi total  $f(\text{total}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, p_G + q_G\}$  maka himpunan bobot sebuah graf adalah  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (s - 1)d\}$  dimana  $a$  merupakan bobot terkecil maka berlaku:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + p_H + (p_G + 1) + (p_G + 2) + \dots + (p_G + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2}(1 + p_H) + q_H p_G + \frac{q_H}{2}(1 + q_H) &\leq a \\ \frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2} &\leq a \end{aligned}$$

Sedangkan untuk nilai terbesar berlaku:

$$\begin{aligned} a + (s - 1)d &\leq p_G + (p_G - 1) + (p_G - 2) + \dots + (p_G - (p_H - 1)) + (p_G + q_G) \\ &\quad + (p_G + q_G - 1) + (p_G + q_G - 2) + \dots + (p_G + q_G - (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(1 + (p_H - 1)) + q_H p_G + q_H q_G \\ &\quad - \frac{q_H - 1}{2}(1 + (q_H - 1)) \\ &= p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(s-1)d &\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - a \\
&\leq p_H p_G - \frac{p_H - 1}{2}(p_H) + q_H p_G + q_H q_G - \frac{q_H - 1}{2}(q_H) - \\
&\quad \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + q_H p_G + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
&= p_H p_G - \frac{p_H^2}{2} + \frac{p_H}{2} + q_H q_G - \frac{q_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} - \left(\frac{p_H}{2} + \frac{p_H^2}{2} + \frac{q_H}{2} + \frac{q_H^2}{2}\right) \\
&= p_H p_G + q_H q_G - p_H^2 - q_H^2 \\
&= p_H p_G - p_H^2 + q_H q_G - q_H^2 \\
&= (p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H \\
d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{(s-1)}
\end{aligned}$$

Dari persamaan diatas terbukti bahwa batas atas  $d \leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s-1}$  jika graf  $G$  memiliki super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering dari berbagai famili graf (Dafik, 2007).  $\square$

## 2.4 Fungsi dan Barisan Aritmatika

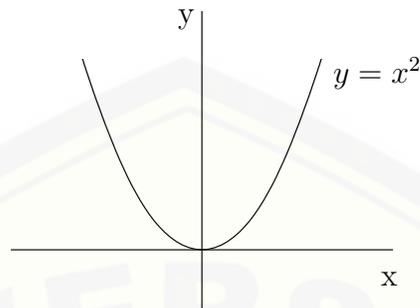
Fungsi dari sebuah himpunan A ke himpunan B didefinisikan sebagai suatu relasi yang memetakan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B. Himpunan A disebut sebagai daerah asal fungsi (*domain*) dan himpunan B disebut sebagai daerah kawan fungsi (*kodomain*), sedangkan daerah hasil pemetaan disebut *range*. Fungsi dinotasikan dengan  $f : A \rightarrow B$ . Notasi tersebut menunjukkan suatu fungsi  $f$  yang memetakan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu pasangan anggota himpunan B.

Jenis-jenis fungsi diantaranya adalah fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif.

1. Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut fungsi satu-satu jika  $\forall a_1$  dan  $a_2 \in A$ ,  $f(a_1) = f(a_2)$  maka  $a_1 = a_2$ .
2. Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut fungsi pada atau fungsi surjektif jika  $\forall b \in B, \exists a \in A$  maka  $f(a) = b$ .

3. Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif.

Gambar 2.5 menunjukkan fungsi injektif, surjektif dan bijektif.



Gambar 2.5 Contoh Grafik Fungsi

Pada Gambar 2.5 ditunjukkan bahwa  $a$  merupakan grafik fungsi surjektif jika  $Domain = \mathfrak{R}$  dan  $Kodomain = [0, \infty)$ , fungsi injektif jika  $Domain = [0, \infty)$  dan  $Kodomain = \mathfrak{R}$ , dan  $b$  merupakan fungsi bijektif dengan  $Domain = (-\infty, \infty)$  dan  $Kodomain = (-\infty, \infty)$ .

Barisan aritmatika merupakan suatu barisan yang selisih diantara suku-suku yang berurutan tetap. Jika barisan aritmatika memiliki beda positif maka barisan aritmatika tersebut disebut barisan aritmatika naik, sedangkan apabila beda suatu barisan aritmatika adalah negatif, maka barisan aritmatika tersebut disebut barisan aritmatika turun. Selisih suku-suku barisan ini disebut juga beda dan dapat dinotasikan menjadi  $d = U_n - U_{n-1}$ . Misalkan  $U_1, U_2, U_3, \dots$  adalah barisan aritmatika tersebut maka

$$U_1 = a$$

$$U_2 = U_1 + d = a + d$$

$$\begin{aligned} U_3 &= U_2 + d \\ &= a + d + d \\ &= a + 2d \end{aligned}$$

...

$$U_n = a + (n - 1)d$$

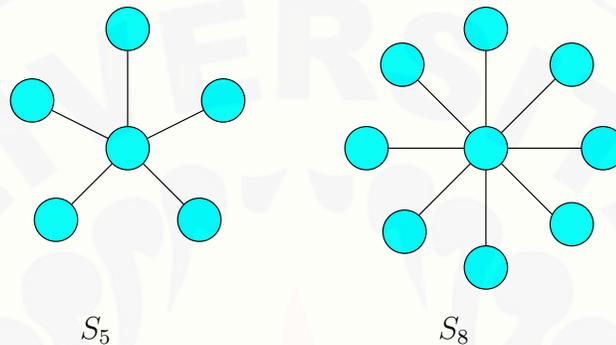
Sehingga rumus suku ke- $n$  dari barisan aritmatika adalah  $U_n = a + d(n - 1)$ .

## 2.5 Graf Khusus

Sebuah graf disebut graf khusus karena graf tersebut memiliki ciri-ciri tertentu yaitu tidak isomorfis dengan graf lain dan bentuknya dapat diperluas sampai orde  $n$ . Graf khusus terdiri dari beberapa famili, diantaranya:

### 1. Graf Bintang (*Star Graph*)

Graf Bintang adalah graf pohon yang terdiri dari satu titik pusat yang memiliki derajat  $n$  dan  $n + 1$  titik dan  $n$  sisi. Contoh dari graf bintang dapat dilihat pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Graf Bintang  $S_5$  dan  $S_8$

### 2. Graf Lingkaran (*Cycle Graph*)

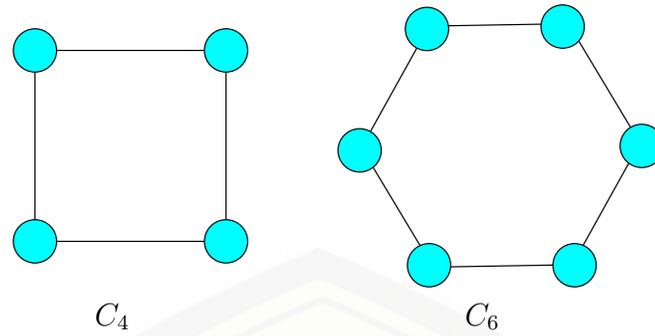
Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan  $n$  titik dilambangkan dengan  $C_n$ . Contoh dari graf lingkaran dapat dilihat pada Gambar 2.7.

### 3. Graf Lintasan

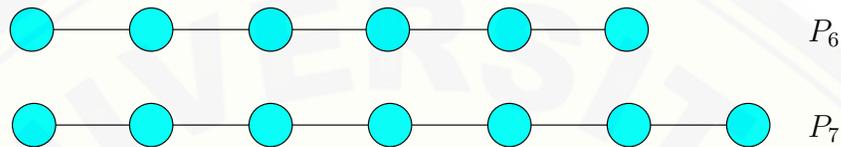
Graf lintasan atau *path graph* adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan  $n$  titik dinotasikan  $P_n$  dengan  $n \geq 2$ . Contoh Gambar 2.8 dari graf lintasan  $P_6$  dan  $P_7$ .

### 4. Graf Roda (*Wheel Graph*)

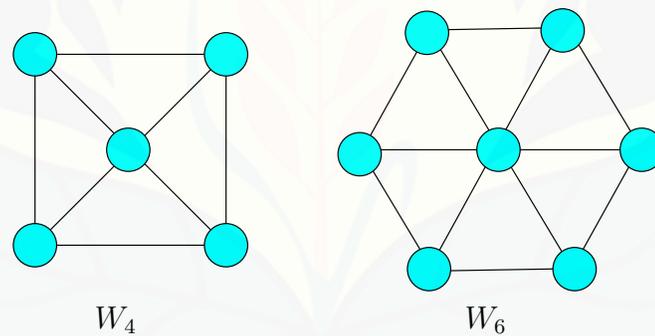
Graf roda dinotasikan  $W_n$  dengan  $n \geq 3$  adalah graf yang dibentuk dari graf siklus  $C_n$  dan satu titik yang disebut titik pusat yang bertetangga dengan



Gambar 2.7 Graf Cycle

Gambar 2.8 Graf Lintasan  $P_6$  dan  $P_7$ 

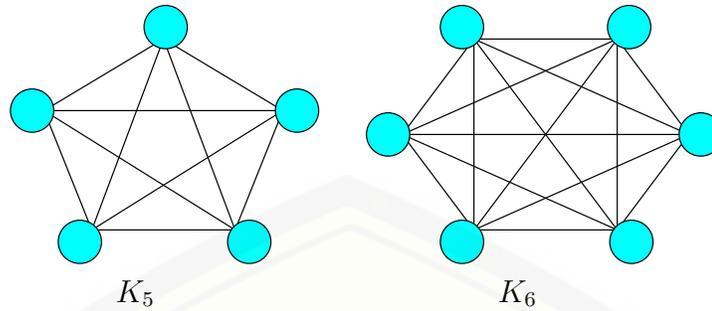
semua titik di siklus  $C_n$  (Gallian, 2009). Pada Gambar 2.9 merupakan contoh graf roda.

Gambar 2.9 Graf Roda  $W_4$  dan  $W_6$ 

#### 5. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Graf lengkap adalah graf sederhana yang simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan  $n$  buah simpul dilambangkan dengan  $K_n$ . Berdasarkan Gambar 2.10, setiap titik  $v$  terhubung dengan ( $n$

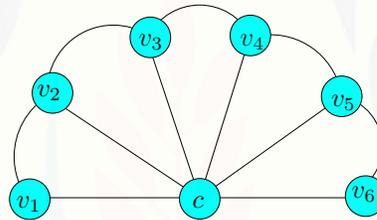
- 1) titik-titik yang lainnya sehingga  $\deg(v) = n - 1$ .



Gambar 2.10 Graf Lengkap  $K_5$  dan  $K_6$

## 6. Graf Kipas (*Fan Graph*)

Graf kipas  $F_n$  dengan  $n \geq 2$  adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan  $P_n$  dengan suatu titik yang disebut pusat. Untuk contoh, perhatikan  $F_6$  pada Gambar 2.11.



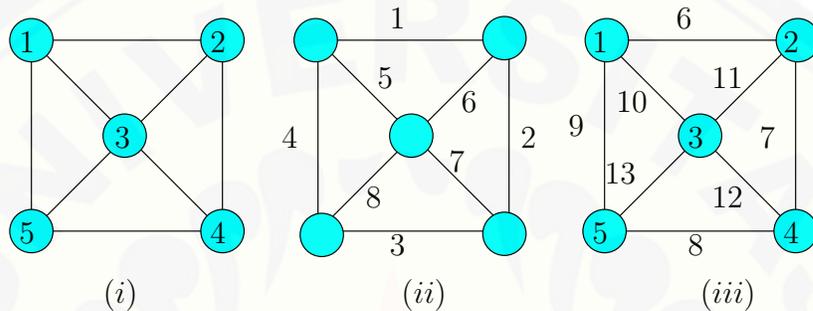
Gambar 2.11 Graf Kipas  $F_6$

## 2.6 Pelabelan Graf

### 2.6.1 Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan satu-satu dan onto (fungsi bijektif) yang memetakan himpunan titik dan sisi ke himpunan bilangan bulat positif. Fungsi yang memetakan himpunan titik dan sisi ke himpunan bilangan bulat positif disebut fungsi bijektif jika tidak ada dua buah elemen yang berbeda pada graf yang mempunyai bayangan yang sama atau dengan kata lain semua elemen pada graf dinomori dengan bilangan bulat positif yang berbeda.

Pada pelabelan titik, bobot selimut adalah jumlah label titik lebih dari dua yang saling menempel. Bobot selimut dalam pelabelan total diartikan sebagai jumlah label selimut dan label lebih dari dua titik yang menempel dan membentuk suatu selimut. Jika semua selimut mempunyai bobot selimut yang sama maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total-selimut-ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot selimut yang berbeda dan himpunan bobot selimut dari semua sisi membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total selimut anti ajaib (pelabelan total selimut antimagic) (Maryati et al., 2010). Gambar 2.12 menunjukkan pelabelan graf.



Gambar 2.12 Pelabelan Graf

Pada Gambar 2.12 graf (i) merupakan contoh dari pelabelan titik, graf (ii) merupakan contoh dari pelabelan sisi, dan graf (iii) merupakan contoh dari pelabelan total.

### 2.6.2 Pelabelan Super- $\mathcal{H}$ Antimagic Total Covering

Pelabelan selimut- $\mathcal{H}$  anti ajaib (*antimagic*) super pada graf  $G$  dengan  $v$  titik dan  $e$  sisi didefinisikan sebagai fungsi bijektif dari titik-titik dan sisi-sisi pada himpunan bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik dan sisi, secara matematis ditulis dalam bentuk  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  dengan sifat bahwa setiap subgraf dari  $G$  yang isomorfik dengan  $H$  dimana  $H$  juga subgraf dari  $G$  mempunyai total label  $\omega(H)$  yang berbeda,  $\omega(H) = \sum_{v \in V(H)} f(v) + \sum_{e \in E(H)} f(e)$ . Graf  $G$  dikatakan memiliki pelabelan  $\mathcal{H}$  anti ajaib super jika himpunan titik  $V(G)$  merupakan pemetaan bijektif  $f$  ke himpunan  $\{1, 2, 3, \dots, |V(G)|\}$  (Gutierrez and

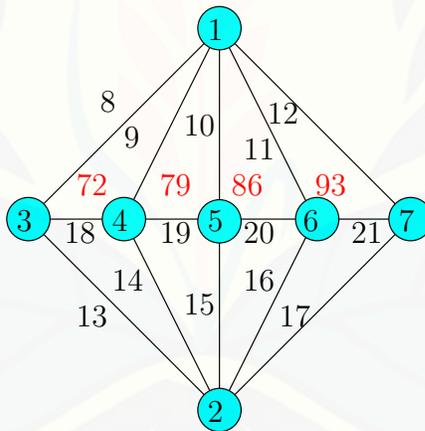
Llado, 2005).

### 2.7 Aplikasi Graf

Teori graf berperan penting dalam menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu contoh dari aplikasi total covering adalah penyampaian pesan rahasia dari dua orang hacker untuk membuka akses dari sebuah file rahasia yang hanya dapat diakses bagi hacker yang mempunyai pin yang sudah diverifikasi oleh sistem pusat. Penyampaian pesan ini dapat dilakukan dengan menerapkan aplikasi dari total covering pada amalgamasi graf kipas  $amalF_n, P_n, 2$ . Pesan yang akan dikeluarkan adalah "Pin Anda 2521". Kalimat tersebut akan dikembangkan melalui teknik pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering.

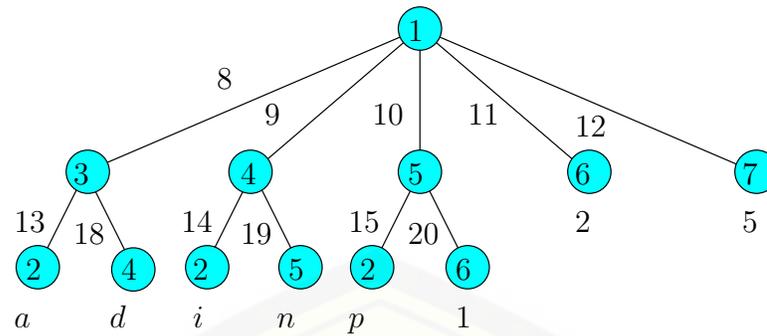
Huruf yang digunakan pada pesan tersebut adalah a, d, i, n, p, 1, 2, 5 (spasi dan tanda baca diabaikan). Setelah mengetahui huruf yang digunakan dibangunlah pelabelan covering graf  $amal(F_5, P_5, 2)$  dan lengkapi label sisinya hingga bobot total membentuk  $d = 7$ .

Gambar 2.13 merupakan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 5$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 7$ .



Gambar 2.13 Graf Konektif  $Amal(F_5, P_5, 2)$

Gambar 2.14 adalah graf *tree* dengan pelabelan yang sama pada graf  $amal(F_5, P_5, 2)$  dengan  $d = 7$ .

Gambar 2.14 Graf Tree  $Amal(F_5, P_5, 2)$ 

Huruf yang digunakan dalam pesan tersebut kemudian diletakkan pada graf *tree* dan disesuaikan urutan abjadnya dan urutkan label sisinya. Maka terlihat bahwa ciphertext dari huruf a=813, d=818, i=914, n=919, p=1015, 1=1020, 2=11, 5=12. Dengan demikian pesan tersebut tanpa spasi dan tanda baca menjadi: 10159149198139198188131112111020

Label tersebut diterapkan dengan menggunakan teknik cryptosystem modulo 26 terhadap masing-masing hurufnya  $a=\text{mod}(813,26)=7$ ,  $d=\text{mod}(818,26)=12$ ,  $i=\text{mod}(914,26)=4$ ,  $n=\text{mod}(919,26)=9$ ,  $p=\text{mod}(1015,26)=1$ ,  $1=\text{mod}(1020,26)=6$ ,  $2=\text{mod}(11,26)=11$ ,  $5=\text{mod}(12,26)=12$ . Berdasarkan pengkodean *polyalphabetic* dimana 0=a, 1=b, 3=c, 4=d, 5=e, 6=f, 7=g, 8=h, 9=i, 10=j, 11=k, 12=l, 13=m, 14=n, 15=o, 16=p, 17=q, 18=r, 19=s, 20=t, 21=u, 22=v, 23=w, 24=x, 25=y, 26=z. Sehingga hasil konversinya yaitu a=l, d=u, l=v, n=w, s=x, dan u=z.

Pesan rahasia yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

bdigilgklkf

Jika pesan tersebut dikembalikan ke pesan semula maka menjadi "PIN ANDA 2521".

## 2.8 Hasil-hasil Pelabelan Selimut Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic

Beberapa rangkuman hasil pelabelan selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic pada graf konektif dan diskonektif yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini.

Tabel 2.1: Ringkasan pelabelan selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic pada graf konektif.

Graf	$a$	$d$	Hasil
Graf Kipas ( $F_n$ )	$12 + 4n + \lfloor n/2 \rfloor$	4	$(a, d) - C_3$
	$8 + 6n + \lfloor n/2 \rfloor$	2	
		(Inayah, 2013)	-
Graf Triangular Book ( $SBT_n$ )	$61n + 59$	40	$(a, d) - Bt_3 + 2e$
	$64n + 56$	33	
	$66n + 54$	30	
	$52n + 68$	28	
		(Pudyaningrum et al., 2014)	-
Graf Shackle Kipas ( $F_n$ )	$18n + 115$	3	
	$18n + 111$	8	
	$18n + 87$	24	
	$18n + 82$	29	
		(Azizah and Dafik, 2014)	-
Graf Pohon pisang ( $B_n$ )	$2k^2n^2 - 2kn^2$	2	$(a, d) - B_{k-1, n}$
	$+3kn - 3n - k + 2$	(Sari, 2014)	
Graf Roda ( $W_n$ )	$3hn + 5$	3	$(a, d) - C_3$
	$3hn + 3h + n$	1	
		(Inayah, 2013)	-

Tabel 2.2: Ringkasan pelabelan selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic pada graf diskonektif.

Notasi Graf	$d$	Hasil	Open Problem
Graf Triangular Ladder ( $mL_n$ )	$d \leq 9$	$d \in \{0, 2, 4, 6\}$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ (Jamil et al., 2014)	• jika $d \in \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$
Graf Triangular	$d \leq 96$	$d \in \{15, 17, 19, 21, 23\}$ untuk	• jika $d \neq \{15, 17, 19, 21, 23\}$

---

Notasi Graf	$d$	Hasil	Open Problem
Book ( $mSBT_n$ )		$n \geq 2$ dan $m \geq 2$ (Agustin et al., 2014)	untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$

---



## BAB 3. METODE PENELITIAN

### 3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan aksioma atau teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  baik yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Dalam penelitian ini, terlebih dahulu akan ditentukan nilai beda  $(d)$  pada amalgamasi graf kipas, selanjutnya nilai  $d$  tersebut diterapkan dalam super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* total covering pada amalgamasi graf kipas. Jika terdapat pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic*, maka akan dirumuskan pola pelabelan tersebut dengan menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pola umumnya.

### 3.2 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Rancangan penelitian yang dimaksud adalah sebagai berikut:

#### 3.2.1 Penotasian Titik dan Sisi

Amalgamasi graf kipas yang dinotasikan dengan  $amal(F_n, P_n, 2)$  adalah sebuah graf yang dikembangkan dari graf kipas. Graf kipas konektif memiliki himpunan *vertex*,  $V = \{a, x_i, b; 1 \leq i \leq n\}$  dan himpunan *edge*,  $E = \{ax_i, bx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ . Gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  didefinisikan sebagai gabungan diskonektif dari sebanyak  $m$  salinan amalgamasi graf kipas yang mempunyai himpunan titik  $V = \{a^j, x_i^j, b^j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$  dan himpunan sisi  $E = \{ax_i^j, bx_i^j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i^j x_{i+1}^j; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}$ . Dalam penelitian ini peneliti akan membatasi  $mAmal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ .

### 3.2.2 Indikator Pelabelan

Indikator pelabelan selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* pada amalgamasi graf kipas dalam penelitian ini adalah:

- (a) Label titik berbeda semua

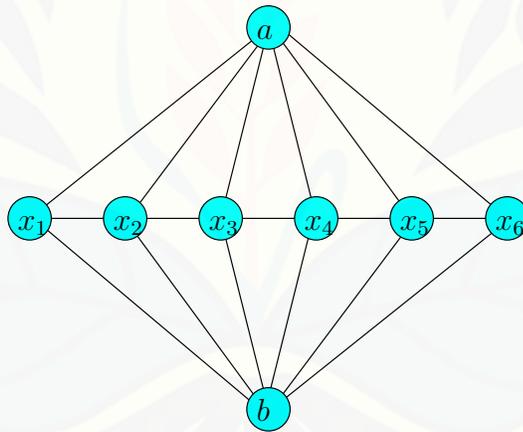
Label titik untuk pelabelan selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* pada amalgamasi graf kipas merupakan fungsi bijektif dari himpunan titik ke bilangan bulat dari 1 sampai sejumlah titik.

- (b) Label sisi berbeda semua

Label sisi untuk pelabelan selimut super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -*antimagic* pada amalgamasi graf kipas merupakan fungsi bijektif dari himpunan sisi pada amalgamasi graf kipas ke bilangan bulat dari banyaknya titik ditambah 1 sampai sejumlah titik dan sisi.

- (c) Total label selimut  $amal(F_n, P_n, 2)$  sebagai subgraf pada amalgamasi graf kipas mempunyai nilai konstan untuk subgrafnya.

Gambar 3.1 merupakan contoh amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$ .



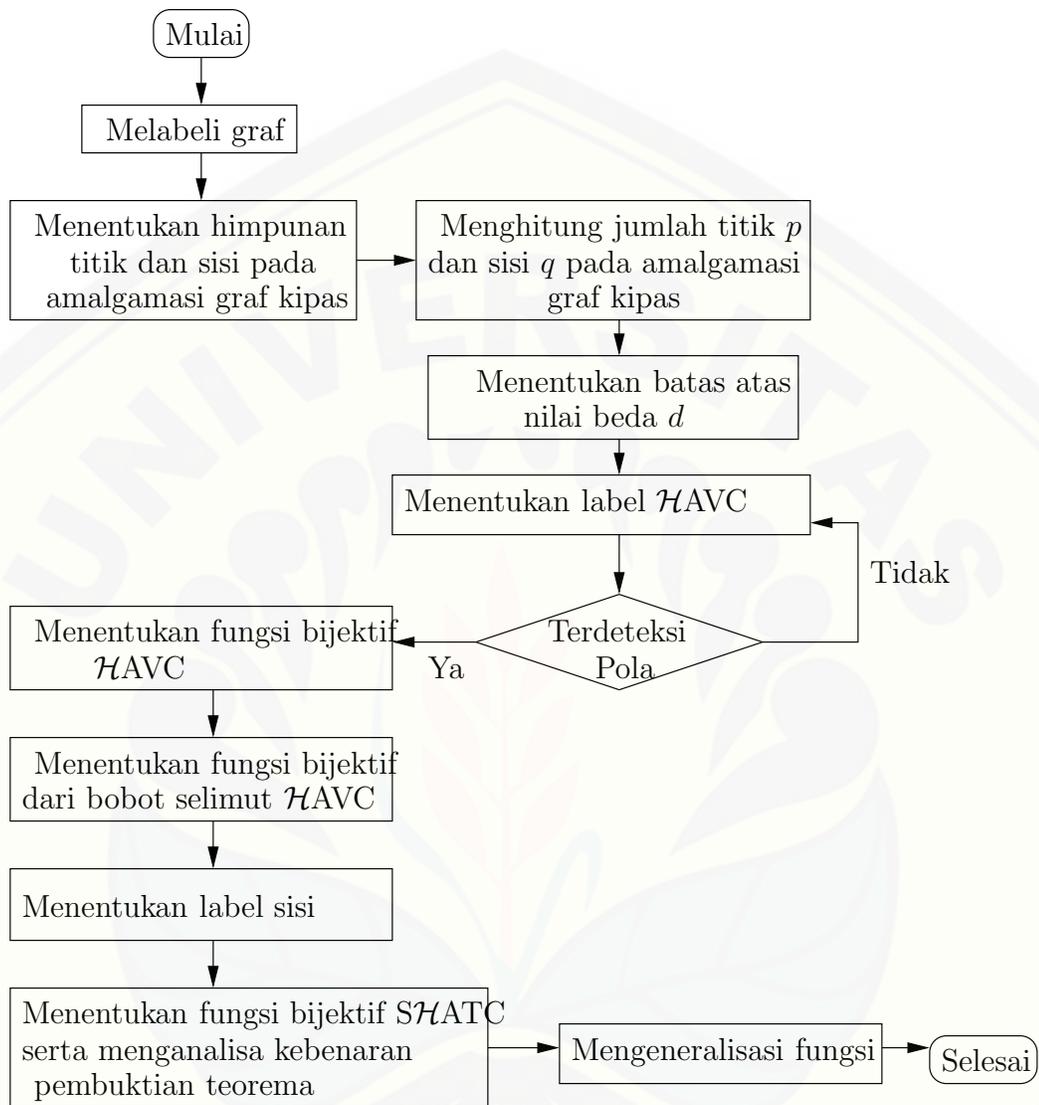
Gambar 3.1 Graf Kipas  $Amal(F_n, P_n, 2)$

### 3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada amalgamasi graf kipas baik yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

- a. menghitung jumlah titik  $p_G$  dan sisi  $q_G$  pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  serta menghitung jumlah selimut titik  $p_H$ , jumlah selimut sisi  $q_H$ , dan jumlah selimut pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$ ;
- b. menentukan batas atas nilai beda  $d$  pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  sesuai dengan Lemma 2.3.1;
- c. menentukan label  $\mathcal{H}AVC$  ( $\mathcal{H}$  Antimagic Vertex Covering) pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$ ;
- d. apabila label  $\mathcal{H}AVC$  berlaku untuk beberapa graf maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan menentukan fungsi bijektif dari  $\mathcal{H}AVC$  pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$ ;
- e. menentukan fungsi bijektif  $\mathcal{H}AVC$  pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$ ;
- f. melabeli gabungan amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  dengan  $\mathcal{SHATC}$  (*Super $\mathcal{H}$ AntimagicTotalCovering*);
- g. menentukan fungsi bijektif pelabelan super  $(a,d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering pada gabungan amalgamasi graf kipas  $m$   $amal(F_n, P_n, 2)$ .

Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam bagan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Bagan Teknik Penelitian

## BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

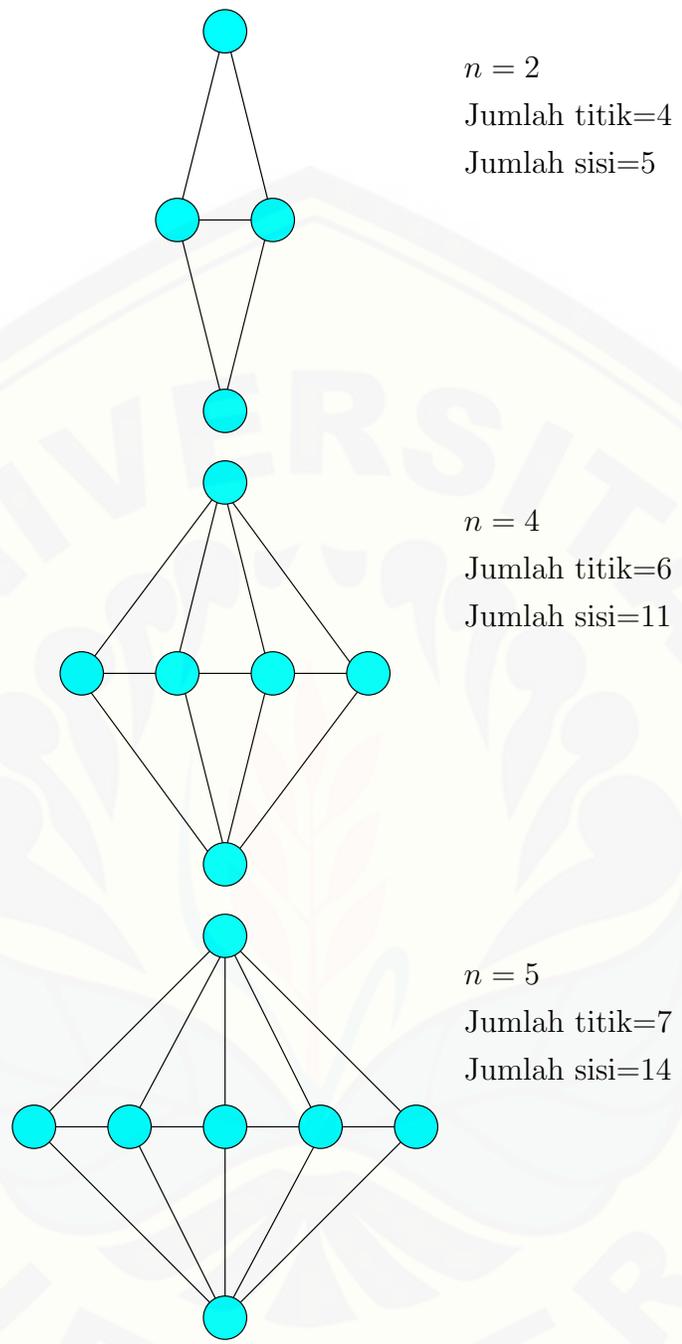
Bab ini menjelaskan tentang hasil dan pembahasan dari penelitian super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas tunggal  $amal(F_n, P_n, 2)$  maupun gabungan saling lepas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  dengan hasil akhir berupa teorema baru pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas yang ditandai dengan gambar permata  $\diamond$ . Penelitian ini diawali dengan menentukan nilai batas atas  $(d)$ , menentukan  $\mathcal{H}AV$  dan bobot selimut  $\mathcal{H}AV$  kemudian menentukan  $S\mathcal{H}ATC$  dan selanjutnya bobot total selimut  $S\mathcal{H}ATC$  untuk membuktikan bahwa graf ini merupakan  $S\mathcal{H}ATC$ .

Hasil dari penelitian pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  ini berupa teorema. Terdapat 22 (dua puluh dua) teorema baru yang ditemukan secara eksperimental dalam penelitian ini. Format penyajian diawali dengan sebuah pernyataan teorema dilanjutkan dengan bukti kemudian disertai dengan ilustrasi gambar. Berikut ini akan dijelaskan tahap-tahap bagaimana teorema tersebut ditemukan sekaligus menjawab rumusan masalah yang telah disajikan sebelumnya.

### 4.1 Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -Antimagic Total Covering pada Amalgamasi Graf Kipas $amal(F_n, P_n, 2)$ Konektif

Penentuan batas atas  $d$  merupakan hal penting yang mengisyaratkan seberapa banyak nilai beda yang mungkin dimiliki oleh amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  dalam pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering. Untuk menentukan nilai batas atas  $(d)$ , perlu mengetahui jumlah titik ( $p_G$ ) dan jumlah sisi selimut ( $q_G$ ), jumlah titik ( $p_H$ ) dan jumlah sisi ( $q_H$ ) pada subgraf atau selimut ( $s$ ) amalgamasi graf kipas tunggal maupun gabungannya serta jumlah selimutnya ( $s$ ).

Berdasarkan Gambar 4.1 dapat ditentukan  $p_G$ ,  $q_G$ ,  $p_H$ ,  $q_H$ , dan  $s$ . Didapatkan nilai jumlah titik dari amalgamasi graf kipas  $p_G = n + 2$  dan untuk jumlah



Gambar 4.1 Jumlah Titik dan Sisi Graf  $Amal(F_n, P_n, 2)$

sisi dari amalgamasi graf kipas adalah  $q_G=3n-1$ . Berdasarkan subgraf dari amalgamasi graf kipas didapatkan, nilai  $p_H = 4$  dan  $q_H = 5$ . Sedangkan untuk jumlah selimut ( $s$ ) didapatkan  $n - 1$ .

**Observasi 4.1.1.** *Jika amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering maka  $d \leq 19$ .*

**Bukti.** Amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  memiliki himpunan titik  $V(amal(F_n, P_n, 2)) = \{a, b, x_i; 1 \leq i \leq n\}$  dan sisi  $E(amal(F_n, P_n, 2)) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{bx_i; 1 \leq i \leq n\}$ . Sedangkan jumlah titik  $p_G = n + 2$  dan sisi  $q_G = 3n - 1$ , dan jumlah titik selimut adalah  $p_H = 4$  serta jumlah sisi selimut adalah  $q_H = 5$  dengan jumlah selimut  $n - 1$ . Berdasarkan lemma 2.3.1 dapat ditentukan nilai  $d$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1} \\
 &= \frac{(n + 2 - 4)4 + (3n - 1 - 5)5}{n - 1 - 1} \\
 &= \frac{(n - 2)4 + (3n - 6)5}{n - 2} \\
 &= \frac{4n - 8 + 15n - 30}{n - 2} \\
 &= \frac{19n - 38}{n - 2} \\
 &= \frac{19(n - 2)}{n - 2} \\
 d &\leq 19
 \end{aligned}$$

Didapatkan  $d \leq 19$ , dan pada pelabelan  $\mathcal{SHATC}$  menggunakan bilangan bulat positif maka nilai  $d \geq 0$ , sehingga  $d \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 19\}$ .

Penentuan fungsi bijektif pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering akan disesuaikan dengan nilai  $d$  yang telah ditetapkan. Untuk menentukan pelabelan selimut super  $\mathcal{H}$  antimagic pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  digunakan metode yang terdiri dari beberapa langkah. Metode ini diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku pada batas  $i$  yang telah ditemukan. Untuk penentuan pola

secara umum digunakan fungsi-fungsi barisan aritmatika, fungsi ini pada akhirnya merupakan fungsi bijektif pada graf yang diteliti. Setelah fungsi bijektif diketahui selanjutnya dilakukan pembuktian secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema yang didapat. Sebagai catatan, teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Berdasarkan hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Setelah mengetahui batas atas nilai  $d$ , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan total super  $\mathcal{H}$  antimagic total covering dengan terlebih dahulu menentukan fungsi bijektif melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika dari titik dan sisi amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$ , dimana titik  $V(amal(F_n, P_n, 2)) = \{a, b, x_i; 1 \leq i \leq n\}$  dan sisi  $E(amal(F_n, P_n, 2)) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}, \{ax_i; 1 \leq i \leq n\}, \{bx_i; 1 \leq i \leq n\}$ .

◇ **Teorema 4.1.1.** *Ada pelabelan super  $(\frac{29n+32}{2}, 0)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan pelabelan super  $(\frac{29n+25}{2}, 0)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil.*

**Bukti.** Labeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didefinisikan  $f_1$  adalah fungsi yang bijektif. Fungsi titik dari  $f_1$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f_1(a) &= 1 \\ f_1(b) &= 2 \\ f_1(x_i) &= \begin{cases} \frac{i+5}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ \frac{n+i+4}{2} & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, n \text{ genap} \\ \frac{n+i+5}{2} & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, n \text{ ganjil} \end{cases} \end{aligned}$$

Fungsi  $f_1$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $V$  ke himpunan bilangan asli  $\{1, 2, 3, \dots, n + 2\}$ . Didefinisikan  $w_{f_1}$  adalah bobot selimut dari pelabelan total selimut pada amalgamasi graf kipas. Bobot selimut didapat dari penjumlahan 4 fungsi titik yang telah didapat diatas dan  $\mathcal{H} = B_2$ . Fungsi  $w_{f_1}$  untuk  $n$  genap adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_1} &= f_1(a) + f_1(b) + f_1(x_i) + f_1(x_i + 1) \\ &= (1) + (2) + \frac{i + 5}{2} + \frac{n + i + 1 + 4}{2} \\ &= \frac{n + 2i + 16}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, n \text{ genap} \end{aligned}$$

Fungsi  $w_{f_1}$  untuk  $n$  ganjil adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_1} &= f_1(a) + f_1(b) + f_1(x_i) + f_1(x_i + 1) \\ &= (1) + (2) + \frac{i + 5}{2} + \frac{n + i + 1 + 5}{2} \\ &= \frac{n + 2i + 17}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, n \text{ ganjil} \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya mencari label sisi yang akan digunakan dalam mencari selimut total. Labeli setiap sisi dari amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didapatkan fungsi sisi dari  $f_1$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f_1(x_i x_{i+1}) &= 2n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_1(bx_i) &= 2n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_1(ax_i) &= 4n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

$W_{f_1}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut pada amalgamasi graf kipas.  $W_{f_1}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{f_1}$  dengan fungsi label sisinya.

Bobot total covering  $W_{f_1}$  untuk  $n$  genap adalah sebagai berikut:

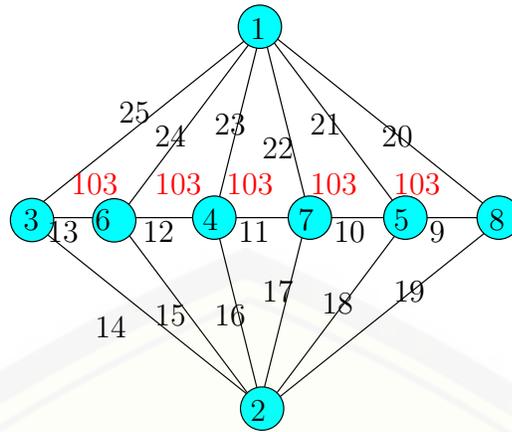
$$\begin{aligned}
 W_{f_1} &= w_{f_1} + f_1(x_i x_{i+1}) + f_1(bx_i) + f_1(bx_{i+1}) + f_1(ax_i) + f_1(ax_{i+1}) \\
 &= \left(\frac{n+2i+16}{2}\right) + (2n-i+2) + (2n+i+1) + (2n+i+1+1) \\
 &\quad + (4n-i+2) + (4n-i-1+2) \\
 &= \frac{29n+32}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Bobot total covering  $W_{f_1}$  untuk  $n$  ganjil adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_1} &= w_{f_1} + f_1(x_i x_{i+1}) + f_1(bx_i) + f_1(bx_{i+1}) + f_1(ax_i) + f_1(ax_{i+1}) \\
 &= \left(\frac{n+2i+17}{2}\right) + (2n-i+2) + (2n+i+1) + (2n+i+1+1) \\
 &\quad + (4n-i+2) + (4n-i-1+2) \\
 &= \frac{29n+25}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

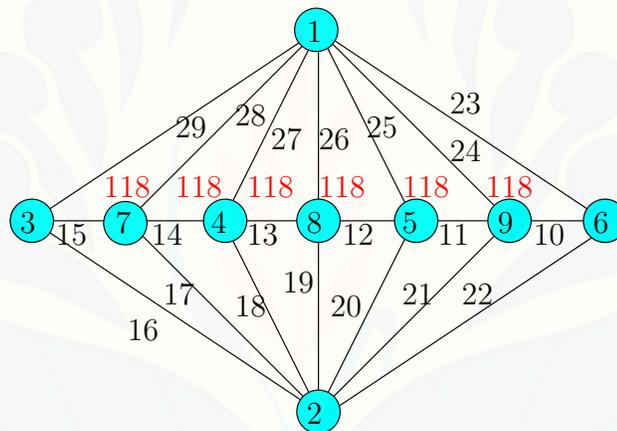
Maka didapatkan himpunan bobot total covering untuk  $n$  genap adalah  $W_{f_1} = \left\{ \frac{29n+32}{2}, \frac{29n+32}{2}, \dots, \frac{29n+32}{2} \right\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n$  genap membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 0$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = \frac{29n+32}{2} + (n-1)0 = \frac{29n+32}{2}$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(\frac{29n+32}{2}, 0)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap. Sedangkan himpunan bobot total covering untuk  $n$  ganjil adalah  $W_{f_1} = \left\{ \frac{29n+25}{2}, \frac{29n+25}{2}, \dots, \frac{29n+25}{2} \right\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n$  ganjil membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 0$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = \frac{29n+25}{2} + (n-1)0 = \frac{29n+25}{2}$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(\frac{29n+25}{2}, 0)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil.  $\square$

Gambar 4.2 merupakan contoh super  $(103, 0)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  (genap).



Gambar 4.2 Super  $(103, 0)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_6, P_6, 2)$

Gambar 4.3 merupakan contoh super  $(118, 0)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 7$  (ganjil).



Gambar 4.3 Super  $(118, 0)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_7, P_7, 2)$

Gambar 4.2 memiliki himpunan bobot total covering  $W_{f_1} = \{103, 103, 103, 103, 103\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  (genap) dengan  $a = 103$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 0$ . Sedangkan Gambar 4.3 memiliki himpunan bobot total covering  $W_{f_1} = \{118, 118, 118, 118, 118, 118, 118\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 7$  (ganjil) dengan  $a = 118$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 0$ . Teorema selanjutnya untuk amalgamasi graf

kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $d = 1$ .

◇ **Teorema 4.1.2.** *Ada pelabelan super  $(13n + 19, 1)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didefinisikan  $f_2$  adalah fungsi yang bijektif. Fungsi titik dari  $f_2$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f_2(a) &= 1 \\ f_2(b) &= n + 2 \\ f_2(x_i) &= i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Fungsi  $f_2$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $V$  ke himpunan bilangan asli  $\{1, 2, 3, \dots, n + 2\}$ . Didefinisikan  $w_{f_2}$  adalah bobot selimut dari pelabelan total selimut pada amalgamasi graf kipas. Bobot selimut didapat dari penjumlahan 4 fungsi titik yang telah didapat diatas dan  $\mathcal{H} = B_2$ . Fungsi  $w_{f_2}$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_2} &= f_2(a) + f_2(b) + f_2(x_i) + f_2(x_{i+1}) \\ &= (1) + (n + 2) + (i + 1) + (i + 1 + 1) \\ &= n + 2i + 6, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Himpunan bobot selimut di atas adalah  $w_{f_2} = \{14, 16, 18, \dots, 2n + 12\}$ . Himpunan  $w_{f_2}$  membentuk barisan aritmatika dengan beda  $d=2$ . Langkah selanjutnya mencari label sisi yang akan digunakan dalam mencari selimut total. Labeli setiap sisi dari amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didapatkan fungsi sisi dari  $f_2$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
f_2(bx_i) &= 2n - i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(ax_i) &= 2n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_2(x_i x_{i+1}) &= 4n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1
\end{aligned}$$

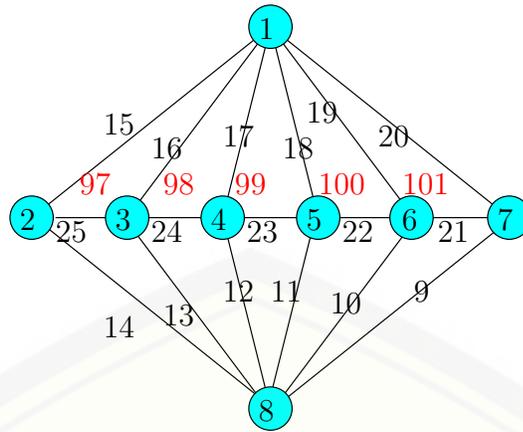
Jika  $W_{f_2}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_2}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W_{f_2} &= w_{f_2} + f_2(bx_i) + f_2(bx_{i+1}) + f_2(ax_i) + f_2(ax_{i+1}) + f_2(x_i x_{i+1}) \\
&= (2i + n + 6) + (2n - i + 3) + (2n - i - 1 + 3) + (2n + i + 2) \\
&\quad + (2n + i + 2 + 1) + (4n - i + 2) \\
&= 13n + i + 18, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Maka didapatkan himpunan bobot total covering  $W_{f_2} = \{13n + 19, 13n + 20, \dots, 14n + 18\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 1$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)d = 13n + 19 + (n - 1)1 = 14n + 18$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(13n + 19, 1)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.4 merupakan contoh super  $(97, 1)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 6$  (genap).

Himpunan bobot total covering pada Gambar 4.4 adalah  $W_{f_1} = \{97, 98, 99, 100, 101\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 6$  dengan  $a = 97$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 1$ . Teorema selanjutnya untuk amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dengan  $d = 2$ .



Gambar 4.4 Super  $(97, 1)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_6, P_6, 2)$

◇ **Teorema 4.1.3.** *Ada pelabelan super  $(\frac{27n+36}{2}, 2)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan pelabelan super  $(\frac{27n+37}{2}, 2)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil.*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga fungsi titik dari  $f_3$ =fungsi titik  $f_1$ , dan untuk fungsi  $w_{f_3}$ = fungsi  $w_{f_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_3$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f_3(x_i x_{i+1}) &= n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_3(ax_i) &= 3n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_3(bx_i) &= 3n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Jika  $W_{f_3}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_3}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut: Bobot total covering  $W_{f_3}$  untuk  $n$  genap adalah sebagai

berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_3} &= w_{f_3} + f_3(x_i x_{i+1}) + f_3(bx_i) + f_3(bx_{i+1}) + f_3(ax_i) + f_3(ax_{i+1}) \\
 &= \left(\frac{n+2i+16}{2}\right) + (n+i+2) + (3n+i+1) + (3n+i+1+1) \\
 &\quad + (3n-i+2) + (3n-i-1+2) \\
 &= \frac{27n+4i+32}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

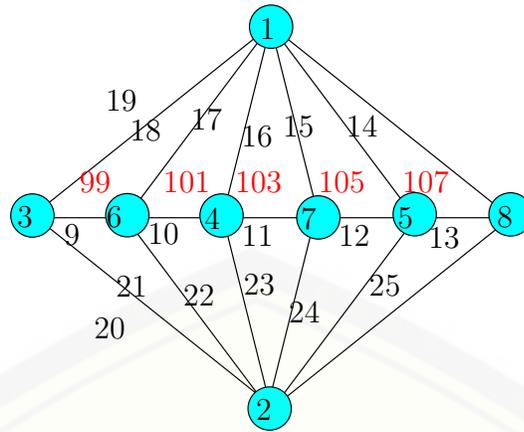
Bobot total covering  $W_{f_1}$  untuk  $n$  ganjil adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_3} &= w_{f_3} + f_3(x_i x_{i+1}) + f_3(bx_i) + f_3(bx_i + 1) + f_3(ax_i) + f_3(ax_i + 1) \\
 &= \left(\frac{n+2i+17}{2}\right) + (n+i+2) + (3n+i+1) + (3n+i+1+1) \\
 &\quad + (3n-i+2) + (3n-i-1+2) \\
 &= \frac{27n+4i+33}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Maka didapatkan himpunan bobot total covering untuk  $n$  genap adalah  $W_{f_3} = \left\{\frac{27n+36}{2}, \frac{27n+40}{2}, \dots, \frac{31n+32}{2}\right\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 2$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = \frac{27n+36}{2} + (n-1)2 = \frac{31n+32}{2}$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(\frac{27n+36}{2}, 2)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap. Sedangkan himpunan bobot total covering untuk  $n$  ganjil adalah  $W_{f_3} = \left\{\frac{27n+37}{2}, \frac{27n+39}{2}, \dots, \frac{31n+33}{2}\right\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n$  ganjil membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 0$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = \frac{27n+37}{2} + (n-1)2 = \frac{31n+33}{2}$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(\{\frac{27n+37}{2}\}, 2)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 7$  (ganjil).  $\square$

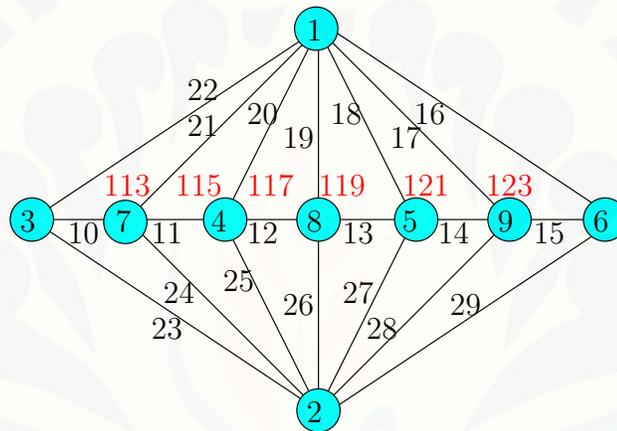
Gambar 4.5 merupakan contoh super  $(99, 2)$ - $B_2$  Antimagic covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  (genap).

Gambar 4.6 merupakan contoh super  $(113, 2)$ - $B_2$  Antimagic covering pada



Gambar 4.5 Super  $(99, 2)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_6, P_6, 2)$

amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 7$  (ganjil).



Gambar 4.6 Super  $(113, 2)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_7, P_7, 2)$

Gambar 4.5 memiliki himpunan bobot total covering  $W_{f_3} = \{99, 101, 103, 105, 107\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  (genap) dengan  $a = 99$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 2$ . Sedangkan Gambar 4.6 memiliki himpunan bobot total covering  $W_{f_3} = \{113, 115, 117, 120, 123\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 7$  (ganjil) membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 2$ . Teorema selanjutnya adalah untuk  $d = 3$ .

◇ **Teorema 4.1.4.** *Ada pelabelan super  $(11n + 23, 3)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didefinisikan  $f_4$  adalah fungsi yang bijektif. Fungsi titik dari  $f_4$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}f_4(a) &= 1 \\f_4(b) &= 2 \\f_4(x_i) &= i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Fungsi  $f_4$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $V$  ke himpunan bilangan asli  $\{1, 2, 3, \dots, n + 2\}$ . Didefinisikan  $w_{f_4}$  adalah bobot selimut dari pelabelan total selimut pada amalgamasi graf kipas. Bobot selimut didapat dari penjumlahan 4 fungsi titik yang telah didapat diatas dan  $\mathcal{H} = B_2$ . Fungsi  $w_{f_4}$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}w_{f_4} &= f_4(a) + f_4(b) + f_4(x_i) + f_4(x_{i+1}) \\&= (1) + (2) + (i + 2) + (i + 1 + 2) \\&= 2n + 8, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Himpunan bobot selimut di atas adalah  $w_{f_4} = \{10, 12, 14, 16, 18\}$ . Himpunan  $w_{f_4}$  membentuk barisan aritmatika dengan beda  $d = 2$ . Langkah selanjutnya mencari label sisi yang akan digunakan dalam mencari selimut total. Labeli setiap sisi dari amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didapatkan fungsi sisi dari  $f_4$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
f_4(bx_i) &= 2n - i + 3, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_4(ax_i) &= 2n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
f_4(x_i x_{i+1}) &= 3n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1
\end{aligned}$$

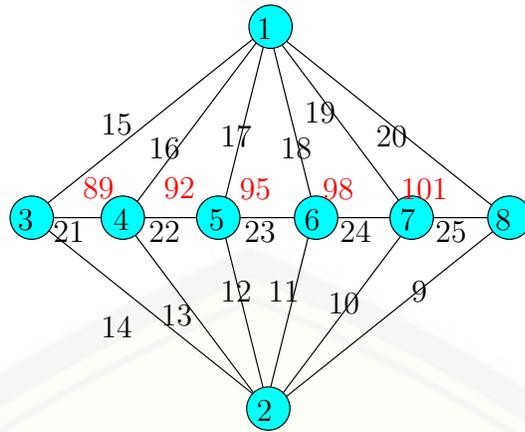
Jika  $W_{f_4}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_4}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
W_{f_4} &= w_{f_4} + f_4(bx_i) + f_4(bx_{i+1}) + f_4(ax_i) + f_4(ax_{i+1}) + f_4(x_i x_{i+1}) \\
&= (2i + 8) + (2n - i + 3) + (2n - i - 1 + 3) + (2n + i + 2) + \\
&\quad (2n + i + 2 + 1) + (3n + i + 2) \\
&= 11n + 3i + 20, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Maka didapatkan himpunan bobot total covering  $W_{f_4} = \{11n+23, 11n+26, \dots, 14n+20\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 3$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)d = 11n + 23 + (n - 1)3 = 14n + 20$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(11n+23, 3)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.7 merupakan contoh super  $(89, 3)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 6$ .

Himpunan bobot total covering pada gambar 4.7 adalah  $W_{f_4} = \{89, 92, 95, 98, 101\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 6$  dengan  $a = 89$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 3$ . Teorema selanjutnya untuk amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dengan  $d = 4$ .



Gambar 4.7 Super  $(89, 3)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_6, P_6, 2)$

◇ **Teorema 4.1.5.** *Ada pelabelan super  $(\frac{25n+40}{2}, 4)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan pelabelan super  $(\frac{25n+41}{2}, 4)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil.*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga fungsi titik dari  $f_5$ =fungsi titik  $f_1$ , dan untuk fungsi  $w_{f_5}$ =fungsi  $w_{f_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_5$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 f_5(x_i x_{i+1}) &= 2n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_5(bx_i) &= 2n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_5(ax_i) &= 3n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Jika  $W_{f_5}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_5}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan

sebagai berikut: Bobot total covering  $W_{f_5}$  untuk  $n$  genap adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_5} &= w_{f_5} + f_5(x_i x_{i+1}) + f_5(bx_i) + f_5(bx_{i+1}) + f_5(ax_i) + f_5(ax_{i+1}) \\
 &= \left(\frac{n+2i+16}{2}\right) + (2n-i+2) + 2n+i+1 + \\
 &\quad (2n+i+1+1) + (3n+i+2) + (3n+i+1+1) \\
 &= \frac{25n+8i+32}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

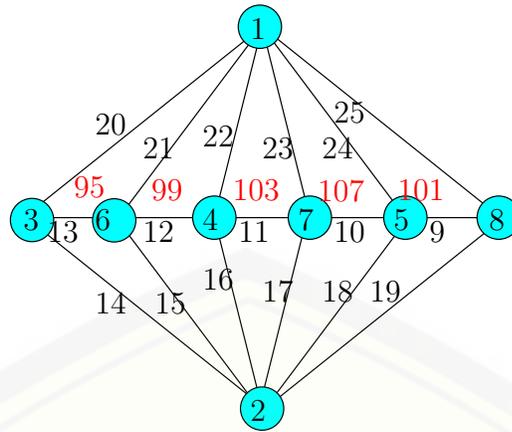
Bobot total covering  $W_{f_5}$  untuk  $n$  ganjil adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_5} &= w_{f_5} + f_5(x_i x_{i+1}) + f_5(bx_i) + f_5(bx_{i+1}) + f_5(ax_i) + f_5(ax_{i+1}) \\
 &= \left(\frac{n+i+5}{2}\right) + (2n-i+2) + (2n+i+1) + \\
 &\quad (2n+i+1+1) + (3n+i+1) + (3n+i+1+1) \\
 &= \frac{25n+8i+33}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Maka didapatkan himpunan bobot total covering untuk  $n$  genap adalah  $W_{f_5} = \left\{\frac{25n+40}{2}, \frac{25n+48}{2}, \dots, \frac{33n+32}{2}\right\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n$  genap membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 4$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = \frac{25n+40}{2} + (n-1)4 = \frac{33n+32}{2}$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(\frac{25n+40}{2}, 4)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap. Sedangkan himpunan bobot total covering untuk  $n$  ganjil adalah  $W_{f_5} = \left\{\frac{25n+41}{2}, \frac{25n+49}{2}, \dots, \frac{33n+33}{2}\right\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n$  ganjil membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 4$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = \frac{25n+41}{2} + (n-1)4 = \frac{33n+33}{2}$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(\frac{25n+41}{2}, 4)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil.  $\square$

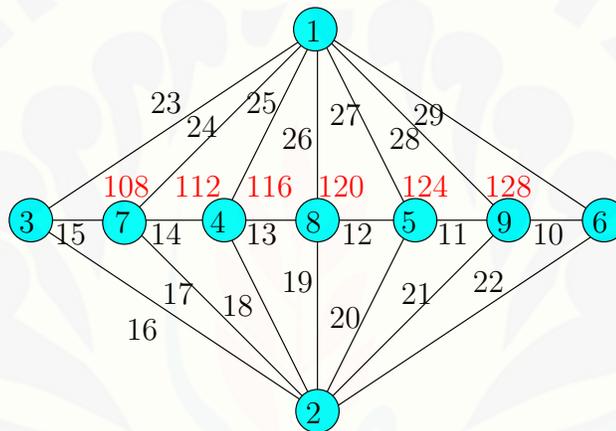
Gambar 4.8 merupakan contoh super  $(95, 4)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  (genap).

Gambar 4.9 merupakan contoh super  $(108, 4)$ - $B_2$  antimagic total covering



Gambar 4.8 Super  $(95, 4)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_6, P_6, 2)$

pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 7$  (ganjil).



Gambar 4.9 Super  $(108, 4)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_7, P_7, 2)$

Gambar 4.8 memiliki himpunan bobot total covering  $W_{f_5} = \{95, 99, 103, 107, 111\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  (genap) dengan  $a = 95$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 4$ . Sedangkan Gambar 4.9 memiliki himpunan bobot total covering  $W_{f_5} = \{108, 112, 116, 120, 124, 128\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 7$  (ganjil) dengan  $a = 108$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 4$ . Teorema selanjutnya untuk amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $d = 5$ .

◇ **Teorema 4.1.6.** *Ada pelabelan super  $(13n + 19, 5)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.2. Sehingga fungsi titik dari  $f_6$ =fungsi titik  $f_2$ , dan untuk fungsi  $w_{f_6}$ =fungsi  $w_{f_2}$ . Selanjutnya untuk melabeli sisi amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n \geq 2$  seperti dengan pelabelan sisi pada teorema 4.1.5 untuk  $n$  genap, sehingga fungsi sisi dari  $f_6$ =fungsi sisi pada  $f_5$ .

Jika  $W_{f_6}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut  $w_{f_6}$  dengan label sisinya dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

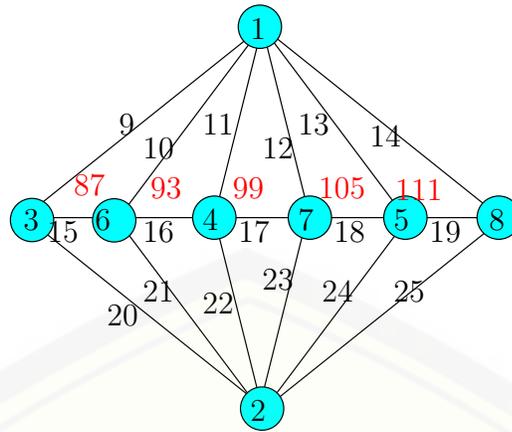
$$\begin{aligned} W_{f_6} &= w_{f_6} + f_6(x_i x_{i+1}) + f_6(bx_i) + f_6(bx_{i+1}) + f_6(ax_i) + f_6(ax_{i+1}) \\ &= (2i + n + 6) + (2n - i + 2) + (2n + i + 1) + (2n + i + 1 + 1) \\ &\quad + (3n + i + 1) + (3n + i + 1 + 1) \\ &= 13n + 5i + 14, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Maka didapatkan himpunan bobot total covering  $W_{f_6} = \{13n + 19, 13n + 24, \dots, 18n + 14\}$  amalgamasi graf kipas amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n \geq 2$  membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 5$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)d = 13n + 19 + (n - 1)5 = 18n + 14$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(13n + 19, 5)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n \geq 2$ . □

Gambar 4.10 merupakan contoh super  $(97, 5)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 6$ .

Himpunan bobot total covering pada Gambar 4.10 adalah  $W_{f_6} = \{97, 102, 107, 112, 117\}$  amalgamasi graf kipas amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 6$  dengan  $a = 97$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 5$ . Teorema selanjutnya untuk amalgamasi graf kipas amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n \geq 2$  dengan  $d = 6$ .

◇ **Teorema 4.1.7.** *Ada pelabelan super  $(\frac{21n+48}{2}, 6)$ - $B_2$  antimagic total covering*



Gambar 4.10 Super  $(97, 5)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_6, P_6, 2)$

pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan pelabelan super  $(\frac{21n+49}{2}, 6)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil.

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.4. Sehingga fungsi titik dari  $f_7$ =fungsi titik  $f_4$ , dan untuk fungsi  $w_{f_7}$ =fungsi  $w_{f_4}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_7$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 f_7(ax_i) &= n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_7(x_i x_{i+1}) &= 2n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\
 f_7(bx_i) &= \begin{cases} \frac{6n+i+3}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, n \text{ ganjil} \\ \frac{7n+i+2}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, n \text{ genap} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$W_{f_7}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut pada amalgamasi graf kipas.  $W_{f_7}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{f_7}$  dengan fungsi label sisinya.

Bobot total covering  $W_{f_7}$  untuk  $n$  genap adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_7} &= w_{f_7} + f_7(x_i x_{i+1}) + f_7(bx_i) + f_7(bx_{i+1}) + f_7(ax_i) + f_7(ax_{i+1}) \\
 &= (2i + 8) + (2n + i + 2) + \left(\frac{6n + i + 3}{2}\right) + \left(\frac{6n + i + 1 + 3}{2}\right) + \\
 &\quad (n + 2 + i) + (n + 2 + i + 1) \\
 &= \frac{21n + 48}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

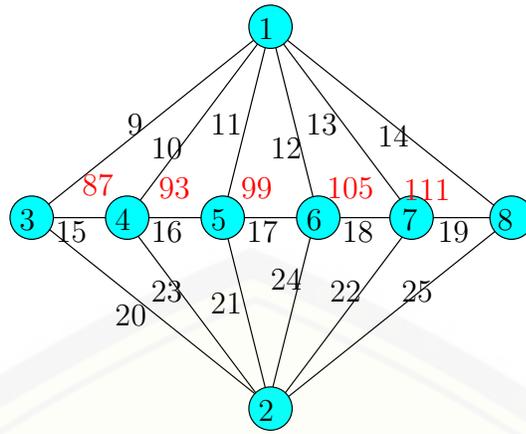
Bobot total covering  $W_{f_7}$  untuk  $n$  ganjil adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_7} &= w_{f_7} + f_7(x_i x_{i+1}) + f_7(bx_i) + f_7(bx_{i+1}) + f_7(ax_i) + f_7(ax_{i+1}) \\
 &= (2i + 8) + (2n + i + 2) + \left(\frac{6n + i + 3}{2}\right) + \left(\frac{7n + i + 3}{2}\right) + \\
 &\quad (n + 2 + i) + (n + 2 + i + 1) \\
 &= \frac{21n + 49}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Maka didapatkan himpunan bobot total covering untuk  $n$  genap adalah  $W_{f_7} = \left\{ \frac{21n+48}{2}, \frac{21n+60}{2}, \dots, \frac{33n+32}{2} \right\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n$  genap membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 6$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)d = \frac{21n+48}{2} + (n - 1)6 = \frac{33n+32}{2}$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(\frac{21n+48}{2}, 6)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap. Sedangkan himpunan bobot total covering untuk  $n$  ganjil adalah  $W_{f_7} = \left\{ \frac{21n+49}{2}, \frac{21n+61}{2}, \dots, \frac{33n+37}{2} \right\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n$  ganjil membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 6$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)d = \frac{21n+49}{2} + (n - 1)6 = \frac{33n+37}{2}$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(\frac{21n+49}{2}, 6)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil.  $\square$

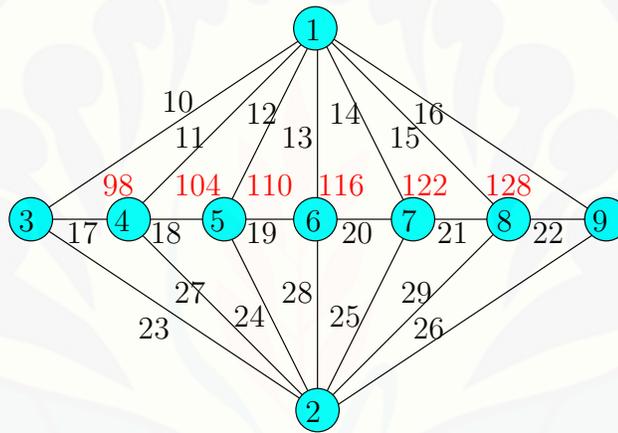
Gambar 4.11 merupakan contoh super  $(87, 6)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  (genap).

Gambar 4.12 merupakan contoh super  $(98, 6)$ - $B_2$  antimagic total covering



Gambar 4.11 Super  $(87, 6)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_6, P_6, 2)$

pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 7$  (ganjil).



Gambar 4.12 Super  $(98, 6)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_7, P_7, 2)$

Gambar 4.11 memiliki himpunan bobot total covering  $W_{f_7} = \{87, 93, 99, 105, 111\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  (genap) dengan  $a = 87$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 6$ . Sedangkan Gambar 4.12 memiliki himpunan bobot total covering  $W_{f_7} = \{98, 104, 110, 116, 122, 128\}$  untuk  $n = 7$  (ganjil) dengan  $a = 98$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 6$ . Teorema selanjutnya untuk amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $d = 7$ .

◇ **Teorema 4.1.8.** *Ada pelabelan super  $(9n + 27, 7)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.4. Sehingga fungsi titik dari  $f_8$ =fungsi titik  $f_4$ , dan untuk fungsi  $w_{f_8}$ =fungsi  $w_{f_4}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_8$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f_8(ax_i) &= n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \\ f_8(bx_i) &= 2n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_8(x_i x_{i+1}) &= 3n + i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

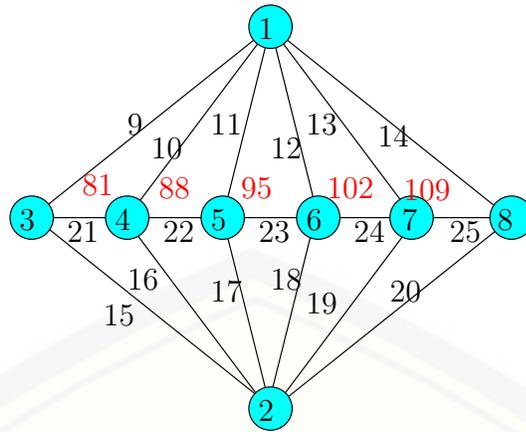
$W_{f_8}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut pada amalgamasi graf kipas.  $W_{f_8}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{f_8}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W_{f_8} &= w_{f_8} + f_8(ax_i) + f_8(ax_{i+1}) + f_8(bx_i) + f_8(bx_{i+1}) + f_8(x_i x_{i+1}) \\ &= (2i + 8) + (n + 2 + i) + (n + 2 + i + 1) + (2n + i + 2) + \\ &\quad (2n + i + 1 + 2) + (3n + i + 2) \\ &= 7i + 9n + 20, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Himpunan bobot total covering  $W_{f_8} = \{9n + 27, 9n + 34, \dots, 16n + 20\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=7$ . Sehingga terbukti bahwa amalgamasi pada graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  memiliki super  $(9n + 27, 7)$ - $B_2$  antimagic total covering untuk  $n \geq 2$ . □

Gambar 4.13 merupakan contoh super  $(81, 7)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_6, P_6, 2)$  untuk  $n = 6$ .

Gambar 4.13 memiliki himpunan bobot total covering  $W_{f_8} = \{81, 88, 95, 102,$



Gambar 4.13 Super  $(81, 7)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_6, P_6, 2)$

109} amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  (genap) dengan  $a = 81$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 7$ . Pembuktian selanjutnya adalah  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $d = 8$ .

◇ **Teorema 4.1.9.** *Ada pelabelan super  $(\frac{21n+48}{2}, 8)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan pelabelan super  $(\frac{21n+49}{2}, 8)$ - $(B_2)$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil.*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga fungsi titik dari  $f_9$ =fungsi titik  $f_1$ , dan untuk fungsi  $w_{f_9}$ =fungsi  $w_{f_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_9$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f_9(x_i x_{i+1}) &= 2n - i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_9(ax_i) &= 2n + 2i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_9(bx_i) &= 2n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Jika  $W_{f_9}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_9}$  dan

fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut: Bobot total covering  $W_{f_9}$  untuk  $n$  genap adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_9} &= w_{f_9} + f_9(x_i x_{i+1}) + f_9(bx_i) + f_9(bx_{i+1}) + f_9(ax_i) + f_9(ax_{i+1}) \\
 &= \left(\frac{n+2i+16}{2}\right) + (2n-i+2) + (2n+2i+1) + (2n+2i+2+1) \\
 &\quad + (2n+2i) + (2n+2i+2) \\
 &= \frac{21n+16i+32}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

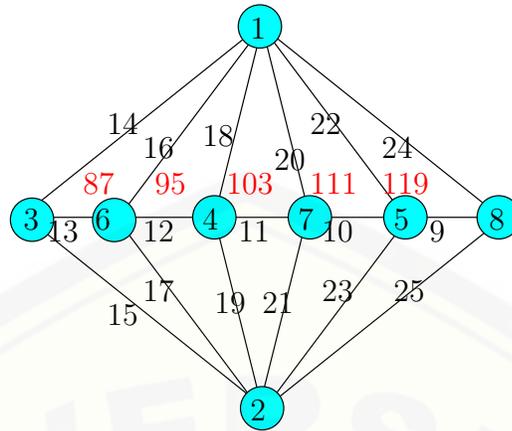
Bobot total covering  $W_{f_9}$  untuk  $n$  ganjil adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_9} &= w_{f_9} + f_9(x_i x_{i+1}) + f_9(bx_i) + f_9(bx_{i+1}) + f_9(ax_i) + f_9(ax_{i+1}) \\
 &= \left(\frac{n+2i+17}{2}\right) + (2n-i+2) + (2n+2i+1) + (2n+2i+2+1) \\
 &\quad + (2n+2i) + (2n+2i+2) \\
 &= \frac{21n+16i+33}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Himpunan bobot total covering  $W_{f_9} = \left\{\frac{21n+48}{2}, \frac{21n+64}{2}, \dots, \frac{37n+32}{2}\right\}$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan  $W_{f_9} = \left\{\frac{21n+49}{2}, \frac{21n+65}{2}, \dots, \frac{37n+33}{2}\right\}$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil. Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=8$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = \frac{21n+48}{2} + (n-1)8 = \frac{37n+32}{2}$  sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(\frac{21n+48}{2}, 8)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap. Sedangkan himpunan bobot total covering untuk  $n$  ganjil adalah  $W_{f_9} = \left\{\frac{21n+49}{2}, \frac{21n+65}{2}, \dots, \frac{37n+33}{2}\right\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n$  ganjil membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 8$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = \frac{21n+49}{2} + (n-1)8 = \frac{37n+33}{2}$  sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(\frac{21n+49}{2}, 8)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil.  $\square$

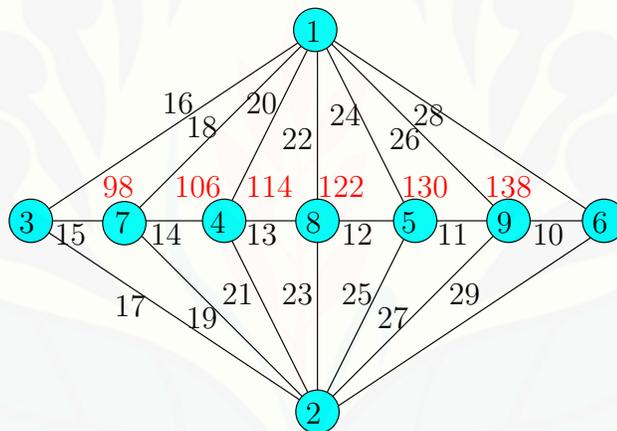
Gambar 4.14 merupakan contoh super  $(87, 8)$ - $B_2$  antimagic total covering

pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 6$  (genap).



Gambar 4.14 Super  $(87, 8)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_6, P_6, 2)$

Gambar 4.15 merupakan contoh super  $(98, 8)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 7$  (ganjil).



Gambar 4.15 Super  $(98, 8)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_7, P_7, 2)$

Gambar 4.14 memiliki himpunan bobot total covering  $W_{f_9} = \{87, 95, 103, 111, 119\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  (genap) dengan  $a = 87$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 8$ . Sedangkan Gambar 4.15 memiliki himpunan bobot total covering  $W_{f_9} = \{98, 106, 114, 122, 130, 138\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 7$  (ganjil) dengan  $a = 98$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 8$ . Pembuktian selanjutnya adalah amalgamasi

graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $d = 9$ .

◇ **Teorema 4.1.10.** *Ada pelabelan super  $(11n+23, 9)$ - $B_n$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.2. Sehingga fungsi titik dari  $f_{10}$ =fungsi titik  $f_2$ , dan untuk fungsi  $w_{f_{10}}$ =fungsi  $w_{f_2}$ . Selanjutnya untuk melabeli sisi  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  seperti dengan pelabelan sisi pada teorema 4.1.9 untuk  $n$  genap, sehingga fungsi sisi dari  $f_{10}$ =fungsi sisi pada  $f_9$ .

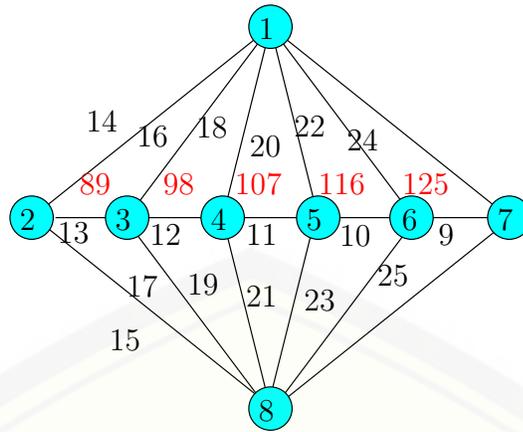
Jika  $W_{f_{10}}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_{10}}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{10}} &= w_{f_{10}} + f_{10}(x_i x_{i+1}) + f_{10}(ax_i) + f_{10}(ax_{i+1}) + f_{10}(bx_i) + f_{10}(bx_{i+1}) \\ &= (2i + n + 6) + (2n - i + 2) + (2n + 2i) + (2n + 2i + 2) + (2n + 2i + 1) \\ &\quad + (2n + 2i + 2 + 1) \\ &= 11n + 9i + 14, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Himpunan bobot total covering  $W_{f_{10}} = \{11n + 23, 11n + 32, \dots, 29n + 5\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 9$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)d = \frac{11n+23}{2} + (n - 1)9 = \frac{29n+5}{2}$  sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(\frac{11n+23}{2}, 9)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$ . □

Gambar 4.16 merupakan contoh super  $(89, 9)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 6$ .

Himpunan bobot total covering pada gambar 4.16 adalah  $W_{f_{10}} = \{89, 98, 107, 116, 125\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 6$  dengan  $a = 89$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 9$ . Teorema selanjutnya



Gambar 4.16 Super  $(89, 9)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_6, P_6, 2)$

untuk amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dengan  $d = 10$ .

◇ **Teorema 4.1.11.** *Ada pelabelan super  $(\frac{15n+60}{2}, 10)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan pelabelan super  $(\frac{15n+61}{2}, 10)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil.*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga fungsi titik dari  $f_{11}$ =fungsi titik  $f_1$ , dan untuk fungsi  $w_{f_{11}}$ =fungsi  $w_{f_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_{11}$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f_{11}(ax_i) &= n + 2i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{11}(bx_i) &= n + 2i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{11}(x_i x_{i+1}) &= 3n + i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1 \end{aligned}$$

Jika  $W_{f_{11}}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_{11}}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut: Bobot total covering  $W_{f_{11}}$  untuk  $n$  genap adalah sebagai

berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_{11}} &= w_{f_{11}} + f_{11}(ax_i) + f_{11}(ax_{i+1}) + f_{11}(bx_i) + f_{11}(bx_{i+1}) + f_{11}(x_i x_{i+1}) \\
 &= \left(\frac{n+2i+16}{2}\right) + (n+2i+1) + (n+2i+2+1) + (n+2i+2) \\
 &\quad + (n+2i+2+2) + (3n+i+2) \\
 &= \frac{15n+20i+40}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

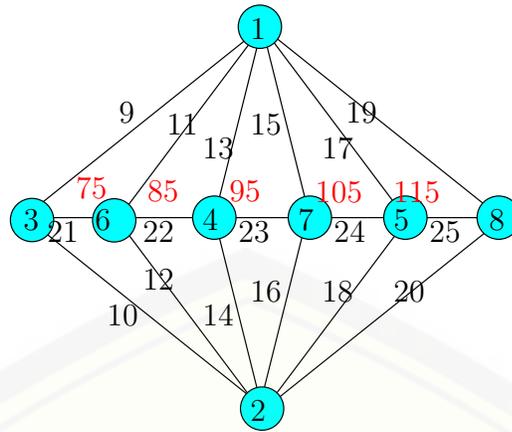
Bobot total covering  $W_{f_{11}}$  untuk  $n$  ganjil adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_{11}} &= w_{f_{11}} + f_{11}(ax_i) + f_{11}(ax_{i+1}) + f_{11}(bx_i) + f_{11}(bx_{i+1}) + f_{11}(x_i x_{i+1}) \\
 &= \left(\frac{n+2i+17}{2}\right) + (n+2i+1) + (n+2i+2+1) + (n+2i+2) \\
 &\quad + (n+2i+2+2) + (3n+i+2) \\
 &= \frac{15n+20i+41}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Himpunan bobot total selimut  $W_{f_{11}} = \left\{\frac{15n+60}{2}, \frac{15n+80}{2}, \dots, \frac{35n+40}{2}\right\}$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan  $W_{f_{11}} = \left\{\frac{15n+61}{2}, \frac{15n+81}{2}, \dots, \frac{35n+41}{2}\right\}$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil. Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=10$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = \frac{15n+60}{2} + (n-1)10 = \frac{35n+40}{2}$  sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(\frac{15n+60}{2}, 9)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap. Sedangkan himpunan bobot total covering untuk  $n$  ganjil adalah  $W_{f_{11}} = \left\{\frac{15n+61}{2}, \frac{15n+81}{2}, \dots, \frac{35n+41}{2}\right\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n$  ganjil membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 10$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = \frac{15n+61}{2} + (n-1)10 = \frac{35n+41}{2}$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(\frac{15n+61}{2}, 10)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil.  $\square$

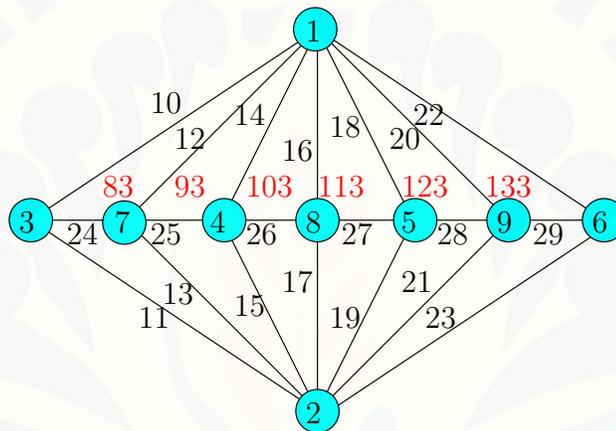
Gambar 4.17 merupakan contoh super  $(75, 10)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 6$  (genap).

Gambar 4.18 merupakan contoh super  $(83, 10)$ - $B_2$  antimagic total covering



Gambar 4.17 Super (75, 10)- $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_6, P_6, 2)$

pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  dan  $n = 7$  (ganjil). Himpunan bobot



Gambar 4.18 Super (83, 10)- $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_7, P_7, 2)$

total covering pada Gambar 4.17 adalah  $W_{f_{11}} = \{75, 85, 95, 105, 115\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 6$  dengan  $a = 75$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 10$ . Sedangkan himpunan bobot total covering pada Gambar 4.18 adalah  $W_{f_{11}} = \{83, 93, 103, 113, 123, 133\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 7$  dengan  $a = 83$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 10$ . Teorema selanjutnya untuk amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dengan  $d = 11$ .

◇ **Teorema 4.1.12.** *Ada pelabelan super  $(8n+29, 11)$ - $B_n$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.2. Sehingga fungsi titik  $f_{12}$ =fungsi titik  $f_2$ , dan untuk fungsi  $w_{f_{12}}$ =fungsi  $w_{f_2}$ . Selanjutnya untuk melabeli sisi amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n \geq 2$  seperti dengan pelabelan sisi pada teorema 4.1.11 untuk  $n$  genap, sehingga fungsi sisi dari  $f_6$ =fungsi sisi pada  $f_{11}$ .

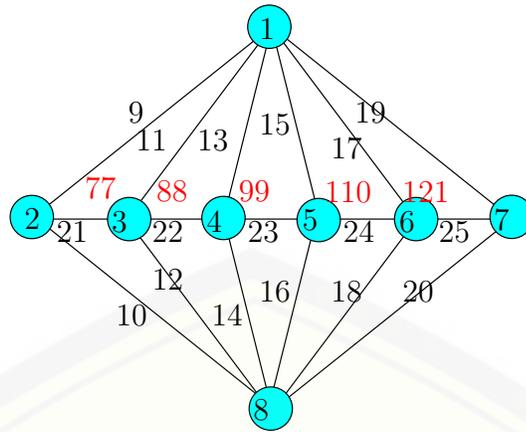
Jika  $W_{f_{12}}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_{12}}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{12}} &= w_{f_{12}} + f_{12}(ax_i) + f_{12}(ax_{i+1}) + f_{12}(bx_i) + f_{12}(bx_{i+1}) + f_{12}(x_i x_{i+1}) \\ &= (2i + n + 6) + (n + 2i + 1) + (n + 2i + 2 + 1) + (n + 2i + 2) \\ &\quad + (n + 2i + 2 + 2) + (3n + i + 2) \\ &= 8n + 11i + 18, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Himpunan bobot total covering  $W_{f_{12}} = \{8n + 29, 8n + 40, \dots, 19n + 18\}$  amalgamasi graf kipas amal( $F_n, P_n, 2$ ) membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 11$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = 8n + 29 + (n-1)11 = 19n + 18$  sehingga terbukti bahwa ada pelabelan super  $(8n + 29, 11)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n \geq 2$ . □

Gambar 4.19 merupakan contoh super  $(77, 11)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n = 6$ .

Himpunan bobot total covering pada Gambar 4.19 adalah  $W_{f_{12}} = \{77, 88, 99, 110, 121\}$  amalgamasi graf kipas amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 6$  dengan  $a = 77$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 11$ . Teorema selanjutnya untuk amalgamasi graf kipas amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n \geq 2$  dengan  $d = 13$ .



Gambar 4.19 Super (77, 11)- $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_6, P_6, 2)$

◇ **Teorema 4.1.13.** *Ada pelabelan super  $(7n + 31, 13)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan pelabelan super  $(7n + 33, 13)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas amal( $F_n, P_n, 2$ ) untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil.*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.1. Sehingga fungsi titik dari  $f_{13}$ =fungsi titik  $f_1$ , dan untuk fungsi  $w_{f_{13}}$ =fungsi  $w_{f_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_{13}$  sebagai berikut.

$$f_{13}(ax_i) = \begin{cases} \frac{2n+3i+3}{2}, & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, n \text{ genap} \\ \frac{5n+3i}{2} & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, n \text{ genap} \\ \frac{5n+3i+3}{2} & \text{untuk } 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$f_{13}(bx_i) = n + 3i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$f_{13}(x_i x_{i+1}) = n + 3i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1$$

Jika  $W_{f_{13}}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_{13}}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat diru-

muskan sebagai berikut:

Bobot total covering  $w_{f_{13}}$  untuk  $n$  genap adalah sebagai berikut:

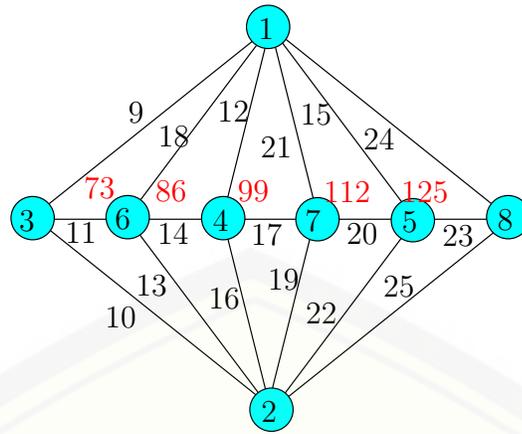
$$\begin{aligned}
 W_{f_{13}} &= w_{f_{13}} + f_{13}(ax_i) + f_{13}(ax_{i+1}) + f_{13}(bx_i) + f_{13}(bx_{i+1}) + f_{13}(x_i x_{i+1}) \\
 &= \left(\frac{n+2i+16}{2}\right) + \left(\frac{2n+3i+3}{2}\right) + \left(\frac{5n+3i+3}{2}\right) + (n+3i+1) + \\
 &\quad (n+3i+3+1) + (n+3i+2) \\
 &= 13i+7n+18, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Bobot total covering  $W_{f_{13}}$  untuk  $n$  ganjil adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_{13}} &= w_{f_{13}} + f_{13}(ax_i) + f_{13}(ax_{i+1}) + f_{13}(bx_i) + f_{13}(bx_{i+1}) + f_{13}(x_i x_{i+1}) \\
 &= \left(\frac{2i+n+17}{2}\right) + \left(\frac{2n+3i+3}{2}\right) + \left(\frac{5n+3i+3}{2}\right) + (n+3i+1) + \\
 &\quad (n+3i+3+1) + (n+3i+2) \\
 &= 13i+7n+20, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

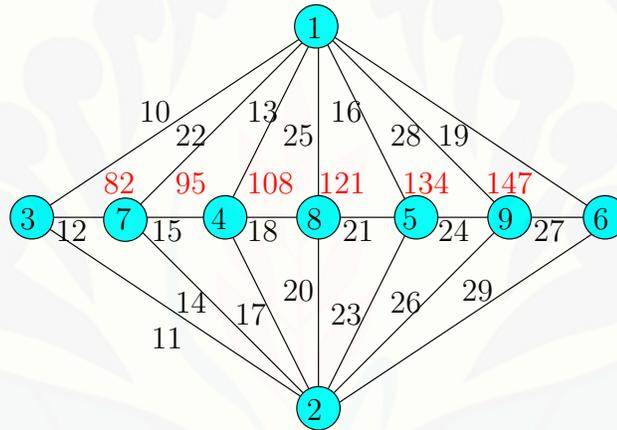
Maka didapatkan himpunan bobot total covering untuk  $W_{f_{13}} = \{7n+31, 7n+44, \dots, 20n+18\}$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 13$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = 7n+31+(n-1)13 = 20n+18$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(7n+31, 13)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap. Sedangkan himpunan bobot total covering  $W_{f_{13}} = \{7n+33, 7n+46, \dots, 20n+20\}$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 13$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = 7n+33+(n-1)13 = 20n+20$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(7n+33, 13)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil.  $\square$

Gambar 4.20 merupakan contoh super  $(73, 13)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 6$  (genap).



Gambar 4.20 Super (73, 13)- $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_6, P_6, 2)$

Gambar 4.21 merupakan contoh super (82, 13)- $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 7$  (ganjil).



Gambar 4.21 Super (82, 13)- $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_7, P_7, 2)$

Gambar 4.20 memiliki himpunan bobot total covering  $W_{f_{13}} = \{73, 86, 99, 112, 125\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  (genap) dengan  $a = 73$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 13$ . Sedangkan Gambar 4.21 memiliki himpunan bobot total covering  $W_{f_{13}} = \{82, 95, 108, 121, 134, 147\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 7$  (ganjil) dengan  $a = 82$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 13$ . Teorema selanjutnya untuk amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $d = 14$ .

◇ **Teorema 4.1.14.** *Ada pelabelan super  $(\frac{15n+60}{2}, 14)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap dan pelabelan super  $(\frac{15n+63}{2}, 14)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil.*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.2. Sehingga fungsi titik dari  $f_{14}$ =fungsi titik  $f_2$ , dan untuk fungsi  $w_{f_{14}}$ =fungsi  $w_{f_2}$ . Selanjutnya untuk melabeli sisi  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  seperti dengan pelabelan sisi pada teorema 4.1.13 untuk  $n$  genap dan  $n$  ganjil, sehingga fungsi sisi dari  $f_{14}$ =fungsi sisi pada  $f_{13}$ .

$W_{f_{14}}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut pada amalgamasi graf kipas.  $W_{f_{14}}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{f_{14}}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

Bobot total covering  $w_{f_{14}}$  untuk  $n$  genap adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{14}} &= w_{f_{14}} + f_{14}(ax_i) + f_{14}(ax_{i+1}) + f_{14}(bx_i) + f_{14}(bx_{i+1}) + f_{14}(x_i x_{i+1}) \\ &= (n + 2i + 6) + \left(\frac{2n + 3i + 3}{2}\right) + \left(\frac{5n + 3i + 3}{2}\right) + (n + 3i + 1) + \\ &\quad (n + 3i + 3 + 1) + (n + 3i + 2) \\ &= \frac{15n + 28i + 32}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

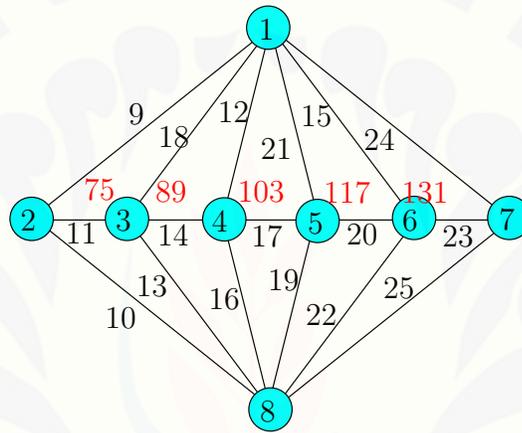
Bobot total covering  $W_{f_{14}}$  untuk  $n$  ganjil adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{14}} &= w_{f_{14}} + f_{14}(ax_i) + f_{14}(ax_{i+1}) + f_{14}(bx_i) + f_{14}(bx_{i+1}) + f_{14}(x_i x_{i+1}) \\ &= (n + 2i + 6) + \left(\frac{2n + 3i + 3}{2}\right) + \left(\frac{5n + 3i + 3 + 3}{2}\right) + (n + 3i + 1) + \\ &\quad (n + 3i + 3 + 1) + (n + 3i + 2) \\ &= \frac{15n + 28i + 35}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Himpunan bobot total covering untuk  $W_{f_{14}} = \left\{ \frac{15n+60}{2}, \frac{15n+88}{2}, \dots, \frac{43n+32}{2} \right\}$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  membentuk

barisan aritmatika dengan  $d = 14$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)d = \frac{15n+60}{2} + (n - 1)14 = \frac{43n+32}{2}$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(15n + 60, 13)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  genap. Sedangkan himpunan bobot total covering untuk  $W_{f_{14}} = \{\frac{15n+63}{2}, \frac{15n+91}{2}, \dots, \frac{43n+35}{2}\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n$  ganjil membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 14$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)d = \frac{15n+63}{2} + (n - 1)14 = \frac{43n+35}{2}$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(\frac{15n+63}{2}, 14)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n$  ganjil.  $\square$

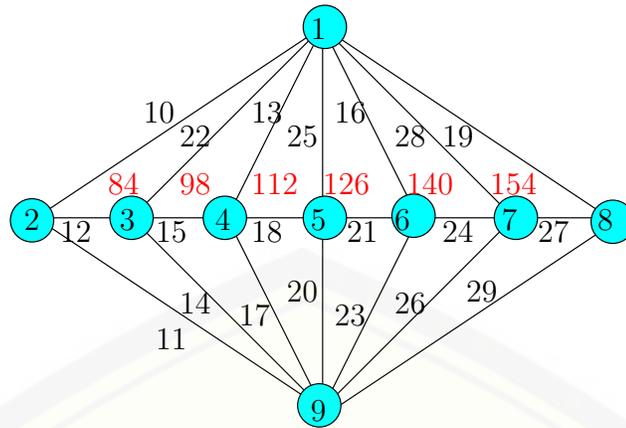
Gambar 4.22 merupakan contoh super  $(75, 14)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 6$  (genap).



Gambar 4.22 Super  $(75, 14)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_6, P_6, 2)$

Gambar 4.23 merupakan contoh super  $(84, 14)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 7$  ganjil.

Gambar 4.22 memiliki himpunan bobot total covering  $W_{f_{14}} = \{75, 89, 103, 117, 131\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  (genap) dengan  $a = 75$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 14$ . Sedangkan Gambar 4.23 memiliki himpunan bobot total covering  $W_{f_{14}} = \{84, 98, 112, 126, 140, 154\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 7$  (ganjil) dengan  $a = 84$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 14$ . Teorema selanjutnya untuk amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $d = 16$ .



Gambar 4.23 Super (84, 14)- $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_7, P_7, 2)$

◇ **Teorema 4.1.15.** *Ada pelabelan super  $(6n+33, 17)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.1.2. Sehingga fungsi titik dari  $f_{15}$ =fungsi titik  $f_2$ , dan untuk fungsi  $w_{f_{15}}$ =fungsi  $w_{f_2}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $f_{15}$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 f_{15}(ax_i) &= n + 3i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{15}(bx_i) &= n + 3i + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\
 f_{15}(x_i x_{i+1}) &= n + 3i + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1
 \end{aligned}$$

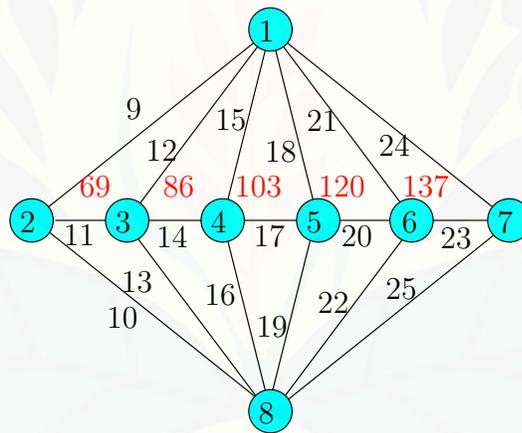
Jika  $W_{f_{15}}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{f_{15}}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat diru-

muskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 W_{f_{15}} &= w_{f_{15}} + f_{15}(ax_i) + f_{15}(ax_{i+1}) + f_{15}(bx_i) + f_{15}(bx_{i+1}) + f_{15}(x_ix_{i+1}) \\
 &= (2i + n + 6) + (n + 3i) + (n + 3i + 3) + (n + 3i + 1) \\
 &\quad + (n + 3i + 3 + 1) + (n + 3i + 2) \\
 &= 6n + 17i + 16, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Maka didapatkan himpunan bobot total covering  $W_{f_{15}} = \{6n + 33, 6n + 50, \dots, 22n + 17\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 17$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)d = 6n + 33 + (n - 1)17 = 22n + 17$  maka terbukti bahwa ada pelabelan super  $(6n + 33, 17)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.24 merupakan contoh super  $(69, 17)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 6$ . Himpunan



Gambar 4.24 super  $(69, 17)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_6, P_6, 2)$

bobot total covering pada gambar 4.24 adalah  $W_{f_{15}} = \{69, 86, 103, 120, 137\}$  amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $n = 6$  dengan  $a = 69$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 17$ . Teorema selanjutnya adalah *expand* dari graf kipas sebanyak 3.

◇ **Teorema 4.1.16.** *Ada pelabelan super  $((m + \frac{5}{2})n^2 + (2m + \frac{13}{2})n + m + 4, 9)$ - $B_n$  antimagic total covering pada generalisasi amalgamasi graf kipas amal( $F_m, P_m, n$ ) untuk  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli setiap titik pada generalisasi amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didefinisikan  $f_{17}$  adalah fungsi yang bijektif. Fungsi titik dari  $f_{17}$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f_{17}(a_i) &= i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ f_{17}(x_j) &= n + j, \text{ untuk } 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Bobot selimut dari pelabelan total covering pada generalisasi amalgamasi graf kipas adalah  $w_{f_{17}}$ . Bobot selimut didapat dari penjumlahan fungsi titik dan  $\mathcal{H} = B_n$ . Fungsi  $w_{f_{17}}$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{f_{17}} &= \bigcup_{j=1}^{m-1} \left\{ \sum_{i=1}^n (f_{17}(a_i) + f_{17}(x_j) + f_{17}(x_{j+1})) \right\} \\ &= \bigcup_{j=1}^{m-1} \left\{ \sum_{i=1}^n i + (n + j) + (n + j + 1) \right\} \\ &= \bigcup_{j=1}^{m-1} \left\{ \frac{n^2 + 5n}{2} + 2j + 1 \right\}, \text{ untuk } 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya mencari label sisi yang akan digunakan dalam mencari selimut total. Labeli setiap sisi dari generalisasi amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didapatkan fungsi sisi dari  $f_{17}$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f_{17}(a_i x_j) &= n + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ f_{17}(x_j x_{j+1}) &= n + m + nm + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

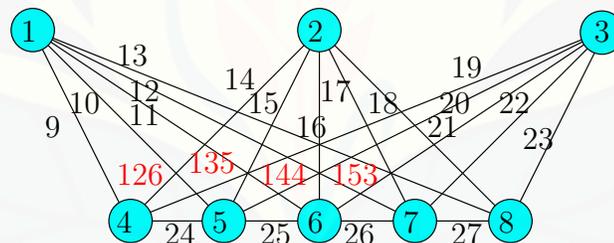
Jika  $W_{f_{17}}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf

kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut  $w_{f_{17}}$  dengan label sisi yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{f_{17}} &= \bigcup_{j=1}^{m-1} \left\{ w + \sum_{i=1}^n (f_{17}(a_i x_j) + \sum_{i=1}^n f_{17}(a_i x_{j+1}) + f_{17}(x_j x_{j+1})) \right\} \\ &= \bigcup_{j=1}^{m-1} \left\{ w + \sum_{i=1}^n (n + mi + j) + \sum_{i=1}^n (n + mi + j + 1) + (n + m + nm + j) \right\} \\ &= \left( m + \frac{5}{2} \right) n^2 + \left( 2m + \frac{9}{2} + 2j \right) n + m + 1 + 3j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Himpunan bobot total covering  $W_{f_{17}} = \left\{ \left( m + \frac{5}{2} \right) n^2 + \left( 2m + \frac{13}{2} \right) n + m + 4, \left( m + \frac{5}{2} \right) n^2 + \left( 2m + \frac{17}{2} \right) n + m + 7 \right\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=9$ . Sehingga terbukti ada pelabelan super  $\left( \left( m + \frac{5}{2} \right) n^2 + \left( 2m + \frac{13}{2} \right) n + m + 4, 9 \right)$ - $B_n$  antimagic total covering pada generalisasi amalgamasi graf kipas  $Amal(F_m, P_m, n)$ - $B_n$  dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.25 merupakan contoh super  $\left( \left( m + \frac{5}{2} \right) n^2 + \left( 2m + \frac{13}{2} \right) n + m + 4, 9 \right)$ - $B_3$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $Amal(F_m, P_m, n)$ - $B_n$  dengan  $m = 5$  dan  $n = 3$ .



Gambar 4.25 super  $(126, 9)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $Amal(F_5, P_5, 3)$

Himpunan bobot total covering pada Gambar 4.25 adalah  $W_{f_{17}} = \{126, 135, 144, 153\}$  amalgamasi graf kipas  $Amal(F_m, P_m, n)$  untuk  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$  dengan  $a = 126$  dan membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 9$ .

#### 4.2 Pelabelan Super $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ Antimagic Total Covering pada Amalgamasi Graf Kipas $m$ $Amal(F_n, P_n, 2)$ Diskonektif

Selanjutnya peneliti melakukan penelitian untuk gabungan amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$ . Gabungan amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  didefinisikan sebagai amalgamasi graf kipas dengan salinan sebanyak  $m$ . Dalam hal ini graf tersebut diletakkan dalam posisi sejajar kebawah. Gabungan amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  didefinisikan sebagai gabungan dari  $m$  graf yang mempunyai himpunan titik  $V = \{a^j, x_i^j, b^j; 1 \leq i \leq n \ 1 \leq j \leq m\}$  dan himpunan sisi  $E = \{ax_i^j, bx_i^j; 1 \leq i \leq n \ 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i x_{i+1}^j; 1 \leq i \leq n - 1 \ 1 \leq j \leq m\}$ .

Sama seperti pada amalgamasi graf kipas  $Amal(F_n, P_n, 2)$  tunggal, untuk menentukan batas atas  $d$  pada gabungan amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$ , perlu diketahui pula rumusan jumlah titik ( $p_G$ ) dan jumlah sisi ( $q_G$ ) pada gabungan amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$ . Jumlah titik dan jumlah sisi pada  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  dapat ditentukan dengan terlebih dahulu mencermati definisi gabungan pada suatu graf. Gabungan  $m$  amalgamasi graf kipas yang dinotasikan  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari  $m$  buah salinan amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  dengan  $1 \leq j \leq m$ , ditulis :  $Amal(F_n, P_n, 2)^1 \cup Amal(F_n, P_n, 2)^2 \cup Amal(F_n, P_n, 2)^3 \cup \dots \cup Amal(F_n, P_n, 2)^m$ . Sehingga jumlah titik graf  $Amal(F_n, P_n, 2)$  adalah  $m$  kali jumlah titik graf  $Amal(F_n, P_n, 2)$  dapat dituliskan dalam  $p_G = m(n + 2) = mn + 2m$  dan jumlah sisi graf  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  adalah  $m$  kali jumlah sisi graf  $Amal(F_n, P_n, 2)$  dapat dituliskan dengan  $q_G = m(3n - 1) = 3mn - m$ . Sedangkan jumlah titik pada selimut graf  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  yaitu  $p_H = 4$  dan jumlah sisi pada selimut graf  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  yaitu  $q_H = 5$ . Jumlah selimut graf  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  adalah  $m$  kali jumlah selimut graf  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$ , dapat dituliskan  $s = m(n - 1) = nm - m$ .

Batas atas  $d$  gabungan amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  juga dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 2.3.1. Diketahui jumlah titik pada graf  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  adalah  $p_G = mn + 2m$  dan jumlah sisi  $q_G = 3mn - m$ .

Sedangkan jumlah titik pada selimut graf  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  adalah  $p_H = 4$  dan jumlah sisi pada selimut  $q_H = 5$  dengan jumlah selimut  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  adalah  $s = nm - m$  untuk  $m$  adalah jumlah salinan amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  dari atas ke bawah dan  $n$  adalah banyaknya *expand* amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  dari samping kiri ke kanan. Dengan demikian batas atas nilai beda  $d$  tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
d &\leq \frac{(p_G - p_H)p_H + (q_G - q_H)q_H}{s - 1} \\
&= \frac{(nm + 2m - 4)4 + (3nm - m - 5)5}{nm - m - 1} \\
&= \frac{(4nm + 8m - 16) + (15nm - 5m - 25)}{nm - m - 1} \\
&= \frac{19nm + 3m - 41}{nm - m - 1} \\
&= \frac{19(nm - m - 1)}{(nm - m - 1)} + \frac{22m - 22}{nm - m - 1} \\
&= 19 + \frac{22m - 22}{nm - m - 1} \\
&\text{karena } 0 < \frac{22(m - 1)}{nm - m - 1} \leq 22 \\
d &\leq 19 + 22 \\
d &\leq 41
\end{aligned}$$

Pada gabungan amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  selanjutnya akan ditentukan fungsi bijektif super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering sesuai dengan nilai  $d$  yang telah ditetapkan. Metode yang digunakan dalam menemukan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada gabungan amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  terdiri dari beberapa langkah yang diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas  $i, j$  dan  $m$  yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Setelah fungsi bijektif diketahui maka harus dibuktikan secara deduktif matematika untuk membuktikan kebenaran dari teo-

rema tersebut.

Perlu diketahui bahwa teorema dalam penelitian ini adalah bukan teorema yang biimplikatif atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah. Dari hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Untuk menentukan pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada gabungan amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$ . Terlebih dahulu harus diketahui batas atas nilai  $d$  untuk gabungan graf sebanyak  $m$  amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$ , dengan menggunakan rumus yang telah ada.

◇ **Teorema 4.2.1.** *Ada pelabelan super  $(12mn + 16m + 5, 1)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas dari amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didefinisikan  $\alpha_1$  adalah fungsi yang bijektif. Fungsi titik dari  $\alpha_1$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\alpha_1(a_j) &= m - j + 1, \text{ untuk } 1 \leq j \leq m \\ \alpha_1(b_j) &= m + j, \text{ untuk } 1 \leq j \leq m \\ \alpha_1(x_{ij}) &= mi + m + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\end{aligned}$$

Fungsi  $\alpha_1$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $V$  ke himpunan bilangan asli  $\{1, 2, 3, \dots, nm + 2m\}$ . Didefinisikan  $w_{\alpha_1}$  adalah bobot selimut dari pelabelan total selimut pada amalgamasi graf kipas. Bobot selimut didapat dari penjumlahan 4 fungsi titik yang telah didapat diatas. Fungsi  $w_{\alpha_1}$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w_{\alpha_1} &= \alpha_1(a) + \alpha_1(b) + \alpha_1(x_i) + \alpha_1(x_{i+1}) \\
&= (m - j + 1) + (m + j) + (mi + m + j) + (m(i + 1) + m + j) \\
&= 5m + 2j + 2mi + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m
\end{aligned}$$

Langkah selanjutnya mencari label sisi yang akan digunakan dalam mencari selimut total. Labeli setiap sisi dari amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli. Didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_1$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\alpha_1(ax_i) &= 2mn + 3m - mi - j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\
\alpha_1(bx_i) &= mi + 2mn + m + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\
\alpha_1(x_i x_{i+1}) &= 4mn - mi + 2m - j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m
\end{aligned}$$

$W_{\alpha_1}$  didefinisikan sebagai bobot total selimut pada amalgamasi graf kipas.  $W_{\alpha_1}$  didapatkan dari penjumlahan bobot selimut  $w_{\alpha_1}$  dengan fungsi label sisinya, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_1} &= w_{\alpha_1} + \alpha_1(ax_i) + \alpha_1(ax_{i+1}) + \alpha_1(bx_i) + \alpha_1(bx_{i+1}) + \alpha_1(x_i x_{i+1}) \\
&= (5m + 2j + 2mi + 1) + (2mn + 3m - mi - j + 1) + (2mn + 3m - \\
&\quad m(i + 1) - j + 1) + (mi + 2mn + m + j) + (m(i + 1) + 2mn + m + j) + (4mn - mi + 2 \\
&= 15m + j + mi + 4 + 12mn, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m
\end{aligned}$$

Himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_1} = \{12mn + 16m + 5, 12mn + 16m + 6, \dots, 13mn + 16m + 4\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=1$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = 12mn + 16m + 5 + (mn-1)1 =$

$13mn + 16m + 4$  sehingga terbukti ada pelabelan super  $(12mn + 16m + 17, 1)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.26 merupakan contoh super  $(12mn + 16m + 5, 1)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  dan  $m = 3$ .

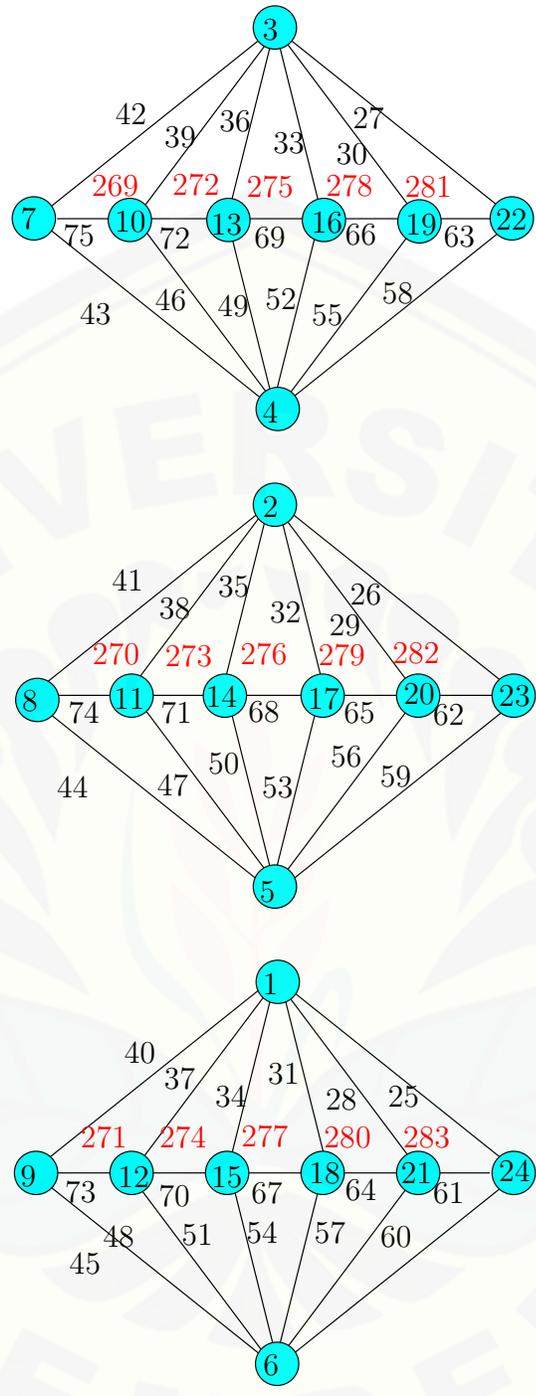
Pada Gambar 4.26 merupakan gabungan saling lepas pada amalgamasi graf kipas membentuk barisan aritmatika  $W_{\alpha_1} = \{269, 270, 271, \dots, 283\}$  dengan  $a = 269$  dan  $d = 1$ .

$\diamond$  **Teorema 4.2.2.** *Ada pelabelan super  $(11nm + 17m + 6, 3)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas dari amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga fungsi titik dari  $\alpha_2$ =fungsi titik  $\alpha_1$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_2}$ =fungsi  $w_{\alpha_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_2$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\alpha_2(ax_i) &= 2mn + 3m - mi + 1 - j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ \alpha_2(bx_i) &= mi + m + 2mn + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ \alpha_2(x_i x_{i+1}) &= mi + m + 3mn + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\end{aligned}$$

Jika  $W_{\alpha_2}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{\alpha_2}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:



Gambar 4.26 super  $(269, 1)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $m$   $Amal(F_6, P_6, 2)$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_2} &= w_{\alpha_2} + \alpha_2(ax_i) + \alpha_2(ax_{i+1}) + \alpha_2(bx_i) + \alpha_2(bx_{i+1}) + \alpha_2(x_ix_{i+1}) \\
&= (5m + 2j + 2mi + 1) + (2mn + 3m - mi + 1 - j) + (2mn + 3m - \\
&\quad m(i + 1) + 1 - j + (mi + m + 2mn + j) + (m(i + 1) + m + 2mn + j) + (mi + m + 3mn) \\
&= (3mi + 14m + 3j + 3 + 11mn), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m
\end{aligned}$$

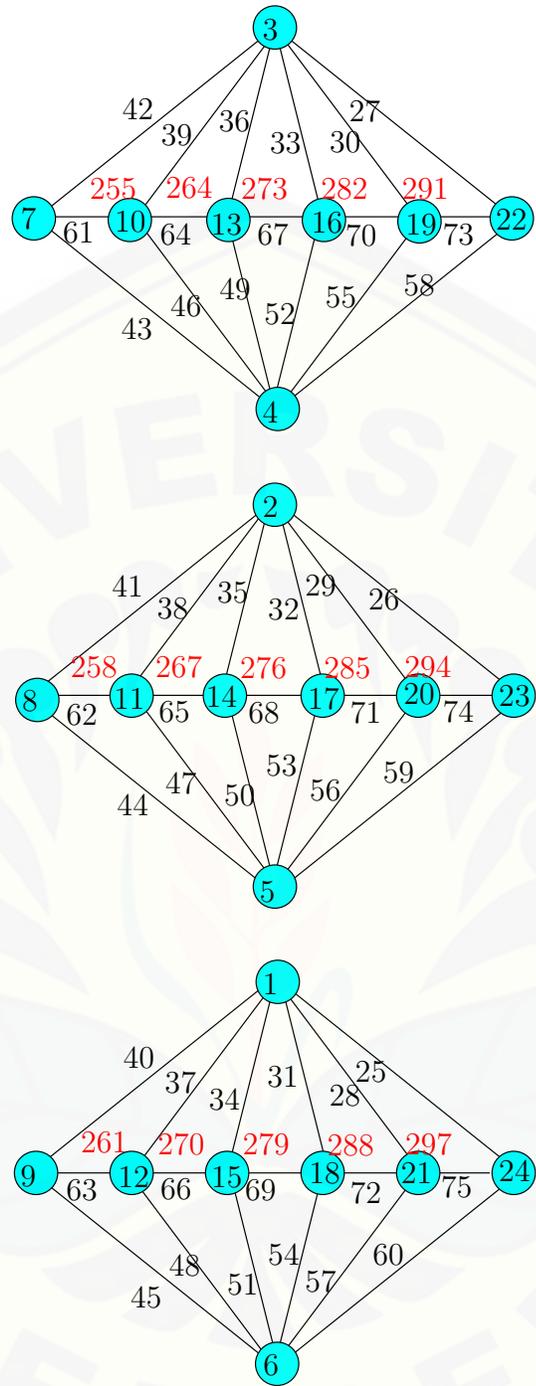
Himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_2} = \{11mn + 17m + 6, 11mn + 17m + 9, \dots, 14mn + 17m + 3\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d = 3$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = 11mn + 17m + 6 + (mn-1)3 = 14mn + 17m + 3$  sehingga terbukti ada pelabelan super  $(11mn + 17m + 6, 3)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.27 merupakan contoh super  $(11nm + 17m + 6, 3)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  dengan  $n = 6$  dan  $m = 3$ .

Pada Gambar 4.27 merupakan gabungan saling lepas pada amalgamasi graf kipas membentuk barisan aritmatika  $W_{\alpha_2} = \{255, 258, 261, \dots, 297\}$  dengan  $a = 255$  dan  $d = 3$ .

$\diamond$  **Teorema 4.2.3.** *Ada pelabelan super  $(10nm + 18m + 7, 5)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas dari amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga fungsi titik dari  $\alpha_3$ =fungsi titik  $\alpha_1$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_3}$ =fungsi  $w_{\alpha_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_3$  sebagai berikut.



Gambar 4.27 Super  $(255, 3)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $m$   $Amal(F_6, P_6, 2)$

$$\begin{aligned}\alpha_3(ax_i) &= mi + j + mn + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ \alpha_3(bx_i) &= mi + j + 2mn + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ \alpha_3(x_i x_{i+1}) &= 4mn + 2m - mi - j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\end{aligned}$$

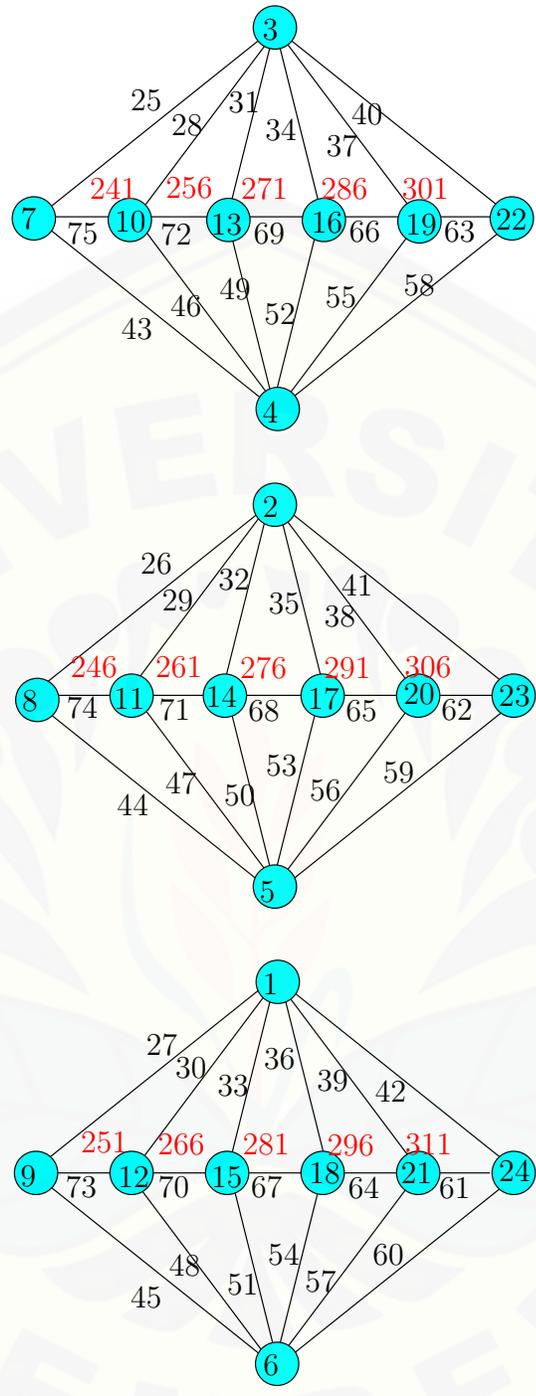
Jika  $W_{\alpha_3}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{\alpha_3}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}W_{\alpha_3} &= w_{\alpha_3} + \alpha_3(ax_i) + \alpha_3(ax_{i+1}) + \alpha_3(bx_i) + \alpha_3(bx_{i+1}) + \alpha_3(x_i x_{i+1}) \\ &= (5m + 2j + 2mi + 1) + (mi + j + mn + m) + (m(i + 1) + j + mn + m \\ &\quad + (mi + j + 2mn + m) + (m(i + 1) + j + 2mn + m + (4mn + 2m - mi - j + 1) \\ &= 10nm + 5mi + 13m + 5j + 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\end{aligned}$$

Himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_3} = \{10mn + 18m + 7, 10mn + 18m + 12, \dots, 15mn + 18m + 2\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=5$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = 10mn + 18m + 7 + (mn-1)5 = 15mn + 18m + 2$  sehingga terbukti ada pelabelan super  $(10mn + 18m + 7, 5)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.28 merupakan contoh super  $(10nm + 18m + 7, 5)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  dan  $m = 3$ .

Pada Gambar 4.28 merupakan gabungan saling lepas pada amalgamasi graf kipas membentuk barisan aritmatika  $W_{\alpha_3} = \{241, 246, 251, \dots, 311\}$  dengan  $a = 241$  dan  $d = 5$ .



Gambar 4.28 Super  $(241, 5)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $m$   $Amal(F_6, P_6, 2)$

◇ **Teorema 4.2.4.** *Ada pelabelan super  $(9nm + 19m + 8, 7)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas dari amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga fungsi titik dari  $\alpha_4$ =fungsi titik  $\alpha_1$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_4}$ =fungsi  $w_{\alpha_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_4$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\alpha_4(ax_i) &= mi + j + mn + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ \alpha_4(bx_i) &= mi + j + 2mn + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ \alpha_4(x_i x_{i+1}) &= mi + j + 3mn + m, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\end{aligned}$$

Jika  $W_{\alpha_4}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{\alpha_4}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}W_{\alpha_4} &= w_{\alpha_4} + \alpha_4(ax_i) + \alpha_4(ax_{i+1}) + \alpha_4(bx_i) + \alpha_4(bx_{i+1}) + \alpha_4(x_i x_{i+1}) \\ &= (5m + 2j + 2mi + 1) + (mi + j + mn + m) + (m(i + 1) + j + mn + m) \\ &\quad + (mi + j + 2mn + m) + (m(i + 1) + j + 2mn + m) + (mi + j + 3mn + m) \\ &= 12m + 7j + 7mi + 1 + 9mn, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\end{aligned}$$

Himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_4} = \{9mn + 19m + 8, 9mn + 19m + 15, \dots, 16mn + 19m + 1\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=7$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)d = 9mn + 19m + 8 + (mn - 1)7 = 16mn + 19m + 1$  sehingga terbukti ada pelabelan super  $(9mn + 19m + 8, 7)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas  $m$

$Amal(F_n, P_n, 2)$  dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.29 merupakan contoh super  $(9nm + 19m + 8, 7)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  dan  $d = 5$ .

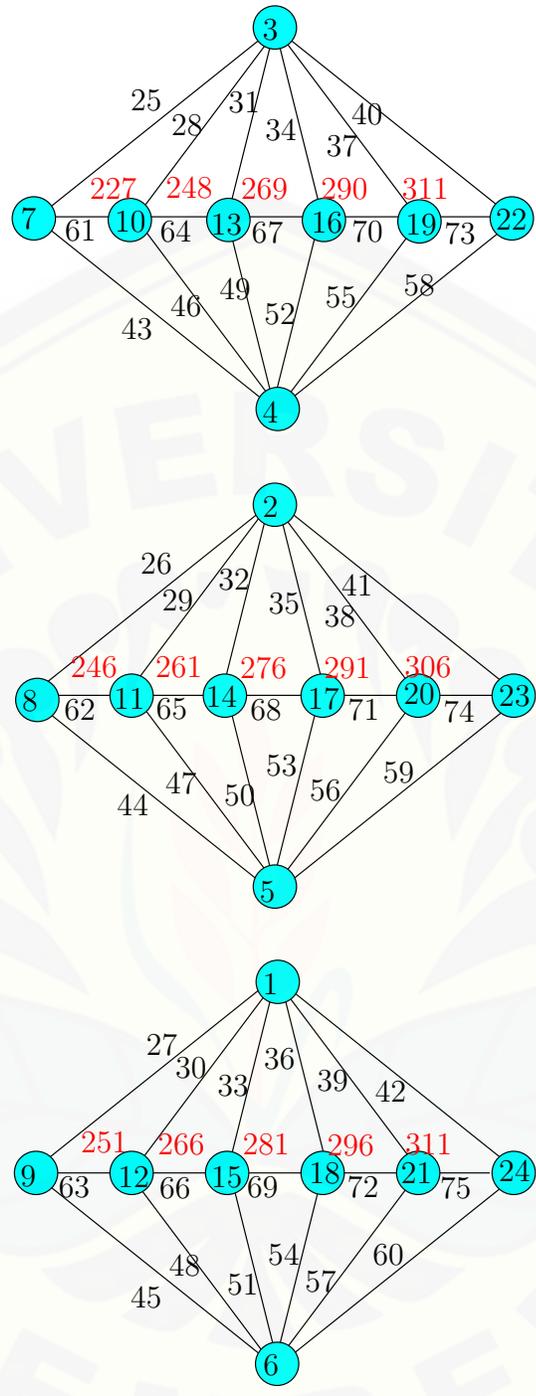
Pada Gambar 4.29 merupakan gabungan saling lepas pada amalgamasi graf kipas membentuk barisan aritmatika  $W_{\alpha_4} = \{227, 234, 241, \dots, 325\}$  dengan  $a = 227$  dan  $d = 7s$ .

$\diamond$  **Teorema 4.2.5.** *Ada pelabelan super  $(8nm + 20m + 9, 9)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas dari amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga fungsi titik dari  $\alpha_5$ =fungsi titik  $\alpha_1$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_5}$ =fungsi  $w_{\alpha_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_5$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\alpha_5(ax_i) &= 2mi + 2j + mn - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ \alpha_5(bx_i) &= 2mi + mn + 2j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ \alpha_5(x_i x_{i+1}) &= 4mn + 2m - mi - j + 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\end{aligned}$$

Jika  $W_{\alpha_5}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{\alpha_5}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:



Gambar 4.29 Super  $(227, 7)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $m$   $Amal(F_6, P_6, 2)$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5} &= w_{\alpha_5} + \alpha_5(ax_i) + \alpha_5(ax_{i+1}) + \alpha_5(bx_i) + \alpha_5(bx_{i+1}) + \alpha_5(x_i x_{i+1}) \\
&= (5m + 2j + 2mi + 1) + (2mi + 2j + mn - 1) + (2m(i + 1) + 2j + mn - 1) \\
&\quad + (2mi + mn + 2j) + (2m(i + 1) + mn + 2j) + (4mn + 2m - mi - j + 1) \\
&= 11m + 9j + 9mi + 1 + 8mn, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m
\end{aligned}$$

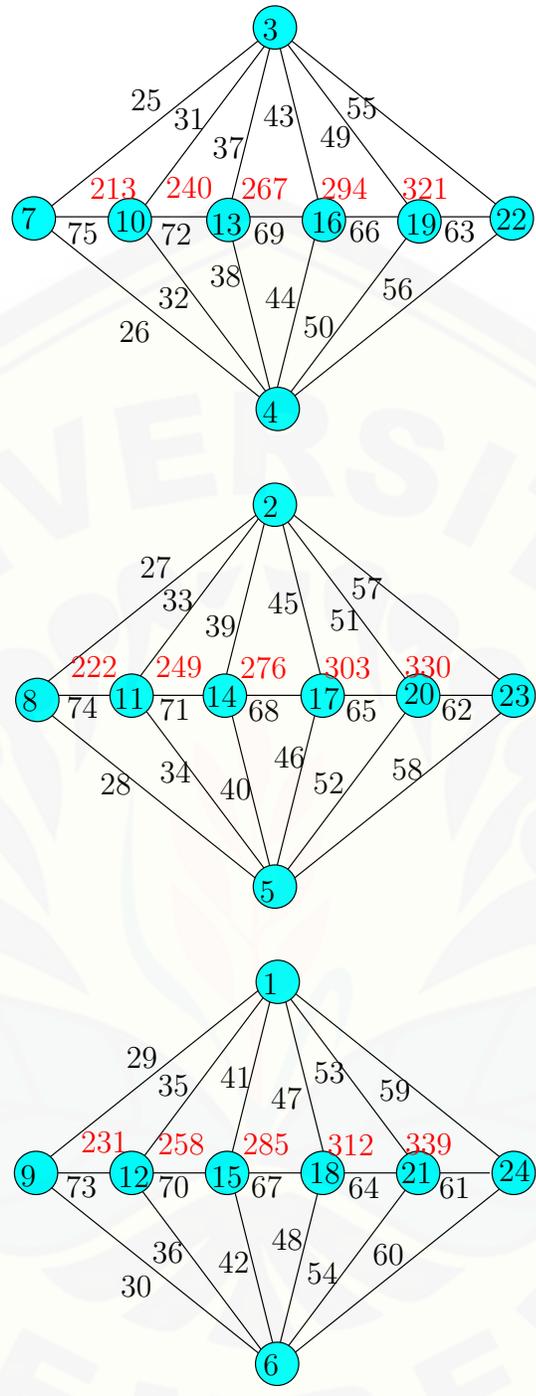
Himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_5} = \{8mn + 20m + 10, 8mn + 20m + 19, \dots, 17mn + 20m + 1\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=9$ . Karena  $U_n = a + (n-1)d = 8mn + 20m + 10 + (mn-1)9 = 17mn + 20m + 1$  sehingga terbukti ada pelabelan super  $(8mn + 20m + 10, 9)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.30 merupakan contoh super  $(8nm + 20m + 9, 9)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  dan  $m = 3$ .

Pada Gambar 4.30 merupakan gabungan saling lepas pada amalgamasi graf kipas membentuk barisan aritmatika  $W_{\alpha_5} = \{213, 222, 231, \dots, 339\}$  dengan  $a = 213$  dan  $d = 9$ .

$\diamond$  **Teorema 4.2.6.** *Ada pelabelan super  $(7nm + 21m + 10, 11)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas dari amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .*

**Bukti.** Melabeli setiap titik pada amalgamasi graf kipas dengan himpunan bilangan asli seperti pada teorema 4.2.1. Sehingga fungsi titik dari  $\alpha_6$ =fungsi titik  $\alpha_1$ , dan untuk fungsi  $w_{\alpha_6}$ =fungsi  $w_{\alpha_1}$ . Selanjutnya melabeli sisi dan didapatkan fungsi sisi dari  $\alpha_6$  sebagai berikut.



Gambar 4.30 Super  $(213, 9)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $m$   $Amal(F_6, P_6, 2)$

$$\begin{aligned}\alpha_6(ax_i) &= 2mi + 2j + mn - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ \alpha_6(bx_i) &= 2mi + mn + 2j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \\ \alpha_6(x_i x_{i+1}) &= 3mn + m + mi + j, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m\end{aligned}$$

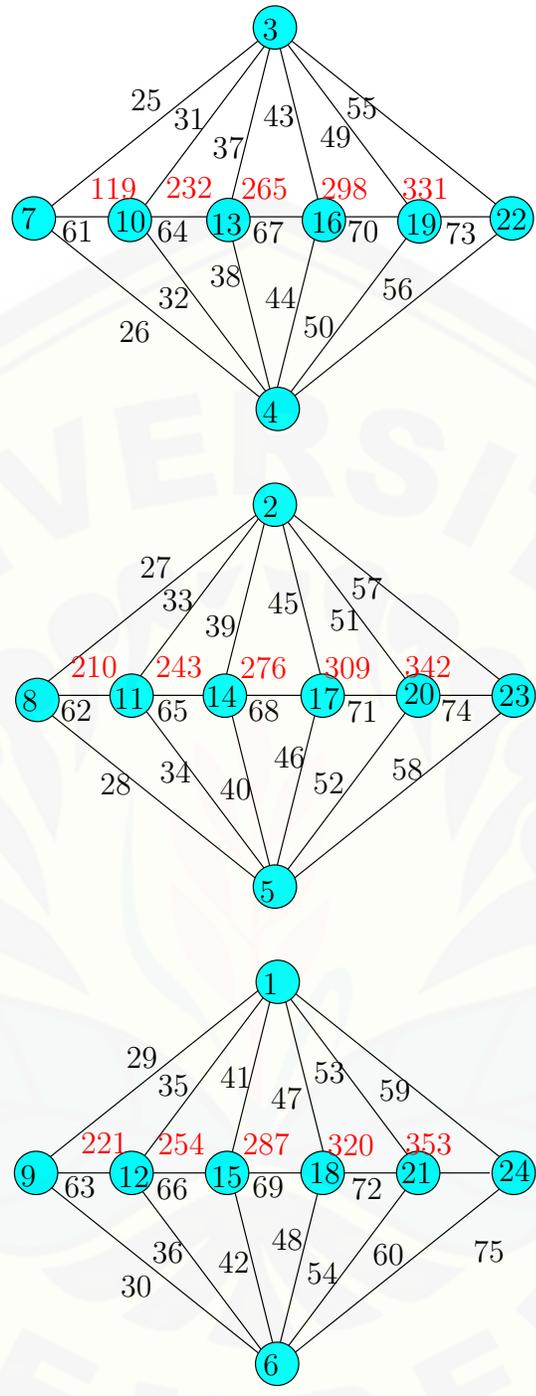
Jika  $W_{\alpha_6}$  didefinisikan sebagai bobot total covering pada amalgamasi graf kipas berdasarkan penjumlahan bobot selimut dengan label sisinya maka  $w_{\alpha_6}$  dan fungsi label sisi dengan syarat batas  $i$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}W_{\alpha_6} &= w_{\alpha_6} + \alpha_6(ax_i) + \alpha_6(ax_{i+1}) + \alpha_6(bx_i) + \alpha_6(bx_{i+1}) + \alpha_6(x_i x_{i+1}) \\ &= (5m + 2j + 2mi + 1) + (2mi + 2j + mn - 1) + (2m(i + 1) + 2j + mn - 1) \\ &\quad + (2mi + mn + 2j) + (2m(i + 1) + mn + 2j) + (3mn + m + mi + j) \\ &= 10m + 11j + 11mi + 7mn - 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\end{aligned}$$

Himpunan bobot total selimut  $W_{\alpha_6} = \{7mn + 21m + 10, 7mn + 21m + 21, \dots, 18mn + 21m - 1\}$ . Himpunan bobot total tersebut membentuk barisan aritmatika dengan  $d=11$ . Karena  $U_n = a + (n - 1)d = 7mn + 21m + 10 + (mn - 1)11 = 18mn + 21m - 1$  sehingga terbukti ada pelabelan super  $(7mn + 21m + 10, 11)$ - $B_2$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .  $\square$

Gambar 4.31 merupakan contoh super  $(7mn + 21m + 10, 11)$ - $B_2$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $n = 6$  dan  $m = 3$ .

Pada Gambar 4.26 merupakan gabungan saling lepas pada amalgamasi graf kipas membentuk barisan aritmatika  $W_{\alpha_6} = \{199, 210, 221, \dots, 253\}$  dengan  $a = 199$  dan  $d = 11$ .



Gambar 4.31 Super  $(199, 11)$ - $B_2$ -Antimagic Total Covering  $m$   $Amal(F_6, P_6, 2)$

### 4.3 Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh nilai  $d$  yang mungkin untuk super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas tunggal  $Amal(F_n, P_n, 2)$   $d \leq 19$  dan gabungan saling lepas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  adalah  $d \leq 41$ . Setelah menentukan nilai  $d$ , peneliti mencari pelabelan sesuai dengan nilai  $d$  yang telah ditentukan tersebut. Nilai  $d$  didapatkan dengan mengkombinasikan label titik dan sisi, didapatkan 3 kombinasi label titik dan 11 kombinasi label sisi pada amalgamasi graf kipas  $Amal(F_n, P_n, 2)$  tunggal. Hasil dari mengkombinasikan label titik dan sisi tersebut maka didapatkan 16 teorema. Penggunaan dari label titik yang sama akan menghasilkan bobot selimut yang sama pula. Teorema-teorema yang didapatkan dari mengkombinasi 3 label titik yang berbeda terbagi menjadi beberapa yaitu pada kelompok kombinasi titik pertama terdapat pada teorema 4.1.1, teorema 4.1.3, teorema 4.1.5, teorema 4.1.9, teorema 4.1.11, teorema 4.1.13, pada kelompok kombinasi titik kedua terdapat pada teorema 4.1.2, teorema 4.1.6, teorema 4.1.10, teorema 4.1.12, teorema 4.1.14, teorema 4.1.15, pada kelompok kombinasi titik ketiga terdapat pada teorema 4.1.4, teorema 4.1.7, teorema 4.1.8, dan teorema 4.1.16 yang merupakan *expand* dari graf kipas yang terdapat pada amalgamasi graf kipas tersebut. Sedangkan teorema-teorema yang didapatkan dari mengkombinasi 11 label sisi yang berbeda terbagi menjadi beberapa yaitu untuk teorema 4.1.5 pelabelannya sama dengan teorema 4.1.6, untuk teorema 4.1.9 pelabelannya sama dengan teorema 4.1.10, untuk teorema 4.1.11 pelabelannya sama dengan teorema 4.1.12, untuk teorema 4.1.13 pelabelannya sama dengan teorema 4.1.14, dan untuk teorema 4.1.8 pelabelannya sama dengan teorema 4.2.1 (*expand* dari graf kipas).

Sedangkan pada amalgamasi graf kipas  $m$   $Amal(F_n, P_n, 2)$  pada gabungan saling lepas nilai  $d$  didapatkan dengan mengkombinasi 1 label titik dan 6 kombinasi label sisi. Hasil dari mengkombinasikan label titik dan sisi tersebut didapatkan 6 teorema. Nilai  $d$  yang didapat yaitu  $d = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ .

Label titik yang digunakan adalah dari 1 hingga  $p_G$  dimana  $p_G$  adalah jumlah titik pada graf sedangkan label untuk sisi yang digunakan adalah dimulai dari  $p_G + 1$  hingga  $p_G + q_G$  dimana  $q_G$  merupakan jumlah sisi, sehingga  $p_G + q_G$  meru-

pakan jumlah titik dan sisi pada graf. Jika kedua label tersebut digunakan untuk melabeli sebuah graf dengan aturan yang diberikan diatas maka pelabelan tersebut disebut sebagai pelabelan total. Pada amalgamasi graf kipas  $Amal(F_n, P_n, 2)$  nilai  $d \leq 19$  tersebut berlaku pada syarat yang sama yaitu  $n \geq 2$ . Dan untuk gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas dengan nilai  $d \leq 41$  tersebut berlaku pada syarat yang sama yaitu  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .

Hasil penelitian yang telah dilakukan peneliti menemukan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas tunggal untuk  $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 17\}$  serta *expand* dari graf kipas dengan  $d = \{9\}$  dan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering untuk gabungan saling lepas pada amalgamasi graf kipas  $d \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ .

Berdasarkan hasil penelitian dan perhitungan yang telah dilakukan sebelumnya, terdapat beberapa pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$ -antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  dan gabungan saling lepas  $m$   $amal(F_n, P_n, 2)$  yang belum ditemukan oleh peneliti. Berdasarkan visualisasi contoh-contoh pelabelan dan penerapan fungsi bijektif hasil penelitian yang telah ditemukan, diharapkan dapat membantu peneliti lain yang akan melakukan penelitian sejenis. Beberapa pelabelan yang belum ditemukan oleh penulis disajikan pada open problem berikut:

**Masalah terbuka 4.3.1.** *Pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  dengan  $n \geq 2$  untuk  $d \leq 19$  selain  $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 17\}$  dan  $d \in \{9\}$  untuk *expand* dari amalgamasi graf kipas.*

**Masalah terbuka 4.3.2.** *Pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas  $m$   $amal(F_n, P_n, 2)$ , dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$  untuk  $d \leq 41$  selain  $d \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ .*

## BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  tunggal memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering untuk  $d = \{0, 1, 2, 3, \dots, 19\}$ . Peneliti telah menemukan *SHATC* (Super  $\mathcal{H}$  Antimagic Total Covering) untuk amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  tunggal untuk  $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 17\}$ . Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  memiliki fungsi bijektif pelabelan super  $(\frac{29n+32}{2}, 0)$  untuk  $n$  genap dan  $(\frac{29n+25}{2}, 0)$  untuk  $n$  ganjil,  $(13n + 19, 1)$ ,  $(\frac{27n+36}{2}, 2)$  untuk  $n$  genap dan  $(\frac{27n+37}{2}, 2)$  untuk  $n$  ganjil,  $(11n + 23, 3)$ ,  $(\frac{25n+40}{2}, 4)$  untuk  $n$  genap dan  $(\frac{25n+41}{2}, 4)$  untuk  $n$  ganjil,  $(10nm + 18m + 7, 5)$ ,  $(\frac{21n+48}{2}, 6)$  untuk  $n$  genap dan  $(\frac{21n+49}{2}, 6)$  untuk  $n$  ganjil,  $(9n + 27, 7)$ ,  $(\frac{21n+48}{2}, 8)$  untuk  $n$  genap dan  $(\frac{21n+49}{2}, 8)$  untuk  $n$  ganjil,  $(11n + 23, 9)$ ,  $(\frac{15n+60}{2}, 10)$  untuk  $n$  genap dan  $(\frac{15n+61}{2}, 10)$  untuk  $n$  ganjil,  $(8n + 29, 11)$ ,  $(7n + 31, 13)$  untuk  $n$  genap dan  $(7n + 33, 13)$  untuk  $n$  ganjil,  $(\frac{15n+60}{2}, 14)$  untuk  $n$  genap dan  $(\frac{15n+63}{2}, 14)$  untuk  $n$  ganjil,  $(6n + 33, 17)$ - $(B_2)$  antimagic total covering untuk  $n \geq 2$ , dan  $((m + \frac{5}{2})n^2 + (2m + \frac{13}{2})n + m + 4, 9)$ - $B_n$  antimagic total covering pada generalisasi amalgamasi graf kipas  $amal(F_m, P_m, n)$  untuk  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ .
2. Gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas  $m$   $amal(F_n, P_n, m)$  memiliki pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering untuk  $d \leq 41$ . Peneliti telah menemukan *SHATC* (Super  $\mathcal{H}$  Antimagic Total Covering) untuk gabungan amalgamasi graf kipas  $m$   $amal(F_n, P_n, 2)$  untuk  $d \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ . Hasil penelitian ini dibuktikan bahwa gabungan amalgamasi graf kipas  $m$   $amal(F_n, P_n, 2)$  terdapat fungsi bijektif pelabelan super  $(12mn + 16m + 5, 1)$ ,

$(11nm + 17m + 6, 3)$ ,  $(10nm + 18m + 7, 5)$ ,  $(9nm + 19m + 8, 7)$ ,  $(8nm + 20m + 9, 9)$ , dan  $(7nm + 21m + 10, 11)$ - $(B_2)$  antimagic total covering untuk  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ .

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian pada pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada amalgamasi graf kipas  $amal(F_n, P_n, 2)$  dengan  $n \geq 2$  untuk  $d \leq 19$  untuk  $d \in \{12, 15, 16, 18, 19\}$ . Serta untuk pelabelan super  $(a, d)$ - $\mathcal{H}$  antimagic total covering pada gabungan saling lepas amalgamasi graf kipas  $m$   $amal(F_n, P_n, 2)$  dengan  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$  untuk  $d \leq 41$  untuk  $d$  selain dari  $d \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ .

## DAFTAR SUMBER RUJUKAN

- Agustin, I. H., Pudyaningrum, P. R. H., and Dafik (2014). Keantimagikan super total selimut pada gabungan saling lepas graf shackle triangular book. *Prosiding Semnas Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan*.
- Azizah, I. and Dafik (2014). Super  $(a, d)$ -h-antimagic total selimut pada graf shackle kipas  $f_4$ . *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika*, page 1.
- Carlson, K. (2006). Generalized book and  $c_m$  snakes and prime graphs. *Ars Combinatoria*, 80:215–221.
- Dafik (2007). Structural properties and labeling of graphs. *School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat, Australia*, Ph.D Thesis, November:1–140.
- Dafik, Mirka, M., Ryan, J., and Baca, M. (2009). On super  $(a, d)$ -edge-antimagic total labeling of disconnected graphs. *Discrete Mathematics*, 309(15):4909–4915.
- Dewi, N. R. and Darmaji (2014). Pelabelan total super  $(a, d)$ -h-covering pada amalgamasi star. *Prosiding Semnas Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan*.
- Gallian, J. A. (2009). Dinamyc survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*.
- Gutierrez and Llado (2005). Magic coverings. *Of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 55:451–461.
- Inayah, N. (2013). Pelabelan  $(a, d)$ -h-anti ajaib pada beberapa kelas graf. *Disertasi Institut Teknologi Bandung*.
- Jamil, N. A., Agustin, I. H., and Dafik (2014). super  $(a, d)$ -h-antimagic total covering pada gabungan saling lepas graf triangular ladder. *Prosiding Semnas Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan*.

- Kotzig, A. and Rosa, A. (1970). Magic valuations of finite graph. *Canada Mathematics Bulletin* 13, page 451461.
- Maryati, T. K., Salman, A., Baskoro, E. T., Ryan, J., and Miller, M. (2010). On  $h$  super-magic labellings for certain shackles and amalgamations of a connected graph antimagic total labelings for shackles of a connected graph. *Utilitas Math.*
- Pudyaningrum, P. R. H., Agustin, I. H., and Dafik (2014). Pengembangan total selimut super pada graf shackle triangular book. *Prosiding Semnas Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan.*
- Sari, F. K. (2014). Pelabelan selimut- $(a, d)$ -anti ajaib super pada graf pohon pisang, kembang api dan buku. *Universitas Sebelas Maret Surakarta.*
- Wuni, S. C., Agustin, I. H., and Dafik (2014). super  $(a, d)$ - $h$ -antimagic total covering pada gabungan saling lepas graf semi windmill. *Prosiding Semnas Pendidikan Matematika Ahmad Dahlan.*