



**IMPLEMENTASI METODE *DISCONTINUOUS GALERKIN*  
PADA PERSAMAAN *EULER-BERNOULLI BEAM***

**SKRIPSI**

Oleh

**Prasanti Mia Purnama  
NIM 081810101060**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2015**



**IMPLEMENTASI METODE *DISCONTINUOUS GALERKIN*  
PADA PERSAMAAN *EULER-BERNOULLI BEAM***

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan Program Studi Biologi (S1)  
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Prasanti Mia Purnama**  
**NIM 081810101060**

**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS JEMBER**  
**2015**

## PERSEMBAHAN

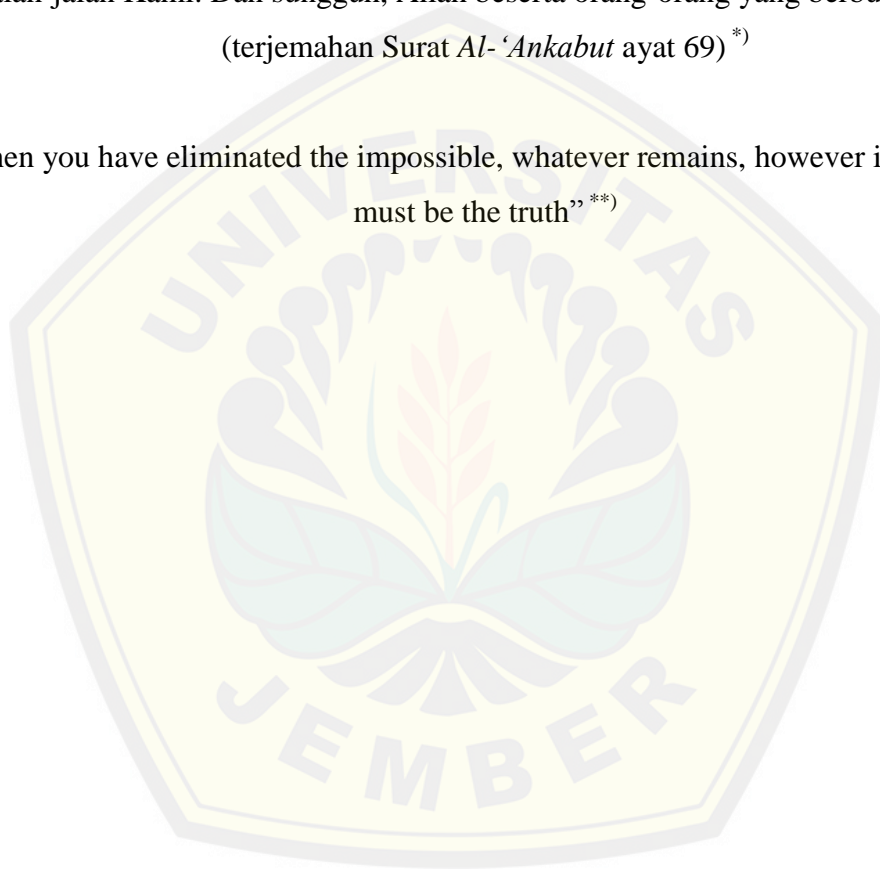
Alhamdulillah, segala puji hanya bagi Allah yang dengan kebesaran-Nya sempurnalah semua kebaikan, skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ibunda Maimunah dan Ayahanda Slamet tercinta, terima kasih banyak atas doa, kasih sayang tanpa hingga, dan segala perjuangan yang tiada dapat dilukiskan, semoga Allah selalu memberkahi kebaikan dan kasih sayang-Nya;
2. Saudaraku Muhammad Hamim Jazuli yang selalu memberikan doa dan semangat;
3. Almarhum dan almarhumah kakek, paman dan nenek yang semasa hidupnya selalu mencurahkan kasih sayang dan doanya, semoga Allah memberikan tempat yang terbaik disisi-Nya;
4. Para pengajar dan pendidik sejak taman kanak-kanak sampai perguruan tinggi yang telah mencurahkan ilmu serta membimbing dengan penuh kesabaran dan keikhlasan;
5. Almamater Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

## MOTO

“Dan orang-orang yang bersungguh-sungguh, akan Kami tunjukkan kepada mereka jalan-jalan Kami. Dan sungguh, Allah beserta orang-orang yang berbuat baik.”  
(terjemahan Surat *Al-‘Ankabut* ayat 69) <sup>\*)</sup>

“When you have eliminated the impossible, whatever remains, however improbable, must be the truth” <sup>\*\*)</sup>



---

<sup>\*)</sup> Departemen Agama Republik Indonesia. 2008. *Al Quran dan Terjemahannya*. Depok.

<sup>\*\*)</sup> Sir Arthur Conan Doyle.

## PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Prasanti Mia Purnama

NIM : 081810101060

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul “Implementasi Metode *Discontinuous Galerkin* pada Persamaan *Euler-Bernoulli Beam*” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggungjawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juli 2015

Yang menyatakan,

Prasanti Mia Purnama

NIM. 081810101060

**SKRIPSI**

**IMPLEMENTASI METODE DISCONTINUOUS GALERKIN PADA  
PERSAMAAN EULER-BERNOULLI BEAM**

Oleh

Prasanti Mia Purnama

NIM 081810101060

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Kosala Dwija Purnomo, S.Si, M.Si.

Dosen Pembimbing Anggota : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

## PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul “Implementasi Metode *Discontinuous Galerkin* pada Persamaan *Euler-Bernoulli Beam*” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji:

Dosen Pembimbing Utama,

Dosen Pembimbing Anggota,

Kosala Dwija Purnomo, S.Si, M.Si.

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

NIP. 19690828 199802 1 001

NIP. 19661012 199303 1 001

Penguji I,

Penguji II,

Kiswara Agung Santoso, S.Si, M.Si.

Kusbudiono, S.Si.,M.Si.

NIP. 19720907 199803 1 003

NIP 197700430 200501 2 001

Mengesahkan

Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.

NIP 196101081986021001

## RINGKASAN

**Implementasi Metode *Discontinuous Galerkin* (DG) pada Persamaan *Euler-Bernoulli Beam*.** Prasanti Mia Purnama, 081810101060; 2015; 65 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Persamaan *Euler-Bernoulli Beam* merupakan salah satu persamaan klasik dalam dunia *engineering*. Pada dasarnya, persamaan *Euler-Bernoulli Beam* mendeskripsikan defleksi atau pelengkungan dari *beam* yang mengalami getaran bebas (model homogen). *Beam* dapat didefinisikan sebagai salah satu komponen struktural penyusun suatu benda tertentu, contohnya pada struktur jembatan. Dalam prakteknya, *beam* dapat mengalami vibrasi akibat adanya gaya yang mempunyai potensi destruktif, misalnya gaya seismik. Vibrasi tersebut selanjutnya dapat mengalami pemusatan pada bagian sensitif dari *beam* karena pengaruh resonansi. Dampaknya, *beam* akan mengalami defleksi yang mengakibatkan ketahanan struktur benda menurun dan kemudian dapat berkontribusi pada kerusakan struktur benda tersebut. Oleh karena itu, proses deteksi terhadap pemusatan vibrasi pada bagian sensitif ini merupakan hal yang sangat penting untuk dilakukan. Dalam kaitannya dengan proses deteksi tersebut, salah satu hal yang dapat diupayakan adalah menganalisis perilaku solusi persamaan *Euler-Bernoulli Beam*.

Persamaan *Euler-Bernoulli Beam* dapat diselesaikan secara numerik diantaranya dengan metode *Discontinuous Galerkin* (DG). Metode DG merupakan klasifikasi dari metode *finite element*. Metode DG ini menggunakan fungsi diskontinu sebagai solusi numerik untuk menghampiri solusi eksak. Fungsi diskontinu yang digunakan pada metode ini seringkali berupa *piecewise polynomial*. Implementasi dari metode DG menghasilkan suatu Sistem Persamaan Linier (SPL). Sistem Persamaan Linier yang terbentuk berkarakteristik sparse karena matriks yang



mengilustrasikan SPL tersebut berkarakteristik sparse. Selanjutnya, metode Quasi Minimal Residual (QMR) diimplementasikan untuk menyelesaikan SPL tersebut. Metode QMR adalah suatu metode iterasi yang bersifat non-stasioner atau dengan kata lain suatu konstan tertentu yang terbentuk dari hasil perkalian dalam residual atau vektor lainnya yang muncul dalam proses iterasi dari metode ini turut dikomputasikan pada setiap iterasinya. Metode QMR ini merupakan kelas dari metode subruang Krylov. Metode QMR pada penelitian ini diimplementasikan bersama dengan suatu *preconditioner* yang disebut *preconditioner Diagonal Incomplete Lower Upper Factorization (D-ILU)*.

Penelitian dilakukan dalam beberapa skema. Skema pertama kajian tentang persamaan *Euler-Bernoulli Beam*. Skema kedua yaitu pengimplementasian metode DG. Skema ketiga adalah konstruksi *preconditioner* D-ILU. Skema keempat yaitu pengimplementasian metode QMR dan *preconditioner* D-ILU pada SPL. Skema kelima adalah pembuatan dan simulasi program dengan menggunakan software Matlab R2008b. Skema terakhir yaitu analisis hasil simulasi.

Berdasarkan simulasi dan analisis yang telah dilakukan, dapat diketahui bahwasannya nilai-nilai frekuensi angular yang dihasilkan dari pengimplementasian metode DG ini cukup baik atau dengan kata lain nilai error yang dihasilkan relatif kecil. Sedangkan untuk nilai defleksi yang dihasilkan, berdasarkan nilai  $L^2$  error yang dihasilkan, mengisyaratkan bahwasannya bahwasannya kinerja dari metode QMR dan *preconditioner* D-ILU pada kasus *cantilever beam* tidak cukup baik. Hal terjadi dimungkinkan karena pengimplementasian metode QMR tanpa proses *look-ahead* ataupun karena pemilihan *preconditioner* yang kurang sesuai.

## PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Implementasi Metode *Discontinuous Galerkin* pada Persamaan *Euler-Bernoulli Beam*”. Penyusunan skripsi ini ditujukan sebagai salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis mendapat banyak dukungan, bantuan, dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, tak lupa penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D. selaku Dekan FMIPA dan sebagai Dosen Pembimbing Akademik selama penulis menjadi mahasiswa Matematika MIPA;
2. Kosala Dwija Purnomo, S.Si, M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama, dan Drs. Rusli Hidayat, M.Sc. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
3. Kiswara Agung Santoso, S.Si, M.Si. selaku Dosen Penguji I dan Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji II, yang telah memberikan kritik dan saran dalam penyusunan skripsi ini;
4. Ibunda Maimunah dan Ayahanda Slamet atas nasehat, dukungan moril dan materil serta doa yang tiada henti;
5. Saudaraku Muhammad Hamim Jazuli atas semangat, dukungan dan doanya;
6. Teman-temanku Siti Nur Azizah, Widya Yuniar, Ratih Kartika Asri, Eka Farista, Siti Fatimah, Siti Muafa, Nur Ica Wulandari, Latifah, Tri Linda, Wika Anggani, Madhinatul Munawaroh, Santica Yuniariski, Andika Monalisa dan Novika Herawati yang selalu siap membantu, mendengarkan keluh kesah, dan memberi semangat;

7. Dr. Anik Ratna N., S.T., M.T dan keluarganya atas bantuan, dukungan, dan doa selama penulis menjadi mahasiswa;
8. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2015

Penulis



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN PERSEMBAHAN .....	ii
HALAMAN MOTO .....	iii
HALAMAN PERNYATAAN .....	iv
HALAMAN PEMBIMBINGAN .....	v
HALAMAN PENGESAHAN .....	vi
RINGKASAN .....	vii
PRAKATA .....	ix
DAFTAR ISI .....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR TABEL.....	xv
<b>BAB 1. PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Latar Belakang.....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 Perumusan Masalah.....</b>	<b>3</b>
<b>1.3 Batasan Masalah.....</b>	<b>3</b>
<b>1.4 Tujuan .....</b>	<b>3</b>
<b>1.5 Manfaat .....</b>	<b>4</b>
<b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA .....</b>	<b>5</b>
<b>2.1 Persamaan Diferensial .....</b>	<b>5</b>
<b>2.2 Hukum Newton .....</b>	<b>7</b>
<b>2.3 Ekspansi Deret Taylor .....</b>	<b>8</b>
<b>2.4 Persamaan <i>Euler-Bernoulli Beam</i>.....</b>	<b>8</b>
<b>2.5 Metode <i>Discontinuous Galerkin (DG)</i>.....</b>	<b>16</b>
2.5.1 Transformasi Domain (Daerah Asal).....	18
<b>2.6 Polinomial Legendre.....</b>	<b>19</b>
<b>2.7 Metode <i>Gaussian Quadrature</i>.....</b>	<b>22</b>

2.8	<i>Preconditioner</i> .....	23
2.8.1	<i>Preconditioner Diagonal Incomplete Lower Upper (D-ILU)</i> .....	24
2.9	Metode Quasi Minimal Residual (QMR).....	25
BAB 3.	METODE PENELITIAN .....	31
BAB 4.	HASIL DAN PEMBAHASAN .....	36
4.1	Penyelesaian Persamaan <i>Euler-Bernoulli Beam</i> secara Analitik .....	36
4.2	Diskritisasi Persamaan <i>Euler-Bernoulli Beam</i> dengan Metode <i>Discontinuous Galerkin (DG)</i> .....	39
4.3	Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan Metode Quasi Minimal Residual (QMR).....	41
4.4	Simulasi Program.....	42
4.5	Analisis Hasil Simulasi.....	57
BAB 5.	PENUTUP .....	64
5.1	Kesimpulan .....	64
5.2	Saran .....	64
	DAFTAR PUSTAKA .....	65
	LAMPIRAN .....	67

## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Gerak defleksi pada <i>beam</i> .....	9
2.2 Segmen <i>beam</i> dan gaya-gaya yang mempengaruhi .....	10
2.3 Irisan <i>beam</i> pada sumbu - $yz$ .....	12
2.4 Unsur pembangun regangan pada segmen <i>beam</i> .....	13
3.1 Skema Metode Penelitian .....	31
4.1 Profil frekuensi <i>cantilever beam</i> pada interval $(0,2)$ .....	37
4.2 Profil defleksi <i>cantilever beam</i> berdasarkan lima frekuensi angular pertama dari tabel 4.1 .....	38
4.3 Profil defleksi <i>cantilever beam</i> berdasarkan lima frekuensi angular terakhir dari tabel 4.1 .....	39
4.4 Pola matriks sparse dengan ukuran matriks $30 \times 30$ .....	41
4.5 Profil <i>mode shape</i> (model defleksi) dari <i>cantilever beam</i> untuk variasi parameter $n = 10$ dan $m = 3$ .....	44
4.6 Profil <i>mode shape</i> (model defleksi) dari <i>cantilever beam</i> untuk variasi parameter $n = 10$ dan $m = 6$ .....	45
4.7 Profil <i>mode shape</i> (model defleksi) dari <i>cantilever beam</i> untuk variasi parameter $n = 10$ dan $m = 9$ .....	47
4.8 Profil <i>mode shape</i> (model defleksi) dari <i>cantilever beam</i> untuk variasi parameter $n = 20$ dan $m = 3$ .....	48
4.9 Profil <i>mode shape</i> (model defleksi) dari <i>cantilever beam</i> untuk variasi parameter $n = 20$ dan $m = 6$ .....	50
4.10 Profil <i>mode shape</i> (model defleksi) dari <i>cantilever beam</i> untuk variasi parameter $n = 20$ dan $m = 9$ .....	51
4.11 Profil <i>mode shape</i> (model defleksi) dari <i>cantilever beam</i> untuk	

variasi parameter $n = 30$ dan $m = 3$ .....	53
4.12 Profil <i>mode shape</i> (model defleksi) dari <i>cantilever beam</i> untuk variasi parameter $n = 30$ dan $m = 6$ .....	54
4.13 Profil <i>mode shape</i> (model defleksi) dari <i>cantilever beam</i> untuk variasi parameter $n = 30$ dan $m = 9$ .....	56





## DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Data <i>Gaussian Quadrature</i> untuk $N = 11$ .....	22
4.1 Frekuensi <i>cantilever beam</i> pada interval (0,2) .....	37
4.2 Kuadrat frekuensi <i>cantilever beam</i> pada interval (0,2) untuk variasi parameter $n = 10$ dan $m = 3$ .....	43
4.3 Kuadrat frekuensi <i>cantilever beam</i> pada interval (0,2) untuk variasi parameter $n = 10$ dan $m = 6$ .....	45
4.4 Kuadrat frekuensi <i>cantilever beam</i> pada interval (0,2) untuk variasi parameter $n = 10$ dan $m = 9$ .....	46
4.5 Kuadrat frekuensi <i>cantilever beam</i> pada interval (0,2) untuk variasi parameter $n = 20$ dan $m = 3$ .....	48
4.6 Kuadrat frekuensi <i>cantilever beam</i> pada interval (0,2) untuk variasi parameter $n = 20$ dan $m = 6$ .....	49
4.7 Kuadrat frekuensi <i>cantilever beam</i> pada interval (0,2) untuk variasi parameter $n = 20$ dan $m = 9$ .....	51
4.8 Kuadrat frekuensi <i>cantilever beam</i> pada interval (0,2) untuk variasi parameter $n = 30$ dan $m = 3$ .....	52
4.9 Kuadrat frekuensi <i>cantilever beam</i> pada interval (0,2) untuk variasi parameter $n = 30$ dan $m = 6$ .....	54
4.10 Kuadrat frekuensi <i>cantilever beam</i> pada interval (0,2) untuk variasi parameter $n = 30$ dan $m = 9$ .....	55



## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Persamaan *Euler-Bernoulli Beam* merupakan salah satu persamaan klasik dalam dunia *engineering*. Persamaan ini mempunyai sejarah yang cukup panjang dalam penemuannya, diawali dari penelitian Leonardo da Vinci (1452-1519) dan Galileo Galilei (1584-1642). Selanjutnya, Jacob Bernoulli (1654-1705), Daniel Bernoulli (1700-1782) dan Leonard Euler (1707-1783) berhasil merumuskan penemuan yang signifikan terkait dengan *beam theory* (teori tentang *beam*) yang akhirnya menghasilkan persamaan yang dikenal sebagai persamaan *Euler-Bernoulli Beam* (Thankane & Stys, 2009). Pada dasarnya, persamaan *Euler-Bernoulli Beam* mendeskripsikan defleksi atau pelengkungan dari *beam* yang mengalami *free vibration* (merupakan model homogen).

Aplikasi *beam* sangat erat kaitannya dengan bidang struktural. Secara sederhana, *beam* dapat didefinisikan sebagai suatu komponen struktural penyusun suatu benda tertentu, contohnya pada struktur jembatan. *Beam* dapat mengalami *free vibration* (getaran bebas) akibat adanya pengaruh luar yang bersifat *momentary* (sesaat), misalnya guncangan. Vibrasi tersebut selanjutnya dapat mengalami pemusatan pada bagian sensitif dari *beam* karena pengaruh resonansi. Dampaknya, *beam* akan mengalami defleksi yang mengakibatkan ketahanan struktur benda menurun dan kemudian dapat berkontribusi pada kerusakan struktur benda tersebut. Oleh karena itu, proses deteksi terhadap pemusatan vibrasi pada bagian sensitif ini merupakan hal yang sangat penting untuk dilakukan. Dalam kaitannya dengan proses deteksi tersebut, salah satu hal yang dapat diupayakan adalah menganalisis perilaku solusi persamaan *Euler-Bernoulli Beam*. Hal inilah yang menjadikan kajian tentang persamaan *Euler-Bernoulli Beam* masih signifikan untuk dipelajari.

Penelitian mengenai persamaan *Euler-Bernoulli Beam* telah banyak dilakukan. Diantaranya adalah Thankane & Stys (2009) yang mengaplikasikan metode beda hingga untuk menentukan solusi numerik dari persamaan *Euler-Bernoulli Beam* dan Lopez (2011) yang mengaplikasikan metode *Discontinuous Galerkin* (DG) pada persamaan *Euler-Bernoulli Beam*. Thankane & Stys melakukan penelitian terhadap model nonhomogen dengan kondisi batas *free end* (ujung bebas). Penelitian yang dilakukan Thankane & Stys menghasilkan kesimpulan bahwa metode beda hingga menghasilkan nilai error yang relatif kecil untuk kondisi batas *free end*. Selanjutnya, Lopez melakukan penelitian terhadap model homogen dengan kondisi batas *fixed-fixed* (ujung terikat-terikat). Dalam penelitiannya, Lopez menggunakan analisis pemecahan akar polinomial untuk menghitung nilai eigen. Sedangkan vektor eigennya didapatkan dengan menyelesaikan suatu sistem persamaan linier. Penelitian yang dilakukan oleh Lopez ini menghasilkan kesimpulan bahwa kinerja metode DG dikatakan baik untuk panjang subinterval yang bernilai kurang dari 15. Hal ini diindikasikan dengan nilai error yang relatif kecil.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh peneliti sebelumnya, penulis tertarik untuk melakukan penelitian pada persamaan *Euler-Bernoulli Beam* yang mengalami getaran bebas dengan mengimplementasikan metode DG sehingga dihasilkan suatu Sistem Persamaan Linier (SPL). Sistem Persamaan Linier yang terbentuk berkarakteristik sparse karena matriks yang mengilustrasikan SPL tersebut berkarakteristik sparse. Selanjutnya, metode Quasi Minimal Residual (QMR) digunakan untuk menyelesaikan SPL tersebut. Metode QMR adalah suatu metode iterasi yang bersifat non-stasioner atau dengan kata lain suatu konstan tertentu yang terbentuk dari hasil perkalian dalam residual atau vektor lainnya yang muncul dalam proses iterasi dari metode ini turut dikomputasikan pada setiap iterasinya. Metode QMR ini merupakan kelas dari metode subruang Krylov. Metode QMR pada penelitian ini diimplementasikan bersama dengan suatu *preconditioner* yang disebut *preconditioner Diagonal Incomplete Lower Upper Factorization* (D-ILU).

## 1.2 Perumusan Masalah

Masalah yang dibahas dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

- a. bagaimana menyelesaikan persamaan *Euler-Bernoulli Beam* secara numerik dengan mengimplementasikan metode *Discontinuous Galerkin* (DG) berbantu metode Quasi Minimal Residual (QMR) dan *preconditioner Diagonal Incomplete Lower Upper Factorization* (D-ILU)?
- b. bagaimana hasil perbandingan antara solusi numerik yang diperoleh dengan solusi analitiknya?
- c. bagaimana analisis profil persamaan *Euler-Bernoulli Beam* melalui solusi numerik yang diperoleh?

## 1.3 Batasan Masalah

Persamaan *Euler-Bernoulli Beam* yang dibahas dalam tugas akhir ini adalah persamaan *Euler-Bernoulli Beam* yang berbentuk linier, homogen dan pergerakannya harmonik dengan kondisi batas *cantilever* (ujung terikat-bebas).

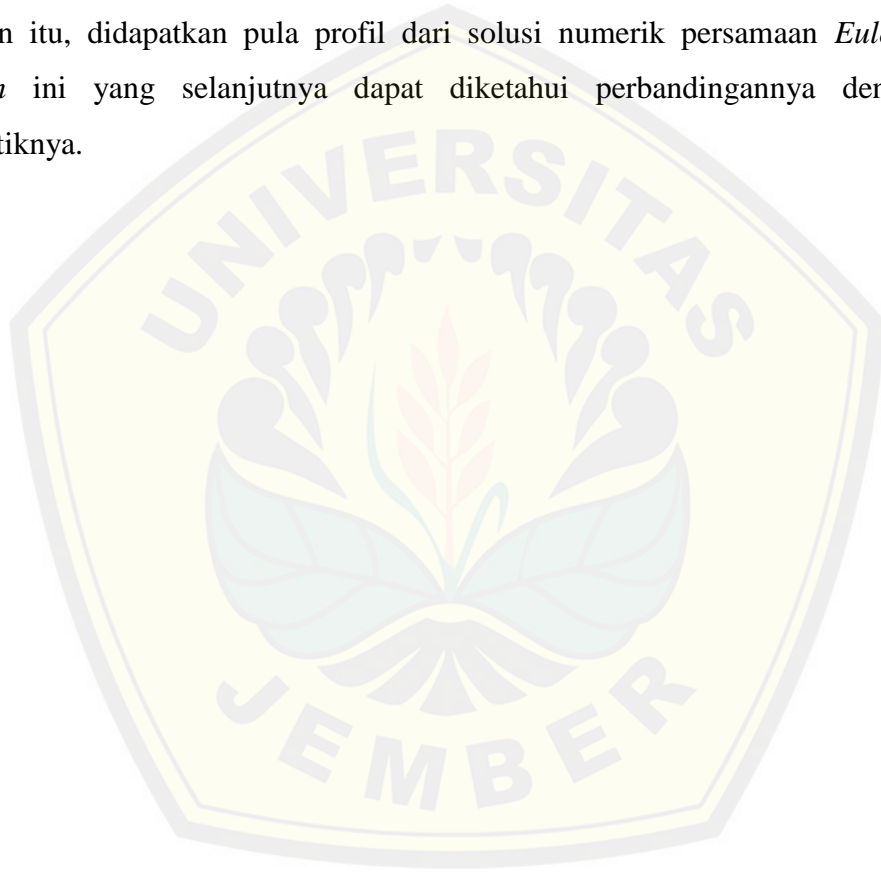
## 1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

- a. menyelesaikan secara numerik persamaan *Euler-Bernoulli Beam* dengan mengimplementasikan metode *Discontinuous Galerkin* (DG) berbantu metode Quasi Minimal Residual (QMR) dan *preconditioner Diagonal Incomplete Lower Upper Factorization* (D-ILU);
- b. mengetahui hasil perbandingan anatara solusi numerik yang diperoleh dengan solusi analitiknya;
- c. mengetahui profil persamaan *Euler-Bernoulli Beam* melalui solusi numerik yang diperoleh.

### 1.5 Manfaat

Manfaat yang dapat diperoleh dari penulisan tugas akhir ini adalah mendapatkan solusi numerik dari persamaan *Euler-Bernoulli Beam* melalui pengimplementasian metode *Discontinuous Galerkin* (DG) berbantu metode Quasi Minimal Residual (QMR) dan *preconditioner Diagonal Incomplete Lower Upper Factorization* (D-ILU) yang berupa frekuensi angular dan nilai defleksi dari beam. Selain itu, didapatkan pula profil dari solusi numerik persamaan *Euler-Bernoulli Beam* ini yang selanjutnya dapat diketahui perbandingannya dengan solusi analitiknya.



## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini akan dibahas dasar-dasar teori yang mendukung untuk menyelesaikan problem nilai eigen dari persamaan *Euler-Bernoulli Beam*. Dasar-dasar teori tersebut meliputi persamaan diferensial, hukum Newton, ekspansi deret Taylor, persamaan *Euler-Bernoulli Beam*, metode *Discontinuous Galerkin* (DG), polinomial Legendre, metode *Gaussian Quadrature*, *preconditioner*, metode *Quasi Minimal Residual* (QMR). Teori-teori inilah yang menjadi dasar dalam pembahasan selanjutnya.

### 2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan suatu fungsi yang dicari (variabel terikat) dan turunannya. Jika fungsi yang dicari hanya bergantung pada satu variabel independen (variabel bebas), maka persamaan diferensial tersebut disebut persamaan diferensial biasa (PDB). Namun, jika fungsi yang dicari bergantung pada dua atau lebih variabel independen, maka persamaan diferensial tersebut disebut persamaan diferensial parsial (PDP).

Berikut contoh PDB dan PDP:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 5x + 3 \quad (2.1)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 1 \quad (2.2)$$

$$4 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + (\sin x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial y}{\partial x \partial z} = 0 \quad (2.3)$$

$$\left( \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)^3 + 3t \frac{\partial y}{\partial x} + y \left( \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} \right)^2 = 5x \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} - 4 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (2.5)$$

Persamaan (2.1) dan (2.2) adalah PDB karena fungsi  $y$  yang tidak diketahui hanya bergantung pada variabel independen  $x$ . Sedangkan untuk persamaan (2.3) sampai (2.5) adalah PDP karena fungsi  $y$  bergantung pada variabel independen  $x$  dan  $z$  untuk persamaan (2.3) dan bergantung pada variabel  $x$  dan  $t$  untuk persamaan (2.4) dan (2.5) (Bronson dan Costa, 2007).

Orde dalam persamaan diferensial adalah turunan tertinggi dalam persamaan tersebut. Persamaan (2.1) dan (2.2) berturut-turut adalah PDB orde tiga dan empat sedangkan persamaan (2.3), (2.4) dan (2.5) berturut-turut adalah PDP orde dua, tiga dan empat. Selanjutnya, persamaan diferensial biasa orde  $n$  secara umum dapat dituliskan sebagai berikut,

$$F(y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = f(t). \quad (2.6)$$

Sedangkan untuk persamaan diferensial parsial orde  $n$  secara umum dapat dinyatakan seperti pada persamaan (2.7).

$$G\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right) = g(x, y). \quad (2.7)$$

Jika  $f(t) = 0$  dan  $g(x, y) = 0$ , maka persamaan (2.6) menjadi PDB homogen dan persamaan (2.7) menjadi PDP homogen. Sedangkan untuk  $f(t) \neq 0$  dan  $g(x, y) \neq 0$ , maka persamaan (2.6) menjadi PDB nonhomogen dan persamaan (2.7) menjadi PDP nonhomogen. Selain orde, karakteristik lain yang terkait dengan persamaan diferensial adalah kelinieran (linier/nonlinier). Persamaan diferensial dikatakan linier jika semua suku-suku variabel terikat dan turunan-turunannya dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dengan koefisien-koefisien yang bebas dari variabel terikat. Secara matematis persamaan diferensial biasa linier orde  $n$  dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t). \quad (2.8)$$



Selanjutnya, persamaan diferensial parsial linier orde  $n$  dapat dituliskan sebagai,

$$a_n \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + b_n \frac{\partial^n u}{\partial y^n} + \dots + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} + b_0 \frac{\partial u}{\partial y} + cu = g(x, y) \quad (2.9)$$

(Hidayat, 2006).

## 2.2 Hukum Newton

Hukum Newton dicetuskan oleh Isaac Newton dan dipublikasikan pada tahun 1687 dalam sebuah jurnal yang berjudul *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Greiner, 2004). Isaac Newton adalah seorang ilmuwan ternama asal Inggris yang membawa pengaruh besar dalam kaitannya dengan perkembangan ilmu yang mempelajari hubungan antara gaya dan gerak benda. Hukum Newton yang dicetuskan oleh Newton ini terdiri atas tiga bagian, yaitu hukum Newton I, hukum Newton II dan hukum Newton III.

### 2.2.1 Hukum Newton I

Suatu benda akan tetap diam atau bergerak dengan kecepatan tetap hingga ada gaya yang mempengaruhinya. Hukum Newton I merupakan bentuk khusus dari hukum Newton II. Secara matematis hukum Newton I dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sum F = 0 \quad (2.10)$$

dimana  $\sum F$  menyatakan resultan gaya pada benda (Greiner, 2004).

### 2.2.2 Hukum Newton II

Hukum Newton II merupakan bentuk umum dari hukum Newton I. Hukum ini mengilustrasikan kondisi benda yang bergerak dengan percepatan tertentu, tergantung pada massa benda tersebut. Dengan kata lain, resultan gaya yang bekerja pada benda tidak sama dengan nol. Secara matematis hukum Newton II dapat dinyatakan seperti pada persamaan (2.11).

$$\sum F = ma \quad (2.11)$$

dimana  $m$  adalah massa benda dan  $a$  percepatan benda (Greiner, 2004).

### 2.2.3 Hukum Newton III

Gaya interaksi antara dua buah benda akan mempunyai magnitudo (kuantitas) yang sama tetapi mempunyai arah yang berlawanan. Hal ini merupakan dasar dari hukum Newton III dimana hukum tersebut menyatakan bahwa setiap aksi akan memberikan suatu reaksi yang sama besarnya. Secara matematis hukum Newton III dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$F_{ij} = -F_{ji} \quad , \quad i \neq j \quad (2.12)$$

dimana  $F_{ij}$  adalah gaya yang diberikan oleh titik ke-  $j$  terhadap titik ke-  $i$  sedangkan  $F_{ji}$  adalah gaya yang diberikan oleh titik ke-  $i$  terhadap titik ke-  $j$  (Greiner, 2004).

### 2.3 Ekspansi Deret Taylor

Jika fungsi  $f(x,t)$  dan semua turunan parsialnya kontinu pada semua titik  $(x,t)$ , maka ekspansi dari  $f(x+h,t+k)$  dapat diilustrasikan sebagai berikut ini.

$$f(x+h,t+k) = f(x,t) + \frac{1}{1!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial t} \right) f(x,t) + \frac{1}{2!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 f(x,t) + \dots \quad (2.13)$$

Persamaan (2.13) merupakan ekspansi deret Taylor untuk fungsi dua variabel (Veerarajan, 2003).

### 2.4 Persamaan Euler-Bernoulli Beam

Persamaan *Euler-Bernoulli beam* adalah persamaan diferensial parsial yang mendeskripsikan tentang gerak defleksi atau pelengkungan pada *beam*. Defleksi ini dapat berupa *large deflection* (defleksi besar) ataupun *small deflection* (defleksi kecil). *Large deflection* melibatkan deformasi axial (membran) dan gerak melintang sekaligus sehingga menghasilkan model nonlinier. Sedangkan *small deflection* hanya

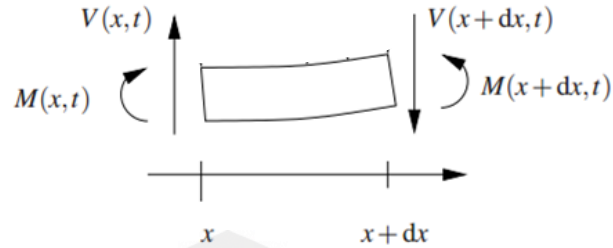


melibatkan gerak melintang saja (Nishawala, 2011). *Small deflection* atau yang selanjutnya cukup disebut sebagai gerak defleksi ini menghasilkan nilai *slope* (kemiringan) yang relatif kecil  $\left(\frac{\partial u}{\partial x} < 1\right)$  (Goodwine, 2011). Dalam kaitannya dengan gerak defleksi tersebut, maka *beam* dapat didefinisikan kembali sebagai suatu batang yang merupakan komponen struktural suatu benda tertentu, yang dalam prakteknya dikenai gaya yang bekerja dalam arah transversal atau melintang (Mng'ong'o, 2011). Gerak defleksi  $u(x,t)$  pada *beam* dapat diilustrasikan seperti pada gambar 2.1 berikut ini.



Gambar 2.1 Gerak defleksi pada *beam* (Sumber: Goodwine, 2011)

Panjang *beam* pada gambar 2.1 dinotasikan sebagai  $L$ . Panjang *beam* pada gerak defleksi ini tidak mengalami perubahan (Goodwine, 2011). Pada kasus *beam* yang mengalami *free vibration* (getaran bebas), gaya internal yang bekerja pada *beam* adalah *shear force* (gaya geser) dan *bending momen* (momen lentur). *Shear force* merupakan sebuah gaya yang tegak lurus terhadap sumbu atau poros dari *beam*. Sedangkan *bending momen* merupakan sebuah gaya yang mengilustrasikan pelengkungan atau pembelokan yang terjadi pada *beam* (Nishawala, 2011). Pada kasus ini, gaya berat bernilai nol. Hal ini dikarenakan *beam* tidak mengandung muatan atau bebas beban. Segmen *beam* dan gaya internal yang mempengaruhinya dapat dilihat pada ilustrasi gambar 2.2 berikut ini.



Gambar 2.2 Segmen *beam* dan gaya-gaya yang mempengaruhi  
(Sumber: Goodwine, 2011)

Dalam ilustrasi gambar 2.2,  $M(x,t)$  dan  $V(x,t)$  berturut-turut menyatakan *bending momen* dan *shear force*. Berlandaskan pada hukum Newton II, gerak defleksi *beam* dapat dituliskan seperti pada persamaan (2.14).

$$\rho A \frac{\partial^2 u \left( x + \frac{1}{2} dx, t \right)}{\partial t^2} dx = V(x+dx,t) - V(x,t) \quad (2.14)$$

dimana  $\rho$  dan  $A(x)$  berturut-turut menyatakan massa jenis dan luas area *beam*. Persamaan (2.14) didasarkan pada asumsi gerak defleksi yang mengarah ke bawah bertanda negatif. Dengan mengekspansikan fungsi-fungsi pada persamaan (2.14) terhadap deret Taylor pada titik  $(x,t)$ , didapatkan hasil sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 u \left( x + \frac{1}{2} dx, t \right)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^2 \partial x} \left( \frac{1}{2} dx \right) + \dots$$

$$V(x+dx,t) = V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx + \dots$$

Dengan mengabaikan orde yang lebih tinggi dari hasil ekspansi deret Taylor tersebut, persamaan (2.14) selanjutnya dapat dituliskan seperti pada persamaan berikut,

$$\rho A \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^2 \partial x} \left( \frac{1}{2} dx \right) \right) dx = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx$$

atau

$$\rho A \left( \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^2 \partial x} \left( \frac{1}{2} dx \right) \right) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}$$

dan dengan mengasumsikan limit  $dx \rightarrow 0$ , maka persamaan (2.14) menjadi seperti pada persamaan (2.15).

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \quad (2.15)$$

(Goodwine, 2011).

Gerak defleksi *beam* diasumsikan hanya berfokus pada arah vertikal sehingga percepatan *angular* (sudut) dapat diasumsikan bernilai nol. Hal ini mengakibatkan jumlah momen gaya atau torsi disebarang titik pada *beam* juga bernilai nol. Momen gaya atau torsi merupakan suatu besaran dalam fisika yang menyatakan besarnya gaya yang bekerja pada sebuah benda sehingga mengakibatkan benda tersebut berotasi atau membelok. Secara matematis, momen gaya atau torsi ( $\tau$ ) didefinisikan sebagai berikut,

$$\tau = F \times r \quad (2.16)$$

dengan  $F$  dan  $r$  berturut-turut adalah gaya yang bekerja pada benda dan jarak sumbu rotasi ke titik tangkap gaya atau panjang lengan gaya (Greiner, 2004). Momen gaya yang searah dengan putaran jarum jam bernilai positif, sedangkan yang berlawanan arah dengan putaran jarum jam bernilai negatif. Berdasarkan persamaan (2.16), jumlah momen gaya pada *beam* dengan titik tengah segmen *beam* seperti pada gambar 2.2 sebagai titik sumbu rotasi dapat dinyatakan seperti pada persamaan berikut ini.

$$-M(x,t) + M(x+dx,t) - V(x,t) \frac{1}{2} dx - V(x+dx,t) \frac{1}{2} dx = 0 \quad (2.17)$$

dengan ekspansi dari  $M(x+dx,t)$  terhadap deret Taylor dinyatakan sebagai berikut,

$$M(x+dx,t) = M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx + \dots$$

Dengan memberlakukan asumsi yang sama seperti pada penurunan persamaan (2.15), persamaan (2.17) dapat dituliskan kembali menjadi sebagai berikut,

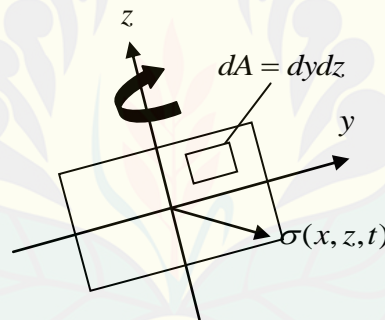
$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = V(x,t). \quad (2.18)$$

Jika persamaan (2.17) disubstitusikan ke persamaan (2.15), maka didapatkan formulasi seperti pada persamaan (2.19).

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.19)$$

(Mng'ong'o, 2011).

Penampang irisan *beam* terhadap sumbu- *yz* dapat diilustrasikan seperti pada gambar berikut ini.



Gambar 2.3 Irisan *beam* pada sumbu- *yz*

Jika tegangan normal  $\sigma(x, z, t)$  turut diperhitungkan seperti pada gambar 2.3, maka *bending momen* dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$dM = -z\sigma(x, z, t)dA.$$

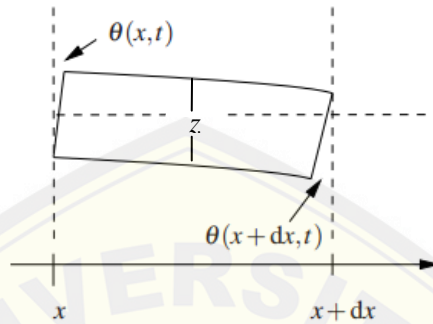
Dengan mengintegrasikan kedua ruas, diperoleh hasil:

$$M(x,t) = \iint z\sigma(x, z, t)dydz \quad (2.20)$$

Secara matematis, tegangan normal  $\sigma(x, z, t)$  diformulasikan sebagai berikut,

$$\sigma(x, z, t) = E\varepsilon(x, z, t) \quad (2.21)$$

dimana  $E$  adalah modulus Young atau modulus elastisitas dan  $\varepsilon(x, z, t)$  adalah regangan. Unsur pembangun regangan pada segmen *beam* dapat diilustrasikan seperti pada gambar 2.4.



Gambar 2.4 Unsur pembangun regangan pada segmen *beam*  
(Sumber: Goodwine, 2011)

Regangan adalah perbandingan antara pertambahan panjang suatu benda terhadap panjang mula-mula. Secara matematis, regangan pada segmen *beam* berdasarkan gambar 2.4 dirumuskan sebagai berikut ini.

$$\varepsilon(x, z, t) = \frac{z(\sin \theta(x+dx, t) - \sin \theta(x, t))}{dx}$$

Akibat *slope* (kemiringan) bernilai kecil, maka nilai  $\theta$  akan cenderung mendekati nilai *slope* yaitu  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \frac{\partial u}{\partial x}$  sehingga menghasilkan:

$$\varepsilon(x, z, t) = \frac{z \left( \frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)}{dx}$$

Dengan mengekspansikan  $\frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial x}$  terhadap deret Taylor, didapatkan hasil sebagai berikut,

$$\varepsilon(x, z, t) = z \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \tag{2.22}$$

Selanjutnya, persamaan (2.22) disubstitusikan ke persamaan (2.21) kemudian hasilnya disubstitusikan ke persamaan (2.20) sehingga menghasilkan persamaan (2.23) sebagai berikut,

$$M(x,t) = -E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \iint z^2 dydz. \quad (2.23)$$

Integral pada persamaan (2.23) merupakan definisi dari momen inersia  $I(x)$  sehingga dengan mengaplikasikan definisi ini ke persamaan (2.23) kemudian mensubstitusikan persamaan (2.23) ke persamaan (2.19) diperoleh hasil:

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right).$$

Persamaan inilah yang dikenal sebagai persamaan *Euler-Bernoulli beam*. Momen inersia  $I$  juga dapat dinyatakan sebagai,

$$I = \frac{1}{12} w_b h_b^3 \quad (2.24)$$

dimana  $w_b$  dan  $h_b$  berturut-turut adalah lebar dan tinggi *beam*. Jika luas permukaan *beam* seragam terhadap panjang *beam* atau dengan kata lain tinggi dan lebar *beam* tidak berubah saat *beam* mengalami defleksi, maka persamaan *Euler-Bernoulli beam* dapat dituliskan kembali dalam bentuk yang lebih sederhana sebagai,

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} \quad (2.25)$$

(Goodwine, 2011).

Untuk sebarang tipe vibrasi, gerak defleksi  $u(x,t)$  dapat dinyatakan dalam bentuk

$$u(x,t) = U(x)h(t)$$

dimana  $U(x)$  adalah mode shape (model defleksi) dan  $h(t)$  adalah fungsi harmonik. Selanjutnya, jika  $\omega$  menyatakan frekuensi angular, maka bentuk tersebut akan menghasilkan persamaan

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 U(x)h(t)$$

sehingga persamaan (2.25) akan menjadi,

$$g \frac{d^4 U}{dx^4} - \omega^2 U = 0 \tag{2.26}$$

dimana

$$U = U(x)$$

$$g = \frac{EI}{\rho A}$$

(Ansari *et al*, 2011).

Kondisi batas, seperti yang diilustrasikan pada gambar 2.1, untuk persamaan (2.26) dengan  $x_0 < x < x_n$ , dapat dituliskan seperti pada persamaan berikut ini.

$$\left. \begin{aligned} U(x_0) &= 0 \\ U'(x_0) &= 0 \\ U''(x_n) &= 0 \\ U'''(x_n) &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{2.27}$$

Kondisi batas ini disebut sebagai kondisi batas *cantilever*. Pada formulasi (2.27), mengacu pada persamaan (2.23) dan (2.18), turunan kedua dan ketiga dari  $U$  di titik ujung yang bebas berturut-turut mengisyaratkan bahwasannya *bending momen* dan *shear force* di titik tersebut bernilai nol. Solusi analitik dari persamaan (2.26) dengan kondisi batas seperti pada persamaan (2.27) dapat dituliskan sebagai,

$$U_n(x) = - \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{\omega_n} L}{\sqrt[4]{g}}\right) + \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega_n} L}{\sqrt[4]{g}}\right)}{\cos\left(\frac{\sqrt{\omega_n} L}{\sqrt[4]{g}}\right) + \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega_n} L}{\sqrt[4]{g}}\right)} \left( \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_n} L}{\sqrt[4]{g}}\right) - \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega_n} L}{\sqrt[4]{g}}\right) \right) + \left( \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_n} x}{\sqrt[4]{g}}\right) - \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega_n} x}{\sqrt[4]{g}}\right) \right) \tag{2.28}$$



dimana  $L$  adalah panjang *beam*. Untuk nilai  $\omega_n$  didapatkan dari solusi persamaan berikut ini.

$$\left( \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_n} L}{\sqrt[4]{g}}\right) + \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega_n} L}{\sqrt[4]{g}}\right) \right) + \left( \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_n} L}{\sqrt[4]{g}}\right) - \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega_n} L}{\sqrt[4]{g}}\right) \right) \times \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{\omega_n} L}{\sqrt[4]{g}}\right) + \sinh\left(\frac{\sqrt{\omega_n} L}{\sqrt[4]{g}}\right)}{\cos\left(\frac{\sqrt{\omega_n} L}{\sqrt[4]{g}}\right) + \cosh\left(\frac{\sqrt{\omega_n} L}{\sqrt[4]{g}}\right)} = 0 \quad (2.29)$$

(Goodwine, 2011).

## 2.5 Metode *Discontinuous Galerkin* (DG)

Metode *Discontinuous Galerkin* (DG) pertama kali diperkenalkan oleh Reed dan Hill pada tahun 1973. Reed dan Hill mengaplikasikan metode DG pada persamaan hiperbolik terkait dengan proses transpor neutron. Metode DG merupakan klasifikasi dari metode *finite element*. Metode DG ini menggunakan fungsi diskontinu sebagai solusi numerik untuk menghampiri solusi eksak. Fungsi diskontinu yang digunakan pada metode ini seringkali berupa *piecewise polynomial* (Marazzina, 2009).

Metode DG terdiri dari tiga komponen proses utama, yaitu proses konstruksi formulasi *weak* DG, proses konstruksi polinomial-polinomial berdasarkan formulasi *weak* DG dan proses pemilihan *numerical flux* pada masing-masing polinomial di titik batas (Cockburn, 2003). Proses konstruksi formulasi *weak* DG diawali dengan mempartisi interval dari model yang akan dianalisis ke dalam  $n$  subinterval. Penentuan panjang dari masing-masing subinterval ( $\Delta x_i$ ) ini dapat berbeda ataupun sama. Elemen dari masing-masing subinterval ini disebut *physical element*, sedangkan masing-masing domainnya disebut *physical domain*. Selain itu, pada proses konstruksi *weak* DG diperlukan adanya fungsi uji, misalnya  $v = v(x)$ .



Formulasi *weak* DG pada subinterval ke- $i$  dengan *physical element*  $[x_{i-1}, x_i]$  dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} gU^{(4)}v dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \lambda^2 Uv dx = 0$$

dimana  $U^{(4)} = \frac{d^4U}{dx^4}$  dan  $\lambda = \omega^2$  (Lopez, 2011). Dengan mengimplementasikan

teknik pengintegralan parsial tentu  $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'dx$  (Purcell

*et al*, 2006) pada  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} gU^{(4)}v dx$  sebanyak empat kali proses, persamaan tersebut dapat

dituliskan kembali menjadi,

$$gU'''v|_{x_{i-1}}^{x_i} - gU''v'|_{x_{i-1}}^{x_i} + gU'v''|_{x_{i-1}}^{x_i} - gUv'''|_{x_{i-1}}^{x_i} + g \int_{x_{i-1}}^{x_i} Uv^{(4)} dx - \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_i} Uv dx = 0. \quad (2.30)$$

Setelah proses konstruksi *weak* DG, proses selanjutnya adalah proses konstruksi polinomial-polinomial berderajat  $m$  yang dibangkitkan pada seluruh *physical domain*. Seperti halnya panjang subinterval, penentuan derajat dari masing-masing polinomial dapat berbeda ataupun sama. Polinomial ke- $i$  dapat dituliskan seperti pada persamaan berikut ini.

$$U_i(x) = \sum_{j=0}^m (c_j)_i x^m \quad (2.31)$$

dimana  $c$  adalah koefisien dari polinomial ke- $i$  dan  $i = 1 \dots n$  (Lopez, 2011).

Proses yang ketiga adalah pemilihan *numerical flux*. Berbeda dengan penentuan panjang subinterval dan derajat polinomial, *numerical flux* yang dipilih harus diaplikasikan sama ke semua titik batas polinomial. Pemilihan *numerical flux* ini merupakan aspek yang krusial. Hal ini dikarenakan *numerical flux* dapat berpengaruh terhadap solusi hampiran yang dihasilkan (Cockburn, 2003). *Numerical flux* yang digunakan pada tugas akhir ini dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\hat{U}_{i,r}(x) = \frac{1}{2}(U_{i+1}(x) + U_i(x)) \quad (2.32)$$

$$\widehat{U}_{i,l}(x) = \frac{1}{2}(U_i(x) + U_{i-1}(x)).$$

(2.33)

Persamaan (2.32) adalah *numerical flux* untuk batas kanan sedangkan persamaan (2.33) adalah *numerical flux* untuk batas kiri (Lopez, 2011). Dengan mensubstitusikan *numerical flux* ke persamaan (2.30), maka persamaan (2.30) dapat dituliskan kembali sebagai berikut ini.

$$g(\widehat{U}''')_i v \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - g\widehat{U}_i'' v' \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + g\widehat{U}_i' v'' \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - g\widehat{U}_i v''' \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + g \int_{x_{i-1}}^{x_i} U_i v^{(4)} dx - \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_i} U_i v dx = 0 \quad (2.34)$$

### 2.5.1 Transformasi Domain (Daerah Asal)

Transformasi domain merupakan proses awal untuk melakukan diskritisasi dalam metode DG. Pada proses transformasi domain, *physical domain* yang berada pada interval  $[x_{i-1}, x_i]$  dipetakan ke *reference domain* ( $\xi$ ) yang berada pada interval  $[-1, 1]$ . Dengan mengaplikasikan proses transformasi tersebut, formulasi (2.34) akan lebih mudah dievaluasi. Selanjutnya fungsi pemetaannya dapat dituliskan seperti pada persamaan berikut ini.

$$x = \frac{\Delta x_i}{2} \xi + \frac{x_i + x_{i-1}}{2}. \quad (2.35)$$

(Fuhry, 2013).

Berdasarkan persamaan (2.35), fungsi-fungsi yang telah ditentukan sebelumnya, yaitu  $U(x)$  dan  $v(x)$  juga ditransformasikan menyesuaikan dengan *reference domain* sehingga berturut-turut menjadi  $\tilde{U}(\xi)$  dan  $\tilde{v}(\xi)$ . Selain itu turunan-turunan dari fungsi-fungsi tersebut juga harus ditransformasikan ke dalam *reference domain*. Proses tranformasi ini dilakukan dengan menerapkan aturan rantai

$D_x y = D_u y D_x u$  (Purcell *et al*, 2006) sehingga  $\frac{d^n}{dx^n} \tilde{U}(\xi)$  dan  $\frac{d^n}{dx^n} \tilde{v}(\xi)$  berturut-turut

menjadi:

$$\frac{d^n}{d\xi^n} \tilde{U}(\xi) \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^n \text{ dan } \frac{d^n}{d\xi^n} \tilde{v}(\xi) \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^n.$$

Berdasarkan persamaan (2.35) dan dengan menerapkan aturan rantai,  $\left( \frac{d\xi}{dx} \right)^n$  dapat

dituliskan kembali sebagai  $\left( \frac{2}{\Delta x_i} \right)^n$  (Lopez, 2011). Selanjutnya *numerical flux* pada persamaan (2.32) dan (2.33) menjadi,

$$\hat{U}_{i,r}(\xi) = \frac{1}{2} (\tilde{U}_{k+1}(-1) + \tilde{U}_k(1)) \quad (2.36)$$

$$\hat{U}_{i,l}(\xi) = \frac{1}{2} (\tilde{U}_k(-1) + \tilde{U}_{k-1}(1)) \quad (2.37)$$

dan formulasi (2.34) akan menjadi sebagai berikut ini.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{2}{\Delta x_i} \right)^3 g(\hat{U}''')_i \tilde{v}''''|_{-1} - \left( \frac{2}{\Delta x_i} \right)^3 g\hat{U}''_i \tilde{v}''|_{-1} + \left( \frac{2}{\Delta x_i} \right)^3 g\hat{U}'_i \tilde{v}''|_{-1} - \left( \frac{2}{\Delta x_i} \right)^3 g\hat{U}_i \tilde{v}''|_{-1} \\ & + \left( \frac{2}{\Delta x_i} \right)^3 g \int_{-1}^1 \tilde{U}_i \tilde{v}^{(4)} d\xi - \left( \frac{\Delta x_i}{2} \right) \lambda \int_{-1}^1 \tilde{U}_i \tilde{v} d\xi = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

## 2.6 Polinomial Legendre

Polinomial Legendre merupakan solusi dari persamaan differensial Legendre. Persamaan differensial Legendre atau yang lebih dikenal sebagai persamaan Legendre ini diperkenalkan oleh Legendre pada akhir abad ke-18. Persamaan Legendre dapat dinyatakan seperti pada persamaan berikut ini.

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + k(k+1)y = 0$$

Persamaan Legendre ini terdefinisi pada interval  $-1 < x < 1$ . Nilai  $k$  pada persamaan tersebut menyatakan order dari persamaan Legendre. Jika  $k$  bukan bilangan bulat positif, maka terdapat solusi berupa dua deret tak hingga. Selanjutnya, jika  $k$

bilangan bulat positif, maka salah satu dari deret tak hingga tersebut dapat diterminasi menjadi bentuk polinomial yang lebih sederhana sehingga solusi dari persamaan Legendre dapat dinyatakan sebagai,

$$y = AP_k(x) + BQ_k(x)$$

dengan  $A$  dan  $B$  berturut-turut adalah konstanta dari polinomial  $P_k$  dan deret tak hingga  $Q_k$ . Polinomial  $P_k$  inilah yang disebut sebagai polinomial Legendre (King *et al*, 2003).

Polinomial Legendre dapat dibangkitkan dengan menggunakan relasi perulangan antara  $P_{k+1}(x)$ ,  $P_k(x)$  dan  $P_{k-1}(x)$ . Relasi ini dapat dinyatakan seperti pada persamaan berikut ini.

$$(k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0$$

atau dalam *reference domain* dapat dinyatakan seperti pada persamaan (2.39).

$$(k+1)P_{k+1}(\xi) = (2k+1)\xi P_k(\xi) - kP_{k-1}(\xi) \quad (2.39)$$

(Lopez, 2011).

Polinomial Legendre mempunyai karakteristik ortogonalitas pada interval  $[-1, 1]$  yang dapat dituliskan seperti pada persamaan berikut,

$$\int_{-1}^1 P_j P_k d\xi = \frac{2}{2k+1} \delta_{jk} \quad (2.40)$$

dimana  $\delta_{jk}$  adalah *kroncker delta* yang didefinisikan sebagai,

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{untuk } j \neq k \\ 1, & \text{untuk } j = k \end{cases}$$

(King *et al*, 2003).

Jika pada formulasi (2.38) fungsi uji  $\tilde{v}$  diasumsikan ortonormal dengan  $\tilde{U}$ , maka perkalian dalam antara  $\tilde{v}$  dan  $\tilde{U}$  dapat didefinisikan sebagai,

$$\int_{-1}^1 \tilde{v} \tilde{U} d\xi = \delta_{jk}.$$

(2.41)

Selanjutnya, berdasarkan definisi himpunan ortonormal yaitu sebuah himpunan ortogonal yang setiap vektornya mempunyai norma 1, maka fungsi uji  $\tilde{v}$  juga akan ortogonal terhadap  $\tilde{U}$  (Axler, 1997). Pada kasus ini, fungsi uji  $\tilde{v}$  dapat diasumsikan sebagai polinomial Legendre. Hal ini dapat dilakukan karena pemilihan fungsi uji bersifat tidak mengikat atau bebas. Dengan mengasumsikan  $\tilde{v}$  sebagai polinomial Legendre, polinomial  $\tilde{U}$  juga dapat ditentukan sebagai polinomial Legendre sehingga perkalian dalam antara  $\tilde{v}$  dan  $\tilde{U}$  harus memenuhi karakteristik ortogonalitas seperti pada persamaan (2.40). Konsekuensinya, fungsi uji  $\tilde{v}$  dapat dinyatakan sebagai berikut ini.

$$\tilde{v} = P_k \frac{2k+1}{2}. \tag{2.42}$$

Sedangkan polinomial  $\tilde{U}$  berdasarkan persamaan (2.31) dapat dituliskan sebagai,

$$\tilde{U}_i = \sum_{k=0}^m (c_k)_i \tilde{v}_j. \tag{2.43}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.43) ke dalam integral  $\left(\frac{\Delta x_i}{2}\right) \lambda \int_{-1}^1 \tilde{U}_i \tilde{v} d\xi$  pada formulasi (2.38), diperoleh formulasi (2.44) yang dapat dituliskan sebagai berikut ini.

$$\left(\frac{\Delta x_i}{2}\right) \lambda \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^m (c_k)_i \tilde{v}_j \tilde{v} d\xi. \tag{2.44}$$

Selanjutnya, formulasi (2.44) dapat dituliskan kembali seperti pada formulasi (2.45).

$$\left(\frac{\Delta x_i}{2}\right) \lambda \sum_{k=0}^m (c_k)_i \int_{-1}^1 \tilde{v}_j \tilde{v} d\xi. \tag{2.45}$$

Jika  $\tilde{v}_j = \tilde{v}$ , berdasarkan kondisi ortogonalitas seperti pada persamaan (2.40), maka formulasi (2.45) menjadi seperti berikut ini.

$$\left(\frac{\Delta x_i}{2}\right)\lambda(c_k)_i \tag{2.46}$$

(Lopez, 2011).

**2.7 Metode Gaussian Quadrature**

Metode *Gaussian Quadrature* merupakan salah satu metode integrasi numerik yang seringkali digunakan untuk menyelesaikan kasus integrasi (integral tentu) yang solusinya sulit ditentukan secara analitik. Secara umum, metode ini dapat diilustrasikan sebagai berikut,

$$\int_a^b \tilde{U}(\xi)d\xi \approx \sum_{j=0}^N w_j \tilde{U}(t_j). \tag{2.47}$$

Nilai integral pada ruas kiri dari bentuk aproksimasi (2.47) dihampiri oleh sejumlah hingga nilai tertentu pada ruas kanan dimana  $w_j$  menyatakan suatu bobot dan  $t_j$  menyatakan titik Gauss. Bentuk aproksimasi (2.47) memiliki derajat akurasi  $2n - 1$ . Dengan kata lain, formula tersebut dapat diaplikasikan pada sebarang polinomial  $\tilde{U}(\xi)$  berderajat hingga  $2n - 1$ . Selanjutnya, interval standar yang digunakan dalam metode *Gaussian Quadrature* adalah  $[-1, 1]$ . Jika intervalnya berbeda dari interval standar, maka interval tersebut perlu ditransformasikan menjadi interval standar sehingga metode *Gaussian Quadrature* dapat diaplikasikan (Burden & Faires, 2011).

Metode *Gaussian Quadrature* dapat diaplikasikan juga pada kasus integrasi yang melibatkan dua fungsi. Ilustrasinya dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\int_{-1}^1 \tilde{U}(\xi)\tilde{V}(\xi)d\xi \approx \sum_{j=0}^N w_j \tilde{U}(t_j)\tilde{V}(t_j). \tag{2.48}$$

Nilai bobot  $w_j$  dan titik Gauss  $t_j$  untuk  $N = 11$  dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Data *Gaussian Quadrature* untuk  $N = 11$

$N$	Titik Gauss ( $\pm t_j$ )	Bobot ( $w_j$ )
0	0.000000000000000	0.272925086777901
1&10	0.26954315592345	0.262804544510247



2&9	0.519096129110681	0.233193764591990
3&8	0.730152005574049	0.186290210927734
4&7	0.887062599768095	0.125580369464905
5&6	0.978228658146057	0.055668567116174

Sumber: Lowan *et al* (Tanpa Tahun).

Berdasarkan bentuk aproksimasi (2.48) untuk  $N = 11$ , bentuk integrasi pertama dari persamaan (2.38) dapat dituliskan menjadi,

$$g \int_{-1}^1 \tilde{U} \tilde{v}^{(4)} d\xi \approx g \sum_{N=0}^{11} w_N \tilde{U}(t_N) \tilde{v}^{(4)}(t_N)$$

(Lopez, 2011).

## 2.8 Preconditioner

*Preconditioner* adalah suatu matriks yang terbentuk dari hasil transformasi sebuah matriks yang merupakan ilustrasi sistem persamaan linier tertentu. *Preconditioner* diaplikasikan pada suatu sistem persamaan linier dalam kaitannya dengan penyelesaian sistem persamaan linier tersebut dengan suatu metode iterasi tertentu. Secara umum, manfaat dari pengaplikasian *preconditioner* adalah dapat meningkatkan laju konvergensi dari metode iterasi yang digunakan. *Preconditioner* seringkali dinotasikan sebagai matriks  $M$  (Saad, 2003). Sistem persamaan linier baru yang terbentuk dari hasil pengaplikasian *preconditioner* ini akan mempunyai solusi yang sama dengan sistem persamaan linier yang sebelumnya (*original system*), tetapi mempunyai karakteristik yang membuat sistem baru ini lebih mudah dievaluasi dengan metode iterasi yang sama (Barret *et al*, Tanpa Tahun).

Pengaplikasian *preconditioner* pada suatu sistem persamaan linier, ditinjau dari posisinya, dapat diklasifikasikan menjadi tiga, yaitu: *left preconditioner*, *right preconditioner* dan *split preconditioner* (*left-right preconditioner*). *Left preconditioner* merupakan *preconditioner* yang diaplikasikan dari sisi kiri matriks koefisien dan vektor ruas kanan dari sistem persamaan linier yang dimaksud. Dengan memisalkan matriks koefisien sebagai  $A$ , vektor solusi sebagai  $x$  dan vektor ruas

kanan sebagai  $b$ . Pengaplikasian *left preconditioner* dapat diilustrasikan sebagai berikut,

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b.$$

Sedangkan *right preconditioner* merupakan *preconditioner* yang diaplikasikan dari sisi kanan matriks koefisien dari suatu sistem persamaan linier. Pengaplikasian *right preconditioner* dapat dituliskan sebagai,

$$AM^{-1}u = b, \quad x = M^{-1}u.$$

Yang terakhir, *split preconditioner* dapat dinyatakan sebagai,

$$M = M_1M_2.$$

*Split preconditioner* merupakan *preconditioner* yang diaplikasikan dari sisi kanan dan kiri matriks koefisien dan sisi kiri vektor ruas kanan dari sistem persamaan linier tertentu. Selanjutnya, interpretasi dari *split preconditioner* pada sistem persamaan linier dapat dituliskan seperti berikut ini,

$$M_1^{-1}AM_2^{-1}u = M_1^{-1}b, \quad x = M_2^{-1}u.$$

*Split preconditioner* ini akan diimplementasikan seperti halnya pengaplikasian *left preconditioner* atau *right preconditioner*. Dalam prakteknya, proses penentuan *preconditioner* yang baik seringkali dipandang sebagai suatu kombinasi dari seni dan sains (Saad, 2003).

### 2.8.1 *Preconditioner Diagonal Lower Upper Factorization (D-ILU)*

Salah satu teknik transformasi yang dapat diimplementasikan dalam kaitannya untuk membangkitkan suatu *preconditioner* adalah *Incomplete Lower Upper factorization (ILU)*. Secara umum, teknik transformasi yang digunakan untuk membangkitkan *preconditioner ILU* adalah suatu bentuk modifikasi dari eliminasi Gauss yang menghasilkan matriks segitiga bawah  $L$  dan matriks segitiga atas  $U$  (Saad, 2003). Pada kasus sparse matriks, yaitu matriks yang persentase elemen nolnya lebih dari persentase elemen bukan nol, faktorisasi ILU menghasilkan matriks segitiga bawah dan matriks segitiga atas yang juga mempunyai karakteristik sparse



(Vogel, 2000). Selanjutnya dalam proses transformasi ILU, jika terdapat elemen bukan nol dimana pada posisi matriks aslinya merupakan elemen yang bernilai nol maka elemen tersebut disebut *fill-in*. Jika elemen *fill-in* diabaikan maka proses transformasi ini disebut *zero Incomplete Lower Upper factorization* (ILU(0)). Simplifikasi dari ILU(0) ini adalah *Diagonal Lower Upper factorization* (D-ILU). Proses transformasi D-ILU hanya akan menghasilkan elemen bukan nol pada diagonal utama matriks *preconditioner* (Barret *et al*, Tanpa Tahun). *Preconditioner* inilah yang disebut *preconditioner* D-ILU.

Algoritma konstruksi *preconditioner* D-ILU adalah sebagai berikut:

Mengkonstruksi himpunan yang dibangun dari posisi elemen matriks  $A$  yang bukan nol yang dapat dinyatakan sebagai

$$NZ = \{(i, j) : a_{ij} \neq 0\} \quad (2.49)$$

Mengkonstruksi matriks diagonal  $D$  yang elemen-elemennya merupakan diagonal dari matriks  $A$

$$d_{ii} = a_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad n \text{ adalah ukuran matriks } A \quad (2.50)$$

Mengkonstruksi matriks diagonal baru  $D_{new}$  yang merupakan hasil transformasi dari matriks diagonal  $D$

$$d_{new_{ii}} = \frac{1}{d_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.51)$$

Mengkonstruksi matriks diagonal akhir  $D_{fin}$  yang merupakan hasil transformasi dari matriks diagonal sebelumnya

$$d_{fin_{jj}} = d_{fin_{jj}} - a_{ji} d_{new_{ii}} a_{ij}, \quad j = i+1, i+2, \dots, n \quad (2.52)$$

dimana  $(i, j) \in NZ$  dan  $(j, i) \in NZ$  (Barret *et al*, Tanpa Tahun). Matriks diagonal  $D_{fin}$  inilah yang merupakan matriks *preconditioner* D-ILU.

## 2.9 Metode *Quasi Minimal Residual* (QMR)

Metode *quasi minimal residual* (QMR) merupakan salah satu klasifikasi dari metode iterasi yang bersifat non-stasioner. Metode iterasi non-stasioner mengisyaratkan adanya komponen lain, selain vektor solusi, yang nilainya terbaharui pada setiap iterasinya. Komponen tersebut dapat berupa suatu konstan yang terbentuk dari hasil perkalian dalam residual atau vektor lainnya yang muncul dalam proses iterasi dari metode ini (Barret *et al*, Tanpa Tahun). Hal ini dapat dipahami karena metode iterasi yang bersifat non-stasioner merupakan kelas dari metode subruang Krylov.

Metode subruang Krylov yang diaplikasikan pada kasus matriks non-simetris melibatkan dua subruang Krylov, yaitu subruang yang masing-masing direntang oleh  $m$  vektor, yang dapat dinotasikan sebagai

$$\kappa_m(A, v) = \{v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v\}$$

dan

$$\kappa_m(A^T, w) = \{w, Aw, A^2w, \dots, A^{m-1}w\}.$$

Subruang-subruang inilah yang akan digunakan untuk membangkitkan basis-basis yang bersifat orthogonal. Basis-basis tersebut dibangkitkan dengan menggunakan prosedur *Lanczos biorthogonalization* (Saad, 2003). Selanjutnya, metode subruang Krylov dapat didefinisikan sebagai suatu metode iterasi yang dapat digunakan untuk mengaproksimasi solusi dari suatu sistem persamaan linier  $Ax = b$  sedemikian hingga

$$x_m - x_0 = q_{m-1}(A)r_0 \in \kappa_m(A, r_0) \tag{2.53}$$

dimana  $x_m, x_0, p_{m-1}$  dan  $r_0$  berturut-turut menyatakan aproksimasi ke- $m$  dari vektor solusi, tebakan awal dari vektor solusi, polinomial dengan derajat  $m-1$  dan vektor residual awal dari sistem. Sedangkan residual  $r_m$  dari metode subruang Krylov dapat dituliskan seperti pada formulasi berikut ini.

$$r_m = p_m(A)r_0 \in r_0 + A\kappa_m(A, r_0) \subseteq \kappa_{m+1}(A, r_0) \tag{2.54}$$

dimana  $q_m$  menyatakan polinomial berderajat  $m$ . Pada kasus matriks non-simetris terdapat dua subruang yang melibatkan vektor residual seperti halnya pada dua subruang yang digunakan untuk membangkitkan basis-basis orthogonal. Subruang yang pertama adalah subruang sebagaimana yang telah tersuratkan pada formulasi (2.53) maupun (2.54) dan yang kedua dapat dinotasikan sebagai subruang  $\kappa_m(A^T, r_0)$  yang menghasilkan formulasi yang bersifat analogi dengan subruang yang pertama (Gutknecht, Tanpa Tahun).

Metode QMR merupakan kelas dari metode subruang Krylov yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan kasus matriks non-simetris. Poin utama dari metode QMR ini adalah meminimumkan nilai norm dari vektor residual sistem.

Algoritma metode QMR dengan menggunakan *split preconditioner* dapat dituliskan sebagai berikut.

Membangkitkan vektor residual awal

$$r_0 = b - Ax_0 \quad (2.55)$$

dimana  $x_0$  adalah tebakan awal vektor solusi

Membangkitkan vektor awal

$$\tilde{v}_1 = r_0 \quad (2.56)$$

dan

$$\tilde{w}_1 = r_0 \quad (2.57)$$

Membangkitkan vektor  $y$

$$y = M_1^{-1} \tilde{v}_1 \quad (2.58)$$

Mengkalkulasi nilai norm vektor  $y$

$$\rho_1 = \|y\|_2 \quad (2.59)$$

Membangkitkan vektor  $z$

$$z = (M_2^T)^{-1} \tilde{w} \quad (2.60)$$

Mengkalkulasi nilai norm vektor  $z$

$$\zeta_1 = \|z\|_2 \quad (2.61)$$

Mengasumsikan nilai skalar awal

$$\gamma_0 = 1 \quad (2.62)$$

dan

$$\eta_0 = -1 \quad (2.63)$$

Untuk iterasi ke- $i$  sampai iterasi maksimum ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), langkah-langkah selanjutnya yang harus dipenuhi adalah sebagai berikut.

Membangkitkan vektor basis

$$v_i = \frac{\tilde{v}_i}{\rho_i} \quad (2.64)$$

dan

$$w_i = \frac{\tilde{w}_i}{\zeta_i} \quad (2.65)$$

Memperbaharui vektor  $y$  dan  $z$  menjadi

$$y = \frac{y}{\rho_i} \quad (2.66)$$

dan

$$z = \frac{z}{\zeta_i} \quad (2.67)$$

(jika nilai  $\rho_i = 0$  atau  $\zeta_i = 0$  maka metode ini gagal).

Menentukan nilai skalar  $\delta_i$

$$\delta_i = z^T y \quad (2.68)$$

Membangkitkan vektor  $\tilde{y}$

$$\tilde{y} = M_2^{-1} y \quad (2.69)$$

Membangkitkan vektor  $\tilde{z}$

$$\tilde{z} = (M_1^T)^{-1} z \quad (2.70)$$

Membangkitkan vektor  $p$  dan vektor  $q$  dengan ketentuan:

untuk  $i = 1$  berlaku:

$$p_1 = \tilde{y} \quad (2.71)$$

dan

$$q_1 = \tilde{z} \quad (2.72)$$

sedangkan untuk  $i = 2, 3, \dots, n$  iterasi maksimum berlaku:

$$p_i = \tilde{y} - \left( \frac{\zeta_i \delta_i}{\varepsilon_{i-1}} \right) p_{i-1} \quad (2.73)$$

dan

$$q_i = \tilde{z} - \left( \frac{\rho_i \delta_i}{\varepsilon_{i-1}} \right) q_{i-1} \quad (2.74)$$

dengan  $\varepsilon_i = q_i^T A p_i$  (jika nilai  $\varepsilon_i = 0$  maka metode ini gagal).

Membangkitkan skalar  $\beta_i$

$$\beta_i = \frac{\varepsilon_i}{\delta_i}$$

(2.75)

(jika nilai  $\beta_i = 0$  maka metode ini gagal).

Memperbaharui vektor  $\tilde{v}$  menjadi

$$\tilde{v}_{i+1} = \tilde{p} - \beta_i v_i \quad (2.76)$$

Memperbaharui vektor  $y$

$$y = M_1^{-1} \tilde{v}_{i+1} \quad (2.77)$$

Mengkalkulasi nilai norm vektor  $y$

$$\rho_{i+1} = \|y\|_2 \quad (2.78)$$

Memperbaharui vektor  $\tilde{w}$  menjadi

$$\tilde{w}_{i+1} = A^T q_i - \beta_i \tilde{w}_i \quad (2.79)$$

Memperbaharui vektor  $z$

$$z = (M_2^T)^{-1} \tilde{w}_{i+1} \quad (2.80)$$

Mengkalkulasi nilai norm vektor  $z$

$$\varsigma_{i+1} = \|z\|_2 \quad (2.81)$$

Membangkitkan skalar  $\theta_i$

$$\theta_i = \frac{\rho_{i+1}}{\gamma_{i-1}} |\beta_i| \quad (2.82)$$

Memperbaharui skalar  $\gamma$  menjadi

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \theta_i^2}} \quad (2.83)$$

Memperbaharui skalar  $\eta$  menjadi

$$\eta_i = \frac{-\eta_{i-1} \rho_i \gamma_i^2}{\beta_i \gamma_{i-1}^2} \quad (2.84)$$

Membangkitkan vektor  $d$  dan vektor  $s$  dengan ketentuan:  
untuk  $i = 1$  berlaku:

$$d_i = \eta_i p_1 \quad (2.85)$$

dan

$$s_i = \eta_i \tilde{p} \quad (2.86)$$

sedangkan untuk  $i = 2, 3, \dots, n$  iterasi maksimum berlaku:

$$d_i = \eta_i p_i + (\theta_{i-1} \gamma_i)^2 d_{i-1} \quad (2.87)$$

dan

$$s_i = \eta_i \tilde{p}_i + (\theta_{i-1} \gamma_i)^2 s_{i-1} \quad (2.88)$$

Memperbaharui vektor solusi  $x$  menjadi

$$x = x_{i-1} + d_i \quad (2.89)$$

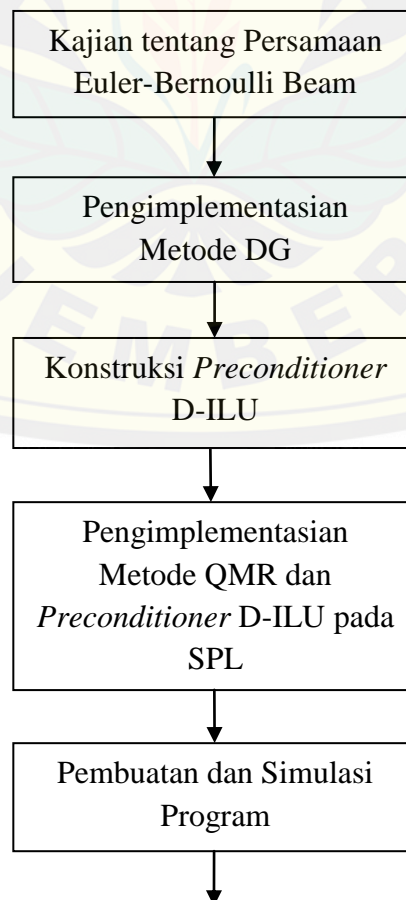
Memperbaharui vektor residual  $r$  menjadi

$$r_i = r_{i-1} - s_i \quad (2.90)$$

Selesai (Barret *et al*, Tanpa Tahun).

### BAB 3. METODE PENELITIAN

Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam menyelesaikan tugas akhir ini, secara skematik dapat diilustrasikan pada gambar 3.1.





Analisis Hasil Simulasi

Gambar 3.1 Skema Metode Penelitian

Dari skema pada gambar 3.1, langkah-langkah penelitian dapat dijelaskan sebagai berikut:

a. Kajian tentang Persamaan *Euler-Bernoulli Beam*

Kajian tentang persamaan *Euler-Bernoulli Beam* meliputi proses penurunan persamaan *Euler-Bernoulli Beam* dan penentuan kondisi batas yang berlaku sehingga karakteristik persamaan *Euler-Bernoulli Beam* dapat diketahui dengan baik. Selain itu, solusi analitik dari persamaan *Euler-Bernoulli Beam* juga turut dibahas pada bagian ini. Proses penurunan persamaan *Euler-Bernoulli Beam* dan penentuan kondisi batasnya diuraikan pada persamaan (2.14) – (2.27). Sedangkan solusi analitik dari persamaan *Euler-Bernoulli Beam* diilustrasikan pada persamaan (2.28).

b. Pengimplementasian Metode DG

Proses diskritisasi pada *beam* diawali dengan mengimplementasikan metode DG pada persamaan (2.26). Pengimplementasian metode DG ini terdiri dari tiga prosedur utama, yaitu konstruksi formulasi *weak* DG, konstruksi polinomial-polinomial yang digunakan untuk mengaproksimasi nilai model defleksi dan pengaplikasian *numerical flux* pada model defleksi tersebut pada kondisi batas. Proses konstruksi formulasi *weak* DG merupakan proses yang berkaitan dengan penentuan pencacahan panjang *beam* pada tiap-tiap grid komputasi. Hal ini dikarenakan pada proses konstruksi formulasi *weak* DG, panjang subinterval ditentukan. Panjang subinterval inilah yang akan menjadi penentu pencacahan panjang *beam*. Dalam skripsi ini, digunakan panjang subinterval yang sama dan ditentukan sebagai,

$$\text{Panjang subinterval } (\Delta x) = \frac{\text{panjang beam}}{n} \quad (3.1)$$

Metode DG dilanjutkan dengan proses konstruksi polinomial-polinomial, berderajat sama, guna mengaproksimasi nilai dari model defleksi seperti yang diilustrasikan pada persamaan (2.31) kemudian mengaplikasikan *numerical flux* pada model defleksi tersebut untuk kondisi batas seperti pada persamaan (2.32) – (2.33) sehingga diperoleh persamaan (2.34). Model defleksi pada persamaan (2.34) selanjutnya ditransformasikan dengan menggunakan persamaan (2.35). Transformasi ini mengisyaratkan pemetaan *physical domain* ke *reference domain*. Setelah proses transformasi dilakukan, langkah berikutnya adalah pendiskritisasian terhadap unsur-unsur pembangun model yang masih bersifat kontinu. Proses diskritisasi untuk unsur pembangun model yang pertama atau term kelima dari persamaan (2.38) dilakukan dengan memanfaatkan karakteristik ortogonalitas polinomial Legendre pada persamaan (2.40). Pada proses ini ditetapkan juga bahwasannya polinomial yang diaplikasikan untuk mengaproksimasi model defleksi adalah polinomial Legendre. Terakhir, proses diskritisasi untuk unsur pembangun model yang kedua atau term keenam dari persamaan (2.38) dilakukan dengan menggunakan metode *Gaussian Quadrature*.

#### c. Konstruksi *Preconditioner* D-ILU

Metode DG yang diaplikasikan pada model akan menghasilkan suatu bentuk problem nilai eigen dengan kasus matriks non-simetris. Nilai eigen dari matriks tersebut akan dihitung dengan menggunakan sintak `eig` pada Matlab. Nilai eigen tersebut kemudian disubstitusikan kembali pada matriks awal. Selanjutnya, setelah dilakukan modifikasi terhadap matriks awal, akan terbentuk suatu SPL yang bersifat sparse. Dalam kaitannya dengan proses penyelesaian SPL tersebut, dikonstruksikanlah suatu *preconditioner* yang dinamakan *preconditioner* D-ILU. Proses konstruksi ini dijelaskan pada persamaan (2.49) – (2.52).

#### d. Pengimplementasian Metode QMR dan *Preconditioner* D-ILU pada SPL

Setelah *preconditioner* D-ILU terbentuk, metode QMR dapat diimplementasikan bersama dengan *preconditioner* D-ILU untuk mengaproksimasi nilai koefisien defleksi pada persamaan (2.43). Uraian dari metode ini dijelaskan pada persamaan (2.55) – (2.90). Setelah nilai koefisien defleksi didapatkan, selanjutnya nilai tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan (2.43).

## e. Pembuatan dan Simulasi Program

Pembuatan program dilakukan dengan menggunakan *software* Matlab R2008b. Prosedur untuk pembuatan program adalah sebagai berikut:

- 1) Input
  - a) Panjang subinterval.
  - b) Pangkat polinomial.
  - c) Nilai eigen ke-  $j$  yang diaplikasikan pada matriks awal
  - d) Baris dan kolom ke-  $i$  dari matriks awal yang akan dieliminasi (Hal ini juga berdampak pada eliminasi baris ke-  $i$ , karena telah diasumsikan nilainya, dari vektor yang elemen-elemennya merupakan koefisien defleksi)
  - e) Nilai salah satu koefisien defleksi yang diasumsikan
  - f) Nilai toleransi
  - g) Vektor tebakan awal
- 2) Proses
  - a) Membuat program untuk membangkitkan matriks awal.
  - b) Membuat program untuk membangkitkan *preconditioner* D-ILU.
  - c) Membuat program untuk mengaplikasikan metode QMR sekaligus *preconditioner* D-ILU.
- 3) Output.

Nilai eigen, koefisien defleksi dan nilai defleksi. Koefisien defleksi yang diperoleh selanjutnya disubstitusikan ke persamaan (2.43) dengan menginverskan persamaan (2.33) menjadi sebagai berikut:

$$\xi = \left( x - \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \right) \frac{2}{\Delta x_i} \quad (3.2)$$

Setelah pembuatan program selesai, selanjutnya dilakukan proses simulasi terhadap beberapa parameter yang terkait yaitu panjang subinterval, pangkat dari polinomial, nilai eigen ke- $j$ , baris dan kolom ke- $i$  dari matriks awal yang akan dieliminasi, nilai salah satu koefisien defleksi yang diasumsikan, nilai toleransi dan vektor tebakan awal.

f. Analisis Hasil Simulasi

Analisis dilakukan terhadap hasil simulasi untuk mengetahui karakteristik *beam* yang mengalami getaran bebas melalui frekuensi angular (nilai eigen) dan mode shape (model defleksi), dimana nilainya menyatakan nilai defleksi, pada tiap-tiap grid komputasi yang ditentukan. Nilai frekuensi angular yang didapatkan dari hasil simulasi numerik dibandingkan dengan nilai frekuensi angular yang diperoleh dari hasil penyelesaian analitik. Nilai defleksi yang diperoleh dari hasil simulasi numerik juga turut dibandingkan dengan penyelesaian analitiknya. Nilai error untuk frekuensi angularnya dihitung dengan menggunakan persamaan sebagai berikut ini.

$$\text{Error} = \left| \frac{\omega_{an} - \omega}{\lambda} \right| \quad (3.3)$$

Sedangkan nilai error untuk nilai defleksinya dapat dituliskan sebagai,

$$L^2 \text{ error} = \|U_{an} - \tilde{U}\|_2 \quad (3.4)$$

dengan

$$\|U_{an} - \tilde{U}\|_2 = \sqrt{\left( (U_{an})_1 - \tilde{U}_1 \right)^2 + \left( (U_{an})_2 - \tilde{U}_2 \right)^2 + \dots + \left( (U_{an})_{n \times m} - \tilde{U}_{n \times m} \right)^2}$$

(Kosasih, 2006). Nilai error ini merupakan indikator untuk mengetahui seberapa baik kinerja dari metode DG (berbantu metode QMR dan *preconditioner* D-ILU). Dengan

kata lain, jika nilai error berturut-turut pada persamaan (3.3) dan (3.4) kecil (mendekati nol) maka kinerja berturut-turut dari metode DG dan metode QMR (dan *preconditioner* D-ILU) dapat dikatakan baik. Sebaliknya, jika nilai error berturut-turut pada persamaan (3.3) dan (3.4) besar (menuju ke tak hingga) maka kinerja berturut-turut dari metode DG dan metode QMR (dan *preconditioner* D-ILU) dikatakan buruk pada kasus ini.

## BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan skema yang telah diilustrasikan dalam bab 3, maka pada bab ini akan dibahas tentang penyelesaian numerik persamaan *Euler-Bernoulli Beam* menggunakan metode *Discontinuous Galerkin* (DG) sebagai pendiskritisasi dan metode *Quasi Minimal Residual* (QMR) yang diimplementasikan dengan *preconditioner* D-ILU sebagai pengaproksimasi koefisien defleksi. Proses ini dilakukan dengan bantuan Matlab R2008a.

### 4.1 Penyelesaian Persamaan *Euler-Bernoulli Beam* Secara Analitik

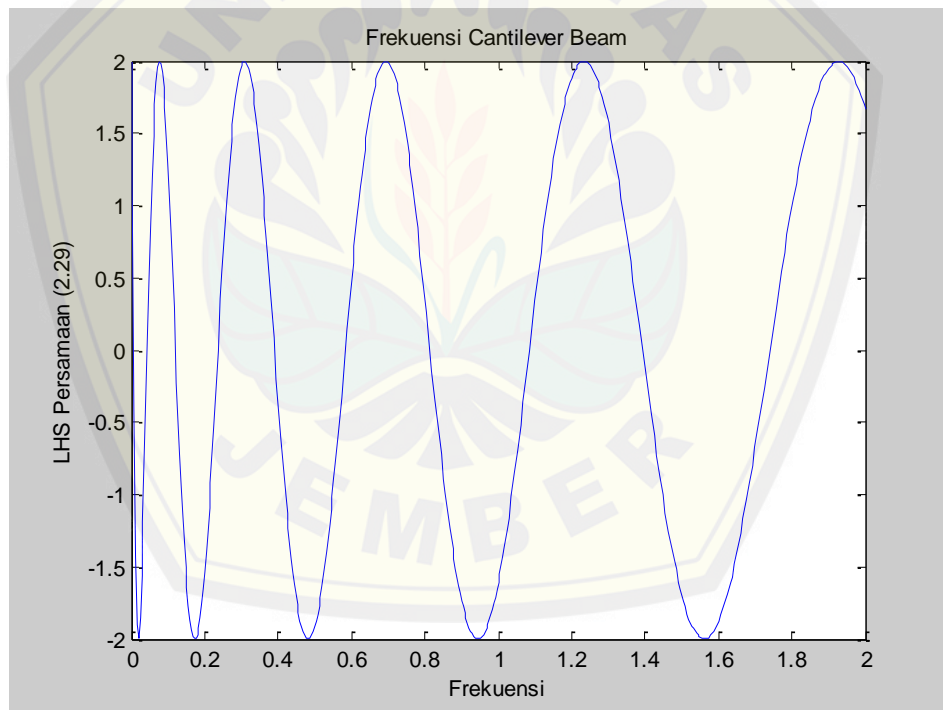
Persamaan *Euler-Bernoulli Beam* memiliki solusi analitik seperti pada persamaan (2.28). Solusi analitik yang terinterpretasikan pada persamaan (2.28) ini bergantung pada solusi dari persamaan (2.29) yang merupakan frekuensi angular *cantilever beam*. Selain itu, parameter-parameter yang meliputi panjang, lebar, tinggi, massa jenis, dan modulus Young atau modulus elastisitas dari beam turut mempengaruhi solusi analitik (berupa nilai defleksi) pada persamaan (2.28). Dalam skripsi ini, parameter-parameter tersebut ditetapkan dengan nilai berturut-turut 2 satuan panjang, 0,5 satuan lebar, 0,9 satuan tinggi, 8960 satuan massa jenis dan

117 satuan modulus Young atau modulus elastisitas. Nilai parameter massa jenis dan modulus Young atau modulus elastisitas dari beam tersebut mengindikasikan beam yang terbuat dari logam berjenis tembaga. Selanjutnya, parameter lain yang turut terlibat dan mempengaruhi nilai defleksi adalah momen inersia dan luas permukaan beam. Momen inersia dari beam dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (2.24). Sedangkan luas permukaan beam dapat ditentukan dengan rumusan,

$$A = 2pl + 2lt + 2pt$$

dimana  $p$ ,  $l$  dan  $t$  berturut-turut menyatakan panjang, lebar dan tinggi beam.

Solusi (2.29) dapat diinterpretasikan secara grafis seperti pada gambar berikut ini.



Gambar 4.1 Profil frekuensi cantilever beam pada interval (0, 2)

Nilai frekuensi cantilever beam dapat ditentukan dengan cara mencari nilai nol fungsi atau dalam hal ini yang merupakan ruas kiri (LHS) dari persamaan (2.29). Sehingga,



akan diperoleh beberapa nilai frekuensi cantilever beam yang berada interval  $(0, 2)$  sebagai berikut,

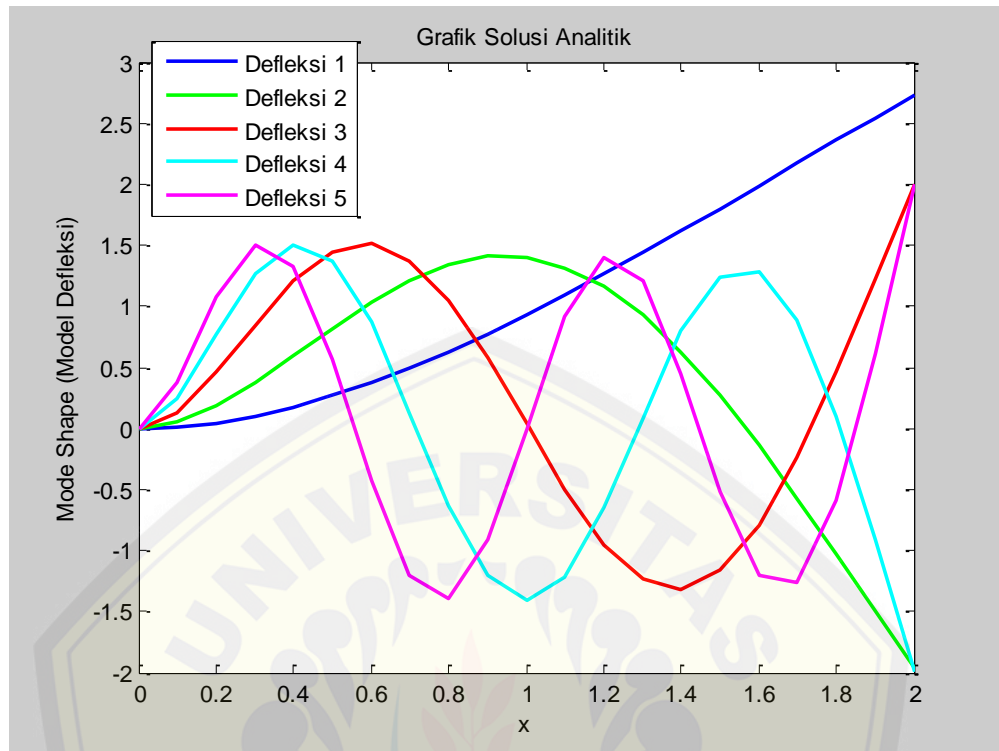
Tabel 4.1 Frekuensi cantilever beam pada interval  $(0, 2)$

No.	Frekuensi Cantilever Beam
1	0.0069
2	0,0430
3	0,1205
4	0,2361
5	0,3903
6	0,5830
7	0,8143
8	1,0842
9	1,3926
10	1,7395

Frekuensi yang telah dibangkitkan tersebut merupakan frekuensi angular dari cantilever beam.

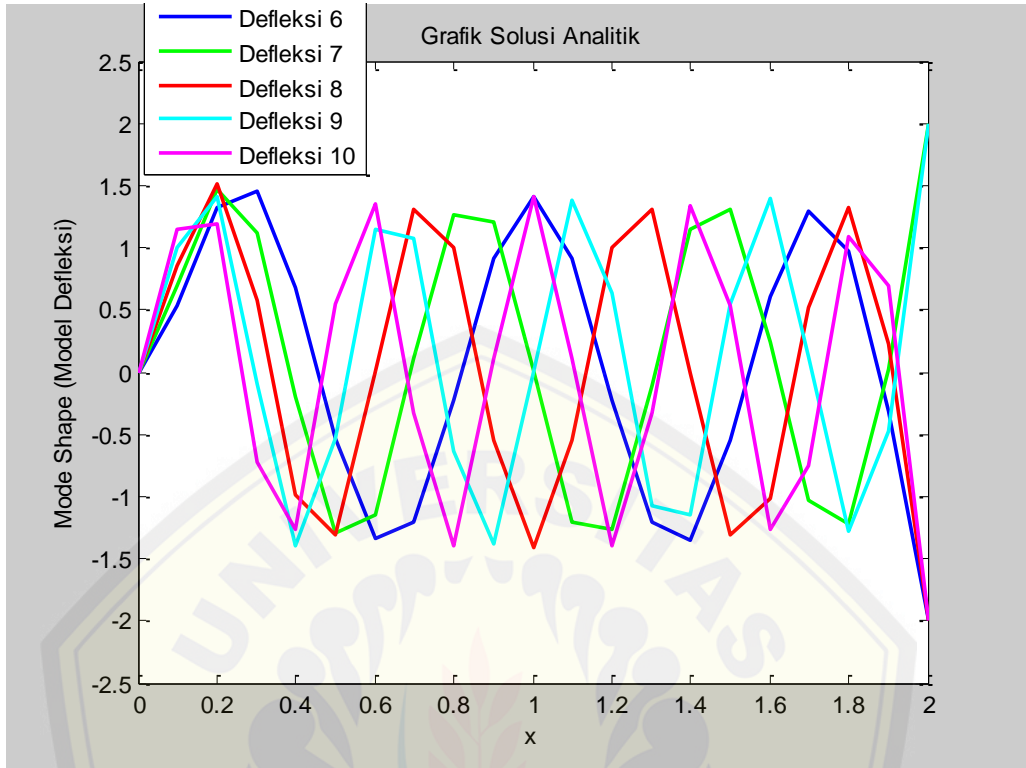
Solusi analitik pada formulasi (2.28), berdasarkan lima frekuensi angular pertama seperti yang tertulis pada tabel 4.1, dapat diilustrasikan seperti pada gambar 4.2.





Gambar 4.2 Profil defleksi cantilever beam berdasarkan lima frekuensi angular pertama dari tabel 4.1

Selanjutnya, untuk lima frekuensi angular terakhir dari tabel 4.1, interpretasi grafis dari solusi analitiknya adalah sebagai berikut.



Gambar 4.3 Profil defleksi cantilever beam berdasarkan lima frekuensi angular terakhir dari tabel 4.1

Profil gerak defleksi cantilever beam pada gambar 4.2 dan 4.3 menggunakan partisi terhadap nilai  $x$  sedemikian hingga menjadi 20 subinterval.

**4.2 Diskritisasi Persamaan Euler-Bernoulli Beam dengan Metode Discontinuous Galerkin (DG)**

Seperti yang telah diuraikan pada bab 3 poin b, bahwasannya metode Discontinuous Galerkin (DG) diimplementasikan pada persamaan (2.26) dalam kaitannya dengan proses diskritisasi terhadap persamaan tersebut. Hasil akhir dari proses diskritisasi ini dapat dituliskan seperti pada persamaan berikut,

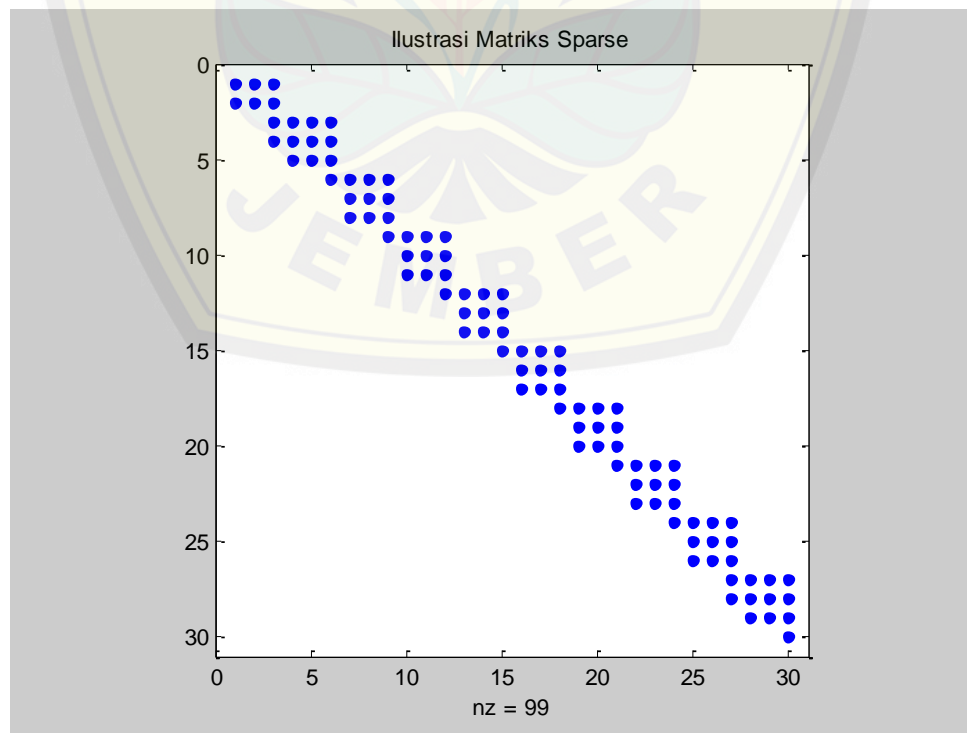
$$\left(\frac{2}{\Delta x_i}\right)^3 g(\hat{U}''')_i \tilde{v}|_{-1}^1 - \left(\frac{2}{\Delta x_i}\right)^3 g\hat{U}''_i \tilde{v}'|_{-1}^1 + \left(\frac{2}{\Delta x_i}\right)^3 g\hat{U}'_i \tilde{v}''|_{-1}^1 - \left(\frac{2}{\Delta x_i}\right)^3 g\hat{U}_i \tilde{v}'''|_{-1}^1$$

$$+ g \sum_{N=0}^{11} w_N \tilde{U}(t_N) \tilde{v}^{(4)}(t_N) - \left( \frac{\Delta x_i}{2} \right) \lambda(c_k)_i = 0.$$

Persamaan tersebut kemudian digunakan untuk membangkitkan suatu matriks yang didasarkan pada ketentuan dari persamaan (2.31). Persamaan (2.31) ini mengindikasikan bahwa terdapat  $n(m+1)$  koefisien polinomial yang tidak diketahui dimana  $n$  dan  $m$  berturut-turut menyatakan jumlah subinterval dan derajat polinomial. Guna mendapatkan nilai koefisien-koefisien tersebut, dibangkitkanlah sejumlah  $n(m+1)$  persamaan yang bebas linier yang membentuk suatu problem nilai eigen:

$$(A - \lambda I)b = 0.$$

Matriks yang terbentuk, yang dilustrasikan sebagai matriks  $A$  dalam problem nilai eigen tersebut, mempunyai karakteristik sparse dan non-simetris. Matriks tersebut berukuran  $n(m+1) \times n(m+1)$ . Berikut ini adalah salah contoh tampilan grafis struktur matriks dengan parameter  $n = 10$  dan  $m = 2$ .



Gambar 4.4 Pola matriks sparse dengan ukuran matriks  $30 \times 30$ 

Simbol asterisk yang berwarna biru pada gambar 4.4 menyatakan posisi elemen-elemen yang bukan nol. Matriks sparse pada kasus gambar 4.4 tersebut mempunyai elemen bukan nol sebanyak 99 elemen. Pola yang hampir serupa juga berlaku untuk matriks lain yang dibangkitkan dengan parameter  $n$  dan  $m$  yang berbeda-beda.

#### 4.3 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier (SPL) dengan Metode Quasi Minimal Residual (QMR) dan *Preconditioner* D-ILU

Setelah nilai eigen didapatkan dan disubstitusikan kembali pada matriks awal, matriks tersebut akan menjadi matriks yang singular. Hal ini mengimplikasikan bahwa salah satu koefisien defleksi bergantung linier terhadap koefisien defleksi yang lainnya. Agar kondisi matriks tidak berubah atau dengan kata lain tetap merupakan matriks yang non-singular, maka salah satu nilai koefisien defleksi tersebut perlu diasumsikan sebagai suatu nilai tertentu. Konsekuensinya, nilai koefisien yang diasumsikan tersebut dieliminasi dari sistem sehingga akan berdampak pula pada eliminasi baris dan kolom dari matriks  $A$  serta baris dari vektor  $b$  pada posisi yang bersesuaian dengan posisi koefisien defleksi tersebut. Selanjutnya, akan terbentuk matriks baru  $A_N$  berukuran  $(n(m+1)-1) \times (n(m+1)-1)$  yang mengilustrasikan suatu Sistem Persamaan Linier (SPL)

$$A_N b_N = r$$

dimana  $b_N$  juga merupakan vektor baru yang dapat dinyatakan sebagai,

$$b_N = c * b_{\min}$$

dengan  $c$  dan  $b_{\min}$  berturut-turut menyatakan koefisien defleksi yang telah diasumsikan nilainya dan vektor awal yang salah satu elemennya telah dieliminasi akibat dari pengasumsian nilai salah satu koefisien defleksi tersebut. Sedangkan  $r$  adalah vektor ruas kanan yang elemen-elemennya merupakan hasil perkalian antara

vektor kolom (kolom yang dieleminasi) dari matriks  $A$  (kecuali elemen yang bersesuaian dengan koefisien defleksi yang telah diasumsikan) dengan negatif dari nilai koefisien defleksi yang telah diasumsikan. SPL tersebut, sebagaimana yang telah disebutkan pada bab 3, diselesaikan dengan menggunakan metode Quasi Minimal Residual (QMR) dan *preconditioner* D-ILU. *Preconditioner* D-ILU diaplikasikan pada sisi kanan matriks koefisien SPL (*right preconditioner*).

#### 4.4 Simulasi Program

Dalam subbab ini akan disimulasikan persamaan *Euler-Bernoulli Beam* yang didiskritisasi dengan metode *Discontinuous Galerkin* (DG) berbantu metode Quasi Minimal Residual (QMR) dan *preconditioner* D-ILU. Selanjutnya, hasil simulasi tersebut dibandingkan dengan solusi analitik dari persamaan *Euler-Bernoulli Beam*.

Simulasi persamaan *Euler-Bernoulli Beam* ini dilakukan dalam selang  $0 \leq x \leq 2$  dengan variasi parameter  $n$  dan parameter  $m$  untuk panjang subinterval seperti pada persamaan (3.1).

Pada penulisan tugas akhir ini diberikan masing-masing 3 variasi parameter  $n$  dan parameter  $m$ . Variasi parameter  $n$  yang akan disimulasikan adalah  $n = 10$ ,  $n = 20$  dan  $n = 30$ . Sedangkan variasi parameter  $m$  yang akan disimulasikan adalah  $m = 3$ ,  $m = 6$  dan  $m = 9$ .

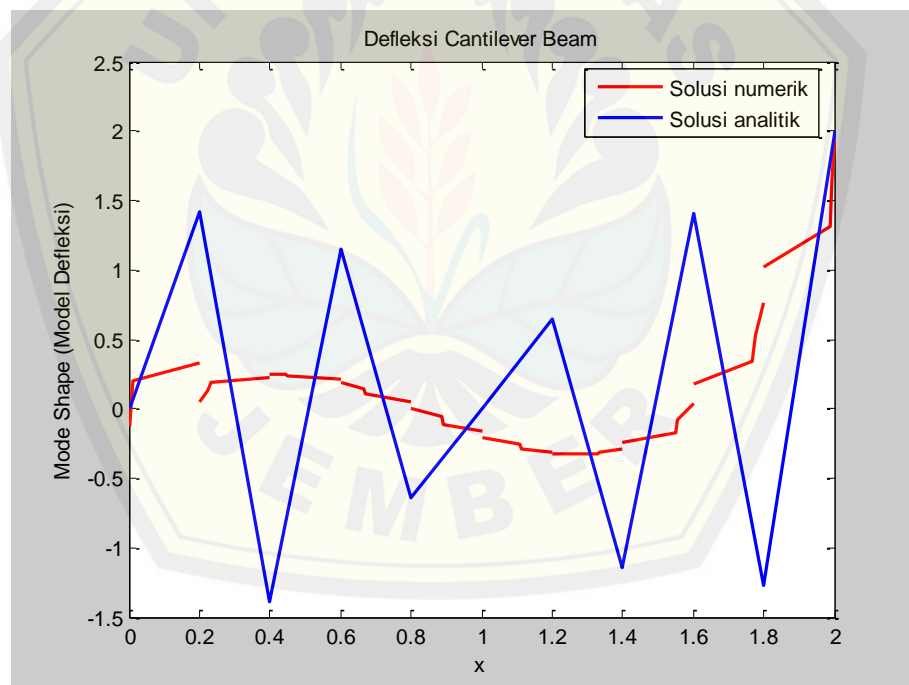
Simulasi pertama melibatkan variasi parameter  $n = 10$  dan  $m = 3$ . Tabel 4.2 menunjukkan beberapa nilai kuadrat frekuensi angular beam (nilai eigen) dengan interval  $(0, 2)$ .

Tabel 4.2 Kuadrat frekuensi cantilever beam pada interval  $(0, 2)$  untuk variasi parameter  $n = 10$  dan  $m = 3$

No.	Kuadrat Frekuensi Cantilever Beam (Numerik)	Frekuensi Cantilever Beam (Analitik)	Nilai Error

1	2,5662	1,7395	0,1376
2	1,4086	1,3926	0,2058
3	0,1629	0,3903	0,0133
4	0,7043	0,8143	0,0250
5	0,3564	0,5830	0,0140
6	0,0830	0,2361	0,0520

Sedangkan gambar 4.5 mengilustrasikan profil mode shape (model defleksi) dari cantilever beam untuk variasi parameter  $n$  dan  $m$  yang sama dengan nilai kuadrat frekuensi angular 1,4086



Gambar 4.5 Profil mode shape cantilever beam untuk variasi parameter  $n = 10$  dan  $m = 3$

Parameter input lain yang juga mempengaruhi profil mode shape pada gambar 4.5 adalah baris dan kolom ke- $i$  dari matriks awal yang dieliminasi, nilai salah satu koefisien defleksi yang diasumsikan ( $c$ ), nilai toleransi dan vektor tebakan awal.

Nilai dari tiga parameter input pertama berturut-turut adalah 10; 1; 0,0000001. Sedangkan vektor tebakan awal berupa vektor kolom berukuran  $39 \times 1$  dengan tiap-tiap nilai elemennya adalah 0,25. Nilai  $L^2$  errornya adalah 2,6230.

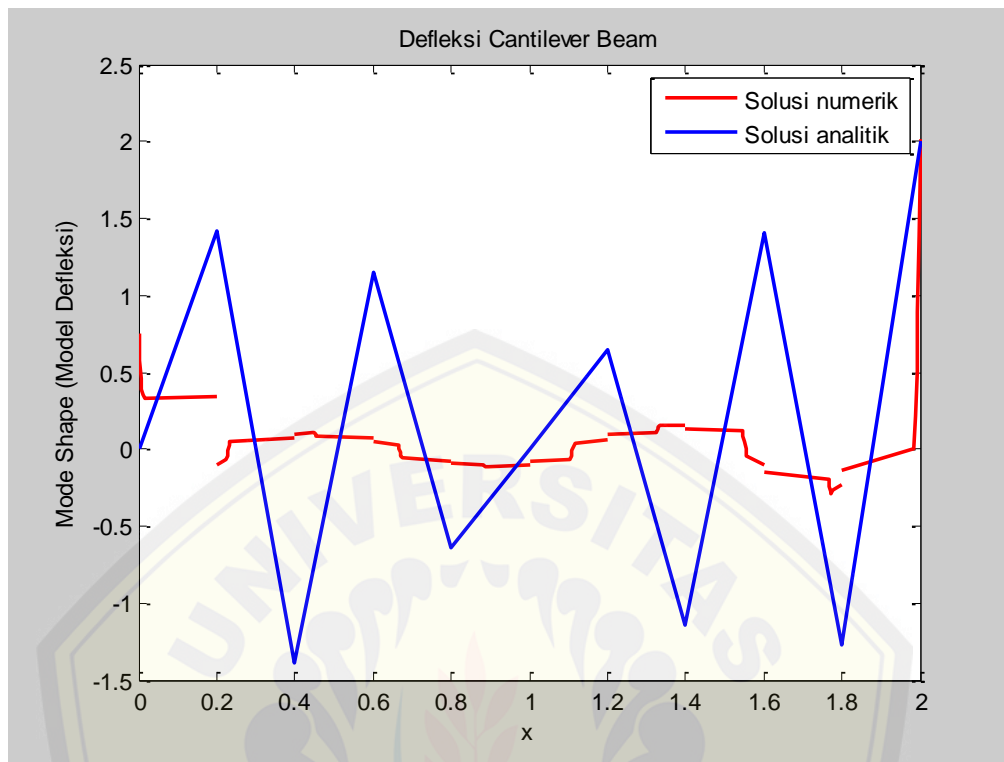
Simulasi kedua menggunakan parameter  $n = 10$  dan  $m = 6$ . Beberapa nilai kuadrat frekuensi angular (nilai eigen) pada interval (0, 2) dari cantilever beam pada simulasi yang kedua ini ditunjukkan pada tabel 4.3

Tabel 4.3 Kuadrat frekuensi cantilever beam untuk variasi parameter  $n = 10$  dan  $m = 6$

No.	Kuadrat Frekuensi Cantilever Beam (Numerik)	Frekuensi Cantilever Beam (Analitik)	Nilai Error
1	2,6147	1,7395	0,1225
2	1,8152	1,3926	0,0453
3	0,7050	0,8143	0,0253
4	0,0219	0,1205	0,0275
5	0,0607	0,2361	0,0103
6	0,3061	0,5830	0,0297

Profil mode shape (model defleksi) cantilever beam pada simulasi kedua dengan nilai kuadrat frekuensi angular 1,8152 diilustrasikan pada gambar 4.6.





Gambar 4.6 Profil mode shape cantilever beam untuk variasi parameter  $n = 10$  dan  $m = 6$

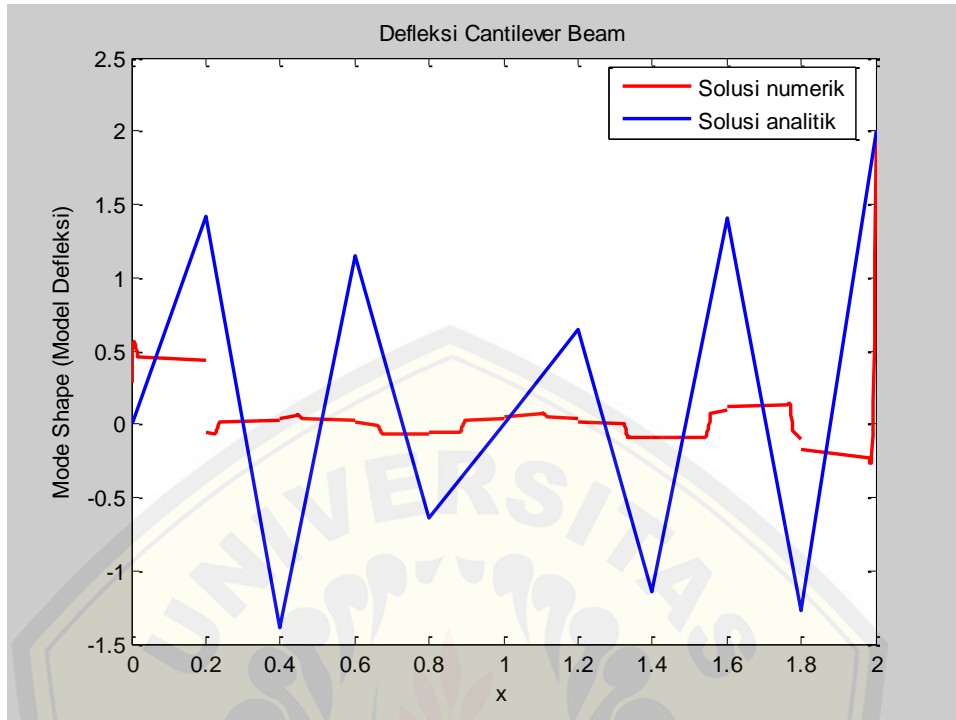
Parameter input baris dan kolom ke- $i$  dari matriks awal yang dieliminasi, nilai salah satu koefisien defleksi yang diasumsikan ( $c$ ) dan nilai toleransi pada kasus simulasi kedua ini berturut-turut nilainya adalah 16; 1 dan 0,0000001. Sedangkan parameter input untuk vektor tebakan awal berupa vektor kolom berukuran  $69 \times 1$  dengan tiap-tiap nilai elemennya adalah adalah 0,082. Nilai  $L^2$  errornya adalah 3,0556.

Simulasi ketiga, dengan parameter  $n = 10$  dan  $m = 9$  menghasilkan beberapa nilai kuadrat frekuensi angular (nilai eigen) dari cantilever beam pada simulasi yang ketiga ditunjukkan pada tabel 4.4.

Tabel 4.4 Kuadrat frekuensi cantilever beam pada interval  $(0, 2)$  untuk variasi parameter  $n = 10$  dan  $m = 9$

No.	Kuadrat Frekuensi Cantilever Beam (Numerik)	Frekuensi Cantilever Beam (Analitik)	Nilai Error
1	1,812497	1,3926	0,0463
2	0,394846	0,5830	0,0454
3	0,176476	0,3903	0,0298
4	3,157890	1,7395	0,0375
5	0,682120	0,8143	0,0116
6	0,079316	0,2361	0,0455

Selanjutnya, profil mode shape (model defleksi) dari cantilever beam pada simulasi ketiga ini, dengan nilai kuadrat frekuensi angular 1,812497, diilustrasikan pada gambar 4.7. Parameter input lain yang turut mempengaruhi profil yang diilustrasikan pada 4.7 meliputi baris dan kolom ke- $i$  dari matriks awal yang dieliminasi, nilai salah satu koefisien defleksi yang diasumsikan ( $c$ ) dan nilai toleransi pada simulasi ketiga ini berturut-turut nilainya adalah 10; 1 dan 0,0000001. Sedangkan parameter input untuk vektor tebakan awal berupa vektor kolom berukuran  $99 \times 1$  dengan tiap-tiap nilai elemennya adalah 0,04. Nilai  $L^2$  errornya adalah 3,0584.



Gambar 4.7 Profil mode shape cantilever beam untuk variasi parameter  $n = 10$  dan  $m = 9$

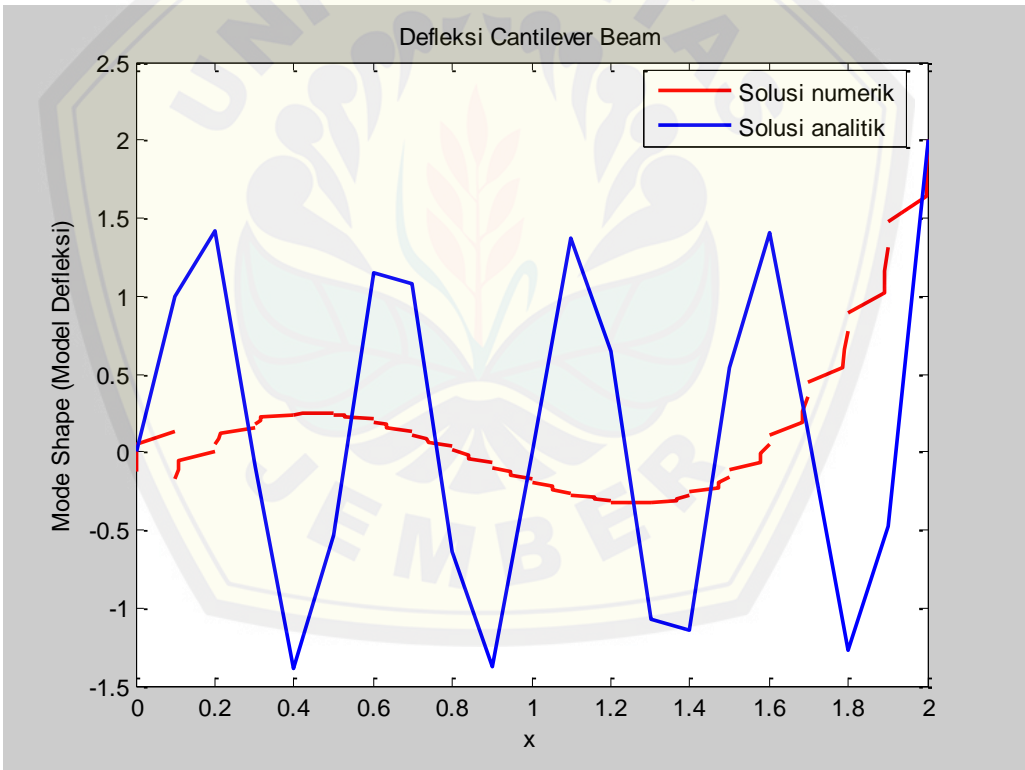
Selanjutnya, simulasi keempat, dimana parameter  $n = 20$  dan  $m = 3$ , akan menghasilkan beberapa nilai kuadrat frekuensi angular (nilai eigen) pada interval  $(0, 2)$  dari cantilever beam pada simulasi keempat ini diberikan pada tabel 4.5.

Tabel 4.5 Kuadrat frekuensi cantilever beam untuk variasi parameter  $n = 20$  dan  $m = 3$

No.	Kuadrat Frekuensi Cantilever Beam (Numerik)	Frekuensi Cantilever Beam (Analitik)	Nilai Error

1	0,3933	0,5830	0,0441
2	2,8862	1,7395	0,0406
3	1,1031	1,0842	0,0339
4	0,6827	0,8143	0,0119
5	1,6868	1,3926	0,0938

Profil mode shape (model defleksi) dari cantilever beam pada simulasi keempat, dimana nilai kuadrat frekuensi angular 1,6868, dapat diinterpretasikan secara grafis seperti pada gambar 4.12.



Gambar 4.8 Profil mode shape cantilever beam untuk variasi parameter  $n = 20$  dan  $m = 3$

Parameter input lain yang turut berpengaruh secara signifikan terhadap profil yang diilustrasikan pada gambar 4.8 meliputi baris dan kolom ke- $i$  dari matriks awal yang dieliminasi, nilai salah satu koefisien defleksi yang diasumsikan ( $c$ ) dan nilai

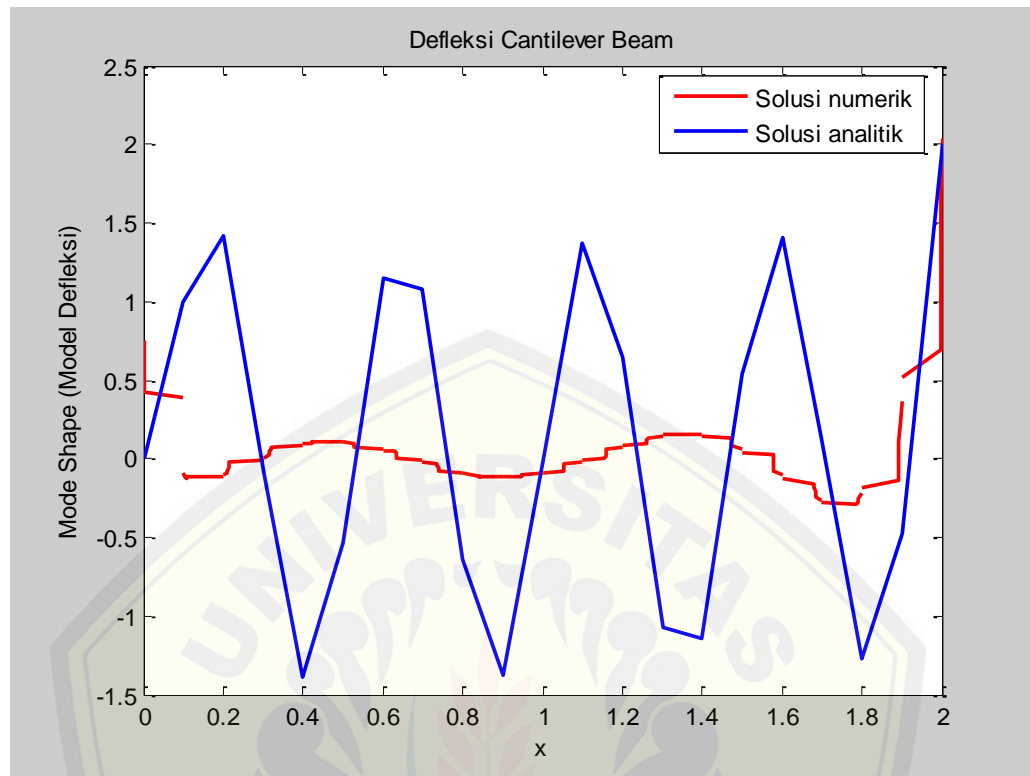
toleransi pada simulasi keempat ini berturut-turut nilainya adalah  $77; 1$  dan  $0,0000001$ . Sedangkan parameter input untuk vektor tebakan awal berupa vektor kolom berukuran  $79 \times 1$  dengan tiap-tiap nilai elemennya adalah  $0,25$ . Nilai  $L^2$  errornya adalah  $3,6962$ .

Beranjak pada simulasi kelima yang mengisyaratkan nilai parameter  $n = 20$  dan  $m = 6$ , maka akan diperoleh beberapa nilai kuadrat frekuensi angular (nilai eigen) pada interval  $(0, 2)$  dari cantilever beam pada simulasi kelima ini diberikan pada tabel 4.6.

Tabel 4.6 Kuadrat frekuensi cantilever beam untuk variasi parameter  $n = 20$  dan  $m = 6$

No.	Kuadrat Frekuensi Cantilever Beam (Numerik)	Frekuensi Cantilever Beam (Analitik)	Nilai Error
1	0,878707	0,8143	0,1230
2	1,845226	1,3926	0,0342
3	1,106689	1,0842	0,0322
4	2,292108	1,7395	0,2255

Profil mode shape dari cantilever beam pada simulasi kelima, dengan nilai kuadrat frekuensi angular  $1,845226$ , dapat diinterpretasikan secara grafis seperti pada gambar 4.9.



Gambar 4.9 Profil mode shape cantilever beam untuk variasi parameter  $n = 20$  dan  $m = 6$

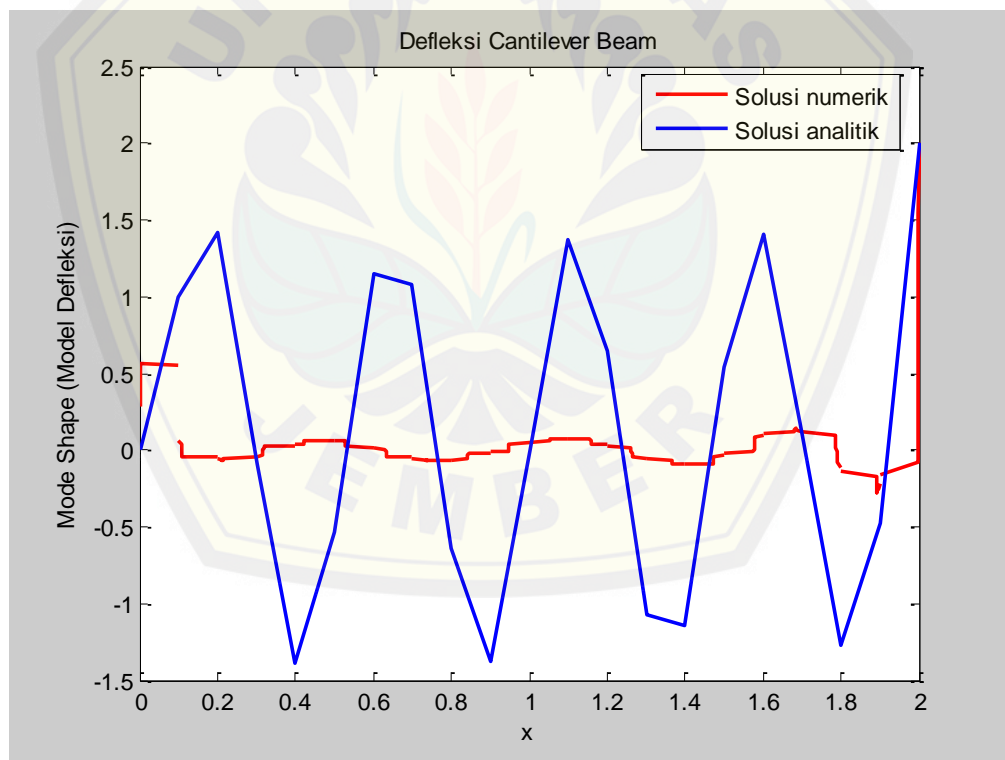
Parameter input lain yang turut berpengaruh terhadap profil pada gambar 4.9 yaitu baris dan kolom ke- $i$  dari matriks awal yang dieliminasi, nilai salah satu koefisien defleksi yang diasumsikan ( $c$ ) dan nilai toleransi pada simulasi kelima ini berturut-turut nilainya adalah 34; 1 dan 0,0000001. . Sedangkan parameter input untuk vektor tebakan awal berupa vektor kolom berukuran  $139 \times 1$  dengan tiap-tiap nilai elemennya adalah 0,083. Nilai  $L^2$  errornya adalah 4,0018.

Selanjutnya, simulasi keenam, dengan parameter  $n = 20$  dan  $m = 9$ , akan menghasilkan beberapa nilai kuadrat frekuensi angular (nilai eigen) pada interval  $(0, 2)$  dari cantilever beam pada simulasi keenam ini ditampilkan pada tabel 4.7.

Tabel 4.7 Kuadrat frekuensi cantilever beam untuk variasi parameter  $n = 20$  dan  $m = 9$

No.	Kuadrat Frekuensi Cantilever Beam (Numerik)	Frekuensi Cantilever Beam (Analitik)	Nilai Error
1	0,9546	0,8143	0,1627
2	1,7274	1,3926	0,0783
3	1,0774	1,0842	0,0462
4	3,2445	1,7395	0,0617

Profil mode shape pada simulasi keenam, dengan nilai kuadrat frekuensi angular 1,7274, dapat diinterpretasikan secara grafis seperti pada gambar 4.10.



Gambar 4.10 Profil mode shape cantilever beam untuk variasi parameter  $n = 20$  dan  $m = 9$



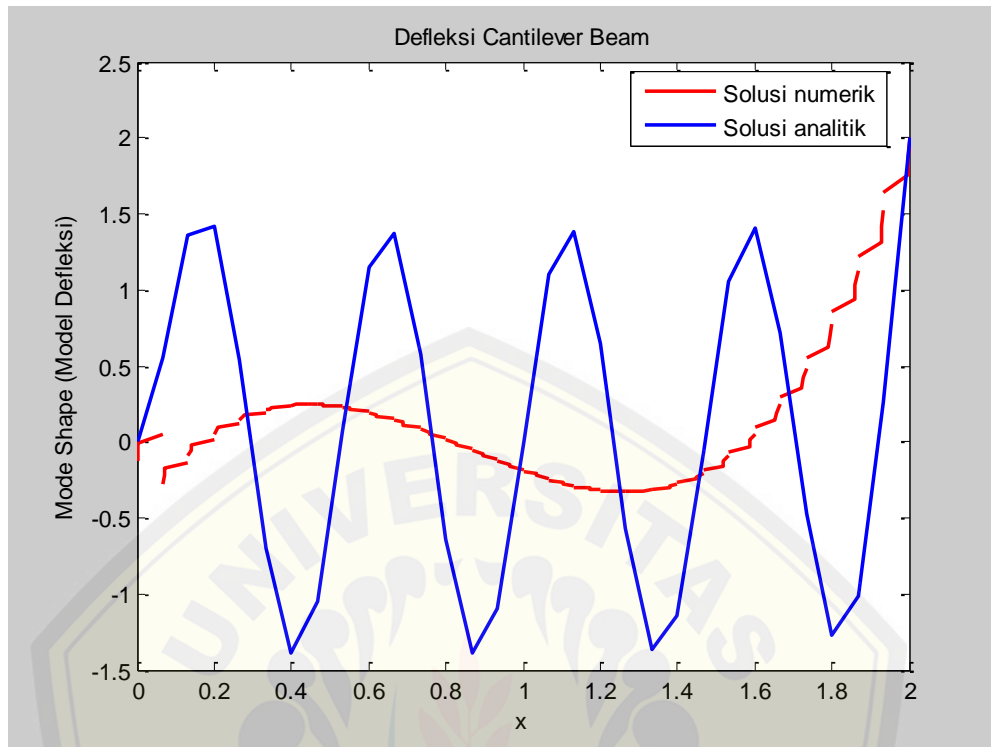
Adapun parameter input lain yang juga berpengaruh terhadap profil yang diilustrasikan pada gambar 4.10 meliputi baris dan kolom ke- $i$  dari matriks awal yang dieliminasi, nilai salah satu koefisien defleksi yang diasumsikan ( $c$ ) dan nilai toleransi pada simulasi keenam ini berturut-turut nilainya adalah 74; 1 dan 0,0000001. Sedangkan parameter input untuk vektor tebakan awal berupa vektor kolom berukuran  $199 \times 1$  dengan tiap-tiap nilai elemennya adalah 0,04. Nilai  $L^2$  errornya adalah 4,0713.

Pada simulasi ketujuh, dengan nilai parameter  $n = 30$  dan  $m = 3$ , akan diperoleh nilai kuadrat frekuensi angular dari cantilever beam pada simulasi ketujuh, dengan interval  $(0, 2)$ , diinterpretasikan pada tabel 4.8.

Tabel 4.8 Kuadrat frekuensi cantilever beam untuk variasi parameter  $n = 30$  dan  $m = 3$

No.	Kuadrat Frekuensi Cantilever Beam (Numerik)	Frekuensi Cantilever Beam (Analitik)	Nilai Error
1	2,34	1,3926	0,1371

Profil mode shape (model defleksi) pada simulasi ketujuh, dengan nilai kuadrat frekuensi angular 2,34, dapat diilustrasikan sebagaimana yang terdapat pada gambar 4.11.



Gambar 4.11 Profil mode shape cantilever beam untuk variasi parameter  $n = 30$  dan  $m = 3$

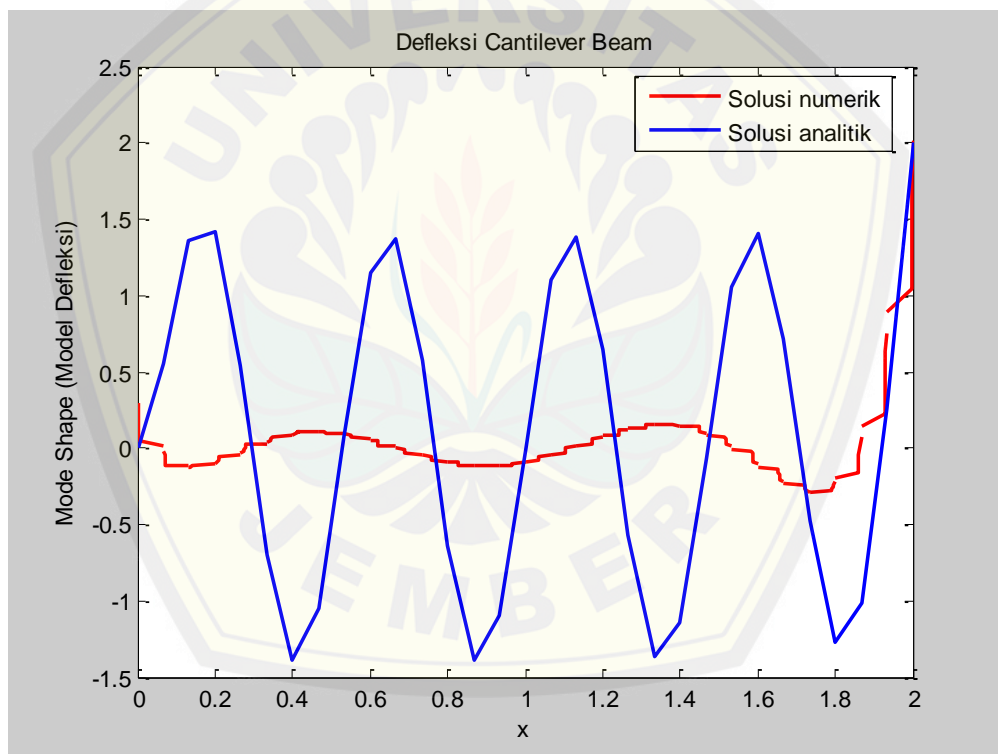
Beberapa parameter input lain yang turut mempengaruhi profil yang diinterpretasikan pada gambar 4.11 meliputi baris dan kolom ke- $i$  dari matriks awal yang dieliminasi, nilai salah satu koefisien defleksi yang diasumsikan ( $c$ ) dan nilai toleransi pada simulasi ketujuh ini berturut-turut nilainya adalah 107; 1 dan 0,0000001. Sedangkan parameter input untuk vektor tebakan awal berupa vektor kolom berukuran  $119 \times 1$  dengan tiap-tiap nilai elemennya adalah 0,25. Nilai  $L^2$  errornya adalah 4,5458.

Berlanjut pada simulasi kedelapan, dimana nilai parameter  $n = 30$  dan  $m = 6$ , akan diperoleh nilai kuadrat frekuensi angular dari cantilever beam pada simulasi kedelapan ini, dengan interval  $(0, 2)$ , diinterpretasikan pada tabel 4.9.

Tabel 4.9 Kuadrat frekuensi cantilever beam untuk variasi parameter  $n = 30$  dan  $m = 6$

No.	Kuadrat Frekuensi Cantilever Beam (Numerik)	Frekuensi Cantilever Beam (Analitik)	Nilai Error
1	2,1793	1,3926	0,0836

Selanjutnya profil mode shape (model defleksi) pada simulasi kedelapan, dimana nilai kuadrat frekuensi angular 2,1793, dapat diinterpretasikan secara grafis seperti pada gambar 4.20.



Gambar 4.12 Profil mode shape cantilever beam untuk variasi parameter  $n = 30$  dan  $m = 6$

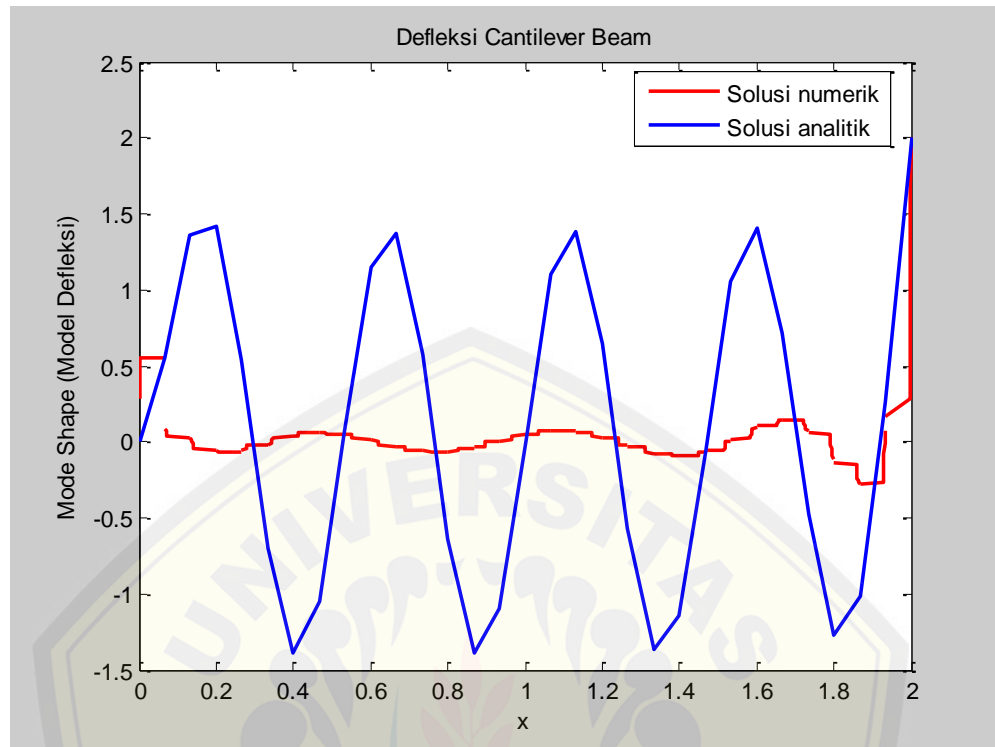
Parameter input lain yang juga berpengaruh terhadap profil yang terinterpretasi pada gambar 4.12 yakni meliputi baris dan kolom ke- $i$  dari matriks awal yang dieliminasi, nilai salah satu koefisien defleksi yang diasumsikan ( $c$ ) dan nilai toleransi pada simulasi kedelapan ini berturut-turut nilainya adalah 45; 0,1 dan 0,0000001. Sedangkan parameter input untuk vektor tebakan awal berupa vektor kolom berukuran  $209 \times 1$  dengan tiap-tiap nilai elemennya adalah 0,082. Nilai  $L^2$  errornya adalah 4,9374.

Terakhir adalah simulasi kesembilan dengan nilai parameter  $n = 30$  dan  $m = 9$ . Selanjutnya, nilai-nilai kuadrat frekuensi angular dari cantilever beam pada simulasi kesembilan ini, dengan interval  $(0, 2)$ , diinterpretasikan pada tabel 4.10.

Tabel 4.10 Kuadrat frekuensi cantilever beam untuk variasi parameter  $n = 30$  dan  $m = 9$

No.	Kuadrat Frekuensi Cantilever	Frekuensi Cantilever Beam	Nilai Error
	Beam (Numerik)	(Analitik)	
1	0,2355	0,3903	0,0949
2	1,8978	1,3926	0,0149

Profil mode shape (model defleksi) pada simulasi kesembilan, dengan nilai kuadrat frekuensi angular 1,8978, dapat diilustrasikan seperti pada gambar 4.13.



Gambar 4.13 Profil mode shape cantilever beam untuk variasi parameter  $n = 30$  dan  $m = 9$

Parameter input yang juga berpengaruh terhadap profil yang terinterpretasi pada gambar 4.13 diantaranya meliputi baris dan kolom ke- $i$  dari matriks awal yang dieliminasi, nilai salah satu koefisien defleksi yang diasumsikan ( $c$ ) dan nilai toleransi pada simulasi kedelapan ini berturut-turut nilainya adalah 111; 1 dan 0,0000001. Sedangkan parameter input untuk vektor tebakan awal berupa vektor kolom berukuran  $299 \times 1$  dengan tiap-tiap nilai elemennya adalah 0,04. Nilai  $L^2$  errornya adalah 5,0335.

#### 4.5 Analisis Hasil Simulasi

Pada subbab ini akan dibahas mengenai analisis dari hasil simulasi yang telah dilakukan pada subbab 4.4 dengan metode DG berbantu metode QMR dan *preconditioner* D-ILU. Analisis ini dilakukan terhadap frekuensi angular dan nilai defleksi dari cantilever beam.

Beberapa frekuensi angular yang dihasilkan pada simulasi di subbab 4.4 berada dalam interval  $(0,2)$ . Secara umum, semakin besar ukuran matriks yang terbentuk dari metode DG, maka akan semakin banyak pula nilai eigen (frekuensi angular) yang dihasilkan. Berbeda halnya dengan frekuensi angular yang berada pada interval  $(0,2)$  seperti yang disimulasikan pada subbab 4.4. Pada interval  $(0,2)$ , seiring dengan semakin besarnya nilai  $n$  yang dicobakan, frekuensi angular yang dihasilkan relatif semakin sedikit. Frekuensi angular yang diilustrasikan pada subbab 4.4 merupakan frekuensi angular yang nilainya paling mendekati nilai frekuensi angular analitik pada interval  $(0,2)$  pada masing-masing parameter  $n$  dan  $m$ . Jumlah frekuensi angular yang dihasilkan pada subbab 4.4 tersebut pada saat  $n = 10$ ,  $n = 20$  dan  $n = 30$  untuk masing-masing  $m = 3$ ,  $m = 6$  dan  $m = 9$  berturut-turut adalah 6, 6, 6, 5, 4, 4, 1, 1 dan 2.

Dari kesembilan simulasi yang dicobakan pada subbab 4.4, frekuensi angular yang bernilai 0,1205 merupakan satu-satunya frekuensi angular analitik yang hanya dapat diaproksimasi oleh frekuensi angular numerik yang dihasilkan pada saat  $n = 10$  dan  $m = 6$ . Frekuensi angular analitik yang bernilai 0,2361 dapat diaproksimasi oleh frekuensi angular numerik yang dihasilkan pada saat  $n = 10$  dan berturut-turut  $m = 3$ ,  $m = 6$  serta  $m = 9$ . Berdasarkan nilai error yang dihasilkan, seperti yang diuraikan pada subbab 4.4, frekuensi angular numerik yang paling mendekati frekuensi angular analitik yang bernilai 0,2361 adalah frekuensi angular numerik yang dihasilkan pada saat  $n = 10$  dan  $m = 6$ . Selanjutnya, frekuensi angular analitik yang bernilai 0,3903 dapat diaproksimasi oleh frekuensi angular numerik yang dihasilkan pada saat  $n = 10$  dan berturut-turut  $m = 3$  dan  $m = 9$  serta pada saat  $n = 30$  dan  $m = 9$ . Berdasarkan

nilai error yang dihasilkan, frekuensi angular numerik yang paling mendekati frekuensi angular analitik yang bernilai 0,3903 adalah frekuensi angular numerik yang dihasilkan pada saat  $n=10$  dan  $m=3$ . Berlanjut pada frekuensi angular analitik yang bernilai 0,5830, dimana nilainya dapat diaproksimasi oleh frekuensi angular numerik yang dihasilkan pada saat  $n=10$  dan berturut-turut  $m=3$ ,  $m=6$  dan  $m=9$  serta pada saat  $n=20$  dan  $m=3$ . Berdasarkan nilai error yang dihasilkan, frekuensi angular numerik yang paling mendekati frekuensi angular analitik yang bernilai 0,5830 adalah frekuensi angular numerik yang dihasilkan pada saat  $n=10$  dan  $m=3$ .

Frekuensi angular analitik yang selanjutnya adalah frekuensi angular analitik yang bernilai 0,8143. Nilai dari frekuensi angular analitik ini dapat diaproksimasi oleh frekuensi angular numerik yang dihasilkan berturut-turut pada saat  $n=10$  dan  $n=20$  untuk semua nilai parameter  $m$  yang disimulasikan. Berdasarkan nilai error yang dihasilkan, diketahui bahwasannya frekuensi angular numerik yang dihasilkan pada saat  $n=10$  dan  $m=9$  merupakan frekuensi angular numerik yang nilainya paling mendekati 0,8143. Selanjutnya, frekuensi angular analitik yang bernilai 1,0842 dapat diaproksimasi oleh frekuensi angular numerik yang dihasilkan pada saat  $n=20$  dan berturut-turut  $m=3$ ,  $m=6$  serta  $m=9$ . Berdasarkan analisis terhadap nilai error yang dihasilkan, frekuensi angular numerik yang paling mendekati frekuensi angular analitik yang bernilai 1,0842 adalah frekuensi angular numerik yang dihasilkan pada saat  $n=20$  dan  $m=6$ . Berlanjut pada frekuensi angular analitik yang bernilai 1,3926, yang nilainya dapat diaproksimasi oleh semua frekuensi angular numerik yang dihasilkan pada kesembilan simulasi yang dicobakan. Berdasarkan analisis terhadap nilai error yang dihasilkan, frekuensi angular numerik yang paling mendekati frekuensi angular analitik yang bernilai 1,3926 adalah frekuensi angular numerik yang dihasilkan pada saat  $n=30$  dan  $m=9$ . Terakhir, frekuensi angular analitik yang bernilai 1,7395, dimana nilainya dapat diaproksimasi



oleh frekuensi angular numerik yang dihasilkan pada saat  $n = 10$  dan  $m = 20$  untuk masing-masing  $m = 3$ ,  $m = 6$  dan  $m = 9$ . Berdasarkan analisis terhadap nilai errornya, frekuensi angular numerik yang paling mendekati frekuensi angular analitik yang bernilai 1,7395 adalah frekuensi angular numerik yang dihasilkan pada saat  $n = 10$  dan  $m = 9$ . Dari hasil sembilan simulasi yang telah dicobakan tersebut, dapat dikatakan bahwasannya nilai-nilai frekuensi angular yang dihasilkan dari pengimplementasian metode DG ini cukup baik atau dengan kata lain nilai error yang dihasilkan relatif kecil.

Setelah analisis terhadap frekuensi angular cantilever beam dilakukan, selanjutnya akan dibahas mengenai analisis terhadap nilai defleksi dari cantilever beam. Berkaitan dengan hal tersebut, frekuensi angular yang nilainya mendekati 1,3926, yang akan dijadikan acuan dalam penentuan nilai defleksi cantilever beam. Hal ini dikarenakan pada tiap-tiap variasi parameter  $n$  dan  $m$  yang dicobakan pada simulasi di subbab 4.4, frekuensi angular yang nilainya mendekati 1,3926 tersedia.

Nilai defleksi kasus pertama, yaitu pada saat parameter  $n = 10$  dan  $m = 3$ , seperti ilustrasi pada gambar 4.5. Karakteristik pendiskritisasian dari metode DG memungkinkan teramatinya 31 titik evaluasi pada kasus pertama ini. Titik evaluasi merupakan titik yang menjadi fokus pengamatan terhadap nilai defleksi yang terjadi pada cantilever beam. Nilai defleksi numerik berturut-turut paling kecil dan paling besar terjadi di titik evaluasi ke-13 dan ke-31, yaitu titik 0,8 dan titik 2 (titik ujung cantilever beam yang bebas) dengan nilai defleksi berturut-turut sebesar 0,0268 dan 2. Sedangkan nilai defleksi analitik berturut-turut paling kecil dan paling besar terjadi di titik evaluasi ke-1 dan ke-11, yaitu titik 0 (titik ujung cantilever beam yang terikat) dan titik 2 dengan nilai defleksi berturut-turut sebesar 0 dan 2. Waktu komputasi yang dibutuhkan untuk membangkitkan nilai defleksi pada kasus pertama ini adalah 75,980207 detik. Kasus nilai defleksi yang kedua dengan variasi parameter  $n = 10$  dan  $m = 6$ . Pada kasus kedua ini, terdapat 61 titik evaluasi yang dihasilkan dari diskritisasi dengan metode DG. Nilai defleksi numerik berturut-turut paling kecil

dan paling besar terjadi di titik evaluasi ke-47 dan ke-61, yaitu titik 1,5536 dan titik 2 dengan nilai defleksi berturut-turut sebesar 0,0036 dan 2,009. Uraian tentang nilai defleksi analitik pada kasus kedua ini akan sama seperti halnya dengan kasus pertama. Hal ini dapat dipahami sebagai akibat dari penggunaan parameter frekuensi analitik dan  $n$  yang sama. Sedangkan waktu komputasi yang dibutuhkan untuk membangkitkan nilai defleksi pada kasus kedua ini adalah 160,112188 detik. Berlanjut pada kasus nilai defleksi ketiga dengan variasi parameter  $n = 10$  dan  $m = 9$ . Pada kasus nilai defleksi ketiga, terdapat 91 titik evaluasi yang dihasilkan, nilai defleksi numerik berturut-turut paling kecil dan paling besar terjadi di titik evaluasi ke-56 dan ke-91, yaitu titik 1,3232 dan titik 2 dengan nilai defleksi berturut-turut sebesar 0,0033 dan 2,0005. Waktu komputasi yang dibutuhkan untuk membangkitkan nilai defleksi pada kasus ketiga ini adalah 102,626321 detik. Dari ketiga variasi parameter  $m$  yang dicobakan pada saat parameter  $n = 10$ , dapat dikatakan bahwasannya grafik model defleksi yang dihasilkan akan relatif semakin mendekati kontinu seiring dengan semakin besarnya nilai parameter  $m$ . Sedangkan jika ditinjau dari nilai  $L^2$  error yang dihasilkan dari ketiga kasus tersebut, dapat diketahui bahwa dengan semakin besarnya nilai parameter  $m$  yang dicobakan, akan semakin besar nilai  $L^2$  errornya.

Selanjutnya, untuk kasus dimana parameter  $n = 20$  dan berturut-turut parameter  $m = 3$ ,  $m = 6$  dan  $m = 9$  yang dapat direpresentasikan berturut-turut sebagai kasus nilai defleksi keempat, kelima dan keenam. Pada kasus nilai defleksi keempat terdapat 61 titik evaluasi yang dihasilkan. Nilai defleksi numerik kasus keempat berturut-turut paling kecil dan paling besar terjadi di titik evaluasi ke-48 dan ke-61, yaitu titik 1,5785 dan titik 2 dengan nilai defleksi berturut-turut sebesar 0,013 dan 2,009. Sedangkan nilai defleksi analitiknya berturut-turut paling kecil dan paling besar terjadi di titik evaluasi ke-1 dan ke-21, yaitu titik 0 (titik ujung cantilever beam yang terikat) dan titik 2 dengan nilai defleksi berturut-turut sebesar

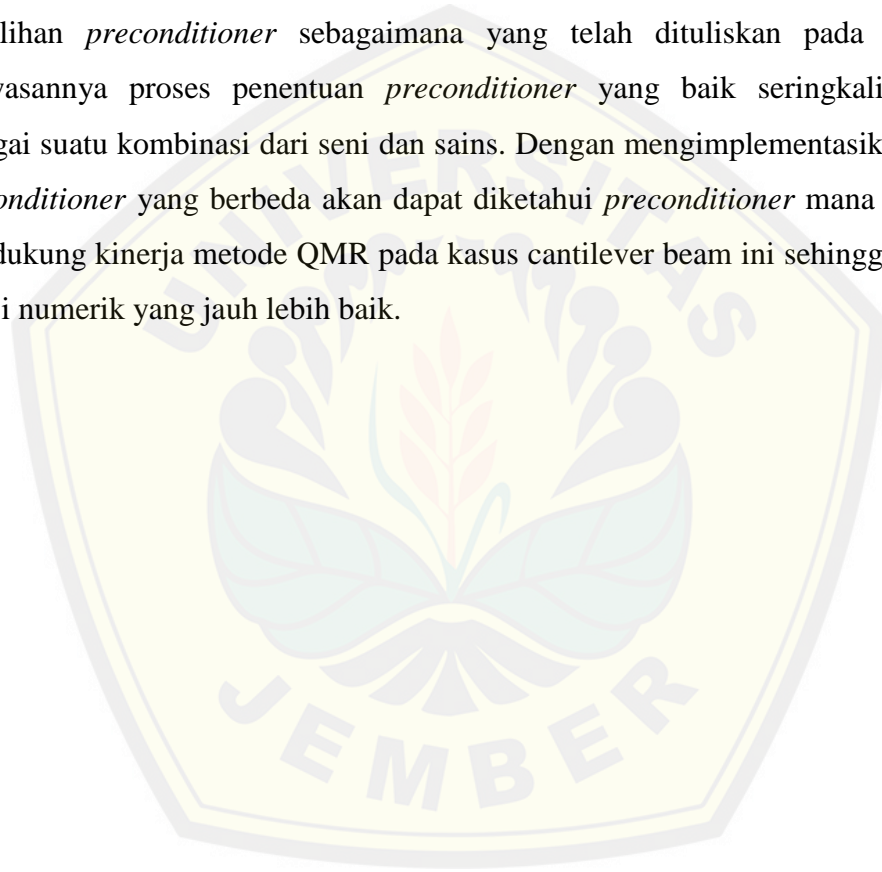
0 dan 2. Waktu komputasi yang dibutuhkan untuk membangkitkan nilai defleksi pada kasus keempat ini adalah 122,444030 detik. Beranjak pada kasus nilai defleksi kelima dimana terdapat 121 titik evaluasi yang dihasilkan. Nilai defleksi numerik kasus kelima berturut-turut paling kecil dan paling besar terjadi di titik evaluasi ke-93 dan ke-121, yaitu titik 1,5770 dan titik 2 dengan nilai defleksi berturut-turut sebesar 0,0018 dan 2,0335. Waktu komputasi yang dibutuhkan untuk membangkitkan nilai defleksi pada kasus kelima ini adalah 77,739765 detik. Pada kasus nilai defleksi keenam terdapat 181 titik evaluasi yang dihasilkan. Nilai defleksi numerik kasus keenam berturut-turut paling kecil dan paling besar terjadi di titik evaluasi ke-112 dan ke-181, yaitu titik 1,2618 dan titik 2 dengan nilai defleksi berturut-turut sebesar 0 dan 2. Waktu komputasi yang dibutuhkan untuk membangkitkan nilai defleksi pada kasus keenam ini adalah 165,771010 detik. Seperti halnya pada saat parameter  $n = 10$ , dari ketiga variasi parameter  $m$  yang dicobakan pada saat parameter  $n = 20$ , dapat dikatakan juga bahwasannya grafik model defleksi yang dihasilkan akan relatif semakin mendekati kontinu seiring dengan semakin besarnya nilai parameter  $m$ . Hal yang sama juga berlaku, seperti halnya pada saat parameter  $n = 10$ , jika ditinjau dari nilai  $L^2$  error yang dihasilkan dari ketiga kasus tersebut, dapat diketahui bahwa dengan semakin besarnya nilai parameter  $m$  yang dicobakan, akan semakin besar nilai  $L^2$  errornya.

Terakhir, kasus dimana parameter  $n = 30$  dan berturut-turut parameter  $m = 3$ ,  $m = 6$  dan  $m = 9$  yang dapat direpresentasikan berturut-turut sebagai kasus nilai defleksi ketujuh, kedelapan dan kesembilan. Pada kasus nilai defleksi ketujuh terdapat 91 titik evaluasi yang dihasilkan. Nilai defleksi numerik kasus ketujuh berturut-turut paling kecil dan paling besar terjadi di titik evaluasi ke-38 dan ke-91, yaitu titik 0,8275 dan titik 2 dengan nilai defleksi berturut-turut sebesar 0,0049 dan 2. Sedangkan nilai defleksi analitiknya berturut-turut paling kecil dan paling besar terjadi di titik evaluasi ke-1 dan ke-31, yaitu titik 0 (titik ujung cantilever beam yang terikat) dan titik 2 dengan nilai defleksi berturut-turut sebesar 0 dan 2. Waktu

komputasi yang dibutuhkan untuk membangkitkan nilai defleksi pada kasus ketujuh ini adalah 116,180774 detik. Selanjutnya, pada kasus nilai defleksi kedelapan terdapat 181 titik evaluasi yang dihasilkan. Nilai defleksi numerik kasus kedelapan berturut-turut paling kecil dan paling besar terjadi di titik evaluasi ke-102 dan ke-181, yaitu titik 1,1040 dan titik 2 dengan nilai defleksi berturut-turut sebesar 0,0021 dan 2,009. Waktu komputasi yang dibutuhkan untuk membangkitkan nilai defleksi pada kasus kedelapan ini adalah 77,204161 detik. Pada kasus nilai defleksi kesembilan terdapat 271 titik evaluasi yang dihasilkan. Nilai defleksi numerik kasus kesembilan berturut-turut paling kecil dan paling besar terjadi di titik evaluasi ke-126 dan ke-271, yaitu titik 0,8974 dan titik 2 dengan nilai defleksi berturut-turut sebesar 0,0006 dan 2. Waktu komputasi yang dibutuhkan untuk membangkitkan nilai defleksi pada kasus kesembilan ini adalah 84,775684 detik. Seperti halnya pada dua variasi parameter  $n$  sebelumnya, dari ketiga variasi parameter  $m$  yang dicobakan pada saat parameter  $n = 30$ , dapat dikatakan juga bahwasannya grafik model defleksi yang dihasilkan akan relatif semakin mendekati kontinu seiring dengan semakin besarnya nilai parameter  $m$ . Hal yang sama juga berlaku, seperti halnya pada dua variasi parameter  $n$  sebelumnya, jika ditinjau dari nilai  $L^2$  error yang dihasilkan dari ketiga kasus tersebut, dapat diketahui bahwa dengan semakin besarnya nilai parameter  $m$  yang dicobakan, akan semakin besar nilai  $L^2$  errornya. Dengan kata lain, semakin besar nilai parameter  $n$  dan  $m$  yang dicobakan, akan menghasilkan nilai  $L^2$  error yang semakin besar. Pada sembilan kasus yang dicobakan, didapati pula sebuah kondisi dimana pemusatan defleksi terjadi di titik ujung cantilever beam yang tidak terikat dimana nilai defleksi pada titik tersebut merupakan nilai defleksi yang paling besar.

Nilai  $L^2$  error yang dihasilkan dari sembilan kasus yang dicobakan mengindikasikan bahwasannya kinerja dari metode QMR (dan *preconditioner* D-ILU) pada kasus cantilever beam ini tidak cukup baik. Hal terjadi dimungkinkan karena beberapa faktor. Diantaranya, metode QMR yang diimplementasikan pada

tugas akhir ini merupakan metode QMR tanpa pengimplementasian proses *look-ahead*. Pengimplementasian proses *look-ahead* pada metode QMR, secara teori, dapat membuat kinerja dari metode QMR tersebut lebih baik terlebih jika terjadi suatu *breakdown*. Akan tetapi, pengimplementasian proses *look-ahead* ini lebih kompleks dibandingkan dengan pengimplementasian metode QMR tanpa proses *look-ahead*. Faktor lain yang mungkin menyebabkan hasil yang tidak ideal ini berkaitan dengan pemilihan *preconditioner* sebagaimana yang telah dituliskan pada subbab 2.8 bahwasannya proses penentuan *preconditioner* yang baik seringkali dipandang sebagai suatu kombinasi dari seni dan sains. Dengan mengimplementasikan beberapa *preconditioner* yang berbeda akan dapat diketahui *preconditioner* mana yang paling mendukung kinerja metode QMR pada kasus cantilever beam ini sehingga dihasilkan solusi numerik yang jauh lebih baik.





## BAB 5. PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

- a. Secara umum dapat dikatakan bahwasannya nilai-nilai frekuensi angular yang dihasilkan dari pengimplementasian metode *Discontinuous Galerkin* (DG) ini cukup baik atau dengan kata lain nilai error yang dihasilkan relatif kecil.
- b. Nilai  $L^2$  error yang dihasilkan mengindikasikan bahwasannya kinerja dari metode Quasi Minimal Residual (QMR) dan *preconditioner Diagonal Incomplete Lower Upper Factorization* (D-ILU) pada kasus *cantilever beam* ini tidak cukup baik. Hal terjadi dimungkinkan karena pengimplementasian metode QMR tanpa proses *look-ahead* ataupun karena pemilihan *preconditioner* yang kurang sesuai.

### 5.2 Saran

Untuk penelitian berikutnya, masih terbuka kemungkinan bagi peneliti lain untuk menggunakan metode QMR dengan proses *look-ahead* atau dengan pemilihan *preconditioner* yang berbeda.

## DAFTAR PUSTAKA

- Ansari, R., Gholami, R., & Hosseini, K. 2011. A sixth-order compact finite difference method for free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams. *Journal of Mathematical Sciences*. 5(4): 307-320.
- Axler, S. 1997. *Linear Algebra Done Right, Second Edition*. New York: Springer-Verlag New York, Inc.
- Barret *et al.* Tanpa Tahun. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*.
- Bronson, R., & Costa, G. 2007. *Schaum's Outlines Persamaan Differensial Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.
- Burden, R. L., & Faires, J. D. 2011. *Numerical Analysis. 9th Edition*. USA: Brooks Cole.
- Cockburn, B. 2003. *Discontinuous Galerkin Method*. Minnesota: University of Minnesota.
- Fuhry, M. 2013. An Implementation of the Discontinuous Galerkin Method on Graphics Processing Units. *Thesis*. Canada: University of Waterloo.
- Goodwine, B. 2011. *Engineering Differential Equations Theory and Applications*. New York: Springer Science+Bussiness Media.
- Golub, G. H., & Van Loan, C. F. 1996. *Matrix Computations Third Edition*. USA: The Johns Hopkins University Press.
- Greiner, W. 2004. *Classsical Mechanics Point Particles and Relativity*. New York: Springer-Verlag New York, Inc.
- Gutknecht, M. H. Tanpa Tahun. *A Brief Introduction to Krylov Space Methods for Solving Linear Systems*. ETH Zurich.
- Hidayat, R. 2006. *Persamaan Diferensial Parsial*. Jember: UPT Penerbitan Universitas Jember.
- King, A. C., Billingham, J., & Otto, S. R. 2003. *Differential Equations: Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial*. Cambridge: Cambridge University Press.



- Kosasih, P. B. 2006. *Komputasi Numerik: Teori dan Aplikasi*. Yogyakarta: Penerbit ANDI.
- Lopez, J. 2011. *The Discontinuous Galerkin Method Applied to the Euler-Bernoulli Beam Equation*. Nebraska: University of Nebraska at Omaha.
- Lowan, A. N., Davids, N., & Levenson, A. Tanpa Tahun. *Table of the Zeros of the Legendre Polynomials of Order 1-16 and the Weight Coefficients for Gauss' Mechanical Quadrature Formula*.
- Marazinna, D. 2009. *Stability properties of Discontinuous Galerkin method in mixed form*. Italy: Politecnico di Milano.
- Mng'ong'o, B. G. 2011. Mathematical Modelling of A Beam Using Finite Elements, With Application to An Mbira Reed. *Dissertation*. Dar es Salaam: University of Dar es Salaam.
- Nishawala, V. V. 2011. A Study of Large Deflection of Beams and Plates. *Thesis*. New Jersey: The State of University of New Jersey.
- Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. 2006. *Kalkulus Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Saad, Yousef. 2003. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Thankane, K. S., & Stys, T. 2009. Finite Difference Method for Beam Equation with Free Ends Using Mathematica. *Southern Africa Journal of Pure and Applied Mathematics*. **4**: 61-78.
- Veerarajan, T. 2003. *Trigonometry, Algebra and Calculus*. New Delhi: Tata McGraw-Hill.
- Vogel, J. A. 2000. FQMR: A Flexible Quasi-Minimal Residual Method with Inexact Preconditioning. *Dissertation*. The Temple University Graduate Board.

## LAMPIRAN

## A. Membangkitkan Matriks Awal

```

n=input('please enter subinterval = ');
m=input('please enter degree of polynomial = ');
a=(m+1)*n;
lengthbeam=2; % for x0=0 and xn=2
widthbeam=0.5;
hghtbeam=0.9;
rho=8960; % for copper
E=117;
I=1/12*(widthbeam*(hghtbeam)^3);
A=2*((lengthbeam*widthbeam)+(lengthbeam*hghtbeam)+(hghtbeam*widthbeam));
g=(E*I)/(rho*A);
delta_x=lengthbeam/n;
etha=linspace(-1,1,a);
legpoly=[];
for b=0:m
p=legendre(b,etha);
p=p(1,:).*((2.*b)+1)/2;
legpoly=[legpoly;p];
end;
v=legpoly';
pout=sum(legpoly);
poutrep=pout(ones(1,m+1),:);
U=poutrep';

% first three order diff of v and U
[rowlegpoly collegpoly]=size(legpoly);

% first
diflegpoly1=diff(legpoly,1);
[rowdiflegpoly1 coldiflegpoly1]=size(diflegpoly1);
if rowdiflegpoly1~=rowlegpoly
    if m>=1
        add_diflegpoly1=zeros(1,a);
        new_diflegpoly1=[add_diflegpoly1; diflegpoly1];
    else
        if coldiflegpoly1~=collegpoly
            add_diflegpoly1_else=zeros(1,1-m);
            add_diflegpoly1=zeros(m,a);
            nw_diflegpoly1=[diflegpoly1 add_diflegpoly1_else];
            new_diflegpoly1=[add_diflegpoly1; nw_diflegpoly1];
        else
            add_diflegpoly1=zeros(m,a);
            new_diflegpoly1=[add_diflegpoly1; diflegpoly1];
        end;
    end;
end;
else

```

```

    new_diflegpoly1=diflegpoly1;
end;
v_dif1=new_diflegpoly1';
pout_dif1=sum(new_diflegpoly1);
poutrep_dif1=pout_dif1(ones(1,m+1),:);
U_dif1=poutrep_dif1';

% second
diflegpoly2=diff(legpoly,2);
[rowdiflegpoly2 coldiflegpoly2]=size(diflegpoly2);
if rowdiflegpoly2~=rowlegpoly
    if m>=2
        add_diflegpoly2=zeros(2,a);
        new_diflegpoly2=[add_diflegpoly2; diflegpoly2];
    else
        if coldiflegpoly2~=collegpoly
            add_diflegpoly2_else=zeros(1,2-m);
            add_diflegpoly2=zeros(m,a);
            nw_diflegpoly2=[diflegpoly2 add_diflegpoly2_else];
            new_diflegpoly2=[add_diflegpoly2; nw_diflegpoly2];
        else
            add_diflegpoly2=zeros(m,a);
            new_diflegpoly2=[add_diflegpoly2; diflegpoly2];
        end;
    end;
else
    new_diflegpoly2=diflegpoly2;
end;

v_dif2=new_diflegpoly2';
pout_dif2=sum(new_diflegpoly2);
poutrep_dif2=pout_dif2(ones(1,m+1),:);
U_dif2=poutrep_dif2';

% third
diflegpoly3=diff(legpoly,3);
[rowdiflegpoly3 coldiflegpoly3]=size(diflegpoly3);
if rowdiflegpoly3~=rowlegpoly
    if m>=3
        add_diflegpoly3=zeros(3,a);
        new_diflegpoly3=[add_diflegpoly3; diflegpoly3];
    else
        if coldiflegpoly3~=collegpoly
            add_diflegpoly3_else=zeros(1,3-m);
            add_diflegpoly3=zeros(m,a);
            nw_diflegpoly3=[diflegpoly3 add_diflegpoly3_else];
            new_diflegpoly3=[add_diflegpoly3; nw_diflegpoly3];
        else
            add_diflegpoly3=zeros(m,a);
            new_diflegpoly3=[add_diflegpoly3; diflegpoly3];
        end;
    end;
end;

```

```

    end;
else
    new_diflegpoly3=diflegpoly3;
end;

v_dif3=new_diflegpoly3';
pout_dif3=sum(new_diflegpoly3);
poutrep_dif3=pout_dif3(ones(1,m+1),:);
U_dif3=poutrep_dif3';

% gaussian quadrature

t=[-0.978228658146057 -0.887062599768095 -0.730152005574049 -
0.519096129110681 -0.26954315592345 0 0.26954315592345
0.519096129110681 0.730152005574049 0.887062599768095
0.978228658146057];
leg=[];
for b1=0:m
    pol=legendre(b1,t);
    pol=pol(1,:).*((2.*b1)+1)/2;
    leg=[leg;pol];
end;
vGQ=leg';
pGQ=sum(leg);
pGQrep=pGQ(ones(1,m+1),:);
UGQ=pGQrep';

% 4th order diff of v from GQ
[rowleg colleg]=size(leg);
difleg4=diff(leg,4);
[rowdifleg4 coldifleg4]=size(difleg4);
if rowdifleg4~=rowleg
    if m>=4
        add_difleg4=zeros(4,length(t));
        new_difleg4=[add_difleg4; difleg4];
    else
        if coldifleg4~=colleg
            add_difleg4_else=zeros(1,4-m);
            add_difleg4=zeros(m,length(t));
            nw_difleg4=[difleg4 add_difleg4_else];
            new_difleg4=[add_difleg4; nw_difleg4];
        else
            add_difleg4=zeros(m,length(t));
            new_difleg4=[add_difleg4; difleg4];
        end;
    end;
else
    new_difleg4=difleg4;
end;

vGQ_dif4=new_difleg4';

```

```

% term 5 --> result gg form
weights=[0.272925086777901 0.262804544510247 0.233193764591990
0.186290210927734 0.125580369464905 0.055668567116174
0.055668567116174 0.125580369464905 0.186290210927734
0.233193764591990 0.262804544510247];
wght=weights(ones(1,m+1),:);
w=wght';
rsltGQ=w.*UGQ.*vGQ_dif4;
rsltGQ1=sum(rsltGQ);
term_5=rsltGQ1(ones(1,a),:);

% term 6
term_6=delta_x/2; % slightly used (implicitly)

% determine elements matrix

J=((2/delta_x)^3)*g.*(0.5.*((U_dif3.*v)-
(U_dif2.*v_dif1)+(U_dif1.*v_dif2)-(U.*v_dif3)))+term_5);
% for i=2..n-1
Jp=((2/delta_x)^3)*g.*((U_dif3.*v)-(U_dif2.*v_dif1)+term_5);
% for i=1
Jpmailo=((2/delta_x)^3)*g.*((U_dif1.*v_dif2)-
(U.*v_dif3)+term_5); % for i=n

for b2=m+2:m+1:a
    J(b2,:)=J(1,:);
end;
for b3=m+1:m+1:a-(m+1)
    J(b3,:)=J(a,:);
end;

M=zeros(a,a);

Mj=M(m+2:a,1:a-(m+1));
Mjp=M(1:a-(m+1),m+2:a);
for j=1:m+1:a-(m+1)
    Mj(j,j:j+m)=J(a,1:m+1);
    M(m+2:a,1:a-(m+1))=Mj;
    Mjp(j+m,j:j+m)=J(1,1:m+1);
    M(1:a-(m+1),m+2:a)=Mjp;
end;

J(1,1:m+1)=Jp(1,1:m+1);
J(a,1:m+1)=Jpmailo(a,1:m+1);

for i=1:m+1:a
    M(i:i+m,i:i+m)=J(i:i+m,1:m+1);
end;

```

```

for jona=1:a
    M(jona,jona)=(2/delta_x)*M(jona,jona);
end;

[rowM rowM]=size(M);
eigval=eig(M);

```

#### A. Mentransformasi Matriks Awal menjadi Matriks Diagonal Dominan

```

function mj = jmailo(Me)
[d d]=size(Me);
tol=100*eps;
for j=1:d
    dia=Me(j,j);
    abso=abs(dia);
    f=0;

    for jo=1:d
        if (j~=jo)
            f=f+abs(Me(j,jo));
        end;
    end;
    if (f>=abso)
        aii=(1+tol)*max(f,tol);
        if (dia<0)
            aii=-aii;
        end;
        Me(j,j)=aii;
    end;
end;
mj=Me;

```

#### B. Membangkitkan *Preconditioner* D-ILU

```

function mjp = jpmailo(mj)
[d d]=size(mj);
mjp=zeros(d);
for joo=1:d
    mjp(joo,joo)=mj(joo,joo);
end;
for joo=1:d
    mjp(joo,joo)=1/mjp(joo,joo);
    for jmai=joo+1:d
        if mj(joo,jmai)~=0 && mj(jmai,joo)~=0
            mjj=mjp(jmai,jmai)-
            (mj(jmai,joo)*mjp(joo,joo)*mj(joo,jmai));
            mjp(jmai,jmai)=mjj;
        end;
    end;
end;

```

```
end;
```

```
end;
```

### C. Pengimplementasian Metode QMR pada SPL

```
function [cannon,residu] = meandjo(mj,canon,tol,mjp,cannon)
[d d]=size(mj);
precond_1=eye(d);
precond_2=mjp;
residu=canon-mj*cannon;
v_hat=residu;
y=inv(precond_1)*v_hat;
pai=norm(y);
doubleyu_hat=residu;
z=inv(precond_2')*doubleyu_hat;
zeta=norm(z);
yu=1;
nu=-1;
k=0;k1=0;
while (norm(residu)<=tol)
    if pai==0 || zeta==0
        disp('method fail');
    else
        vi=v_hat/pai;
        y=y/pai;
        doubleyu=doubleyu_hat/zeta;
        z=z/zeta;
        si=z'*y;
        if si==0
            disp('method fail');
        else
            y_hat=inv(precond_2)*y;
            z_hat=inv(precond_2')*z;
            k=k+1;
            if k==1
                pii=y_hat;
                qyu=z_hat;
            else
                pii_hat=mj*pii;
                epsi=qyu'*pii_hat;
                pii=y_hat-((zeta*si/epsi)*pii);
                qyu=z_hat-((pai*si/epsi)*qyu);
            end
            beta=epsi/si;
            if epsi==0
                disp('method fail');
            else
                v_hat=pii_hat-(beta*vi);
                y=inv(precond_1)*v_hat;
                pai=norm(y);
                doubleyu_hat=(mj'*qyu)-(beta*doubleyu);
                z=inv(precond_2')*doubleyu_hat;
                zeta=norm(z);
            end
        end
    end
end
```



```

teta=pai/(yu*abs(beta));
den_nu=beta*((yu)^2);
yu=1/(sqrt(1+(teta^2)));
if yu==0
    disp('method fail')
else
    nu=(-nu*pai*((yu)^2))/den_nu;
    k1=k1+1;
    if k1==1
        dii=nu*pii;
        es=nu*pii_hat;
    else
        dii=(nu*pii)+((teta*yu)^2*dii);
        es=(nu*pii_hat)+((teta*yu)^2*es);
    end
end;
end;
end;
end;
cannon=cannon+dii;
residu=residu-es;
end;

```

## D. Penentuan Nilai Defleksi

```

function [finleg,deflection] = mjthaftr(rowM,m,cannon_dec,cannon)
subint=linspace(-1,1,rowM);
finleg=[];
for b4=0:m
    finpol=legendre(b4,subint);
    finpol=finpol(1,:).*(2.*b4+1)/2;
    finleg=[finleg; finpol];
end;
cannon_fin=[cannon_dec; cannon];
cannonrep_fin=cannon_fin(:,ones(1,m+1));
deflect=zeros(m+1,rowM);
deflection=zeros(1,rowM);
for b5=1:m+1:rowM
    deflect(1:m+1,b5:b5+m)=cannonrep_fin(b5:b5+m,1:m+1).*finleg(1:m+1,
    b5:b5+m);
deflection=sum(deflect);
end;

```

## E. Penyelesaian Analitik

### G1. Membangkitkan Frekuensi Angular

```

function mia = jp(lamda)
lngthbeam=2;
wdthbeam=0.5;
hgthbeam=0.9;

```

```

E=117;
I=1/12*(widthbeam*(heightbeam)^3);
rho=8960;      % for copper
A=2*((lengthbeam*widthbeam)+(lengthbeam*heightbeam)+(heightbeam*widthbeam));
g=(E*I)/(rho*A);
g_doubsqrt=sqrt(sqrt(g));
mia =
(cos(2*sqrt(lamda)/g_doubsqrt)+cosh(2*sqrt(lamda)/g_doubsqrt))+
((sin(2*sqrt(lamda)/g_doubsqrt)-sinh(2*sqrt(lamda)/g_doubsqrt))*((sin(2*sqrt(lamda)/g_doubsqrt)+sinh(2*sqrt(lamda)/g_doubsqrt))/(cos(2*sqrt(lamda)/g_doubsqrt)+cosh(2*sqrt(lamda)/g_doubsqrt)))));
end

```

## G2. Penentuan Nilai Defleksi

```

function imnine = jfive(x_abcs,mia)
lengthbeam=2;
widthbeam=0.5;
heightbeam=0.9;
E=117;
I=1/12*(widthbeam*(heightbeam)^3);
rho=8960;      % for copper
A=2*((lengthbeam*widthbeam)+(lengthbeam*heightbeam)+(heightbeam*widthbeam));
g=(E*I)/(rho*A);
g_doubsqrt=sqrt(sqrt(g));

imnine=zeros(1,length(x_abcs));
for nine=1:length(x_abcs)
imnine(nine) = -
(((sin(2*sqrt(mia)/g_doubsqrt)+sinh(2*sqrt(mia)/g_doubsqrt))/(cos(2*sqrt(mia)/g_doubsqrt)+cosh(2*sqrt(mia)/g_doubsqrt)))*cos(x_abcs(nine)*sqrt(mia)/g_doubsqrt)-cosh(x_abcs(nine)*sqrt(mia)/g_doubsqrt))+sin(x_abcs(nine)*sqrt(mia)/g_doubsqrt)-sinh(x_abcs(nine)*sqrt(mia)/g_doubsqrt));
end;

```