



**ANALISIS r -DYNAMIC VERTEX COLORING PADA
HASIL OPERASI GRAF KHUSUS**

SKRIPSI

Oleh

Nur Ica Wulandari

NIM 101810101003

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER**

2015



**ANALISIS r -DYNAMIC VERTEX COLORING PADA
HASIL OPERASI GRAF KHUSUS**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Nur Ica Wulandari
NIM 101810101003

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER

2015

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta Sholawat dan salam atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sepenggal kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:

1. orang terhebatku bunda Nur Sholikhah dan ayah Yudi Sumarsongko terima kasih yang senantiasa memberikan cinta kasih, motivasi, nasehat, dukungan, semangat, do'a dan tetesan keringat serta air mata yang mengiringi setiap langkahku, juga Adik tersayangku Muhammad Yudho Febriansyah terima kasih banyak atas canda tawa, do'a, semangat dan kasih sayangnya;
2. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing I dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan tenaga serta perhatian dalam penulisan skripsi ini;
3. pahlawan tanpa tanda jasaku dari taman Kanak-kanak Al- Muttaqin, SDN Tlogopatut 2, SMPN 1 Kebomas, SMAN 1 Manyar, dan MIPA UNEJ;
4. Teman-teman pejuang graf: Muafa, Latifah, Sari, Misy, Anang, Hendry, Fia, Diana, Khusnul yang selalu berbagi suka duka dan dukungan positif;
5. Teman-teman penghuni Griya Salsabila: Karinda, Rida, Wisas, Matul, Mbak Lulus, Vina, Fajrin yang selalu memberikan canda tawa dan semangat.

MOTTO

"Pertempuran hidup tak selalu dimenangkan oleh orang yang lebih kuat atau lebih cepat, karena cepat atau lambat, dia yang berjaya, adalah dia yang berpikir dia bisa."

(Napoleon Hill)*)

"Makin Sulit Perjuangannya, Makin Besar Kemenangannya."

(Thomas Paine)**)

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

(terjemahan QS.Al-Insiroh:5-6)***)

*) Napoleon Hill from "The Law of Success", dikutip dalam buku Napoleon Hill "Selling-You"

***) <http://katabijakinspirasiku.blogspot.com/2014/05/100-inspirations-from-thomas-paine-kata.html>

***) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an* dan terjemahannya. Bandung. CV Penerbit J-ART

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nur Ica Wulandari

NIM : 101810101003

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Analisis *r-Dynamic Vertex Coloring* pada Hasil Operasi Graf Khusus adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan hasil karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2015

Yang menyatakan,

Nur Ica Wulandari

NIM. 101810101003

**ANALISIS r -DYNAMIC VERTEX COLORING PADA
HASIL OPERASI GRAF KHUSUS**

Oleh

Nur Ica Wulandari
NIM 101810101003

Dosen Pembimbing 1 : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si
Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PERSETUJUAN

ANALISIS *r*-DYNAMIC VERTEX COLORING PADA HASIL
OPERASI GRAF KHUSUS

SKRIPSI

diajukan guna memenuhi syarat untuk menyelesaikan pendidikan Program
Sarjana Strata Satu Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu
Pengetahuan Alam Universitas Jember

Nama Mahasiswa : Nur Ica Wulandari
NIM : 101810101003
Jurusan : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan
Alam
Angkatan Tahun : 2010
Daerah Asal : Gresik
Tempat, Tanggal Lahir : Gresik, 4 Mei 1992

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ika Hesti Agustin. S.Si., M.Si,
NIP.19840801 200801 2 006

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP.19680802 199303 1 004

PENGESAHAN

Skripsi berjudul Analisis *r-Dynamic Vertex Coloring* pada Hasil Operasi Graf Khusus telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

Hari :

Tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,

Dosen Pembimbing Anggota,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

NIP.19840801 200801 2 006

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP.19680802 199303 1 004

Dosen Penguji Utama,

Dosen Penguji Anggota,

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.

NIP.19690828 199802 1 001

Zia'ul Arif, S.Si., M.Sc.

NIP. 19850111 200812 1 002

Mengesahkan,

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember

Prof. Drs. Kusno, DEA.,Ph.D.

NIP. 19610108 198602 1 001

Analisis *r-Dynamic Vertex Coloring* pada Hasil Operasi Graf Khusus; Nur Ica Wulandari, 101810101003; 2015: 99 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf banyak mengalami perkembangan yang sangat luas. Salah satu topik yang menarik untuk dikaji adalah masalah pewarnaan. Pewarnaan memiliki tiga macam, yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Penggunaan warna yang berbeda untuk mewarnai semua titik pada graf dimana setiap dua titik yang terhubung diberi warna yang berbeda disebut pewarnaan titik. Dalam pewarnaan titik, tidak hanya memberi warna tetapi juga menghasilkan banyaknya warna minimum yang didapatkan biasanya disebut bilangan kromatik yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Selain itu, dikenal juga fungsi pewarnaan yang ditentukan dari keteraturan bilangan kromatik. Terdapat topik baru yang masih dalam ruang lingkup pewarnaan titik yaitu *r-Dynamic Vertex Coloring* atau yang biasa disebut pewarnaan titik dinamis. *r-Dynamic Vertex Coloring* ini sifatnya juga hampir mirip dengan pewarnaan titik. Pewarnaan titik dapat diterapkan pada graf yang merupakan hasil operasi dari beberapa graf khusus. Adapun macam-macam pengoperasian graf yaitu operasi *Joint* ($G + H$), *Crown Product* ($G \odot H$), *Tensor Product* ($G \otimes H$), *Cartesian Product* ($G \square H$), *Composition* ($G[F]$), *Shackle*, dan *Amalgamation*. Pada penelitian ini menggunakan metode penelitian eksploratif dan terapan. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya. Penelitian terapan (*applied research*) merupakan penyelidikan yang hati-hati, sistematis dan terus-menerus terhadap suatu masalah dengan tujuan untuk digunakan dengan segera untuk keperluan tertentu. Penelitian ini bertujuan untuk mencari batas atas bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan titik pada graf yang dioperasikan serta menentukan pewarnaan titik dinamis. Selain itu juga untuk mengetahui sifat komutatif dari operasi graf. Graf

yang digunakan pada penelitian ini adalah graf roda (*wheel*), graf lintasan (*path*), graf lingkaran (*cycle*), dan graf bintang (*star*). Pada penelitian ini menghasilkan 15 teorema dan 4 akibat dari teorema sebelumnya, antara lain:

1. **Teorema 4.1.1** Misal $G = (W_n + P_m) = (P_m + W_n)$. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis G adalah

$$\chi(G = (W_n + P_m)) = \chi_4(G = (W_n + P_m)) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 6, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

2. **Teorema 4.1.2** Misal G adalah joint dari graf roda dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $G = (W_n + C_m)$ adalah

$$\chi(W_n + C_m) = \chi_4(W_n + C_m) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } n \text{ genap pada saat } m \text{ genap} \\ 6, & \text{untuk } n \text{ ganjil pada saat } m \text{ genap} \end{cases}$$

$$\chi(W_n + C_m) = \chi_5(W_n + C_m) = \begin{cases} 6, & \text{untuk } n \text{ genap pada saat } m \text{ ganjil} \\ 7, & \text{untuk } n \text{ ganjil pada saat } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

3. **Teorema 4.1.3** Misal G adalah crown product dari graf roda dan graf lintasan. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis G adalah

$$\chi(W_n \odot P_m) = \chi_2(W_n \odot P_m) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 4, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

4. **Teorema 4.1.4** Misal G adalah crown product dari graf lintasan dan graf roda. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $G = (P_m \odot W_n)$ adalah

$$\chi(P_m \odot W_n) = \chi_3(W_n \odot P_m) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 5, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

5. **Teorema 4.1.5** Misal G adalah crown product dari graf roda dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $G = (W_n \odot C_m)$ adalah

$$\chi(W_n \odot C_m) = \chi_2(W_n \odot C_m) = 4, \text{ untuk } m \text{ genap}$$

$$\chi(W_n \odot C_m) = \chi_3(W_n \odot C_m) = 4, \text{ untuk } m \text{ ganjil}$$

6. **Akibat 4.1.1** Misal $G = (W_n \otimes P_m) = (P_m \otimes W_n)$. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik G adalah

$$\chi(W_n \otimes P_m) = 2$$

7. **Teorema 4.1.6** Misal $G = (W_n \otimes P_m) = (P_m \otimes W_n)$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, pewarnaan titik dinamis G adalah

$$\chi_2(W_n \otimes P_m) = 3$$

8. **Akibat 4.1.2** Misal G adalah tensor product dari graf roda dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik $G = (W_n \otimes C_m)$ adalah

$$\chi(W_n \otimes C_m) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

9. **Teorema 4.1.7** Misal G adalah tensor product dari graf roda dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, pewarnaan titik dinamis $G = (W_n \square C_m)$ adalah

$$\chi(W_n \square C_m) = 2, \text{ untuk } m \text{ genap}$$

$$\chi_2(W_n \square C_m) = 3, \text{ untuk } m \text{ ganjil}$$

10. **Akibat 4.1.3** Misal $G = (W_n \square P_m) = (P_m \square W_n)$. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$,

bilangan kromatik G adalah

$$\chi(W_n \square P_m) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 4, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

11. **Teorema 4.1.8** Misal G adalah cartesian product dari graf roda dan lintasan. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, pewarnaan titik dinamis $G = (W_n \square P_m)$ adalah

$$\chi_2(W_n \square P_m) = 3, \text{ untuk } m \text{ genap}$$

$$\chi_2(W_n \square P_m) = 4, \text{ untuk } m \text{ ganjil}$$

12. **Akibat 4.1.4** Misal G adalah cartesian product dari graf roda dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik dan pewarnaan dinamis $G = (W_n \square C_m)$ adalah

$$\chi(W_n \square C_m) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } m \text{ genap dan } m \text{ ganjil pada saat } n \text{ genap} \\ 4, & \text{untuk } m \text{ genap dan } m \text{ ganjil pada saat } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

13. **Teorema 4.1.9** Misal G adalah cartesian product dari graf roda dan lingkaran. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, pewarnaan titik dinamis $G = (W_n \square C_m)$ adalah

$$\chi_2(W_n \square C_m) = 3, \text{ untuk } m \text{ genap dan } m \text{ ganjil pada saat } n \text{ genap}$$

$$\chi_3(W_n \square C_m) = 4, \text{ untuk } m \text{ genap dan } m \text{ ganjil pada saat } n \text{ ganjil}$$

14. **Teorema 4.1.10** Misal $G = (W_n[P_m]) = (P_m[W_n])$. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis G adalah

$$\chi(W_n[P_m]) = \chi_5(W_n[P_m]) = 6, \text{ untuk } n \text{ genap}$$

$$\chi(W_n[P_m]) = \chi_6(W_n[P_m]) = 8, \text{ untuk } n \text{ ganjil}$$

15. **Teorema 4.1.11** Misal G adalah composition dari graf roda dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis G

adalah

$$\chi(W_n[C_m]) = \chi_3(W_n[C_m]) = 9, \text{ untuk } n \text{ genap pada saat } m \text{ ganjil}$$

$$\chi(W_n[C_m]) = \chi_5(W_n[C_m]) = 6, \text{ untuk } n \text{ genap pada saat } m \text{ genap}$$

$$\chi(W_n[C_m]) = \chi_5(W_n[C_m]) = 8, \text{ untuk } n \text{ ganjil pada saat } m \text{ genap}$$

$$\chi(W_n[C_m]) = \chi_7(W_n[C_m]) = 12, \text{ untuk } n \text{ ganjil pada saat } m \text{ ganjil}$$

16. **Teorema 4.1.12** Misal G adalah amalgamation dari hasil operasi joint graf roda dan graf lintasan. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $G = (Amal(W_n + P_m, v = 1, r))$ adalah

$$\chi(Amal(W_n + P_m, v = 1, r)) = \chi_4(Amal(W_n + P_m, v = 1, r)) \begin{cases} 5, \text{ untuk } n \text{ genap} \\ 6, \text{ untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

17. **Teorema 4.1.13** Misal G adalah amalgamation dari hasil operasi joint graf bintang dan graf lintasan. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan dinamis $G = (Amal(S_n + P_m, v = 1, r))$ adalah

$$\chi(Amal(S_n + P_m, v = 1, r)) = \chi_3(Amal(S_n + P_m, v = 1, r)) = 4$$

18. **Teorema 4.1.14** Misal G adalah shackle dari graf hasil operasi joint graf bintang dan graf lintasan. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan dinamis $G = (Shack(S_n + P_m, r))$ adalah

$$\chi(Shack(S_n + P_m, r)) = \chi_3(Shack(S_n + P_m, r)) = 4$$

19. **Teorema 4.1.15** Misal G adalah shackle dari graf hasil operasi joint graf roda dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 3$, bilangan kromatik dan

Digital Repository Universitas Jember

pewarnaan dinamis $G = (\text{Shack}(W_n + C_m, r))$ adalah

$$\chi(\text{Shack}(W_n + C_m, r)) = \chi_4(\text{Shack}(W_n + C_m, r)) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } n \text{ genap } m \text{ genap} \\ 6, & \text{untuk } n \text{ ganjil } m \text{ genap} \end{cases}$$



Puja dan puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Analisis r -Dynamic Vertex Coloring* Pada Hasil Operasi Graf Khusus. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan, waktu, bimbingan dan dukungan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama I dan Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan tenaga serta perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji I dan M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Penguji II;
5. segenap dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. dua orang terhebatku ibunda Nur Sholikhah dan ayah Yudi Sumarsongko terima cinta kasih yang senantiasa memberikan cinta kasih, dukungan, semangat, do'a dan tetesan keringat serta air mata yang mengiringi setiap langkahku, juga Adik tersayangku M. Yudho Febriansyah terima kasih banyak atas do'a, dukungan dan kasih sayangnya;

7. para pejuang graf: Muafa, Rida, Karin, Latifah, Sari, Misy, Anang, Hendry, Fia, Diana, Khusnul dan semuanya, yang selalu memberi dukungan untuk terus maju dan tetap semangat;
8. keluarga besar MATHGIC 2010, terima kasih telah menjadi keluarga bagiku;
9. Almamater tercinta dari Taman Kanak-kanak Al- Muttaqin, SDN Tlogopatut 2, SMPN 1 Kebomas, SMAN 1 Manyar, dan MIPA UNEJ;
10. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dorongan dan semua yang beliau-beliau berikan dapat menjadi nilai ibadah dan amal baik oleh dan di ganjar balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2015
Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PERSETUJUAN	vi
HALAMAN PENGESAHAN	vii
RINGKASAN	viii
PRAKATA	xiv
DAFTAR ISI	xvi
DAFTAR GAMBAR	xviii
DAFTAR TABEL	xxi
DAFTAR LAMBANG	xxii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat	4
2 TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Terminologi Dasar Graf	5
2.2 Pewarnaan Graf	7
2.2.1 Pewarnaan Titik (<i>Vertex Coloring</i>)	7
2.2.2 Pewarnaan Sisi (<i>Edge Coloring</i>)	7
2.2.3 Pewarnaan Wilayah (<i>Region Coloring</i>)	8
2.3 <i>r-Dynamic Vertex Coloring</i>	9
2.4 Fungsi Injektif, Surjektif dan Bijektif	9
2.5 Graf Khusus dan Operasi Graf	11
2.6 Aplikasi	18
2.7 Hasil-hasil Pewarnaan Titik	22

3 METODE PENELITIAN	24
3.1 Jenis Penelitian	24
3.2 Graf Kajian Pewarnaan Titik	24
3.3 Rancangan Penelitian	24
4 HASIL DAN PEMBAHASAN	27
4.1 Bilangan Kromatik, <i>r-Dynamic Vertex Coloring</i> , dan Fungsi Pewarnaan Titik	27
4.2 Pembahasan	95
5 KESIMPULAN DAN SARAN	100
5.1 Kesimpulan	100
5.2 Saran	102
DAFTAR PUSTAKA	103

DAFTAR GAMBAR

2.1	Contoh graf G	6
2.2	Pewarnaan titik	8
2.3	Pewarnaan Sisi	8
2.4	Pewarnaan Wilayah	8
2.5	Contoh r -Dynamic Vertex Coloring	9
2.6	(a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif	10
2.7	Graf Lengkap K_4 dan K_5	11
2.8	Graf Lintasan P_3 dan P_4	12
2.9	Graf Lingkaran C_4 , C_5 , dan C_6	12
2.10	Graf Roda W_6	12
2.11	Graf Bintang S_6	13
2.12	Graf Bunga Matahari SF_5	13
2.13	Graf Tangga Permata Dl_3	14
2.14	Contoh operasi <i>Joint</i>	14
2.15	Contoh operasi <i>Crown Product</i>	15
2.16	Contoh operasi <i>Tensor Product</i>	15
2.17	Contoh operasi <i>Cartesian Product</i>	16
2.18	Contoh operasi <i>Composition</i>	17
2.19	Contoh operasi <i>Amalgamation</i>	17
2.20	Contoh operasi <i>Shackle</i>	18
2.21	Representasi Graf Berbasis Interferensi Gelombang	21
2.22	Representasi Graf Berbasis Algoritma Welch-Powell	22
3.1	Rancangan Penelitian	26
4.1	(a) W_4 dan P_3 (b) $(W_4 + P_3)$ (c) $(P_3 + W_4)$	29
4.2	(a) Pewarnaan titik $(W_5 + P_3)$ dan (b) Pewarnaan titik $(W_4 + P_3)$	31
4.3	(a) W_4 dan C_3 (b) $(W_4 + C_3)$	33
4.4	(a) Pewarnaan titik $(W_4 + C_3)$ (b) Pewarnaan titik $(W_5 + C_3)$	35
4.5	(a) Pewarnaan titik $(W_4 + C_4)$ (b) Pewarnaan titik $(W_5 + C_4)$	36

4.6	(a) W_4 dan P_3 (b) $(W_4 \odot P_3)$	39
4.7	(a) Pewarnaan titik $(W_5 + P_3)$ (b) Pewarnaan titik $(W_4 + P_3)$. . .	40
4.8	(a) Pewarnaan titik $(P_3 \odot W_5)$ (b) Pewarnaan titik $(P_3 \odot W_4)$. . .	43
4.9	(a) W_4 dan C_3 (b) $(W_4 \odot C_3)$	46
4.10	(a) Pewarnaan titik $(W_5 \odot C_3)$ (b) Pewarnaan titik $(W_4 \odot C_3)$. . .	47
4.11	(a) Pewarnaan titik $(W_4 \odot C_4)$ (b) Pewarnaan titik $(W_5 \odot C_4)$. . .	48
4.12	(a) W_4 dan P_3 (b) $(W_4 \otimes P_3)$ (c) $(P_3 \otimes W_4)$	52
4.13	(a) Pewarnaan titik $(W_4 \otimes P_3)$ (b) Pewarnaan titik $(W_5 \otimes P_3)$. . .	53
4.14	(a) W_4 dan C_3 (b) $(W_4 \otimes C_3)$	56
4.15	(a) Pewarnaan titik $(W_4 \otimes C_3)$ (b) Pewarnaan titik $(W_5 \otimes C_3)$. . .	57
4.16	(a) Pewarnaan titik $(W_4 \otimes C_4)$ (b) Pewarnaan titik $(W_5 \otimes C_4)$. . .	58
4.17	(a) W_4 dan P_3 (b) $(W_4 \square P_3)$ (c) $(P_3 \square W_4)$	61
4.18	(a) Pewarnaan titik $(W_4 \square P_3)$ (b) Pewarnaan titik $(W_5 \square P_3)$. . .	63
4.19	(a) W_4 dan C_3 (b) $(W_4 \square C_3)$	65
4.20	(a) Pewarnaan titik $(W_4 \square C_3)$ (b) Pewarnaan titik $(W_5 \square C_3)$. . .	67
4.21	(a) Pewarnaan titik $(W_4 \square C_4)$ (b) Pewarnaan titik $(W_5 \square C_4)$. . .	68
4.22	(a) W_4 dan P_3 (b) $(W_4[P_3])$ (b) $(P_3[W_4])$	70
4.23	(a) Pewarnaan titik $(W_4[P_3])$ (b) Pewarnaan titik $(W_5[P_3])$	72
4.24	(a) W_4 dan C_3 (b) $(W_4[C_3])$	75
4.25	(a) Pewarnaan titik $(W_4[C_3])$ (b) Pewarnaan titik $(W_5[C_3])$	77
4.26	(a) Pewarnaan titik $(W_4[C_4])$ (b) Pewarnaan titik $(W_5[C_4])$	78
4.27	(a) W_4 dan P_3 (b) $(W_4 + P_3)$ (c) $(Amal(W_n + P_m), v = 1, r)$. . .	81
4.28	(a) Pewarnaan titik $Amal(W_4 + P_3, v = 1, 4)$ (b) Pewarnaan titik $Amal(W_5 + P_3, v = 1, 4)$	82
4.29	(a) S_4 dan P_2 (b) $S_4 + P_2$ (c) $(Amal(S_4 + P_2), v = 1, 4)$	85
4.30	Pewarnaan titik $Amal(S_4 + P_3, v = 1, 4)$	86
4.31	(a) S_n dan P_m (b) $(S_n + P_m)$ (c) $Shack(S_n + P_m, r)$	88
4.32	Pewarnaan titik $Shack(S_4 + P_2, v = 1, 3)$	89
4.33	(a) W_4 dan C_3 (b) $(W_4$ dan $C_3)$ (c) $Shack(W_4 + C_3, v = 3)$	91
4.34	(a) Pewarnaan titik $Shack(W_4 + C_3, v = 3)$ (b) Pewarnaan titik $Shack(W_5 + C_3, v = 3)$	92

4.35 (a) Pewarnaan titik $Shack(W_4 + C_4, v = 1, 3)$ (b) Pewarnaan titik
 $Shack(W_5 + C_4, v = 1, 3)$ 93



DAFTAR TABEL

2.1	Kuat Medan Listrik Dua Sebarang Radio	20
2.3	Hasil pewarnaan titik dan <i>r-Dynamic Coloring</i> penelitian terdahulu	23
4.1	Tabel Sifat Komutatif	98



DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$G(V, E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
v_n	=	Titik ke- n pada suatu graf
e_n	=	Sisi ke- n dari suatu graf
$V(G)$	=	Himpunan titik dari graf G yang disebut <i>order</i>
$E(G)$	=	Himpunan sisi dari graf G yang disebut ukuran (<i>size</i>)
$ V(G) $	=	Kardinalitas titik dari graf G
$ E(G) $	=	Kardinalitas sisi dari graf G
H	=	Graf H
x_i	=	Titik ke- i pada graf pertama yang akan dilakukan pengoperasian
y_j	=	Titik ke- j pada graf kedua yang akan dilakukan pengoperasian
$x_{i,j}$	=	Titik ke- i dalam komponen graf pertama dan titik ke- j pada komponen graf kedua
A_k	=	Titik pusat dengan <i>shackle</i> sebanyak k
W_n	=	Graf roda dengan titik yang berderajat 1 sebanyak n
P_n	=	Graf lintasan dengan titik sebanyak n
C_n	=	Graf lingkaran dengan titik sebanyak n
S_n	=	Graf lintasan dengan titik yang berderajat 1 sebanyak n

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf adalah cabang dari ilmu matematika yang penerapannya masih banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Sejarah perkembangan teori graf telah memperkenalkan seorang matematikawan dari Swiss bernama Leonard Euler pada tahun 1736 yang berhasil memecahkan masalah jembatan yang berada di kota Königsberg. Permasalahan yang muncul pada jembatan Königsberg adalah kemungkinan bisa atau tidaknya melewati ketujuh jembatan di Königsberg yang masing-masing tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat semula. Euler memecahkan masalah tersebut dengan cara memodelkannya menjadi graf yaitu menggambarkan keempat daratan sebagai titik, sedangkan ketujuh jembatan sebagai sisi yang menghubungkan setiap daratan.

Teori graf banyak mengalami perkembangan yang sangat luas. Salah satu topik yang menarik untuk dikaji adalah masalah pewarnaan. Pewarnaan memiliki tiga macam, yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Penggunaan warna yang berbeda untuk mewarnai semua titik pada graf dimana setiap dua titik yang terhubung diberi warna yang berbeda disebut pewarnaan titik. Dalam pewarnaan titik, tidak hanya memberi warna tetapi juga menghasilkan banyaknya warna minimum yang didapatkan biasanya disebut bilangan kromatik yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Selain itu, dikenal juga fungsi pewarnaan yang ditentukan dari keteraturan bilangan kromatik. Terdapat topik baru yang masih dalam ruang lingkup pewarnaan titik yaitu *r-Dynamic Vertex Coloring* atau yang biasa disebut pewarnaan titik dinamis. *r-Dynamic Vertex Coloring* ini sifatnya juga hampir mirip dengan pewarnaan titik yang dinotasikan dengan $\chi_r(G)$.

Penelitian Alauddin (2009) mengkaji bilangan kromatik dari graf prisma yang merupakan graf hasil operasi kartesian dari graf lintasan (P_2) dengan siklus (C_n). Lu (2013) mengkaji penelitian pewarnaan titik pada graf bipartit. Ardian-

syah (2013) melakukan penelitian terhadap bilangan kromatik hasil amalgamasi dua buah graf. Kaiser (2014) mengkaji pewarnaan titik pada graf pesawat (*Plane Graph*). Harsya et al. (2014) meneliti mengembangkan pewarnaan titik pada operasi graf sikel dengan graf lintasan. Irwanto and Dafik (2014) juga menentukan bilangan kromatik pada graf roda untuk $n \geq 5$, graf helm F_n dengan $n \geq 4$, graf anti prisma H_m untuk $m \geq 4$, graf prisma untuk H_M $n \geq 4$, dan graf kipas F_n untuk $n \geq 4$. Hasil penelitian untuk *r-Dynamic Vertex Coloring* pada tahun yang paling terbaru yaitu 2015 dikaji oleh Mohanapriya et al. (2015) yang menentukan pewarnaan dinamis pada graf *4-Regular with Girth-3*, kemudian peneliti yang bernama Lai and Montgomery (2002) melakukan penelitian pada graf *Particular*.

Berdasarkan uraian tersebut, maka penulis akan meneliti lebih lanjut mengenai pewarnaan titik pada operasi graf yang disajikan beserta *r-Dynamic Vertex Coloring*. Operasi graf adalah pengoperasian pada dua graf untuk memperoleh graf baru dengan banyak cara. Adapun macam-macam pengoperasian graf yaitu operasi *Joint* ($G+H$), *Cartesian Product* ($G \square H$), *Crown Product* ($G \odot H$), *Tensor Product* ($G \otimes H$), *Composition* ($G[F]$), *Shackel* ($Shack(G, r)$), dan *Amalgamation* ($Amal(G, v = 1, r)$). Dalam penelitian ini, graf khusus yang digunakan yaitu graf roda, graf bintang, graf lingkaran dan graf lintasan sehingga diperlukan bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan titik dalam menyelesaikannya. Penulis juga membuktikan sifat komutatif dari operasi graf yaitu yaitu operasi *Joint* ($G + H$), *Cartesian Product* ($G \square H$), *Crown Product* ($G \odot H$), *Tensor Product* ($G \otimes H$), *Composition* ($G[F]$). Dua graf yang dioperasikan kemudian dianalisis sifat komutatifnya serta dibuktikan untuk menunjukkan operasi graf yang memiliki sifat komutatif. Hasil operasi dari beberapa graf dicari *r-Dynamic Vertex Coloring* sehingga mendapatkan bilangan kromatik titik dinamis.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penulisan tugas akhir ini menurut latar belakang diatas antara lain:

- a. bagaimana menentukan kardinalitas sisi dan titik dari operasi *Joint*, *Crown Product*, *Tensor Product*, *Cartesian Product*, *Composition*, *Shackle*, *Amal-*

gamation pada graf roda, graf bintang, graf lingkaran dan graf lintasan?

- b. bagaimana menentukan pewarnaan titik dari operasi *Joint*, *Crown Product*, *Tensor Product*, *Cartesian Product*, *Composition*, *Shackle*, *Amalgamation* pada graf roda, graf bintang, graf lingkaran dan graf lintasan?
- c. bagaimana sifat komutatif dari operasi *Joint*, *Crown Product*, *Tensor Product*, *Cartesian Product*, dan *Composition*?
- d. bagaimana menentukan *r-Dynamic Vertex Coloring* dari operasi *Joint*, *Crown Product*, *Tensor Product*, *Cartesian Product*, *Composition*, *Shackle*, *Amalgamation*?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dari penulisan tugas akhir ini yaitu:

- a. pada graf tidak berarah dan konektif;
- b. graf khusus yaitu graf roda, graf bintang, graf lingkaran dan graf lintasan pada operasi graf *Joint* ($G + H$), *Cartesian Product* ($G \square H$), *Crown Product* ($G \odot H$), *Tensor Product* ($G \otimes H$), *Composition* ($G[F]$), *Shackel* ($Shack(G, r)$), dan *Amalgamation* ($Amal(G, v = 1, r)$);
- c. analisa sifat komutatif dari operasi *Joint*, *Crown Product*, *Tensor Product*, *Cartesian Product*, dan *Composition*.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang diatas, maka tujuan pada penelitian ini antara lain:

- a. menentukan graf operasi pada graf roda, graf bintang, graf lingkaran dan graf lintasan;
- b. menentukan bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan titik;
- c. mengetahui sifat komutatif terhadap kardinalitas sisi dan titik, keisomorfisan dan pewarnaan titik;

- d. menentukan *r-Dynamic Vertex Coloring* pada setiap hasil operasi graf.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penulisan tugas akhir ini antara lain:

- a. meningkatkan pemahaman mengenai operasi graf;
- b. meningkatkan pengetahuan baru dalam ruang lingkup pewarnaan titik pada operasi graf dan sifat komutatifnya;
- c. memberi motivasi pada peneliti lain untuk memperluas penelitian tentang pewarnaan titik menggunakan *r-dynamic coloring*;
- d. hasil dari penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan ilmu dan aplikasi dalam masalah pewarnaan titik.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$. V merupakan himpunan tidak kosong yang elemen-elemennya disebut titik (*vertex*) dan E himpunan boleh kosong yang elemen-elemennya disebut sisi (*edge*). *Vertex* digambarkan sebagai sebuah titik atau node, pada graf dapat dinomori dengan huruf, bilangan asli, atau dengan menggunakan huruf dan angka (bilangan asli). Sisi digambarkan garis yang menghubungkan dua vertex yang disebut (*endvertices*). Definisi graf menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi harus memiliki titik.

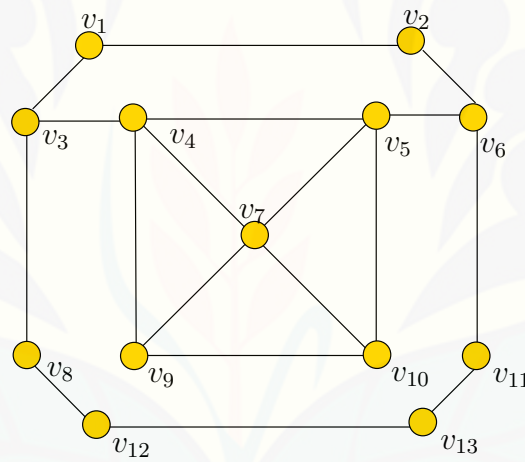
Misal graf G mempunyai titik u dan v . Jarak dari titik u ke titik v dinotasikan dengan $dist(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v . Sebagai contoh Gambar 2.1 jarak dari titik v_1 ke v_{12} adalah 3. Diameter dari sebuah graf G adalah jarak maksimum dari sebarang dua titik. Panjang dari siklus terpendek di G disebut *girth*. *Girth* dari graf G pada Gambar 2.1 adalah 3 dan mempunyai diameter 6.

Titik u pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) pada v , jika terdapat sisi e diantara u dan v ditulis $e = uv$. Dengan kata lain, u dan v bersisian (*incident*) dengan sisi e . Gambar 2.1 menunjukkan titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_3 , tetapi tidak bertetangga dengan v_4 . Titik v_8 bersisian dengan sisi v_3v_8 dan v_8v_{12} . Sedangkan titik v_2 bertetangga dengan titik v_1 dan v_6 , sehingga titik v_2 bersisian dengan sisi v_1v_2 dan v_2v_6 .

Notasi dari jalan (*walk*) pada suatu graf dapat dituliskan $A_1e_1A_2e_2A_2\dots A_{n-1}e_{n-1}A_n$ adalah barisan titik dan sisi terhingga dan bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi dalam suatu graf dengan ketentuan tiap sisi e_i menempel pada A_i dan A_j dan jika e_i bukan merupakan sebuah *loop* (Hartsfield dan Ringel, 1994). *Loop* adalah sebuah sisi yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri. Jika

ada dua buah sisi atau lebih yang mempunyai dua titik yang sama disebut sisi *multiple* (*multiple edges*). Graf yang tidak mempunyai sisi *multiple* dan *loop* disebut graf sederhana. Sebuah graf dikatakan *multigraph* jika graf tersebut mempunyai sisi *multiple* tetapi tidak mempunyai *loop*. Sedangkan graf yang mempunyai sisi *loop* dan *multiple* disebut *pseudograph*.

Sebuah jalan (*walk*) dengan panjang n dimana $n = 0$ dari titik a ke titik b pada graf G adalah barisan titik dan sisi di G , yang diawali dan diakhiri dengan titik, yaitu $a = v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n = b$ sehingga $v_i v_{i+1} = e_i$ adalah sisi di G untuk setiap $i=0,1,\dots,n-1$. Jalan dikatakan tertutup jika titik awal dan titik akhirnya sama, yaitu $a = b$. Lintasan (*path*) adalah jalan yang semua titiknya berbeda. Jika semua sisinya berbeda maka jalan disebut jejak (*trail*). Jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda disebut siklus (*cycle*). Dari Gambar 2.1 yang merupakan jalan adalah $v_1, v_2, v_6, v_{11}, v_{13}$ dan $v_1, v_3, v_4, v_7, v_9, v_{10}$ merupakan lintasan.



Gambar 2.1 Contoh graf G

Derajat (*degree*) sebuah titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang bersisian (*incident*) pada v , dengan kata lain jumlah sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik yang mempunyai derajat nol disebut titik terisolasi (*isolated vertex*). Titik dengan derajat satu disebut titik akhir (*end vertex*) atau daun (*leaf*). Jika semua titik pada graf G mempunyai derajat yang sama d maka dikatakan graf reguler. Derajat terkecil dari suatu graf G adalah derajat terke-

cil yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik lain sedangkan derajat terbesar adalah derajat terbesar yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik yang lain. Notasi untuk derajat terkecil dapat dituliskan dengan $\delta(G)$, untuk derajat terbesar dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Pada Gambar 2.1 menunjukkan titik v_1, v_2, v_8, v_{11} mempunyai derajat terkecil yang sama yaitu $\delta(G)=2$ dan untuk derajat terbesar dimiliki titik $v_4, v_5, v_9, v_7, v_{10}$ yaitu $\Delta(G)=4$.

2.2 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf adalah suatu bentuk pelabelan graf, yaitu dengan memberikan warna pada elemen graf. Terdapat tiga macam persoalan pewarnaan graf, meliputi pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*).

2.2.1 Pewarnaan Titik (*Vertex Coloring*)

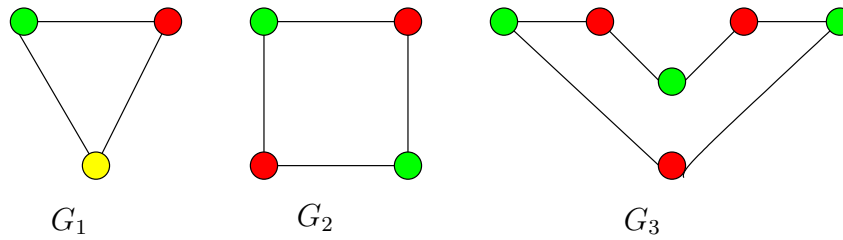
Pewarnaan titik pada graf G adalah memberikan warna berbeda pada setiap titik pada graf G yang bertetangga sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga dengan warna yang sama. Dalam pewarnaan titik juga mengenal istilah bilangan kromatik yang sangat erat kaitannya, yaitu masalah menentukan banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf sehingga dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda.

Suatu bilangan k yang terkecil sedemikian hingga graf G dapat diwarnai dengan k warna disebut bilangan kromatik dari graf G disimbolkan $\chi(G)$. Apabila suatu graf G dapat diwarnai dengan k minimal dari n warna, maka G dikatakan memiliki bilangan kromatik $n(\chi(G) = n)$. Lihat pada Gambar 2.2.

Teorema 2.2.1. *Jika G adalah sebuah graf khusus dengan p titik dan q sisi dan G mempunyai bilangan kromatik χ maka hubungannya $(\chi - 1)p \leq 2q$ (Ringel, 1994).*

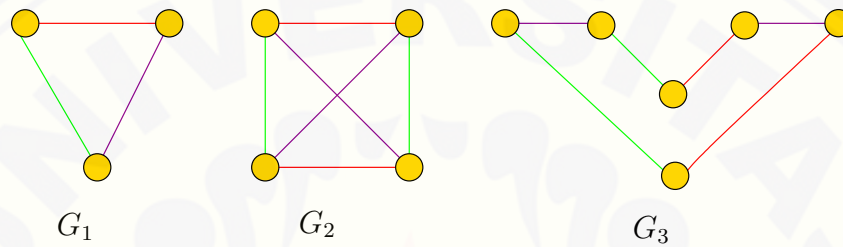
2.2.2 Pewarnaan Sisi (*Edge Coloring*)

Sebuah pewarnaan sisi pada graf G adalah pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang



Gambar 2.2 Pewarnaan titik

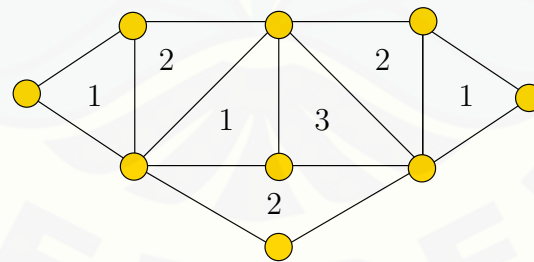
berbeda (Budayasa, 2007). Jika G mempunyai pewarnaan sisi- k , maka dikatakan sisi-sisi di G diwarnai dengan k warna. Contoh pewarnaan sisi dapat dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Pewarnaan Sisi

2.2.3 Pewarnaan Wilayah (*Region Coloring*)

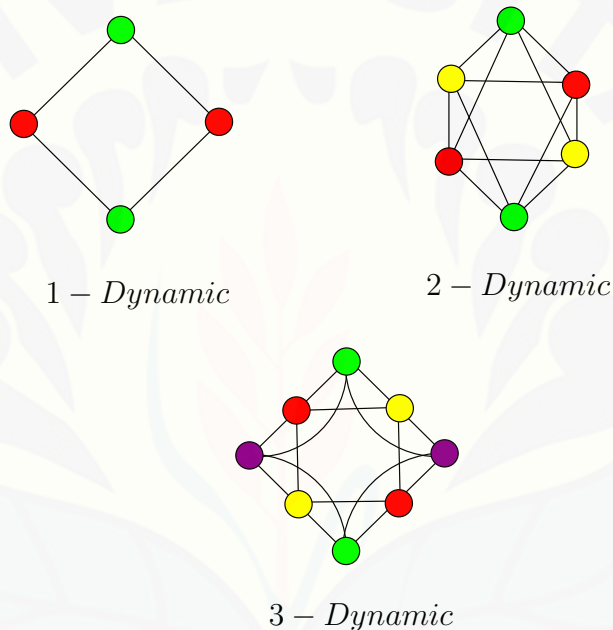
Pewarnaan wilayah adalah pemberian pada setiap wilayah pada graf sehingga wilayah yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama. Biasanya sering dipakai untuk mewarnai peta. Contoh pewarnaan wilayah dapat dilihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Pewarnaan Wilayah

2.3 r -Dynamic Vertex Coloring

Lai dan Montgomery (2012) menyatakan sebuah k -pewarnaan titik dikatakan pewarnaan titik dinamis jika untuk setiap titik $v \in V(G)$ dengan $d(v) \geq 2$. $d(v)$ merupakan derajat sebuah titik v yaitu jumlah sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik yang saling bertetangga mempunyai dua warna yang berbeda. Jumlah warna r -dynamic dari graf G dinotasikan $\chi_r(G)$ merupakan warna minimum k pada graf G . Jumlah berwarna 1- *Dynamic* pada graf G adalah nilai warna yang diperkenalkan sebagai *Chromatic Number* dan dinotasikan $\chi(G)$ dan untuk jumlah *Dynamic* ≥ 2 pada graf G adalah nilai warna yang diperkenalkan sebagai *r -Dynamic Chromatic Number*. Lebih jelasnya dapat ditunjukkan pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Contoh r -Dynamic Vertex Coloring

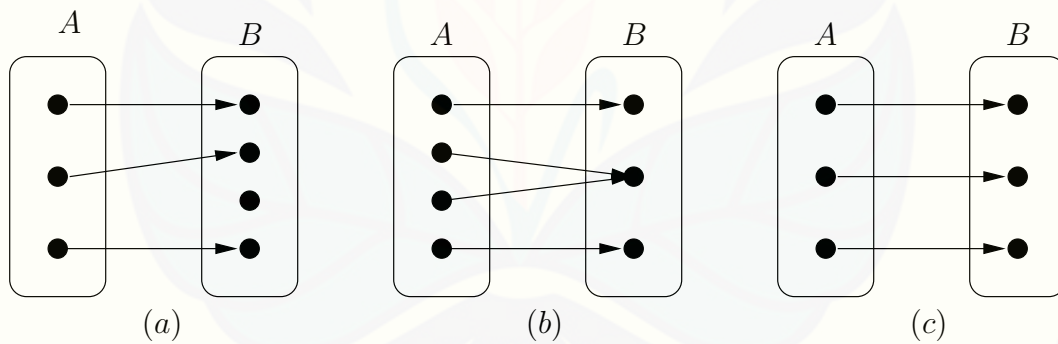
2.4 Fungsi Injektif, Surjektif dan Bijektif

Fungsi merupakan sebuah pemetaan yang biasanya ditulis " f ". Fungsi " f " dari himpunan A ke himpunan B , ditulis dengan notasi $f : A \rightarrow B$, adalah aturan korespondensi yang menghubungkan setiap $x \in A$ dengan tepat satu anggota B .

Himpunan A yaitu himpunan yang memuat elemen pertama dari elemen-elemen dalam f , disebut *domain* f dan dapat dinyatakan sebagai D_f . Himpunan B yaitu himpunan yang memuat elemen kedua dari elemen-elemen dalam f , disebut *range* f dan dinyatakan sebagai R_f . Notasi : $f : A \rightarrow B$ menunjukkan bahwa f merupakan fungsi dari A ke B , yang sering juga dibaca " f adalah pemetaan dari A ke B ", atau " f memetakan A ke B ". Jika (a, b) anggota dari f , maka $b = f(a)$ untuk $(a, b) \in f$. Fungsi dapat digolongkan menjadi 3 golongan sebagai berikut :

1. Fungsi satu-satu (injektif) adalah sebuah pemetaan pada setiap elemen di daerah kodomain yang berpasangan mempunyai pasangan elemen tepat satu di daerah domain, $\forall a_1$ dan $a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.
2. Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi kepada atau fungsi surjektif $\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A \Rightarrow f(a) = b$. Dengan kata lain, suatu kodomain fungsi surjektif sama dengan kisarannya (range).
3. Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif.

Gambar 2.6 menunjukkan fungsi injektif, surjektif dan bijektif.



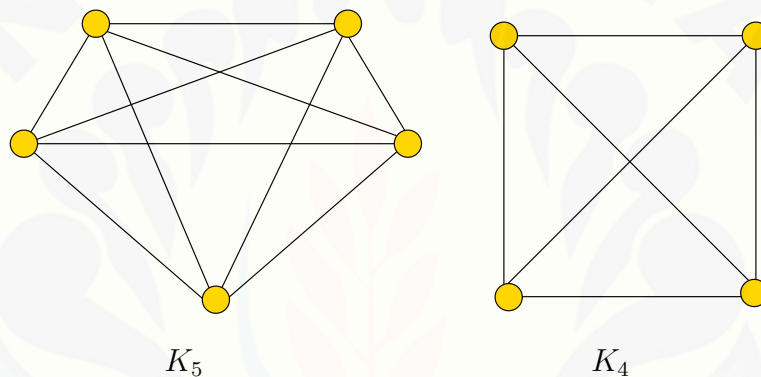
Gambar 2.6 (a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif

2.5 Graf Khusus dan Operasi Graf

Graf khusus adalah sebuah graf yang memiliki karakteristik dan keunikan. Keunikan yang dimiliki yaitu tidak isomorfis dengan graf yang lainnya. Karakteristik bentuknya memperluas order n tetapi simetris. Berikut ini terdapat beberapa contoh dari graf khusus.

1. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Graf sederhana yang setiap titiknya terhubung ke titik lainnya oleh satu sisi disebut graf lengkap. Dengan kata lain, setiap titiknya bertetangga sehingga masing-masing memiliki derajat $n-1$. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n dengan jumlah sisi yang terdiri dari n buah titik yaitu $n(n-1)/2$ sisi. Contoh graf lengkap pada Gambar 2.7 merupakan graf K_4 dan K_5 .



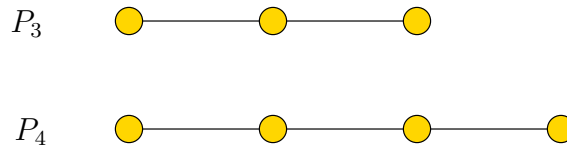
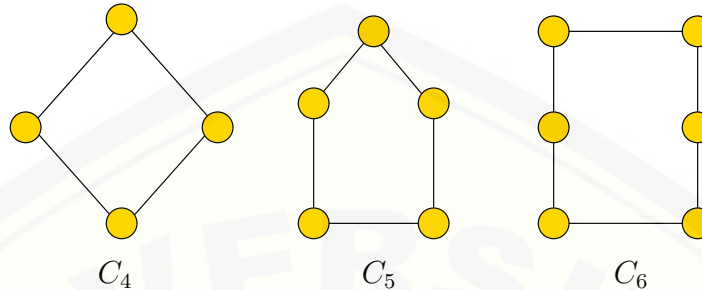
Gambar 2.7 Graf Lengkap K_4 dan K_5

2. Graf Lintasan (*Path*)

Graf lintasan adalah graf sederhana dengan n titik dan dinotasikan sebagai P_n dengan $n \geq 2$. Contoh graf lintasan pada Gambar 2.8 merupakan graf P_3 dan P_4 .

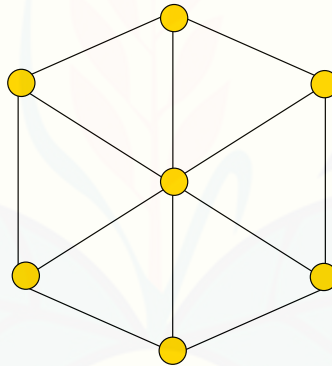
3. Graf Lingkaran (*Cycle*)

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang terdiri dari n titik yang setiap titiknya berderajat 2. Graf lingkaran dinotasikan dengan C_n . Gambar 2.9 merupakan ilustrasi dari graf lingkaran.

Gambar 2.8 Graf Lintasan P_3 dan P_4 Gambar 2.9 Graf Lingkaran C_4 , C_5 , dan C_6

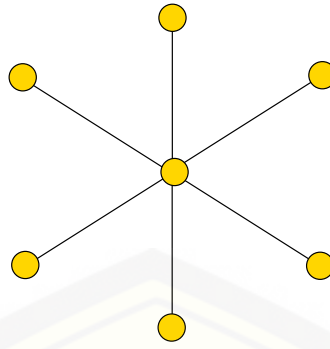
4. Graf Roda (*Wheel Graph*)

Graf roda dinotasikan W_n dengan $n \geq 3$ adalah graf yang dibentuk dari graf siklus C_n dan satu titik yang dinotasikan dengan A yang bertetangga dengan semua titik di siklus C_n . Gambar 2.10 merupakan contoh dari graf W_6 .

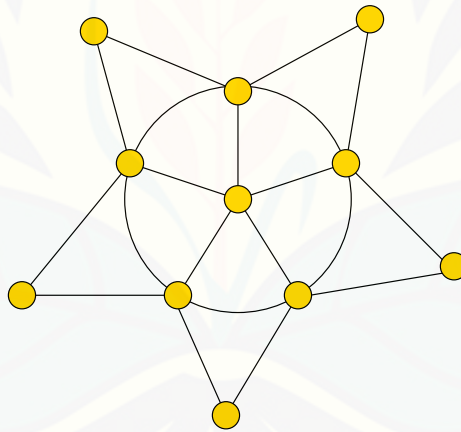
Gambar 2.10 Graf Roda W_6

5. Graf Bintang (*Star Graph*)

Graf bintang dinotasikan S_n dengan $n \geq 3$ adalah graf yang terdiri dari satu titik pusat yang mempunyai derajat n dan $n + 1$ titik dan n sisi. Gambar 2.11 menunjukkan contoh dari graf S_6 .

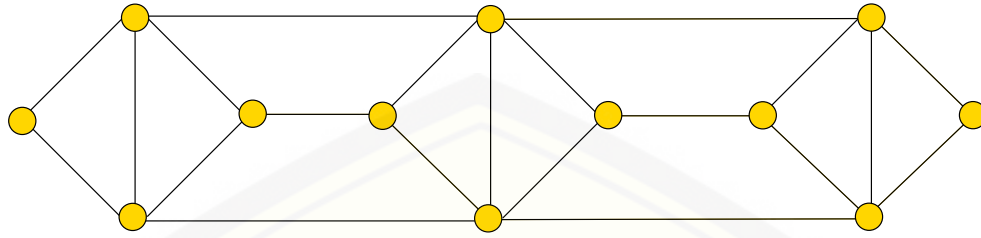
Gambar 2.11 Graf Bintang S_6 6. Graf Bunga Matahari (*Sun Flower Graph*)

Graf Bunga Matahari adalah graf yang diperoleh dari sebuah graf roda W_n , yang titik-titiknya adalah titik pusat $c, v_0, v_1, v_2, v_{(n-1)}$, dan penambahan n buah titik $w_0, w_1, w_2, w_{(n-1)}$, dengan w_i dihubungkan oleh sebuah sisi ke $v_i, v_{(i+1)}$ untuk setiap $i = 0, 1, 2, n - 1$ dengan $i + 1$ dalam modulo n . Graf bunga matahari dinotasikan dengan SF_n mempunyai order $2n+1$ dan $4n$ sisi (Inayah, 2013). Gambar 2.12 merupakan sebuah ilustrasi dari graf bunga matahari SF_5 .

Gambar 2.12 Graf Bunga Matahari SF_5 7. Graf Tangga Permata (*Diamond Ladder Graph*)

Graf tangga permata merupakan salah satu family dari graf tangga. Graf tangga permata dinotasikan dengan Dl_n dimana $V(Dl_n) = x_i, y_i, z_i; 1 \leq i$

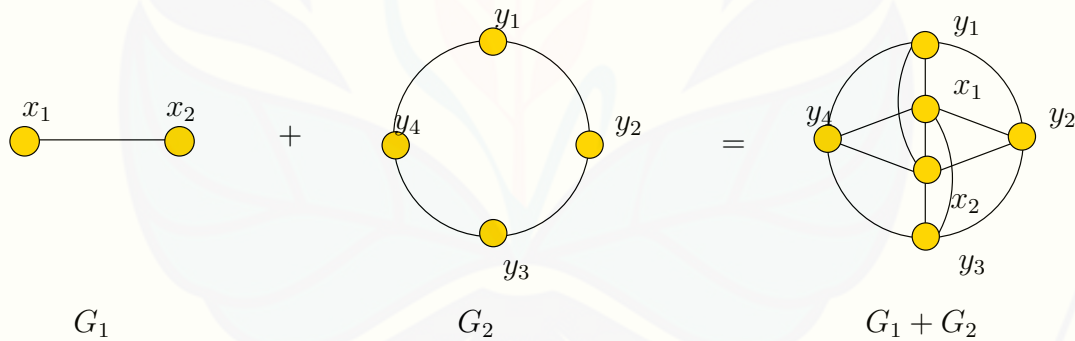
$\leq n, 1 \leq j \leq 2n$ dan $E(Dl_n) = x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1 \cup x_i y_i; 1 \leq i \leq n \cup z_j z_{j+1}; 2 \leq j \leq 2n - 2genap \cup x_i z_{2i-1}, y_i z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n$. Contoh dari graf tangga permata dapat dilihat pada Gambar 2.13.



Gambar 2.13 Graf Tangga Permata Dl_3

Operasi graf adalah banyaknya cara untuk mendapatkan graf baru dengan melakukan suatu operasi terhadap dua graf. Berikut diberikan macam-macam operasi graf beserta contohnya.

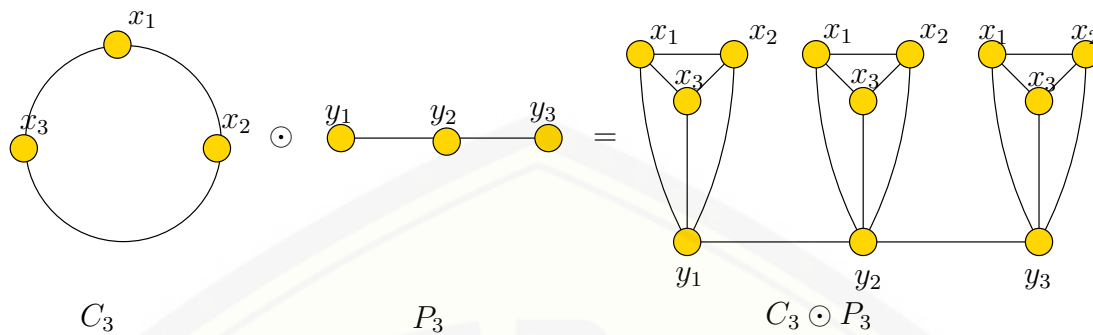
Definisi 2.5.1. *Graph Joint* $(G_1 + G_2)$ merupakan operasi joint yang dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$ adalah graf G dimana $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{xy | x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$. Contoh operasi *joint* dapat dilihat pada Gambar 2.14.



Gambar 2.14 Contoh operasi *Joint*

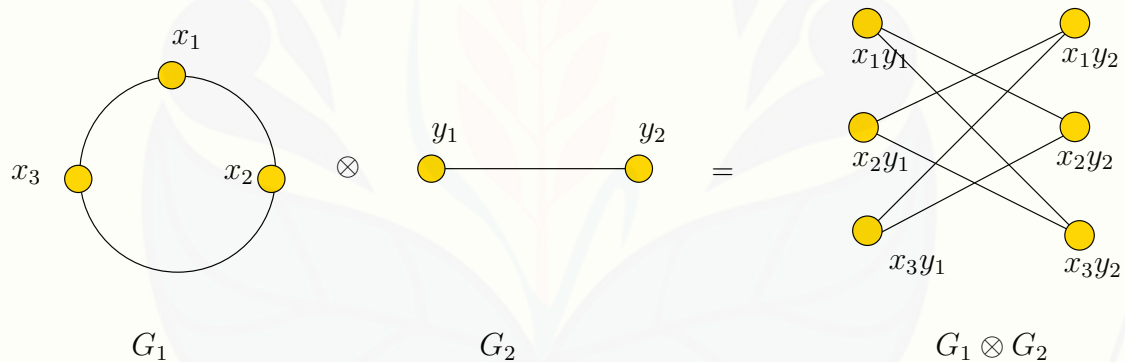
Definisi 2.5.2. *Crown Product* $(G \odot H)$ adalah corona $G \odot H$ dari dua graf G dan H adalah graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G dan $V(G)$ duplikat $H_1, H_2, \dots, H_{(|V(G)|)}$ dari H . Selanjutnya menghubungkan

titik ke- i dari G ke setiap titik di $H_i, i = 1, 2, 3, \dots, V(G)$. Contoh operasi *Crown Product* untuk $C_3 \odot P_3$ dapat dilihat pada Gambar 2.15.



Gambar 2.15 Contoh operasi *Crown Product*

Definisi 2.5.3. *Tensor Product* $(G_1 \otimes G_2)$ dari dua graf G_1 dan G_2 adalah penggabungan dari dua graf G_1 dan G_2 dan dinotasikan oleh $G_1 \otimes G_2$. *Tensor Product* mempunyai himpunan titik $V(G_1 \otimes G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1 \otimes G_2) = \{(x_1, y_2)(x_2, y_2) | x_1x_2 \in E(G_1) \text{ dan } y_1y_2 \in E(G_2)\}$ (Endrayana, 2013). Dapat dilihat pada Gambar 2.16.

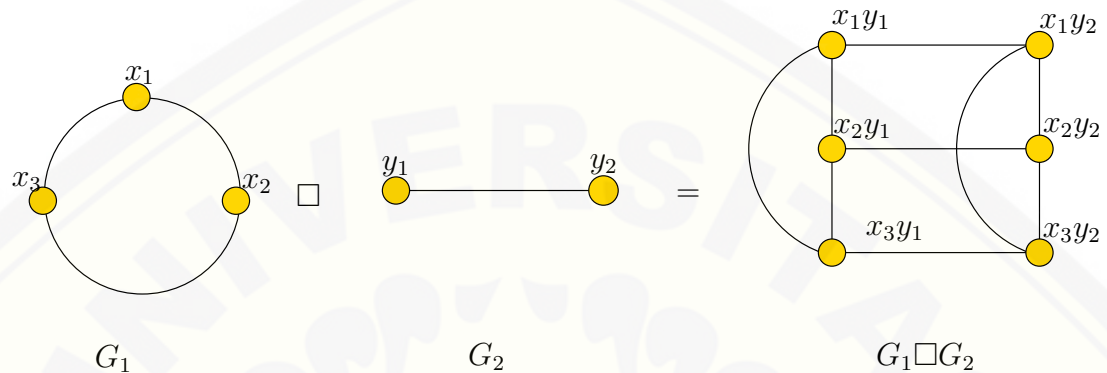


Gambar 2.16 Contoh operasi *Tensor Product*

Telah dilakukan penelitian sebelumnya mengenai *Tensor Product* oleh Hedetniemi pada tahun 1996 yang menghasilkan sebuah teorema sebagai berikut:

Teorema 2.5.1. *Misal G_1 dan G_2 adalah dua buah graf sederhana, Tensor Product dari G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 \otimes G_2$, maka bilangan kromatik $\chi(G) = \min\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$.*

Definisi 2.5.4. *Cartesian Product* ($G_1 \square G_2$) adalah operasi perkalian pada dua graf. Misalkan graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ adalah graf $G = (V, E)$, ditulis $G = G_1 \times G_2$, sehingga $V = V_1 \times V_2$, dan dua titik (x_1, x_2) dan (y_1, y_2) di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku $x_1 = y_1$ dan $(x_2, y_2) \in E_2$ atau $x_2 = y_2$ dan $(x_1, y_1) \in E_1$. Contoh dapat dilihat pada Gambar 2.17.



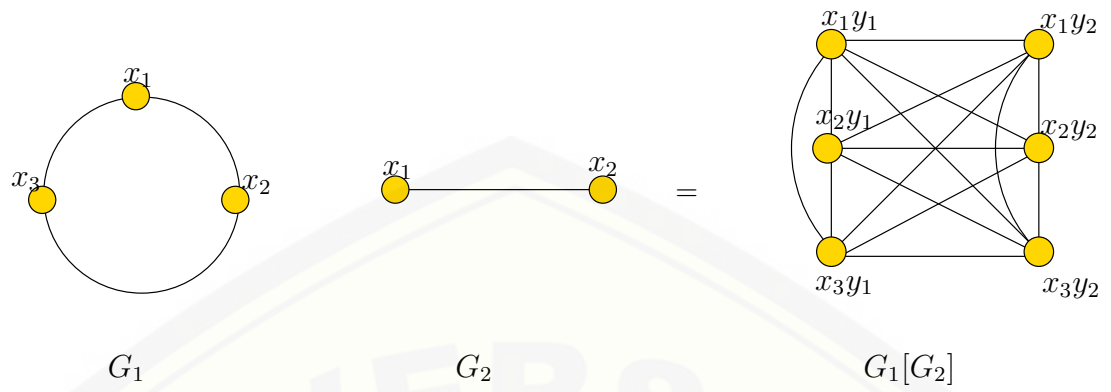
Gambar 2.17 Contoh operasi *Cartesian Product*

Telah dilakukan penelitian sebelumnya mengenai *Cartesian Product* oleh Sabidussi pada tahun 1954 yang mengasilkan sebuah teorema sebagai berikut:

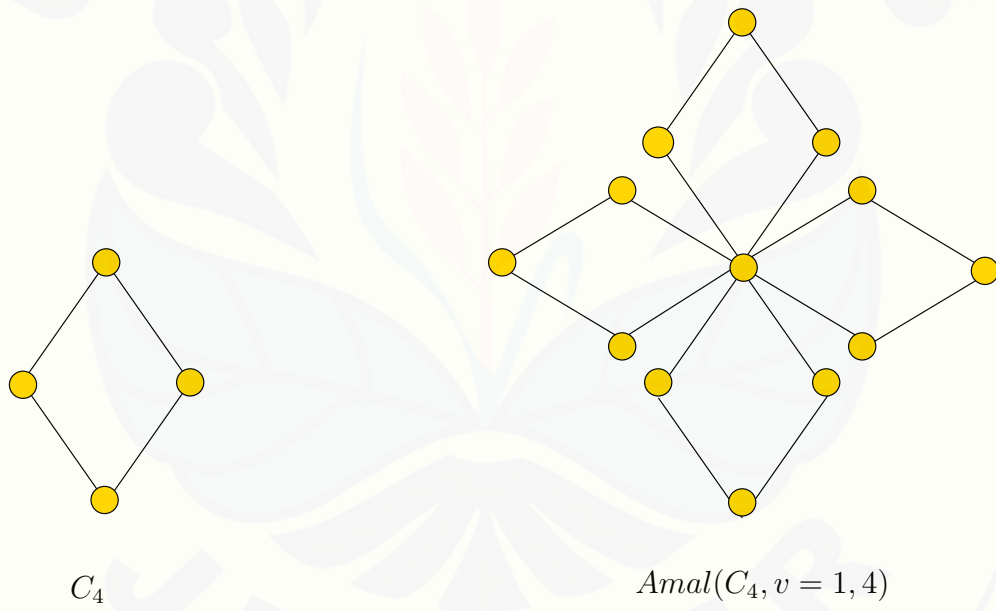
Teorema 2.5.2. *Misal G_1 dan G_2 adalah dua buah graf sederhana, Cartesian Product dari G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 \square G_2$, maka bilangan kromatik $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$.*

Definisi 2.5.5. *Composition $G[F]$ adalah graf dengan titik $V_1 \times V_2$ dan $x = (x_1 \cdot x_2)$ yang adjacent dengan $y = (y_1, y_2)$ ketika $[x_1 \text{ adj } x_2]$ atau $[x_1 = y_1 \text{ dan } x_2 \text{ adj } y_2]$ (Harrary, 2007). Gambar 2.18 merupakan contoh dari operasi composition.*

Definisi 2.5.6. *Amalgamation dinotasikan dengan $Amal(H_i, v_{0i})$. Misalkan H_i suatu keluarga graf berhingga dan setiap H_1 mempunyai suatu titik v_{0i} yang merupakan titik terminal (Ardiansyah, 2013). Gambar 2.19 merupakan contoh dari operasi Amalgamation.*

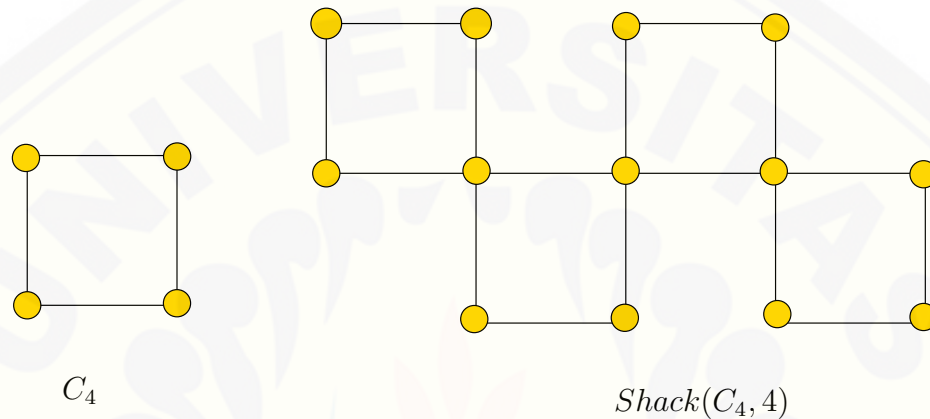


Gambar 2.18 Contoh operasi *Composition*



Gambar 2.19 Contoh operasi *Amalgamation*

Definisi 2.5.7. Graph Shackle merupakan sebuah graf dengan notasi $Shack(G_1, G_2, \dots, G_k)$ yang terbentuk dari k graf terhubung tak trivial G_1, G_2, \dots, G_k sehingga untuk setiap $s, t \in [1, k-1]$ dengan $|s-t| \geq 2$ berlaku G_s dan G_t tidak mempunyai titik yang sama, dan untuk setiap $i \in [1, k-1]$, G_i dan G_{i+1} mempunyai tepat satu titik yang sama disebut titik penghubung, dan $k-1$ titik penghubung itu semua berbeda. Dalam kasus ini ketika untuk setiap $i \in [1, k]$ isomorfik dengan graf H , $Shack(G_1, G_2, \dots, G_k)$ dinamakan Shackle dari H , dinotasikan $Shack(H, k)$. Gambar 2.20 menunjukkan operasi Shackle.



Gambar 2.20 Contoh operasi Shackle

2.6 Aplikasi

Berbagai macam permasalahan sulit dipecahkan menggunakan perhitungan dan pertimbangan biasa. Graf dapat membantu memodelkan masalah kemudian dideskripsikan dan digambarkan secara jelas. Penyelesaian dalam graf dapat dilakukan dengan mengubah objek diskrit menjadi titik-titik yang kemudian dihubungkan dengan sisi untuk menggambarkan permasalahan.

Salah satu contoh aplikasi graf adalah frekuensi gelombang radio. Radio merupakan salah satu media penyebaran informasi saat ini yang dirasa semakin berkembang. Masing-masing daerah mendapat alokasi frekuensi radio agar bisa menikmati berbagai pilihan saluran yang diinginkan. Gelombang transmisi radio seringkali terjadi gangguan yang mengakibatkan suara menjadi tidak jelas

sehingga pengguna media radio merasa tidak nyaman. Gangguan gelombang atau yang sering disebut interferensi adalah peristiwa yang terjadi akibat dua gelombang atau lebih yang saling berpadu sehingga menghasilkan pola interferensi maksimum dan minimum. Penggunaan telepon seluler, gelombang wifi, dan berbagai aplikasi lainnya yang semakin bertambah tentunya juga menambah permasalahan yang perlu diatasi untuk menjaga stabilitas komunikasi. Banyaknya pengguna yang memanfaatkan frekuensi gelombang radio ini diperlukan adanya regulasi atau pengaturan sehingga tidak terjadi interferensi antara radio satu dengan yang lain. Agar tidak terjadi interferensi, maka dalam pengaturan kanal perlu mempertimbangkan salah satu aspek yaitu kuat medan listrik. Permasalahan yang akan dikaji dalam pengaplikasian ini adalah bagaimana mengoptimalkan kanal radio. Permasalahan ini dapat diselesaikan dengan konsep pewarnaan graf *heuristik* yang merupakan sub kajian dari teori graf menggunakan pendekatan *upper bound greedy algorithm* untuk mengoptimalkan layanan publik dengan mempertimbangkan kuat medan listrik.

Dalam permasalahan ini, titik-titik sebagai lokasi stasiun radio, sedangkan garis sebagai dua sebarang stasiun radio yang saling interferensi. Adapun langkah-langkah aplikasi *vertex colouring* pada frekuensi gelombang radio:

- a. Menganalisis interferensi gelombang transmisi dengan mengkalkulasi jarak antara sebarang dua titik koordinat pada stasiun radio dan kuat medan listrik antara sebarang dua titik
- b. Mentransformasi stasiun radio beserta garisnya ke bentuk graf. Dua sebarang stasiun radio dikatakan saling interferensi jika kuat medan listrik $E > 3,5N/C$
- c. Memberi warna setiap simpul menggunakan algoritma Welch-Powell. Selain untuk mengetahui stasiun radio yang diperbolehkan dalam satu kanal, dihasilkan juga jumlah bilangan kromatik yang akan digunakan dalam tahap selanjutnya
- d. Menentukan alternatif penyelesaian manajemen radio gelombang frekuensi dalam graf berwarna.

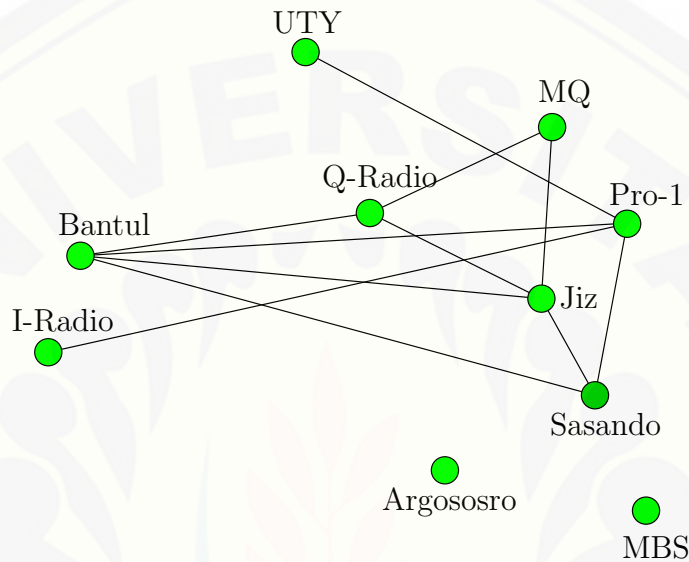
Kasus yang diangkat adalah permasalahan yang ditemukan di Daerah Istimewa Yogyakarta. Data sampel yang diambil sebanyak 10 stasiun radio secara acak yang diperoleh dari LPJ Balai Monitor Spektrum Frekuensi Radio Kelas II DIY 2011. Berikut merupakan data kuat medan listrik dari dua sebarang radio yang dihasilkan dari perhitungan jarak disajikan dalam tabel 2.1.

Tabel 2.1: Kuat Medan Listrik Dua Sebarang Radio

	Q-radio	I-Radio	Bantul	Jiz	Sasando
I-Radio	1.37307	0	1.50564	1.07131	1.33064
Bantul	3.64569	1.50564	0	3.53691	10.2929
Jiz	4.18859	1.07131	3.53691	0	4.15954
Sasando	3.18973	1.33061	10.2929	4.15954	0
UTY	2.87879	1.33376	2.33103	2.60136	2.31994
Pro-1	12.1303	4.01734	17.0809	19.6798	17.1145
MQ	5.53996	1.17895	2.74398	3.67163	2.73069
MBS	2.2541	1.53901	3.05472	2.50788	3.08484
Argososro	1.64365	0.80987	3.20958	1.98172	3.3425

	UTY	Pro-1	MQ	MBS	Argososro
Q-Radio		12.1303	5.53996	2.2541	1.643649
I-Radio	1.33376	4.01734	1.17895	1.53901	0.8098663
Bantul	2.33103	17.0809	2.74398	3.05472	3.2095762
Jiz	2.60136	19.6783	3.67163	2.50788	1.9817188
Sasando	2.31994	17.1145	2.73069	3.08484	3.3425725
UTY	0	6.25683	2.52335	1.65564	1.0631154
Pro-1	6.25683	0	3.16224	2.71407	2.3340486
MQ	2.52335	3.16224	0	2.10465	1.4760907
MBS	1.65564	2.71407	2.10465	0	2.0744681
Argososro	1.06312	2.33405	1.47609	2.07447	0

Data pada Tabel 2.1 memperlihatkan bahwa kuat medan listrik antara satu radio dengan radio yang lainnya dan dikatakan saling interferensi jika nilainya $> 3,5N/C$ (J.H Kraus 1994). Untuk kuat medan listrik yang nilainya $< 3,5N/C$ dikatakan tidak saling interferensi sehingga tidak ada garis yang menghubungkan antara dua pasang stasiun radio. Representatif graf dari data pada Tabel 2.1 dapat dilihat pada Gambar 2.21.

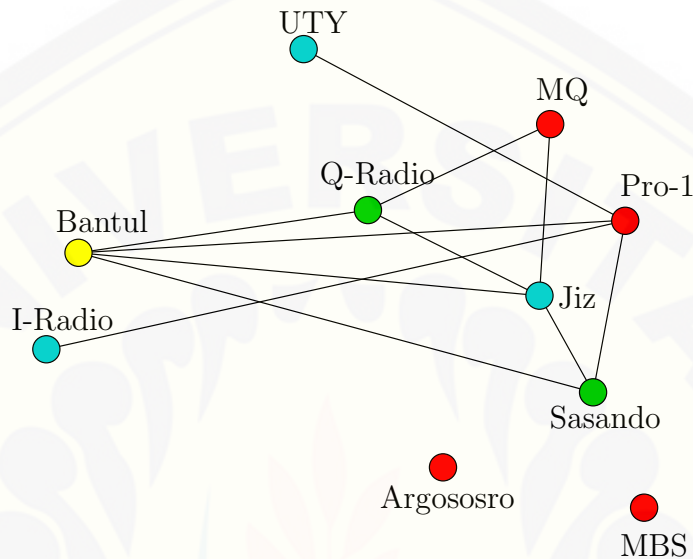


Gambar 2.21 Representasi Graf Berbasis Interferensi Gelombang

Selanjutnya menerapkan langkah-langkah penggunaan algoritma Welch-Powell:

1. Mengurutkan titik-titik dari graf G dari derajat terbesar, dalam hal ini berturut-turut Pro-1, jiz, Bantul, Q-Radio, Sasando, MQ, I-Radio, UTY, Argososro, dan MBS.
2. Menentukan satu warna misalnya warna merah untuk memberi warna titik dengan derajat terbesar yaitu Pro-1 dan titik lain yang tidak bertetangga dengan Pro-1 yaitu MBS, MQ, dan Argososro diberi warna yang lain misalkan warna biru.

3. Derajat titik terbesar selanjutnya yaitu Jiz dan titik-titik yang lainnya yang tidak bertetangga dengan Jiz yaitu UTY dan I-Radio, kemudian diberi warna sama dengan langkah sebelumnya.
4. Ulangi langkah yang sudah disebutkan sehingga memperoleh pewarnaan hijau dan kuning yang berarti semua titik telah terwarnai. Hasil graf yang telah diberi warna dapat dilihat pada Gambar 2.22.



Gambar 2.22 Representasi Graf Berbasis Algoritma Welch-Powell

Stasiun radio dapat dibagi kedalam klaster yang jumlahnya sama dengan minimum pewarnaan. Solusi permasalahan manajemen *radio frequency unit* yang berkaitan dengan optimalisasi jumlah klaster ini dapat diselesaikan dengan mudah menggunakan *upper bound* bilangan kromatik (Mussafi, 2013).

2.7 Hasil-hasil Pewarnaan Titik

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil pewarnaan titik dan *r-Dynamic Vertex Coloring* yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Rangkuman yang tersedia pada bagian ini merupakan hasil penelitian pewarnaan titik terdahulu. Bisa dilihat pada Tabel 2.3.

Tabel 2.3: Hasil pewarnaan titik dan r -Dynamic Coloring penelitian terdahulu

Graf	$\chi(G)$	Keterangan
$P_2 \otimes C_n$, n ganjil	6	Harsya et al. (2014)
$P_2 \otimes C_n$, n genap	4	Harsya et al. (2014)
$P_3 \odot C_n$, n ganjil	6	Harsya et al. (2014)
Graf Cycle(C_6)	2	Sesa (2014)
Graf Kipas(F_n), $n \geq 4$	3	Irwanto and Dafik (2014)
Graf Roda(W_n), $n \geq 5$	4	Irwanto and Dafik (2014)
Graf Helm(H_n), $n \geq 4$	3	Irwanto and Dafik (2014)
Graf Anti Prisma(H_m), $n \geq 4$	4	Irwanto and Dafik (2014)
Graf Prisma(H_m), $n \geq 5$	4	Irwanto and Dafik (2014)
$C_n \odot C_m$	4	Puspasari and Dafik (2014)
$C_n \otimes C_m$	3	Puspasari and Dafik (2014)
$S_n \otimes C_m$	3	Dewi and Dafik (2014)
graf Particular	2	Lai and Montgomery (2002)
graf Regular	$\chi_2 - \chi(G) \leq 2$	Alisashi (2012)

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan kedalam penelitian eksploratif dan penelitian terapan (*applied research*).

1. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan untuk menemukan hal baru yang ingin diketahui oleh peneliti, kemudian hasilnya dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.
2. Penelitian terapan (*applied research*) merupakan jenis penelitian dengan penyelidikan yang hati-hati, sistematis dan terus-menerus terhadap suatu masalah yang bertujuan untuk digunakan dengan segera untuk keperluan tertentu.

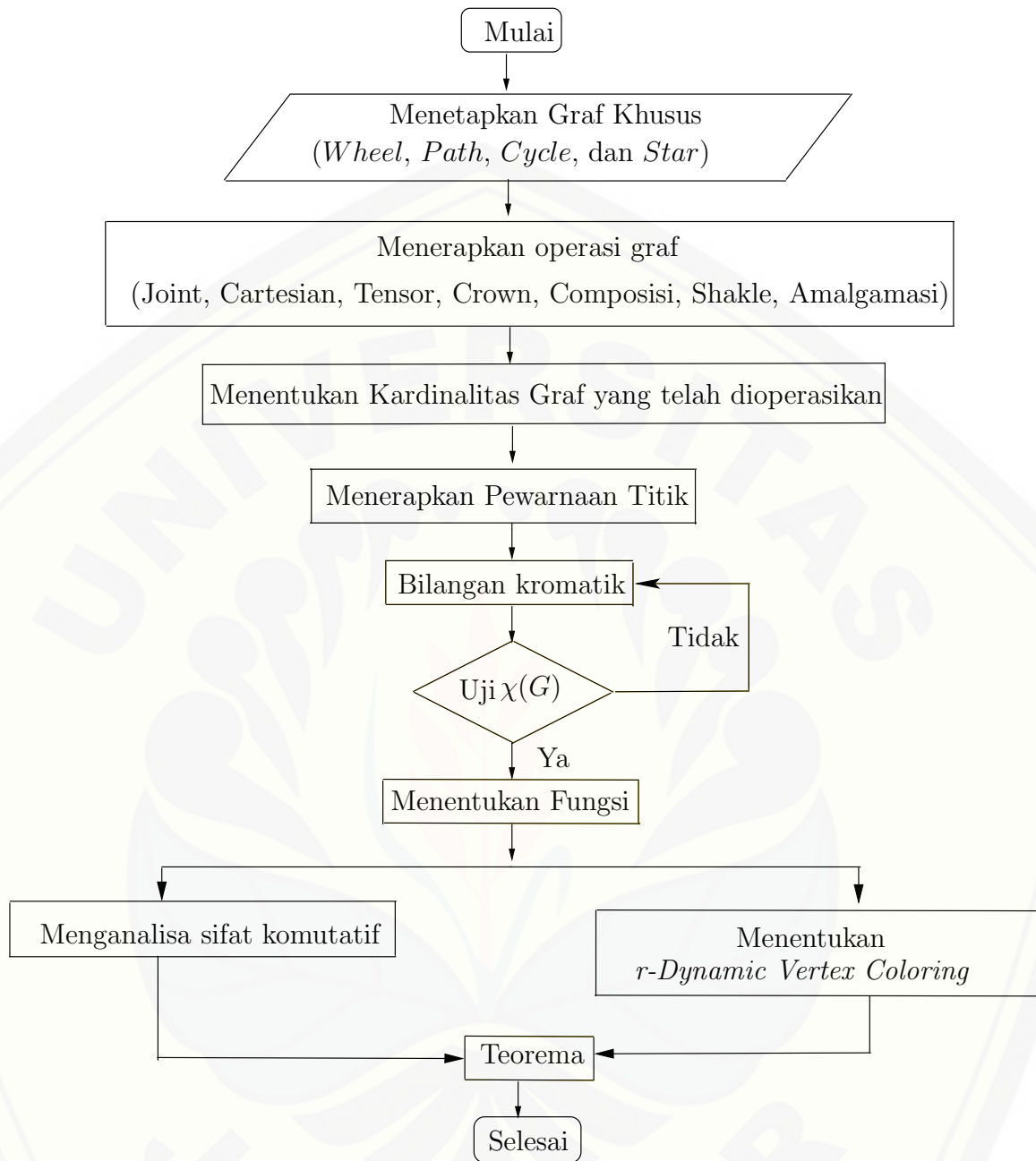
3.2 Graf Kajian Pewarnaan Titik

Graf pada penelitian ini berasal dari graf sekunder yang didapatkan dari penelitian terdahulu. Data yang digunakan berupa pengoperasian pada graf-graf khusus. Graf khusus yang digunakan adalah graf roda (*wheel*), graf bintang (*star*), graf lingkaran (*cycle*), dan lintasan (*path*). Aplikasi pewarnaan titik menggunakan skema aplikasi pada manajemen gelombang radio. Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dalam menyelesaikan permasalahan. Metode deduktif menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah.

3.3 Rancangan Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada pengoperasian graf, yaitu pada graf roda (*wheel*), graf bintang (*star*), graf lingkaran (*cycle*), dan graf lintasan (*path*). Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

1. menentukan graf-graf khusus sebagai objek penelitian;
2. menerapkan operasi graf pada graf-graf khusus yang telah ditentukan;
3. menentukan kardinalitas graf-graf khusus yang telah dioperasikan;
4. menerapkan pewarnaan titik pada graf-graf khusus yang telah dioperasikan;
5. memeriksa keoptimalan bilangan kromatik, apabila sudah optimal dilanjutkan dengan menentukan fungsi, apabila belum optimal akan kembali ke tahap sebelumnya yaitu menerapkan pewarnaan titik pada graf;
6. menentukan fungsi berdasarkan keteraturan dari bilangan kromatik;
7. menganalisa sifat komutatif dari setiap operasi graf;
8. menentukan *r-Dynamic Vertex Coloring* dari pewarnaan setiap titik;
9. sifat komutatif yang sudah dianalisa dan *r-Dynamic Vertex Coloring* yang telah didapatkan kemudian dibuktikan sehingga menjadi sebuah teorema.



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini merupakan penjelasan hasil penelitian mengenai pewarnaan titik pada operasi graf beserta *r-dynamic vertex colouring*. Selain itu, peneliti juga menganalisa sifat komutatif yang dimiliki setiap operasi graf. Penelitian ini menghasilkan teorema dan akibat dari teorema sebelumnya mengenai bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan titik beserta sifat komutatif. Penelitian ini diawali dengan menentukan graf khusus yang akan dioperasikan. Kemudian menentukan batas atas dari bilangan kromatik yang diterapkan pada pewarnaan titik. Apabila bilangan kromatik telah optimum kemudian menentukan fungsi dari pewarnaan titik sekaligus menentukan *r-dynamic vertex coloring*. Graf khusus yang telah dioperasikan kemudian dianalisa sifat komutatifnya sehingga dapat diketahui operasi graf yang memiliki sifat komutatif.

Hasil utama dari penelitian yang akan dibahas terkait dengan pewarnaan titik, *r-dynamic vertex colouring*, dan analisa sifat komutatif berupa teorema baru dan akibat dari teorema sebelumnya yang disimbolkan dengan \diamond . Terdapat 15 teorema baru dan 4 akibat dari teorema sebelumnya mengenai pewarnaan titik pada operasi graf roda, graf lintasan, graf lingkaran dan graf bintang yang ditemukan secara eksperimental dalam penelitian ini. Format penyajian temuan penelitian diawali dengan pernyataan teorema batas atas pewarnaan titik beserta pewarnaan dinamis kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema.

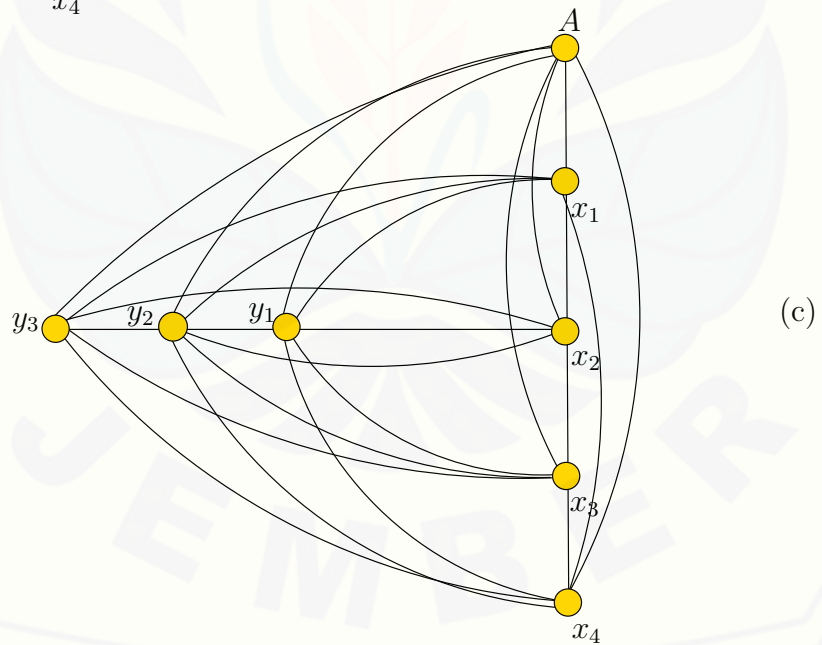
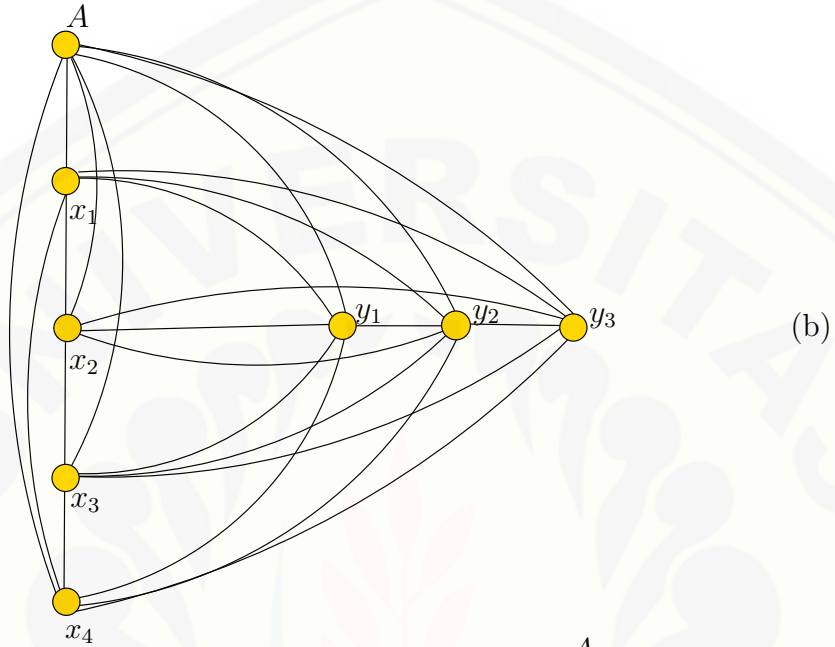
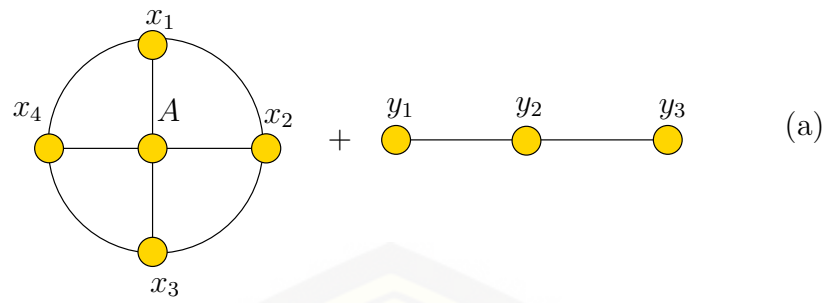
4.1 Bilangan Kromatik, *r-Dynamic Vertex Coloring*, dan Fungsi Pewarnaan Titik

Dari hasil penelitian ini didapatkan 15 teorema dan 4 akibat dari teorema sebelumnya terkait pewarnaan titik, *r-dynamic coloring*, dan sifat komutatif pada operasi graf roda, graf lintasan, graf lingkaran dan graf bintang. Teorema-teorema baru itu diantaranya *Joint* $[(W_n + P_m)$ dan $(W_n + C_m)]$, *Composition*

$[(W_n[P_m])$ dan $(W_n[C_m])]$, *Crown Product* $[(W_n \odot P_m) [(P_m \odot W_n)$ dan $(W_n \odot C_m)]$, *Cartesian Product* $[(W_n \square P_m)$ dan $(W_n \square C_m)]$, *Tensor Product* $[(W_n \otimes P_m)$ dan $(W_n \otimes C_m)]$, *Shackel* $[Shack(S_n + P_m, r)$ dan $Shack(W_n + C(m), r)]$, dan *Amalgamation* $[Amal(W_n + P_m, v = 1, r)$ dan $Amal(S_n + P_m, v = 1, r)]$ sedangkan 4 akibat dari teorema sebelumnya diantaranya *Cartesian Product* $[(W_n \square P_m)$ dan $(W_n \square C_m)]$, *Tensor Product* $[(W_n \otimes P_m)$ dan $(W_n \otimes C_m)]$ yang akan ditentukan bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan titiknya. Langkah-langkah yang digunakan untuk membuktikan teorema pada hasil penelitian ini, yaitu menggunakan observasi terlebih dahulu. Observasi bertujuan untuk mendefinisikan himpunan titik, himpunan sisi beserta sifat komutatif dari graf hasil operasi. Berikut hasil observasi, teorema, dan akibat beserta pembuktiannya.

Observasi 4.1.1. Misal diketahui graf roda W_n dengan $V(W_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan graf lintasan dengan $V(P_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$. Graf G adalah *joint* dari graf roda dan graf lintasan yang dinotasikan $G = (W_n + P_m) = (P_m + W_n)$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{A, x_i, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1 x_n\} \cup \{A y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_n y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$, sehingga $|V| = p = n + m + 1$ dan $|E| = q = nm + 2n + 2m - 1$.

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.5.1 dituliskan bahwa, *joint graph* $(G_1 + G_2)$ memiliki $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{xy | x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$. Dimulai dengan menggambar masing-masing graf, yaitu graf roda kemudian graf lintasan yang diletakkan tepat disampingnya. Masing-masing titik pada graf roda tepat dihubungkan disetiap titik pada graf lintasan. Setelah mengoperasikan graf roda dan graf lintasan menggunakan operasi *joint*, maka diperoleh $V = \{A, x_i, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1 x_n\} \cup \{A y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_n y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$.



Gambar 4.1 (a) W_4 dan P_3 (b) $(W_4 + P_3)$ (c) $(P_3 + W_4)$

Dari Observasi 4.1.1 dapat diilustrasikan seperti Gambar 4.1. Untuk Gambar 4.1 (a) merupakan graf roda dan graf lintasan, kemudian (b) merupakan graf hasil operasi *joint* dari kedua graf tersebut dan (c) merupakan graf hasil operasi *joint* setelah graf dasarnya dibalik yang bertujuan untuk menganalisa sifat komutatifnya. Setelah observasi pada graf hasil operasi *joint* dari graf roda dan graf lintasan, ditentukan bilangan kromatik, pewarnaan titik dinamis dan fungsi pewarnaan titik pada graf hasil operasi *joint* yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1.1. *Misal $G = (W_n + P_m) = (P_m + W_n)$. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis G adalah*

$$\chi(G = (W_n + P_m)) = \chi_4(G = (W_n + P_m)) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 6, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

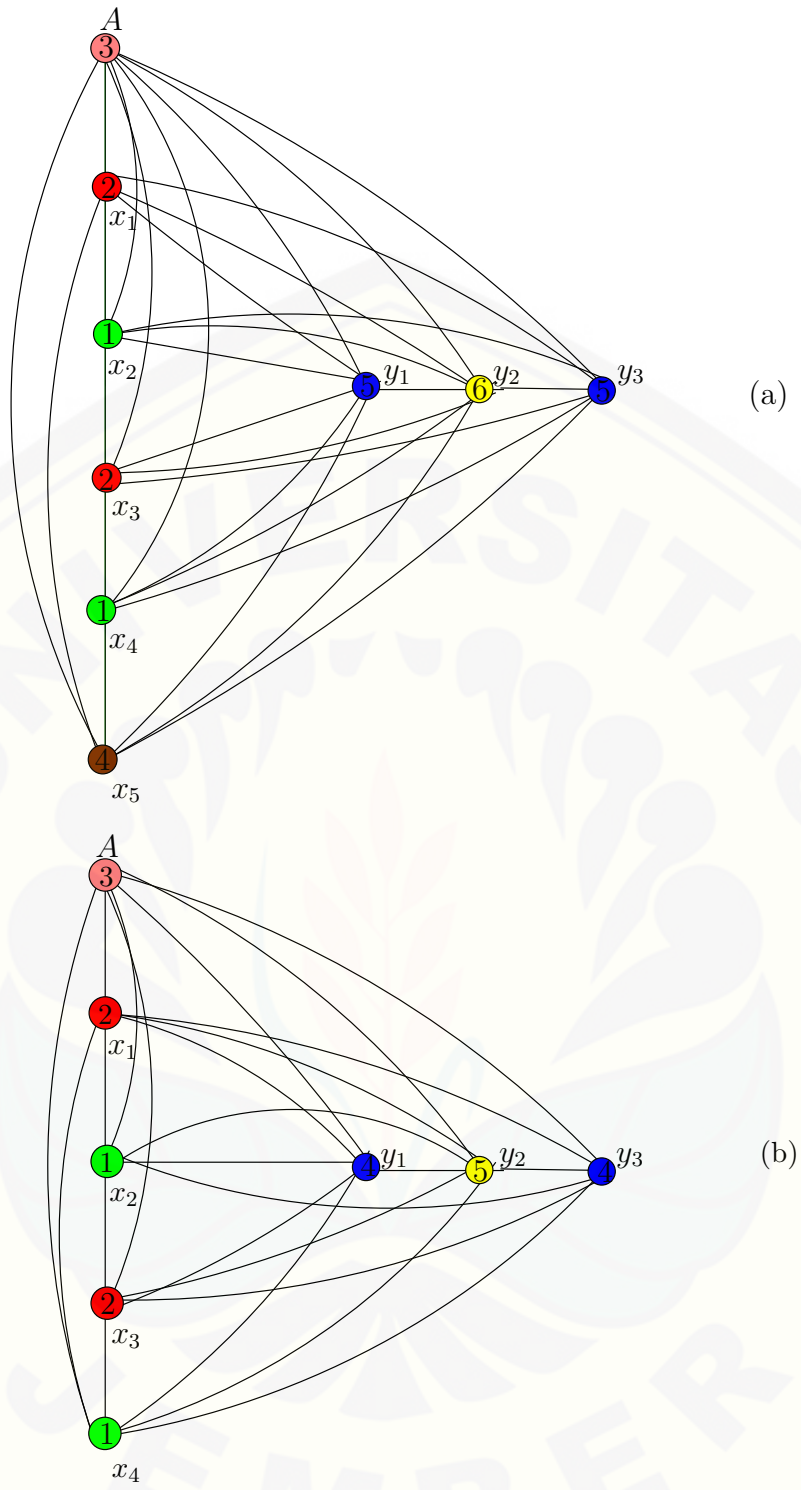
Bukti. Berdasarkan teorema 2.2.1 dinyatakan bahwa $(\chi - 1)p \leq 2q$. Sesuai dengan observasi 4.1.1, maka $|V| = p = n + m + 1$ dan $|E| = q = nm + 2n + 2m - 1$ maka batas atas dari bilangan kromatik adalah $\chi(W_n + P_m) \leq (\frac{2nm+5n+5m-1}{n+m+1})$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $G = (W_n + P_m) = (P_m + W_n)$ adalah $f(A) = 3$ untuk n genap

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$f(y_j) = \begin{cases} 4, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 5, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

untuk n ganjil

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n - 1, i \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq i \leq n - 1, i \text{ genap} \\ 4, & i = n \end{cases}$$



Gambar 4.2 (a) Pewarnaan titik ($W_5 + P_3$) dan (b) Pewarnaan titik ($W_4 + P_3$)

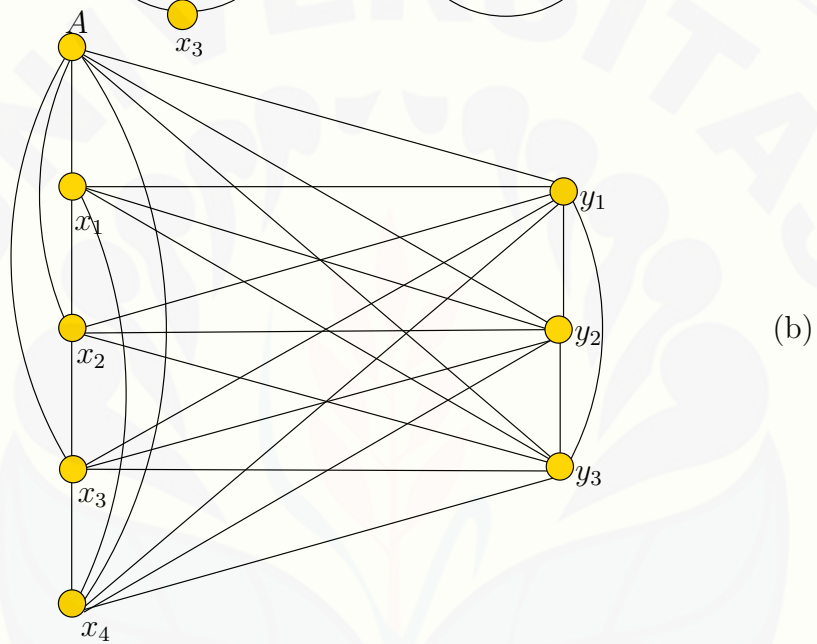
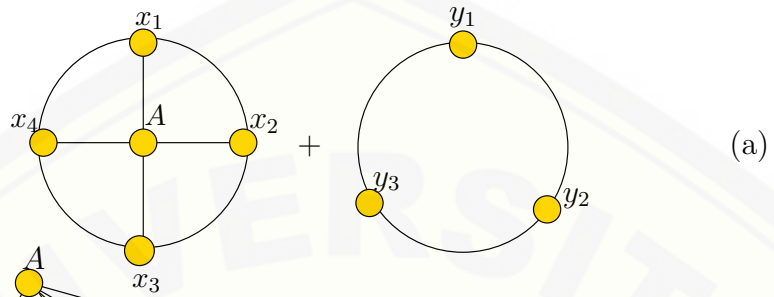
$$f(y_j) = \begin{cases} 5, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 6, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $G = (W_n + P_m) = (P_m + W_n)$ mempunyai bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $\chi(G = (W_n + P_m) = (P_m + W_n)) = \chi_4(G = (W_n + P_m) = (P_m + W_n)) = 5$ ketika n genap, dan 6 ketika n ganjil. Pada operasi *joint* ini berlaku sifat komutatif yang diperoleh dari kesamaan graf hasil operasi, kardinalitas, dan bilangan kromatik. \square

Observasi 4.1.2. Misal diketahui graf roda W_n dengan $V(W_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\}$ dan graf lingkaran dengan $V(C_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(C_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_m y_1\}$. Graf G adalah *joint* dari graf roda dan graf lingkaran yang dinotasikan $G = (W_n + C_m)$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{A, x_i, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{Ay_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_n y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_1 y_m\}$, sehingga $|V| = p = n + m + 1$ dan $|E| = q = nm + 2n + 2m - 1$.

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.5.1 dituliskan bahwa, *joint graph* $(G_1 + G_2)$ memiliki $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{xy | x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$. Diawali dengan menggambar masing-masing graf dasar, yaitu graf roda kemudian meletakkan graf lingkaran tepat disampingnya. Semua titik pada graf roda dihubungkan tepat disetiap titik pada graf lingkaran. Setelah mengoperasikan graf roda dan graf lingkaran menggunakan operasi *joint*, maka diperoleh $V = \{A, x_i, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{Ay_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_n y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_1 y_m\}$.

Dari Observasi 4.1.2 dapat diilustrasikan seperti Gambar 4.3. Untuk Gambar 4.3 (a) merupakan graf roda dan graf lingkaran, kemudian (b) merupakan graf hasil operasi *joint* dari kedua graf tersebut dan untuk analisa sifat komutatifnya sama dengan graf hasil operasi *joint* pada graf roda dan graf lintasan. Setelah ob-



Gambar 4.3 (a) W_4 dan C_3 (b) $(W_4 + C_3)$

servasi pada graf hasil operasi *joint* dari graf roda dan graf lingkaran, ditentukan bilangan kromatik, pewarnaan titik dinamis dan fungsi pewarnaan titik pada graf hasil operasi *joint* yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1.2. *Misal G adalah joint dari graf roda dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik dan pewarnaan dinamis G adalah*

$$\chi(W_n + C_m) = \chi_4(W_n + C_m) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } n \text{ genap pada saat } m \text{ genap} \\ 6, & \text{untuk } n \text{ ganjil pada saat } m \text{ genap} \end{cases}$$

$$\chi(W_n + C_m) = \chi_5(W_n + C_m) = \begin{cases} 6, & \text{untuk } n \text{ genap pada saat } m \text{ ganjil} \\ 7, & \text{untuk } n \text{ ganjil pada saat } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

Bukti. Berdasarkan teorema 2.2.1 dinyatakan bahwa $(\chi - 1)p \leq 2q$. Sesuai dengan observasi 4.1.2 maka $|V| = p = n + m + 1$ dan $|E| = q = nm + 2n + 2m - 1$, maka batas atas dari bilangan kromatik adalah $\chi(W_n + C_m) \leq \left(\frac{2nm+5n+5m-1}{n+m+1}\right)$.

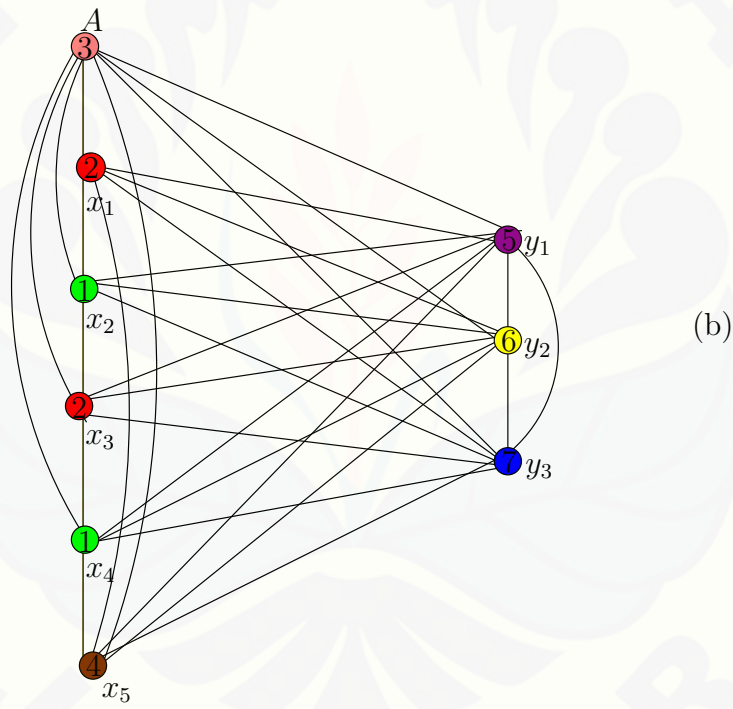
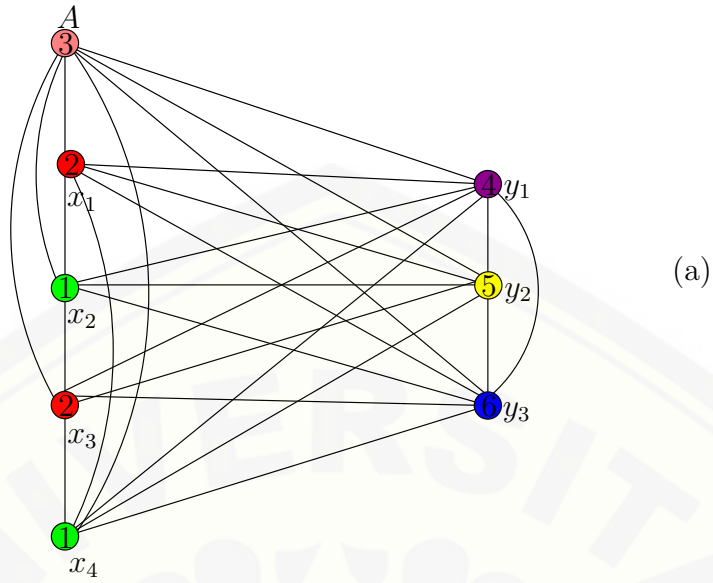
Fungsi pewarnaan titik pada graf $G = (W_n + C_m)$ adalah $f(A) = 3$

untuk m ganjil

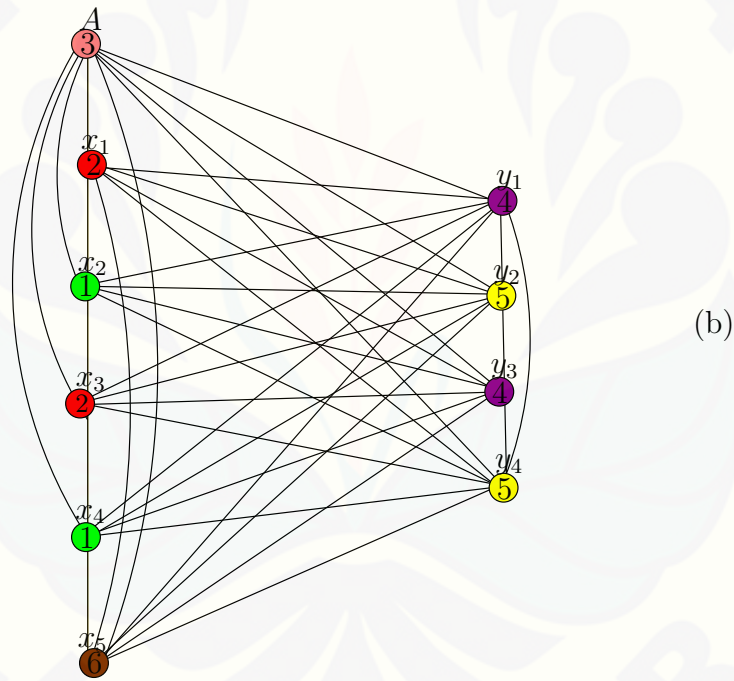
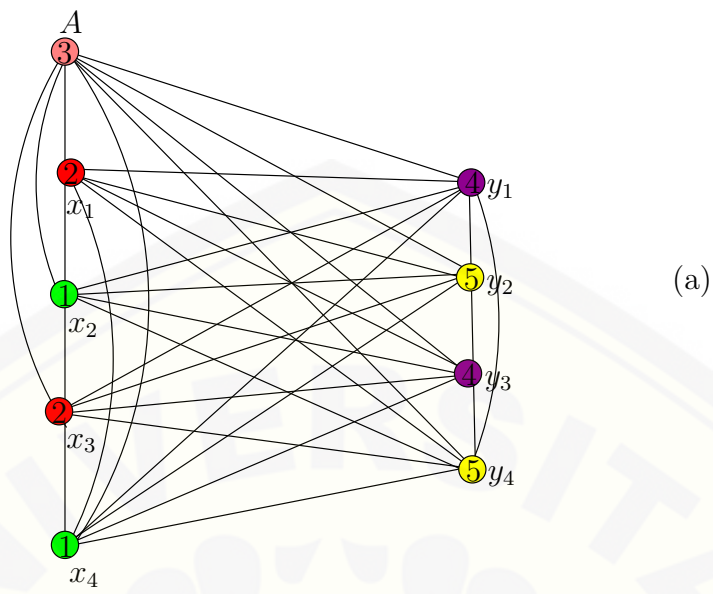
$$f(y_j) = \begin{cases} 5, & 1 \leq j \leq m - 1, j \text{ ganjil} \\ 6, & 1 \leq j \leq m - 1, j \text{ genap} \\ 7, & j = m \end{cases}$$

untuk n ganjil dan m ganjil

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n - 1, i \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n - 1, i \text{ ganjil} \\ 4, & i = n \end{cases}$$



Gambar 4.4 (a) Pewarnaan titik ($W_4 + C_3$) (b) Pewarnaan titik ($W_5 + C_3$)



Gambar 4.5 (a) Pewarnaan titik ($W_4 + C_4$) (b) Pewarnaan titik ($W_5 + C_4$)

untuk n genap dan m ganjil

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \end{cases}$$

untuk m genap

$$f(y_j) = \begin{cases} 4, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 5, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

untuk n ganjil dan m genap

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil} \\ 6, & i = n \end{cases}$$

untuk n genap dan m genap

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $(W_n + C_m)$ mempunyai bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $\chi(W_n + C_m) = \chi_4(W_n + C_m) = 5$ untuk n genap pada saat m genap dan 6 untuk n ganjil pada saat m genap. Kemudian $(W_n + C_m) = \chi_5(W_n + C_m) = 6$ untuk n genap pada saat m ganjil dan 7 untuk n ganjil pada saat m ganjil. \square

Observasi 4.1.3. Misal diketahui graf roda W_n dengan $V(W_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan graf lintasan dengan $V(P_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$. Graf G adalah crown product dari graf roda dan graf lintasan yang dinotasikan $G = (W_n \odot P_m)$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{A, x_i, x_{i,j}, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{Ay_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$

$\cup\{x_1x_n\} \cup\{x_ix_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup\{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\}$, sehingga $|V| = p = nm + n + m + 1$ dan $|E| = q = 2nm + n + 2m - 1$.

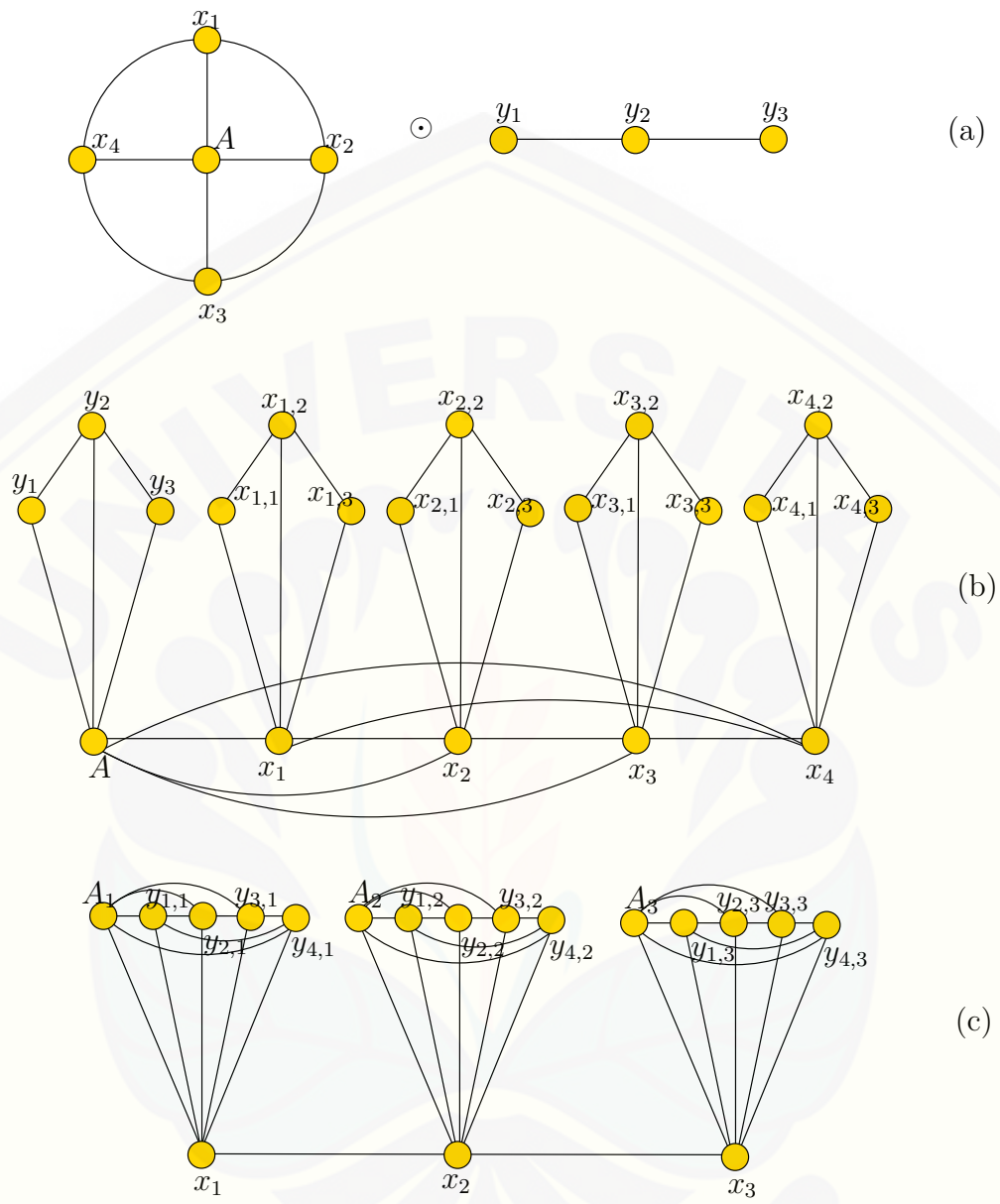
Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.5.3 dituliskan bahwa *crown product* $(W_n \odot P_m)$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf P_m dan $|V(P_m)|$ duplikat $W_1, W_2, \dots, W_{|V(P_m)|}$, kemudian menghubungkan titik ke- i dari P_m ke setiap titik di $W_i, i = 1, 2, 3, \dots, V(P_m)$. Dimulai dengan menduplikat graf lintasan sebanyak titik-titik pada graf roda, kemudian titik-titik pada graf lintasan yang telah diduplikasi dihubungkan pada masing-masing titik pada graf roda sehingga tepat satu titik satu duplikasi dan diperoleh $V = \{A, x_i, x_{i,j}, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{Ay_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_jy_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_1x_n\} \cup \{x_ix_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\}$.

Dari Observasi 4.1.3 dapat diilustrasikan seperti Gambar 4.6. Untuk Gambar 4.6 (a) merupakan graf roda dan graf lintasan, kemudian (b) merupakan graf hasil operasi *crown product* dari kedua graf tersebut dan (c) merupakan graf hasil operasi *crown product* setelah graf dasarnya dibalik yang bertujuan untuk menganalisa sifat komutatifnya. Setelah observasi pada graf hasil operasi *crown product* dari graf roda dan graf lintasan, ditentukan bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan titik pada graf hasil operasi *crown product* yang disajikan dalam teorema berikut.

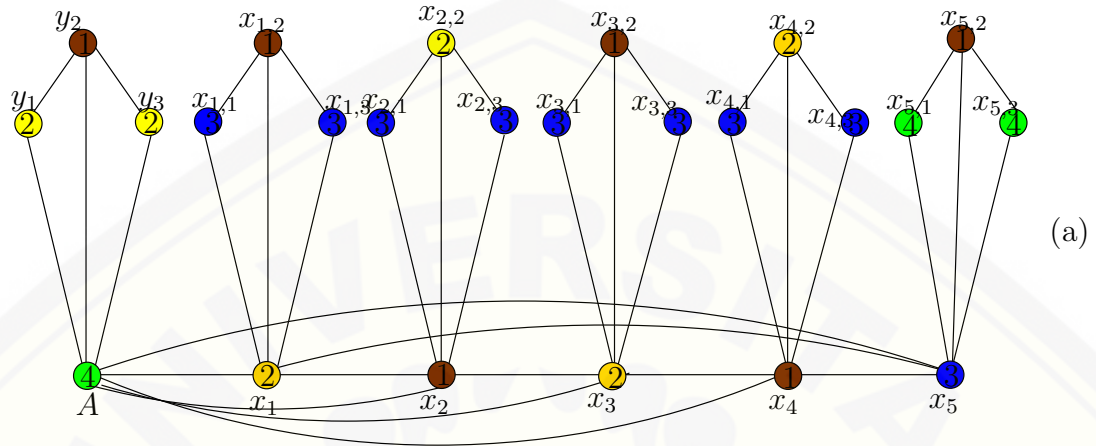
Teorema 4.1.3. Misal G adalah *crown product* dari graf roda dan graf lintasan. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan dinamis G adalah

$$\chi(W_n \odot P_m) = \chi_2(W_n \odot P_m) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 4, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

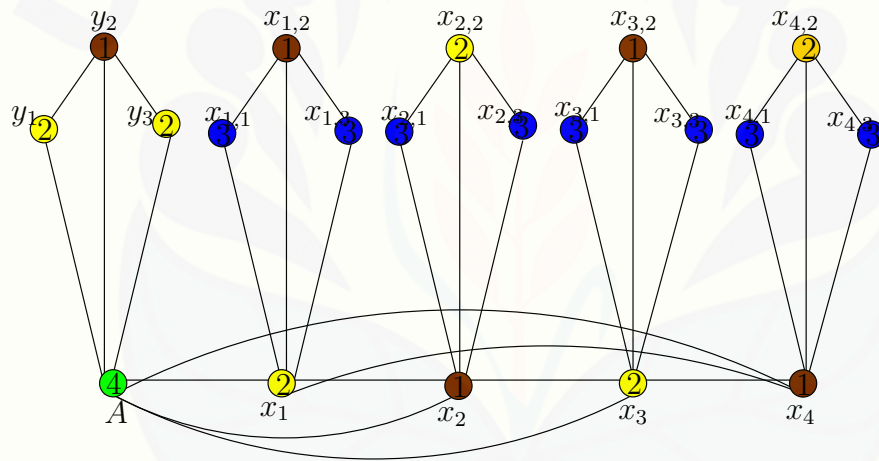
Bukti. Berdasarkan teorema 2.2.1 dinyatakan bahwa $(\chi - 1)p \leq 2q$. Sesuai dengan observasi 4.1.3 maka $|V| = p = nm + n + m + 1$ dan $|E| = q = 2nm + n + 2m - 1$ maka batas atas dari bilangan kromatik adalah $\chi(W_n \odot P_m) \leq \left(\frac{8n+5}{2n+2}\right)$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $G = (W_n \odot P_m)$ adalah $f(A)=4$



Gambar 4.6 (a) W_4 dan P_3 (b) $(W_4 \times P_3)$



(a)



(b)

Gambar 4.7 (a) Pewarnaan titik ($W_5 + P_3$) (b) Pewarnaan titik ($W_4 + P_3$)

$$f(y_j) = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

untuk n genap

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 3, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil}; 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \end{cases}$$

untuk n ganjil

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 3, & 1 \leq j \leq m-1, j \text{ ganjil}; 1 \leq i \leq n-1 \\ 4, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil}; i = n \end{cases}$$

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil} \\ 3, & i = n \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $W_n \odot P_m$ mempunyai bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $\chi(W_n \odot P_m) = \chi_2(W_n \odot P_m) = 3$ untuk n genap dan 4 untuk n ganjil. \square

Observasi 4.1.4. Misal diketahui graf lintasan dengan $V(P_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$ dan graf roda W_n dengan $V(W_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\}$. Graf G adalah crown product dari graf lintasan dan graf roda yang dinotasikan $G = (P_m \odot W_n)$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{A_j, x_{i,j}, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_j y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_j x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$

$\cup\{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup\{y_jx_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup\{x_{1,j}x_{n,j}; 1 \leq j \leq m\}$, sehingga $|V| = p = nm+2m$ dan $|E| = q = 3nm+2m-1$.

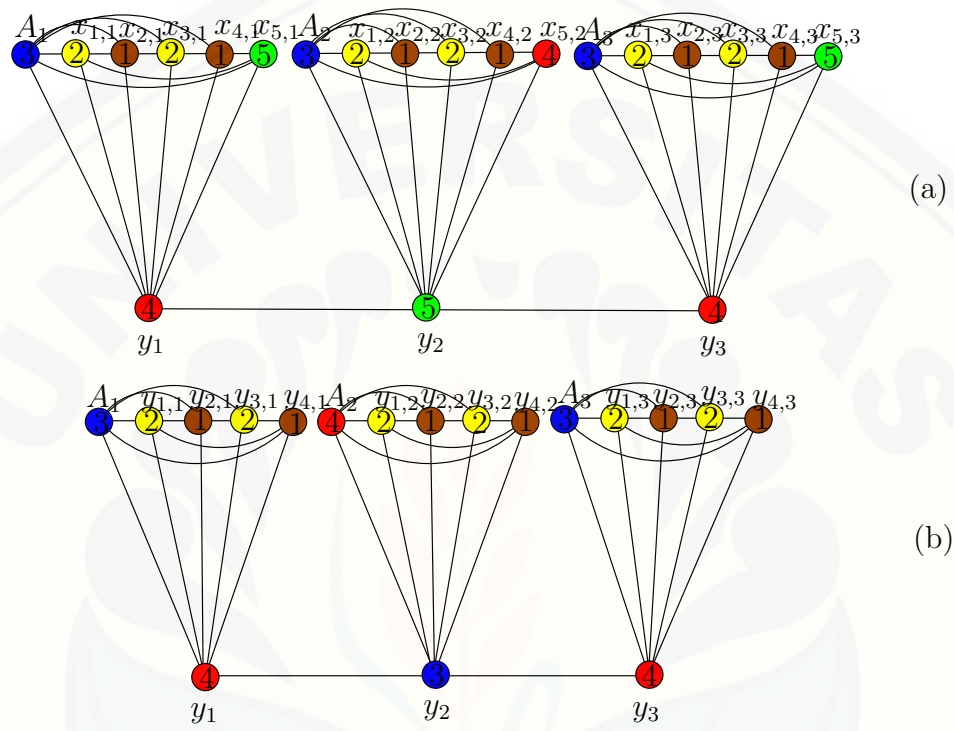
Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.5.3 dituliskan bahwa *crown product* $(P_m \odot W_n)$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf W_n dan $|V(W_n)|$ duplikat $P_1, P_2, \dots, W_{|V(W_n)|}$, kemudian menghubungkan titik ke- i dari W_n ke setiap titik di P_j , $j = 1, 2, 3, \dots, V(W_n)$. Dimulai dengan menduplikat graf roda sebanyak titik-titik pada graf lintasan, kemudian titik-titik pada graf roda yang telah diduplikasi dihubungkan pada masing-masing titik pada graf lintasan sehingga tepat satu titik satu duplikasi dan diperoleh $V = \{A_j, x_{i,j}, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_jy_j; 1 \leq j \leq m\} \cup\{y_jy_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup\{A_jx_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup\{x_{i,j}x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup\{y_jx_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup\{x_{1,j}x_{n,j}; 1 \leq j \leq m\}$.

Dari Observasi 4.1.4 dapat diilustrasikan seperti Gambar 4.1. Untuk Gambar 4.1 (a) merupakan graf lintasan dan graf roda, kemudian (b) merupakan graf hasil operasi *crown product* dari kedua graf tersebut dan (c) merupakan graf hasil operasi *crown product* setelah graf dasarnya dibalik yang bertujuan untuk menganalisa sifat komutatifnya. Setelah observasi pada graf hasil operasi *crown product* dari graf lintasan dan graf roda, ditentukan bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan titik pada graf hasil operasi *crown product* yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1.4. Misal G adalah *crown product* dari graf lintasan dan graf roda. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan dinamis $G = (P_m \odot W_n)$ adalah

$$\chi(P_m \odot W_n) = \chi_3(W_n \odot P_m) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 5, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Bukti. Berdasarkan teorema 2.2.1 dinyatakan bahwa $(\chi - 1)p \leq 2q$. Sesuai dengan observasi 4.1.4 maka $|V| = p = nm + n + m + 1$ dan $|E| = q = 2nm + n + 2m - 1$ maka batas atas dari bilangan kromatik adalah $\chi(P_m \odot W_n) \leq \frac{8n+5}{2n+2}$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $G = (P_m \odot W_n)$ adalah



Gambar 4.8 (a) Pewarnaan titik ($P_3 \odot W_5$) (b) Pewarnaan titik ($P_3 \odot W_4$)

untuk n genap

$$f(A_j) = \begin{cases} 3, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 4, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(y_j) = \begin{cases} 3, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 4, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m \\ 2, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

untuk n ganjil

$$f(A_j) = 3$$

$$f(y_j) = \begin{cases} 4, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 5, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

di j ganjil

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil} \\ 5, & i = n \end{cases}$$

di j genap

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil} \\ 4, & i = n \end{cases}$$

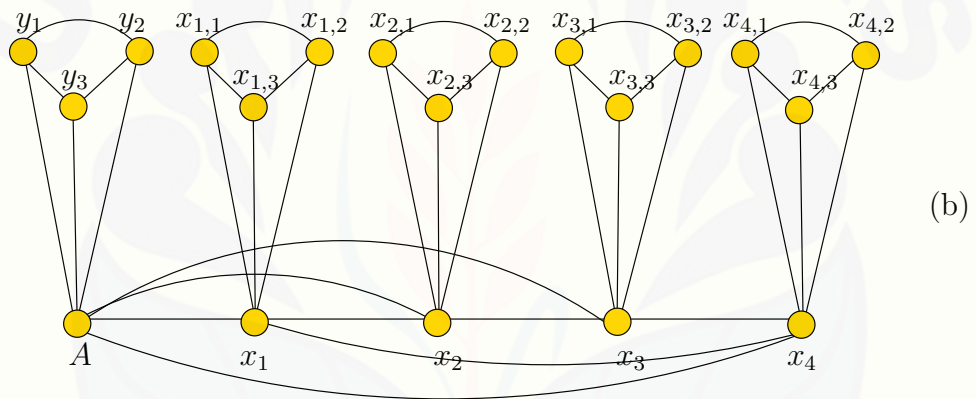
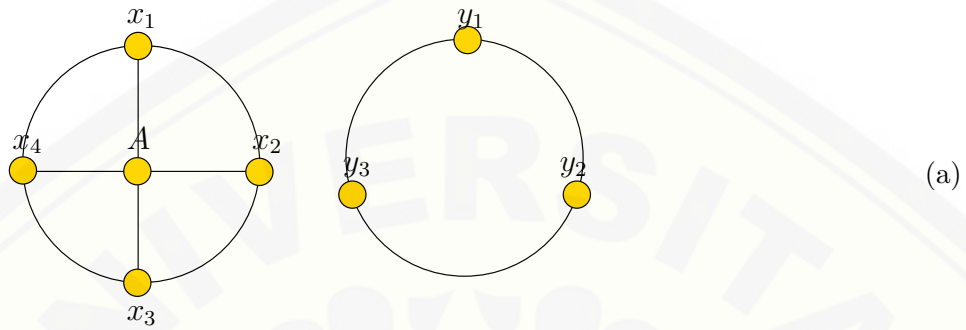
Sehingga terbukti bahwa graf $P_m \odot W_n$ mempunyai bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $\chi(P_m \odot W_n) = \chi_3(P_m \odot W_n) = 4$ untuk n genap dan 5 untuk n ganjil. Pada operasi *crown product* tidak berlaku sifat komutatif dikarenakan terdapat perbedaan baik dari graf hasil operasi, kardinalitas maupun bilangan kromatiknya. \square

Observasi 4.1.5. Misal diketahui graf roda W_n dengan $V(W_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\}$ dan graf lingkaran dengan $V(C_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(C_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_m y_1\}$. Graf G adalah crown product dari graf roda dan graf lingkaran yang dinotasikan $G = (W_n \odot C_m)$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{A, x_i, x_{i,j}, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{Ay_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_1 x_n\} \cup \{x_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_j y_n\} \cup \{x_{i,1} x_{i,n}; 1 \leq i \leq n\}$, sehingga $|V| = p = nm + n + m + 1$ dan $|E| = q = 2nm + 2n + 2m$.

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.5.3 dituliskan bahwa crown product $(W_n \odot C_m)$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf C_m dan $|V(C_m)|$ duplikat $W_1, W_2, \dots, W_{|V(C_m)|}$, kemudian menghubungkan titik ke- i dari C_m ke setiap titik di W_i , $i = 1, 2, 3, \dots, |V(C_m)|$. Dimulai dengan menduplikat graf lingkaran sebanyak titik-titik pada graf roda, kemudian titik-titik pada graf lingkaran yang telah diduplikasi dihubungkan pada masing-masing titik pada graf roda sehingga tepat satu titik satu duplikasi dan diperoleh $V = \{A, x_i, x_{i,j}, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{Ay_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_1 x_n\} \cup \{x_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_i y_n\} \cup \{x_{1,i} x_{n,i}; 1 \leq i \leq n\}$.

Dari Observasi 4.1.5 dapat diilustrasikan seperti Gambar 4.9. Untuk Gambar 4.9 (a) merupakan graf roda dan graf lingkaran, kemudian (b) merupakan graf hasil operasi crown product dari kedua graf tersebut dan untuk analisa sifat komutatifnya sama dengan graf hasil operasi crown product pada graf roda dan graf lingkaran. Setelah observasi pada graf hasil operasi crown product dari graf roda dan graf lingkaran, ditentukan bilangan kromatik, pewarnaan titik dinamis dan fungsi pewarnaan titik pada graf hasil operasi crown product yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1.5. Misal G adalah crown product dari graf roda dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik dan pewarnaan dinamis $G = (W_n \odot$

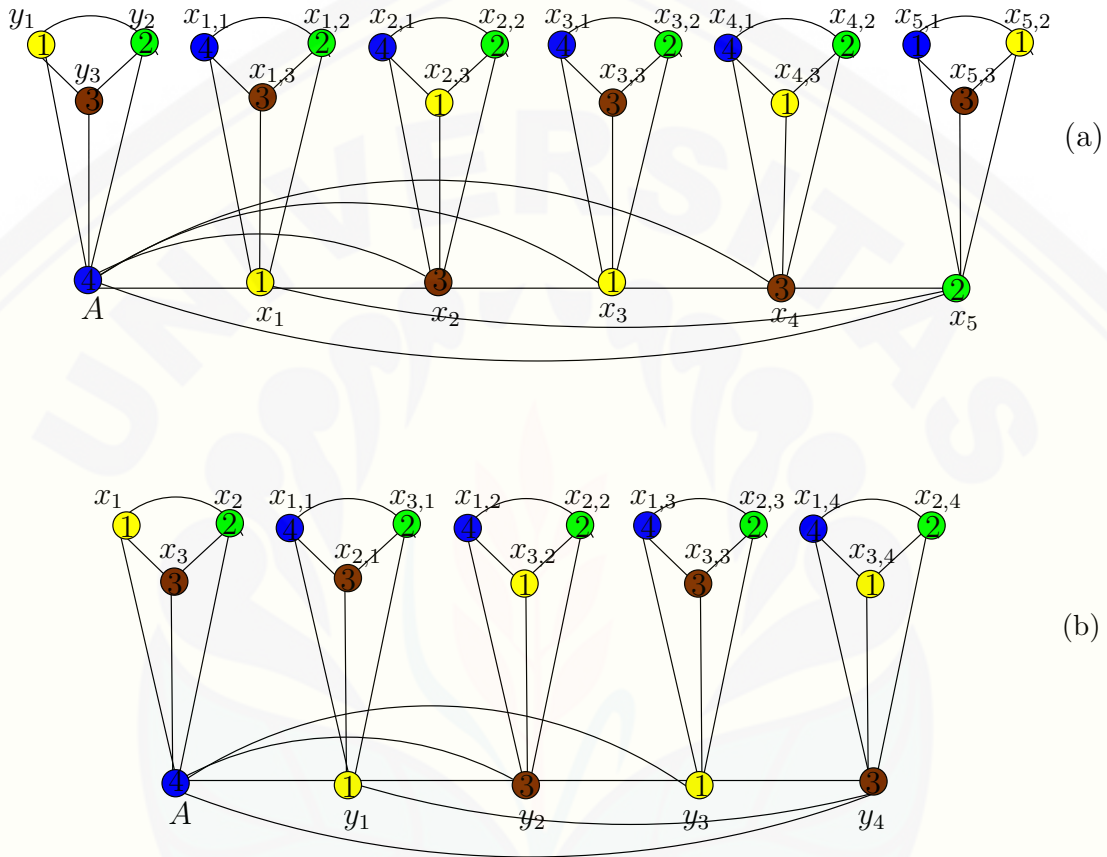


Gambar 4.9 (a) W_4 dan C_3 (b) $(W_4 \odot C_3)$

C_m) adalah

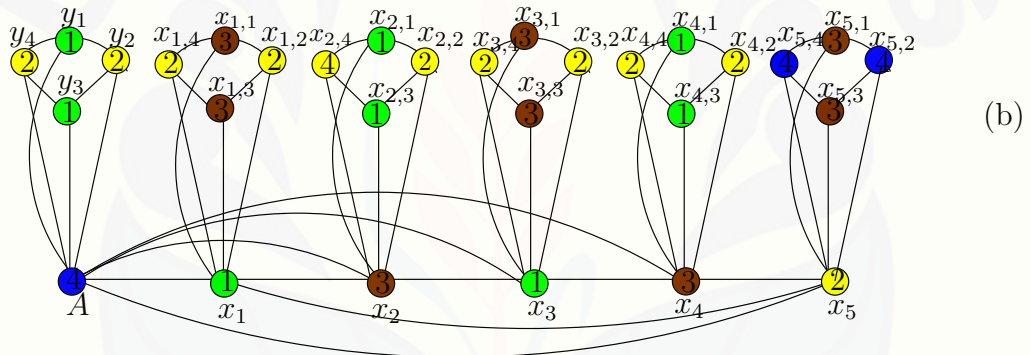
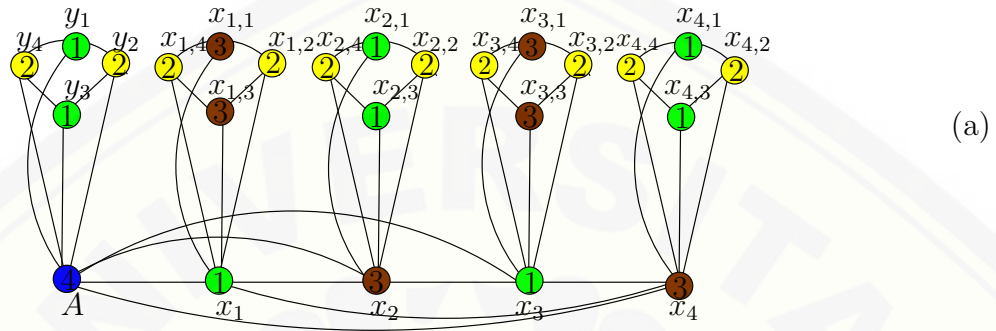
$$\chi(W_n \odot C_m) = \chi_2(W_n \odot C_m) = 4, \text{ untuk } m \text{ genap}$$

$$\chi(W_n \odot C_m) = \chi_3(W_n \odot C_m) = 4, \text{ untuk } m \text{ ganjil}$$



Gambar 4.10 (a) Pewarnaan titik $(W_5 \odot C_3)$ (b) Pewarnaan titik $(W_4 \odot C_3)$

Bukti. Berdasarkan teorema 2.2.1 dinyatakan bahwa $(\chi - 1)p \leq 2q$. Memperhatikan Observasi 4.1.5 maka $|V| = p = nm + n + m + 1$ dan $|E| = q = 2nm + 2n + 2m$ maka batas atas dari bilangan kromatik adalah $\chi(W_n \odot C_m) \leq \frac{5nm + 5n + 5m + 1}{nm + n + m + 1}$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $G = (W_n \odot C_m)$ adalah $f(A) = 4$



Gambar 4.11 (a) Pewarnaan titik ($W_4 \odot C_4$) (b) Pewarnaan titik ($W_5 \odot C_4$)

untuk m ganjil

$$f(y_j) = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq m-1, j \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 3, & j = m \end{cases}$$

untuk n genap

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap}, i = n \\ 2, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 3, & 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil}, i = n \\ 4, & 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 3, & 1 \leq j \leq m-1, j \text{ ganjil}; 1 \leq i \leq n-1 \\ 4, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil}; i = n \end{cases}$$

untuk n ganjil

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil} \\ 2, & i = n \\ 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 3, & 1 \leq i \leq n, j \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 4, & 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

untuk m genap

$$f(y_j) = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

untuk n ganjil

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil} \\ 2, & i = n \\ 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 4, & 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

untuk n genap

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $W_n \odot C_m$ mempunyai bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $\chi(W_n \odot C_m) = \chi_2(W_n \odot C_m) = 4$ untuk m genap dan $\chi(W_n \odot C_m) = \chi_2(W_n \odot C_m) = 4$ untuk m ganjil. \square

Observasi 4.1.6. Misal diketahui graf roda W_n dengan $V(W_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan graf lintasan dengan $V(P_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$. Graf G adalah tensor product dari graf roda dan graf lintasan yang dinotasikan $G = (W_n \otimes P_m) = (P_m \otimes W_n)$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{A_j, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_j x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_j x_{i,j-1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j+1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i-1,j+1}; 2 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\}$.

$j \leq m - 1\} \cup \{x_{n,j}x_{1,j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{n,j+1}x_{1,j}; 1 \leq j \leq m - 1\}$, sehingga $|V| = p = nm + m$ dan $|E| = q = 4nm - 4n$.

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.5.4 disebutkan bahwa, *tensor product* $(W_n \otimes P_m)$ memiliki $V(W_n \otimes P_m) = V(W_n) \otimes V(P_m)$ dan $\{(x_1, y_2)(x_2, y_2) | x_1x_2 \in E(W_n) \text{ dan } y_1y_2 \in E(P_m)\}$. Diawali dengan menggambar titik-titik graf lintasan yang dikembangkan mengikuti graf roda, kemudian titik-titiknya dihubungkan secara menyilang sampai bertemu di titik awal. Titik-titik pada graf lintasan dikalikan dengan titik-titik pada graf roda, kemudian hasil titik-titik tersebut yang *adjacent* dihubungkan. Graf hasil operasi *tensor product* dari graf roda dan graf lintasan diperoleh $V = \{A_j, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_jx_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{A_jx_{i,j-1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,j+1}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{i,j}x_{i-1,j+1}; 2 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{n,j}x_{1,j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{n,j+1}x_{1,j}; 1 \leq j \leq m - 1\}$.

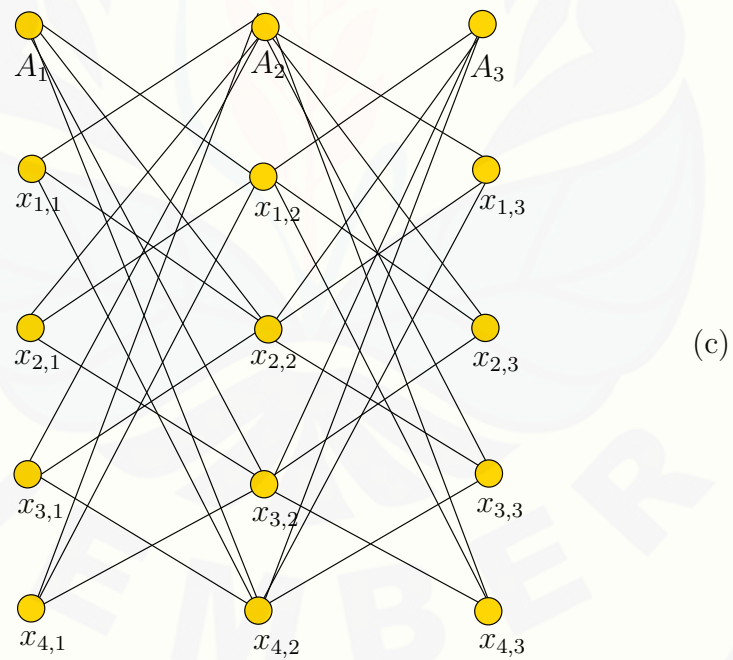
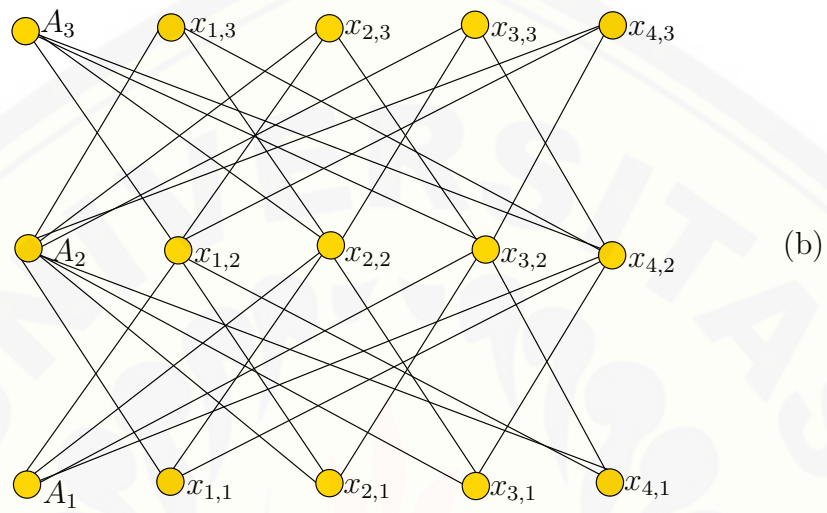
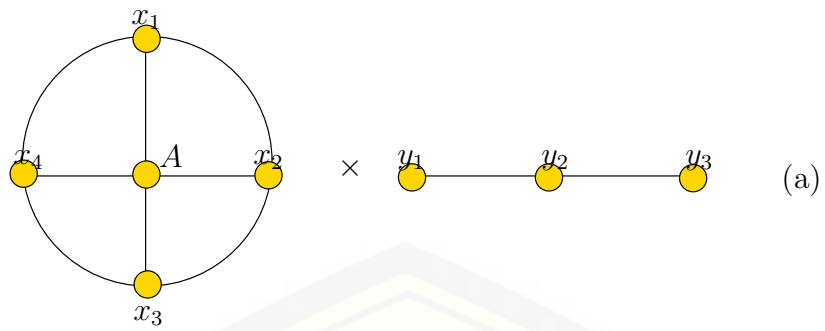
Dari Observasi 4.1.6 dapat diilustrasikan seperti Gambar 4.12. Untuk Gambar 4.12 (a) merupakan graf roda dan graf lintasan, kemudian (b) merupakan graf hasil operasi *Tensor Product* dari kedua graf tersebut dan (c) merupakan graf hasil operasi *Tensor Product* setelah graf dasarnya dibalik yang bertujuan untuk menganalisa sifat komutatifnya. Berdasarkan teorema 2.5.1 dituliskan bahwa bilangan kromatik hasil dari *Tensor Product* yang dinotasikan dengan $G = G_1 \otimes G_2$, maka $\chi(G) = \min\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$. Sehingga bilangan kromatik hasil operasi *Tensor Product* dari graf roda dan graf lintasan dituliskan sebagai berikut:

Akibat 4.1.1. Misal $G = (W_n \otimes P_m) = (P_m \otimes W_n)$. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik $G = (W_n \otimes P_m) = (P_m \otimes W_n)$ adalah

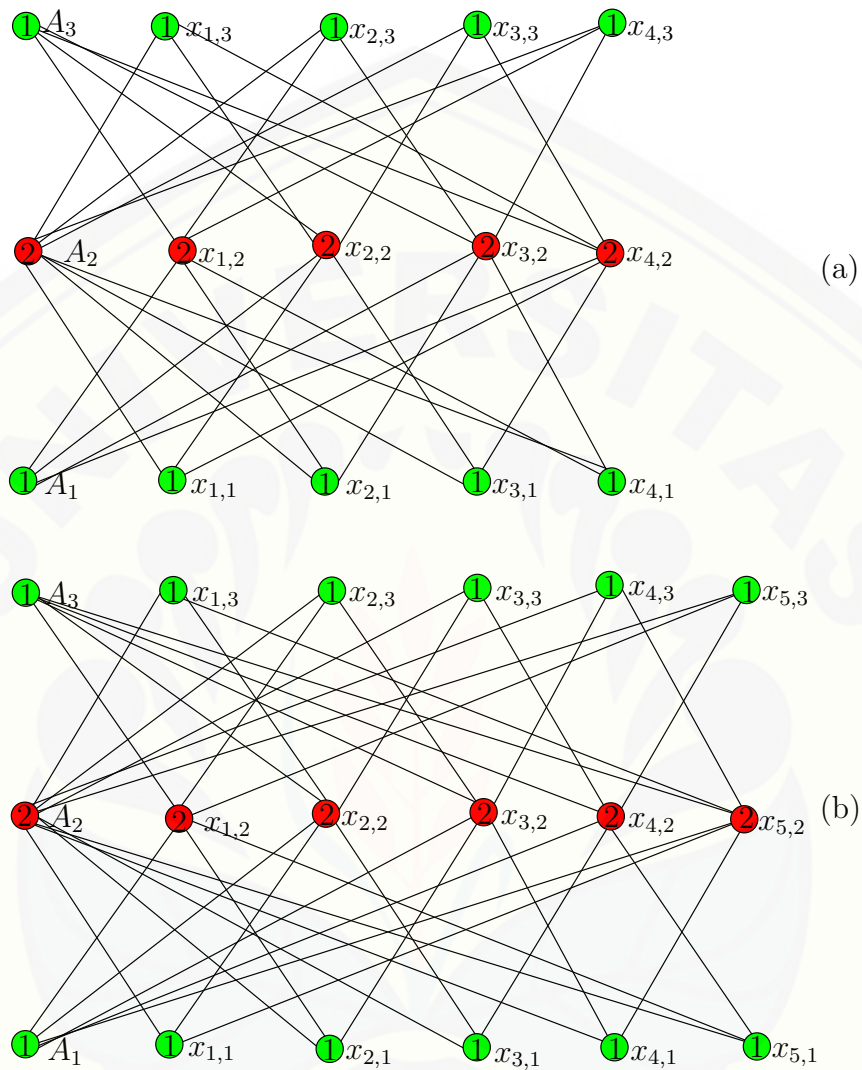
$$\chi(W_n \otimes P_m) = 2$$

Teorema 4.1.6. Misal $G = (W_n \otimes P_m) = (P_m \otimes W_n)$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, pewarnaan dinamis $G = (W_n \otimes P_m) = (P_m \otimes W_n)$ adalah

$$\chi_2(W_n \otimes P_m) = 3$$



Gambar 4.12 (a) W_4 dan P_3 (b) $(W_4 \otimes P_3)$ (c) $(P_3 \otimes W_4)$



Gambar 4.13 (a) Pewarnaan titik ($W_4 \otimes P_3$) (b) Pewarnaan titik ($W_5 \otimes P_3$)

Bukti. Berdasarkan teorema 2.2.1 dinyatakan bahwa $(\chi - 1)p \leq 2q$. Sesuai dengan Observasi 4.1.6 didapatkan $|V| = p = nm + m$ dan $|E| = q = 4nm - 4n$ maka batas atas dari bilangan kromatik adalah $\chi(W_n \otimes P_m) \leq (\frac{9nm-7n}{nm+n})$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $G = (W_n \otimes P_m)$ adalah

$$f(A_j) = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

untuk n genap dan n ganjil

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $G = ((W_n \otimes P_m) = (P_m \otimes W_n))$ mempunyai bilangan kromatik $\chi(W_n \otimes P_m) = (P_m \otimes W_n) = 2$ dan mempunyai pewarnaan dinamis $\chi_2(G = (W_n \otimes P_m) = (P_m \otimes W_n)) = 3$. Pada operasi *Tensor Product* ini berlaku sifat komutatif yang diperoleh dari kesamaan graf hasil operasi, kardinalitas, dan bilangan kromatik. \square

Observasi 4.1.7. Misal diketahui graf roda W_n dengan $V(W_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan graf lingkaran dengan $V(C_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(C_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{y_m y_1\}$. Graf G adalah tensor product dari graf roda dan graf lingkaran yang dinotasikan $G = (W_n \otimes C_m)$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{A_j, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_j x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{A_j x_{i,j-1}; 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq m - 1\} \cup \{A_1 x_{i,m}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{A_m x_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j+1}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{i,j} x_{i-1,j+1}; 2 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{n,j} x_{1,j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{n,j+1} x_{1,j}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{i,m} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{i,m} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{1,m} x_{n,1}\} \cup \{x_{n,m} x_{1,1}\} \cup \{x_{1,m} x_{n,1}\} \cup \{x_{i,m} x_{i-1,1}; 2 \leq i \leq n\}$, sehingga $|V| = p = nm + m$ dan $|E| = q = 4nm$.

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.5.4 disebutkan bahwa, *tensor product* $(W_n \otimes C_m)$ memiliki $V(W_n \otimes C_m) = V(W_n) \otimes V(C_m)$ dan $\{(x_1, y_2)(x_2, y_2) | x_1 x_2 \in E(W_n) \text{ dan } y_1 y_2 \in E(C_m)\}$.

Diawali dengan menggambar titik-titik graf lingkaran yang dikembangkan mengikuti graf roda, kemudian titik-titiknya dihubungkan secara menyilang sampai bertemu di titik awal. Titik-titik pada graf lintasan dikalikan dengan titik-titik pada graf roda, kemudian hasil titik-titik tersebut yang *adjacent* dihubungkan. Graf hasil operasi *tensor product* dari graf roda dan graf lingkaran diperoleh $V = \{A_j, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_j x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_j x_{i,j-1}; 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_1 x_{i,m}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{A_m x_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j+1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i-1,j+1}; 2 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{n,j} x_{1,j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{n,j+1} x_{1,j}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,m} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,m} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{1,m} x_{n,1}\} \cup \{x_{n,m} x_{1,1}\} \cup \{x_{1,m} x_{n,1}\} \cup \{x_{i,m} x_{i-1,1}; 2 \leq i \leq n\}$.

Dari Observasi ?? dapat diilustrasikan seperti Gambar 4.14. Untuk Gambar 4.14 (a) merupakan graf roda dan graf lingkaran, kemudian (b) merupakan graf hasil operasi *tensor product* dari kedua graf tersebut dan untuk analisa sifat komutatifnya sama dengan graf hasil operasi *tensor product* pada graf roda dan graf lintasan. Setelah observasi pada graf hasil operasi *tensor product* dari graf roda dan graf lingkaran, ditentukan bilangan kromatik, fungsi pewarnaan titik serta pewarnaan dinamis pada graf hasil operasi *tensor product* yang disajikan dalam akibat dari teorema 2.5.1.

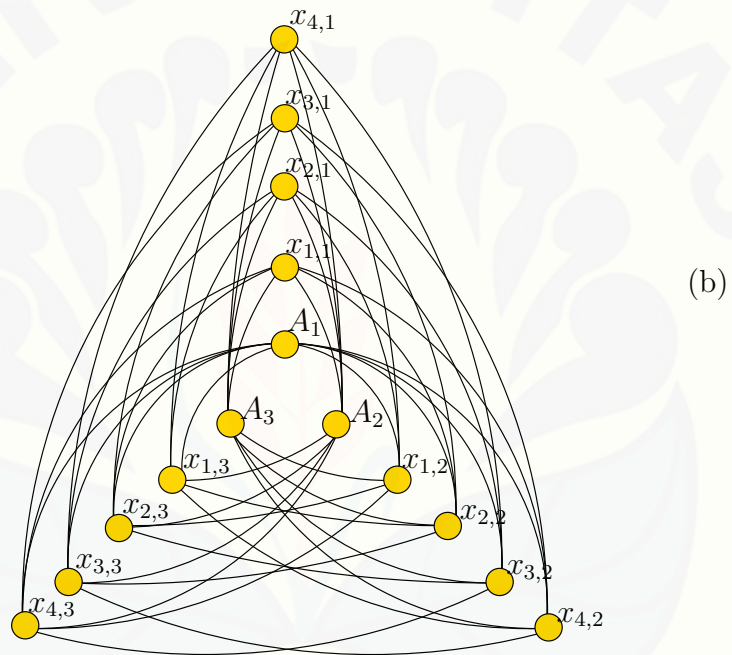
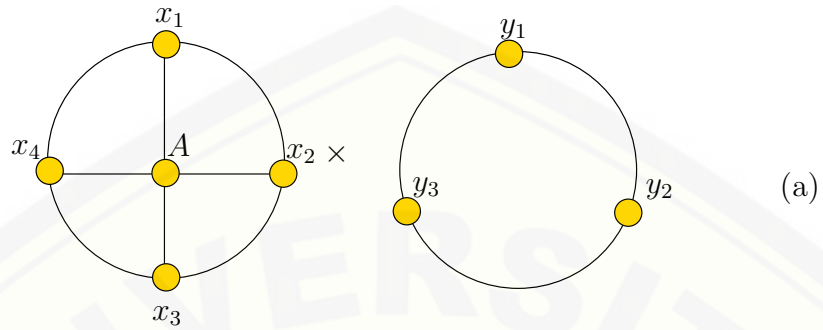
Akibat 4.1.2. Misal G adalah *tensor product* dari graf roda dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik $G = (W_n \otimes C_m)$ adalah

$$\chi(W_n \otimes C_m) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

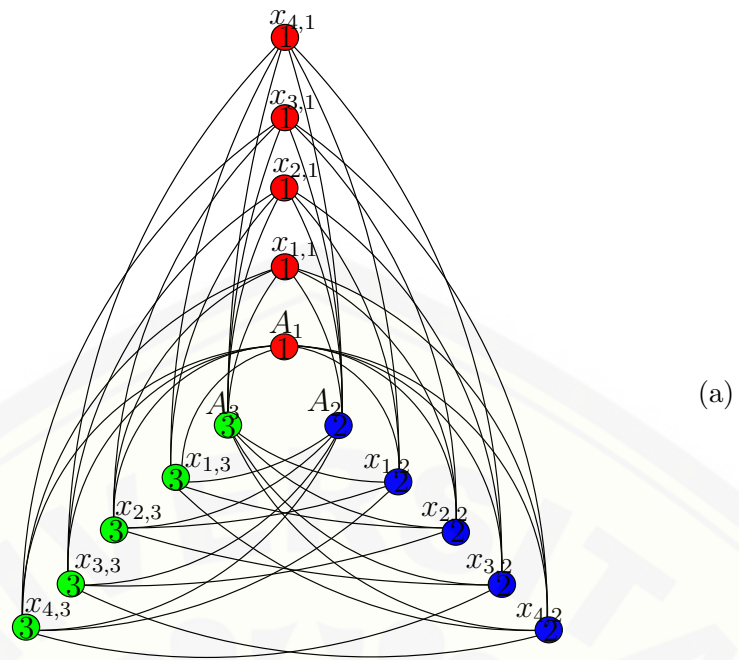
Teorema 4.1.7. Misal G adalah *tensor product* dari graf roda dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, pewarnaan dinamis $G = (W_n \otimes C_m)$ adalah

$$\chi(W_n \square C_m) = 2, \text{ untuk } m \text{ genap}$$

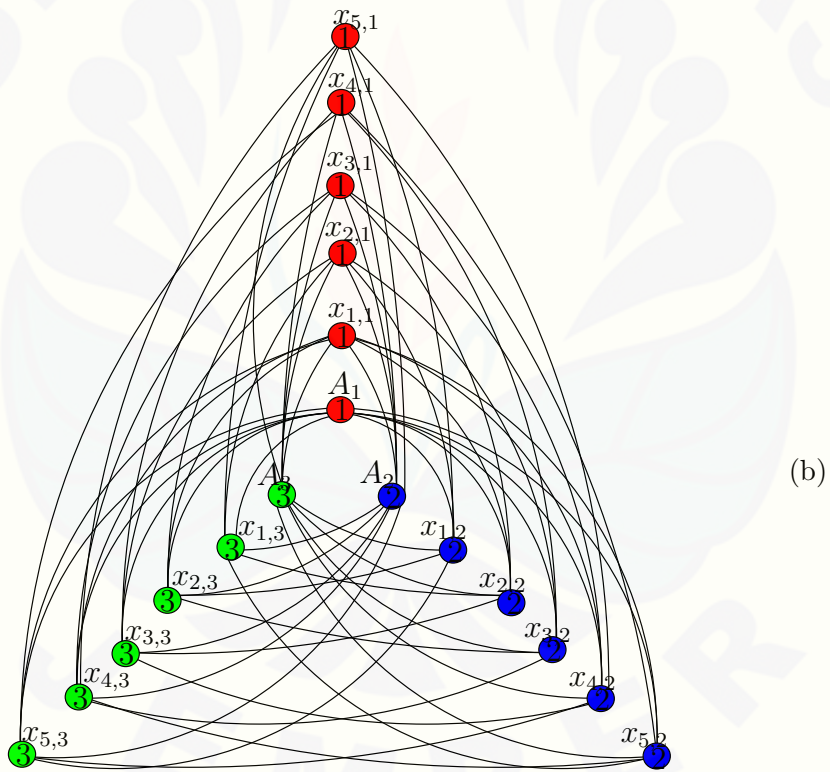
$$\chi_2(W_n \square C_m) = 3, \text{ untuk } m \text{ ganjil}$$



Gambar 4.14 (a) W_4 dan C_3 (b) $(W_4 \otimes C_3)$

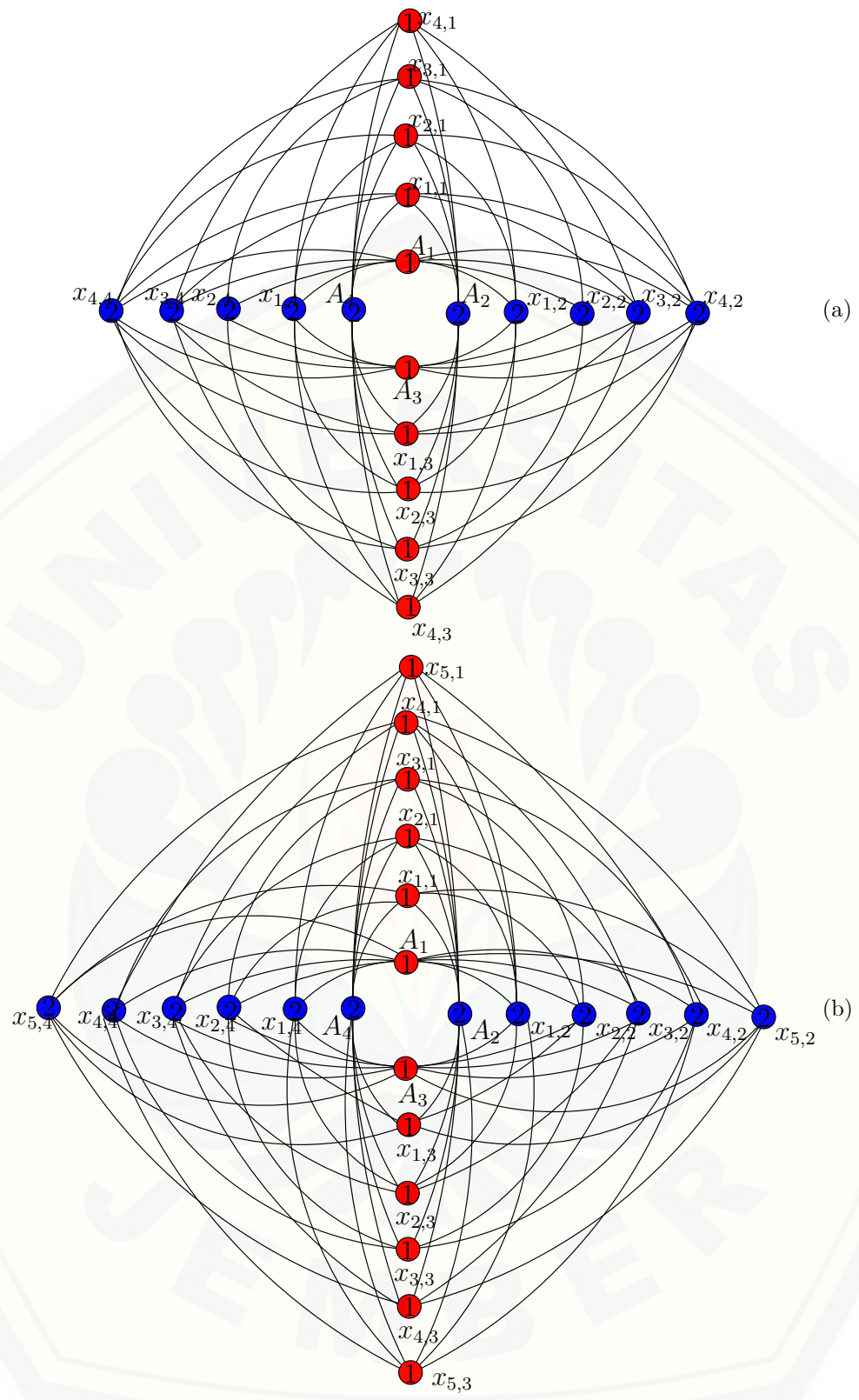


(a)



(b)

Gambar 4.15 (a) Pewarnaan titik ($W_4 \otimes C_3$) (b) Pewarnaan titik ($W_5 \otimes C_3$)



Gambar 4.16 (a) Pewarnaan titik ($W_4 \otimes C_4$) (b) Pewarnaan titik ($W_5 \otimes C_4$)

Bukti. Berdasarkan teorema 2.2.1 dinyatakan bahwa $(\chi - 1)p \leq 2q$. Memperhatikan Observasi 4.1.7 maka $|V| = p = nm + m$ dan $|E| = q = 4nm$ maka batas atas dari bilangan kromatik adalah $\chi(W_n \otimes C_m) \leq (\frac{9nm+m}{nm+m})$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $G = (W_n \otimes C_m)$ adalah

untuk n genap dan n ganjil pada saat m ganjil

$$f(A_j) = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq m-1, j \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 3, & j = m \end{cases}$$

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1, j \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 3, & 1 \leq i \leq n; j = m \end{cases}$$

untuk n genap dan n ganjil pada saat m genap

$$f(A_j) = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq m-1, j \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $W_n \otimes C_m$ mempunyai bilangan kromatik $\chi(W_n \otimes C_m) = 2$ untuk m genap dan $\chi(W_n \otimes C_m) = 3$ untuk m ganjil. Pewarnaan dinamis $\chi_r(W_n \otimes C_m) = 1$ untuk m genap dan $\chi_r(W_n \otimes C_m) = 2$ untuk m ganjil. \square

Observasi 4.1.8. Misal diketahui graf roda W_n dengan $V(W_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan graf lintasan dengan $V(P_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$. Graf G adalah cartesian product dari graf roda dan graf lintasan yang dinotasikan $G = (W_n \square P_m) = (P_m \square W_n)$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{A_j, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_j A_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_j x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\}$.

$n - 1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{1,j}x_{n,j}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1\}$, sehingga $|V| = p = nm + m$ dan $|E| = q = 3nm - n + m - 1$.

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.5.2 disebutkan bahwa, *cartesian product* $(W_n \square P_m)$ jika $V = V_1 \otimes V_2$, dan dua titik $\langle x_1, x_2 \rangle$ dan $\langle y_1, y_2 \rangle$ di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku: $x_1 = y_1$ dan $(x_2, y_2) \in E_2$ atau $x_2 = y_2$ dan $(x_1, y_1) \in E_1$. Diawali dengan mengkalikan titik-titik pada graf lintasan sebanyak titik-titik pada graf roda kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan bentuk graf roda dan lintasan. Graf hasil operasi *cartesian product* dari graf roda dan graf lintasan memperoleh $V = \{A_j, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_j A_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{A_j x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{1,j} x_{n,j}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1\}$.

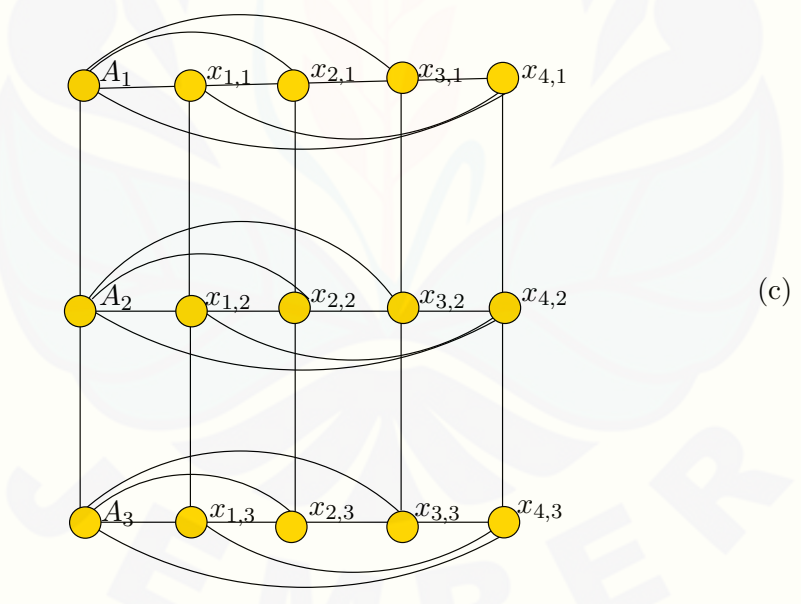
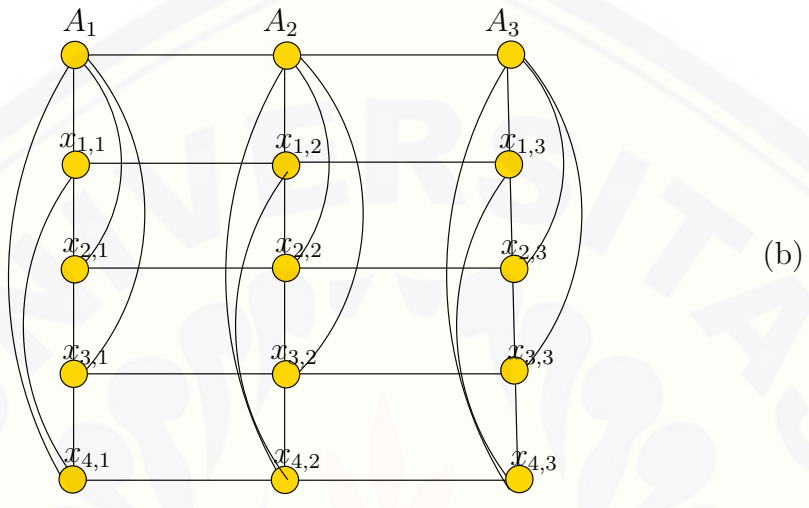
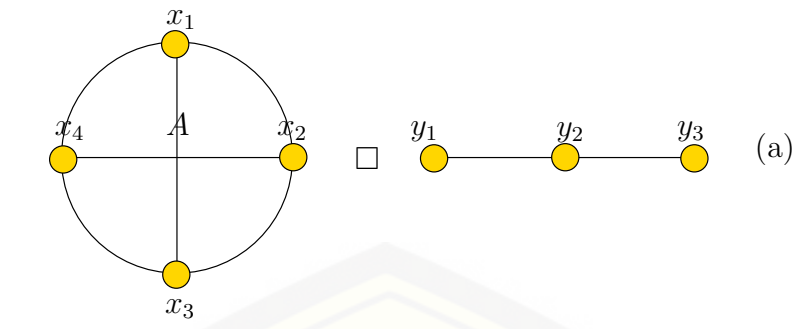
Dari Observasi 4.1.8 dapat diilustrasikan seperti Gambar 4.17. Untuk Gambar 4.17 (a) merupakan graf roda dan graf lintasan, kemudian (b) merupakan graf hasil operasi *cartesian product* dari kedua graf tersebut dan (c) merupakan graf hasil operasi *cartesian product* setelah graf dasarnya dibalik yang bertujuan untuk menganalisa sifat komutatifnya. Berdasarkan teorema 2.5.2 dituliskan bahwa bilangan kromatik hasil dari *cartesian product* yang dinotasikan dengan $G = G_1 \square G_2$, maka $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$. Sehingga bilangan kromatik hasil operasi *cartesian product* dari graf roda dan graf lintasan dituliskan sebagai berikut:

Akibat 4.1.3. Misal $G = (W_n \square P_m) = (P_m \square W_n)$. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik $G = (W_n \square P_m) = (P_m \square W_n)$ adalah

$$\chi(W_n \square P_m) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 4, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Teorema 4.1.8. Misal G adalah *cartesian product* dari graf roda dan lintasan. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, pewarnaan dinamis $G = (W_n \square P_m)$ adalah

$$\chi_2(W_n \square P_m) = 3, \text{ untuk } m \text{ genap}$$



Gambar 4.17 (a) W_4 dan P_3 (b) $(W_4 \square P_3)$ (c) $(P_3 \square W_4)$

$$\chi_2(W_n \square P_m) = 4, \text{ untuk } m \text{ ganjil}$$

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.2.1 dinyatakan bahwa $(\chi - 1)p \leq 2q$. Sesuai dengan Observasi 4.1.8 didapatkan $|V| = p = nm + m$ dan $|E| = q = 3nm - n + m - 1$ maka batas atas dari bilangan kromatik adalah $\chi(W_n \square P_m) \leq \left(\frac{7nm - 2n + 3m - 2}{nm + n}\right)$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $G = (W_n \square P_m) = (P_m \square W_n)$ adalah

$$f(A_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases}$$

untuk n genap

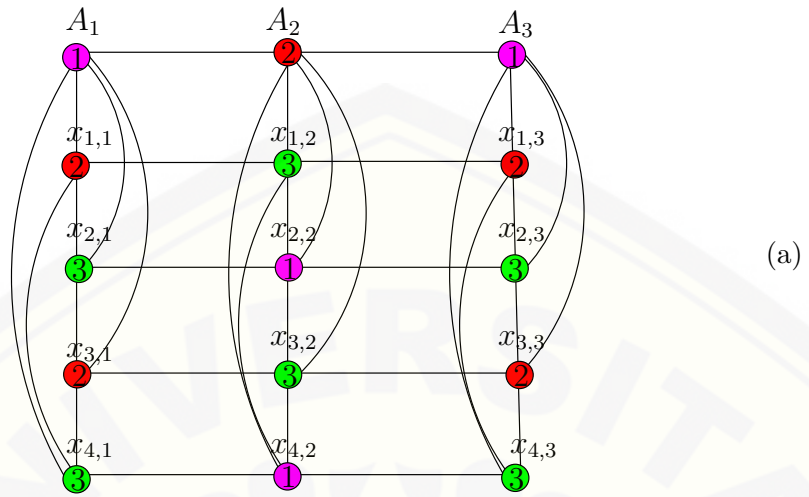
$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil}; 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

untuk n ganjil

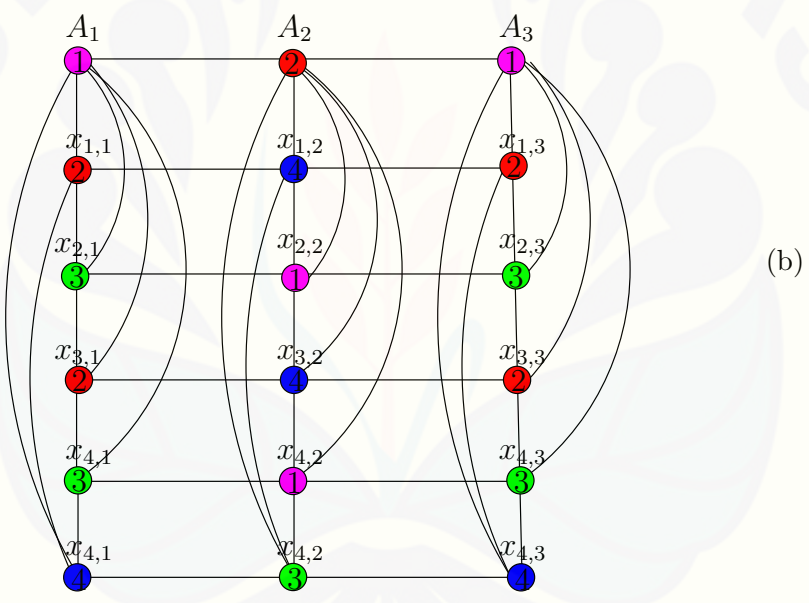
$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq i \leq n - 1, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 3, & 1 \leq i \leq n - 1, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil}; i = n, 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 4, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap}; i = n, 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $(W_n \square P_m)$ mempunyai bilangan kromatik $\chi(W_n \square P_m) = 3$ untuk n genap dan $\chi(W_n \square P_m) = 4$ untuk n ganjil. Pewarnaan dinamis pada $\chi_r(G = (W_n \square P_m) = (P_m \square W_n)) = 2$. Pada operasi *cartesian product* ini berlaku sifat komutatif yang diperoleh dari kesamaan graf hasil operasi, kardinalitas, dan bilangan kromatik. \square

Observasi 4.1.9. Misal diketahui graf roda W_n dengan $V(W_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan graf lingkaran dengan $V(C_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(C_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{y_m y_1\}$



(a)



(b)

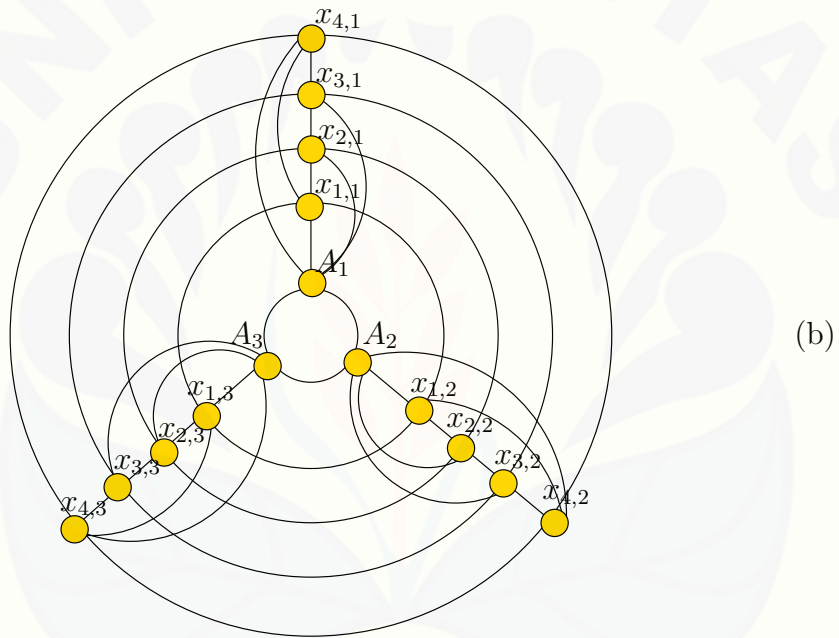
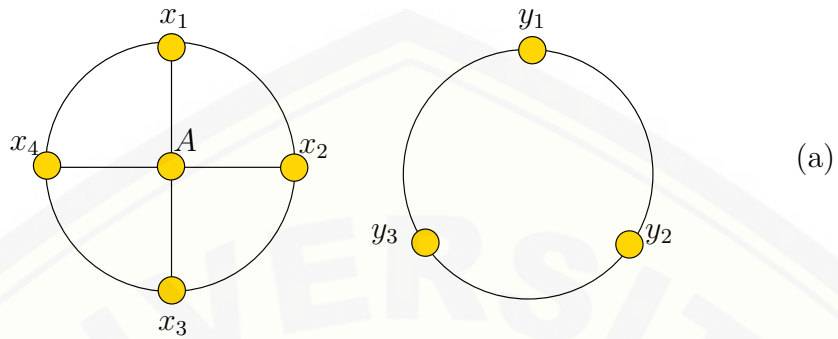
Gambar 4.18 (a) Pewarnaan titik ($W_4 \square P_3$) (b) Pewarnaan titik ($W_5 \square P_3$)

$1\} \cup \{y_m y_1\}$. Graf G adalah cartesian product dari graf roda dan graf lingkaran yang dinotasikan $G = (W_n \square C_m)$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{A_j, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_j A_{j+1}; 1 \leq i \leq m - 1\} \cup \{A_m A_1\} \cup \{A_j x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{1,j} x_{n,j}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n\}$, sehingga $|V| = p = nm + 2n + m$ dan $|E| = q = 3nm + m$.

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.5.2 disebutkan bahwa, cartesian product $(W_n \square P_m)$ jika $V = V_1 \times V_2$, dan dua titik $\langle x_1, x_2 \rangle$ dan $\langle y_1, y_2 \rangle$ di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku: $x_1 = y_1$ dan $(x_2, y_2) \in E_2$ atau $x_2 = y_2$ dan $(x_1, y_1) \in E_1$. Diawali dengan mengkalikan titik-titik pada graf lingkaran sebanyak titik-titik pada graf roda kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan bentuk graf roda dan lingkaran. Graf hasil operasi cartesian product dari graf roda dan graf lingkaran memperoleh $V = \{A_j, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_j A_{j+1}; 1 \leq i \leq m - 1\} \cup \{A_m A_1\} \cup \{A_j x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{1,j} x_{n,j}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n\}$.

Dari Observasi 4.1.9 dapat diilustrasikan seperti Gambar 4.19. Untuk Gambar 4.19 (a) merupakan graf roda dan graf lingkaran, kemudian (b) merupakan graf hasil operasi cartesian product dari kedua graf tersebut dan untuk analisa sifat komutatifnya sama dengan graf hasil operasi cartesian product pada graf roda dan graf lintasan. Berdasarkan teorema 2.5.2 dituliskan bahwa bilangan kromatik hasil dari cartesian product yang dinotasikan dengan $G = G_1 \square G_2$, maka $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$. Sehingga bilangan kromatik hasil operasi cartesian product dari graf roda dan graf lingkaran dituliskan sebagai berikut:

Akibat 4.1.4. Misal G adalah cartesian product dari graf roda dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik dan pewarnaan dinamis $G = (W_n \square C_m)$



Gambar 4.19 (a) W_4 dan C_3 (b) $(W_4 \square C_3)$

adalah

$$\chi(W_n \square C_m) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } m \text{ genap dan } m \text{ ganjil pada saat } n \text{ genap} \\ 4, & \text{untuk } m \text{ genap dan } m \text{ ganjil pada saat } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Teorema 4.1.9. Misal G adalah cartesian product dari graf roda dan lingkaran. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, pewarnaan dinamis $G = (W_n \square C_m)$ adalah

$$\chi_2(W_n \square C_m) = 3, \text{ untuk } m \text{ genap dan } m \text{ ganjil pada saat } n \text{ genap}$$

$$\chi_3(W_n \square C_m) = 4, \text{ untuk } m \text{ genap dan } m \text{ ganjil pada saat } n \text{ ganjil}$$

Bukti. Berdasarkan teorema 2.2.1 dinyatakan bahwa $(\chi - 1)p \leq 2q$. Memperhatikan Observasi 4.1.8 maka $|V| = p = nm + 2n + m$ dan $|E| = q = 3nm + m$ maka batas atas dari bilangan kromatik adalah $\chi(W_n \square C_m) \leq (\frac{7nm+3m}{nm+n})$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $G = (W_n \square C_m)$ adalah

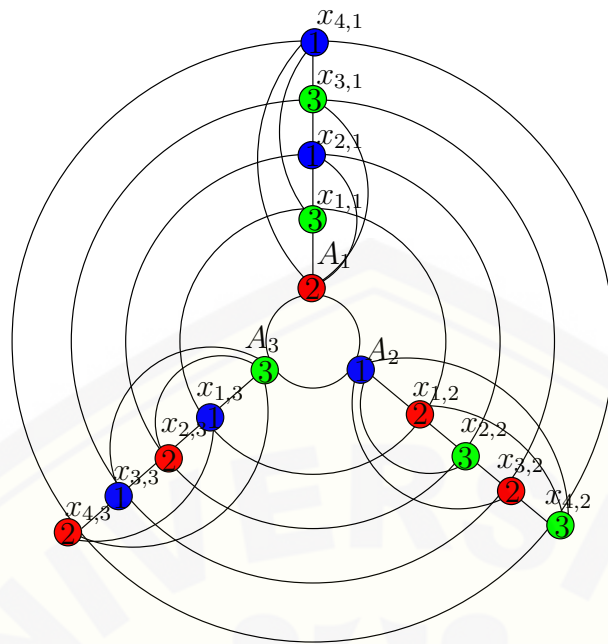
untuk n genap dan n ganjil pada saat m ganjil

$$f(A_j) = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq m-1, j \text{ ganjil} \\ 2, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 3, & j = m \end{cases}$$

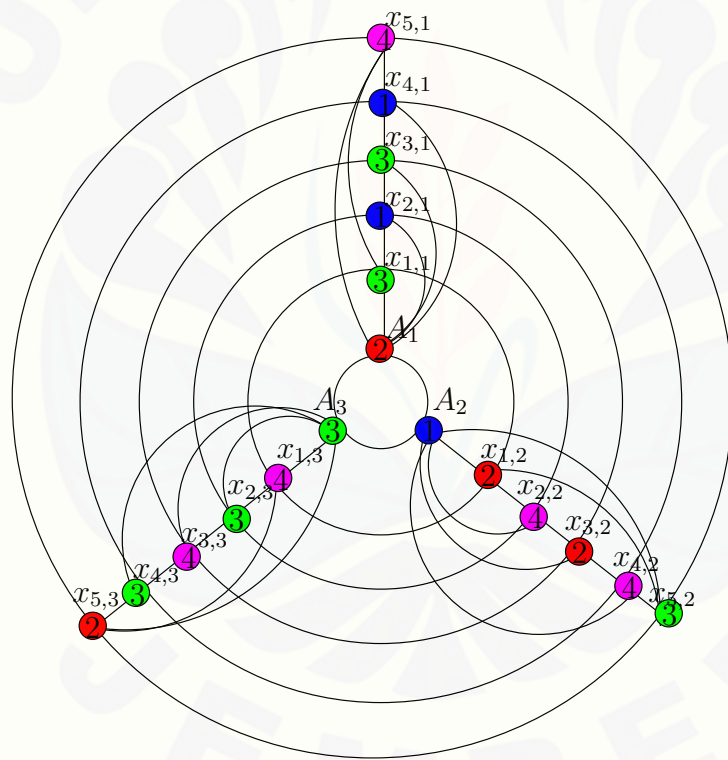
untuk n genap pada saat m ganjil

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq m-1, j \text{ genap}; 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = m \\ 2, & 1 \leq j \leq m-1, j \text{ genap}; 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = m \\ 3, & 1 \leq i \leq n; j = m \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $(W_n \square C_m)$ mempunyai bilangan kromatik $\chi(W_n \square C_m) = 2$ untuk m genap dan $\chi(W_n \square C_m) = 3$ untuk m ganjil. Pewarnaan dinamis graf $(W_n \square C_m)$ adalah $\chi_r(W_n \square C_m) = 2$ untuk n genap dan $\chi_r(W_n \square C_m) = 3$ untuk n

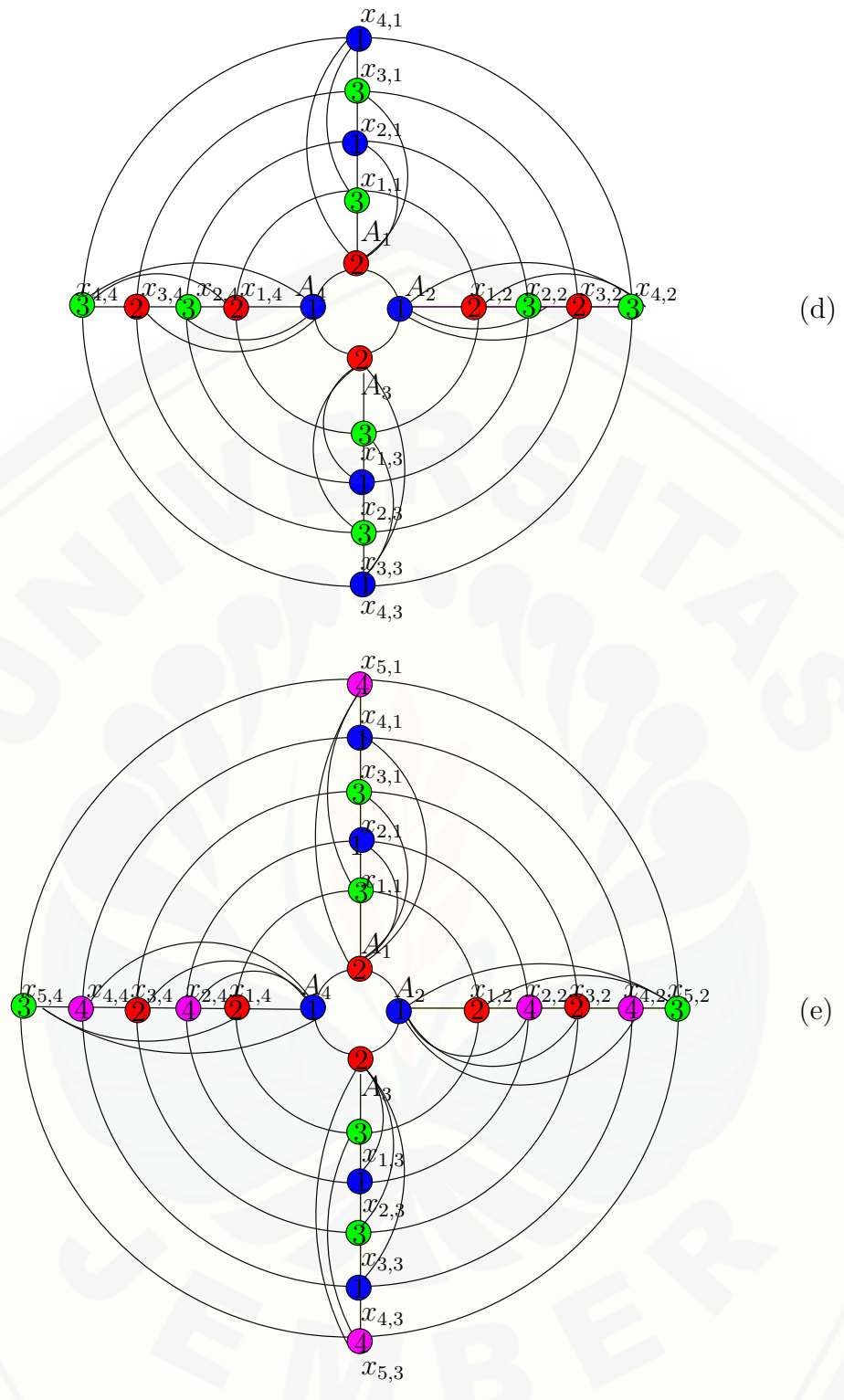


(a)



(b)

Gambar 4.20 (a) Pewarnaan titik $(W_4 \square C_3)$ (b) Pewarnaan titik $(W_5 \square C_3)$



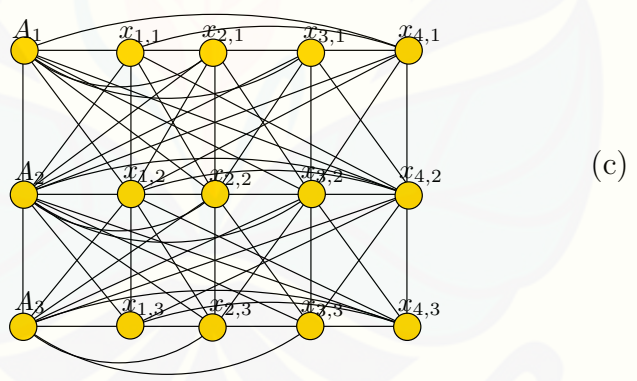
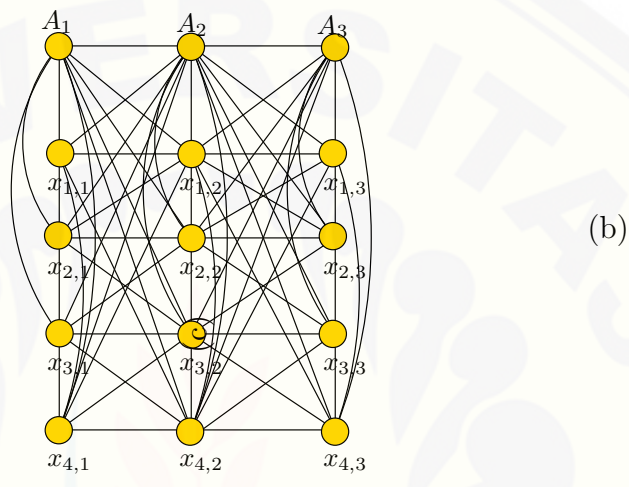
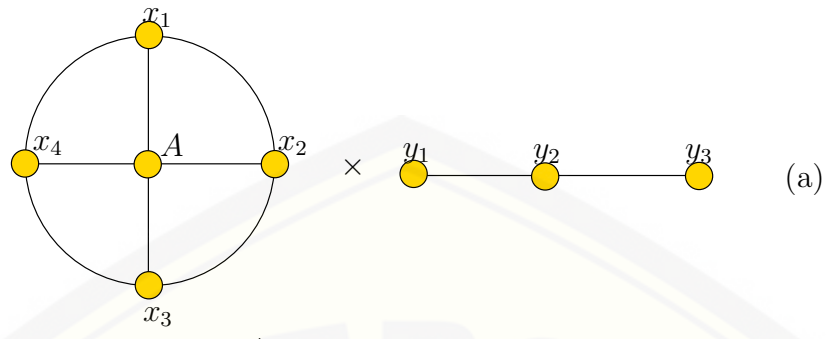
Gambar 4.21 (a) Pewarnaan titik $(W_4 \square C_4)$ (b) Pewarnaan titik $(W_5 \square C_4)$

ganjil. □

Observasi 4.1.10. Misal diketahui G adalah graf roda W_n dengan $V(W_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan graf lintasan dengan $V(P_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$. Graf G adalah composition dari graf roda dan graf lintasan yang dinotasikan $G = (W_n[P_m])$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{A_j, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_j x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_j x_{i,j-1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j+1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i-1,j+1}; 2 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{n,j} x_{1,j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{n,j+1} x_{1,j}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_j A_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_j x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{1,j} x_{n,j}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\}$, sehingga $|V| = p = nm + m$ dan $|E| = q = 7nm + m - 5n - 1$.

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.5.5 dituliskan bahwa, *composition* $(W_n[P_m])$ W_n dan P_m dengan *disjoint* himpunan titik V_1 dan V_2 dan himpunan sisi X_1 dan X_2 adalah graf dengan titik $V_1 \otimes V_2$ dan $x = (x_1, x_2)$ yang *adjacent* dengan $y = (y_1, y_2)$ ketika $[x_1 \text{ adj } y_1]$ atau $[x_1 = y_1 \text{ dan } x_2 \text{ adj } y_2]$. Operasi *composition* merupakan kombinasi dari operasi *tensor product* dan operasi *cartesian product*. Diawali dengan mengkalikan titik-titik pada graf roda dan graf lintasan seperti pada operasi *tensor product* dan operasi *cartesian product*, kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan graf roda dan graf lintasan seperti pada operasi *cartesian product* dan hasil perkalian titik-titik tersebut yang *adjacent* dihubungkan seperti pada operasi *tensor product*. Pengoperasian ini diperoleh himpunan titik dan himpunan sisinya yaitu $V = \{A_j, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_j x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_j x_{i,j-1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j+1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i-1,j+1}; 2 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{n,j} x_{1,j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{n,j+1} x_{1,j}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_j A_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_j x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{1,j} x_{n,j}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\}$.

Dari Observasi 4.1.10 dapat diilustrasikan seperti Gambar 4.22. Untuk Gam-



Gambar 4.22 (a) W_4 dan P_3 (b) $(W_4[P_3])$ (c) $(P_3[W_4])$

bar 4.22 (a) merupakan graf roda dan graf lintasan, kemudian (b) merupakan graf hasil operasi *composition* dari kedua graf tersebut dan (c) merupakan graf hasil operasi *composition* setelah graf dasarnya dibalik yang bertujuan untuk menganalisa sifat komutatifnya. Setelah observasi pada graf hasil operasi *composition* dari graf roda dan graf lintasan, ditentukan bilangan kromatik, pewarnaan titik dinamis dan fungsi pewarnaan titik pada graf hasil operasi *composition* yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1.10. *Misal $G = (W_n[P_m]) = (P_m[W_n])$. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis G adalah*

$$\chi(W_n[P_m]) = \chi_5(W_n[P_m]) = 6, \text{ untuk } n \text{ genap}$$

$$\chi(W_n[P_m]) = \chi_6(W_n[P_m]) = 8, \text{ untuk } n \text{ ganjil}$$

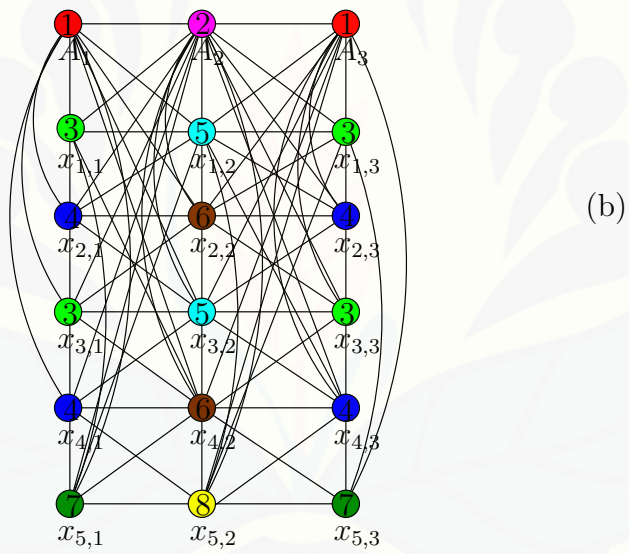
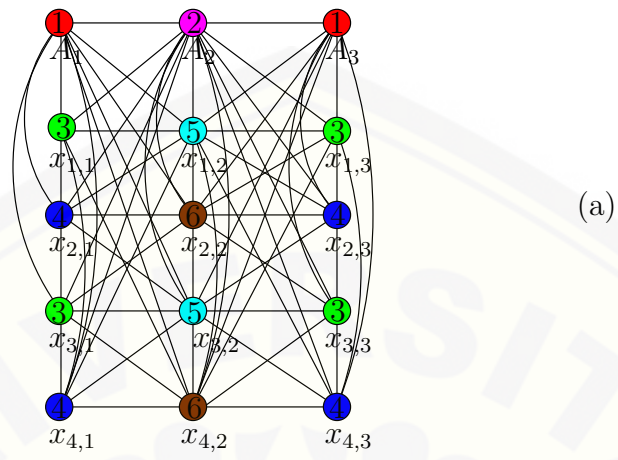
Bukti. Berdasarkan teorema 2.2.1 dinyatakan bahwa $(\chi - 1)p \leq 2q$. Memperhatikan Observasi 4.1.10 maka $|V| = p = m + nm$ dan $|E| = q = 7nm + m - 5n - 1$ maka batas atas dari bilangan kromatik adalah $\chi(W_n[P_m]) \leq (\frac{15nm - 10n + 3m - 2}{nm + m})$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $G = (W_n[P_m]) = (P_m[W_n])$ adalah

untuk n genap dan n ganjil

$$f(A_j) = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 4, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

untuk n genap

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 2, & 1 \leq i \leq n - 1, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 5, & 1 \leq i \leq n - 1, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 6, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$



Gambar 4.23 (a) Pewarnaan titik ($W_4[P_3]$) (b) Pewarnaan titik ($W_5[P_3]$)

untuk n ganjil

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 2, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 5, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 6, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 7, & i = n; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 8, & i = n; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $G = (W_n[P_m]) = (P_m[W_n])$ mempunyai bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $\chi(G = (W_n[P_m]) = (P_m[W_n])) = \chi_5(G = (W_n[P_m]) = (P_m[W_n])) = 6$ untuk n genap dan $\chi(G = (W_n[P_m]) = (P_m[W_n])) = \chi_8(G = (W_n[P_m]) = (P_m[W_n])) = 8$ untuk n ganjil. Pada operasi *composition* ini berlaku sifat komutatif yang diperoleh dari kesamaan graf hasil operasi, kardinalitas, dan bilangan kromatik. \square

Observasi 4.1.11. Misal diketahui graf roda W_n dengan $V(W_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan graf lingkaran dengan $V(C_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(C_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_m y_1\}$, Graf G adalah *composition* dari graf roda dan graf lingkaran yang dinotasikan $G = (W_n[C_m])$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ himpunan titik dan sisinya dapat dituliskan dalam $V = \{A_j, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_j x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_j x_{i,j-1}; 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_1 x_{i,m}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{A_m x_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j+1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i-1,j+1}; 2 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{n,j} x_{1,j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{n,j+1} x_{1,j}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,m} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,m} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{1,m} x_{n,1}\} \cup \{x_{n,m} x_{1,1}\} \cup \{x_{1,m} x_{n,1}\} \cup \{x_{i,m} x_{i-1,1}; 2 \leq i \leq n\} \cup \{A_j A_{j+1}; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{A_m A_1\} \cup \{A_j x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{1,j} x_{n,j}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n\}$, sehingga $|V(W_n[C_m])| = p = nm + m$ dan $|E(W_n[C_m])| = q = 7nm + m$.

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.5.5 dituliskan bahwa, *composition* $(W_n[C_m])$

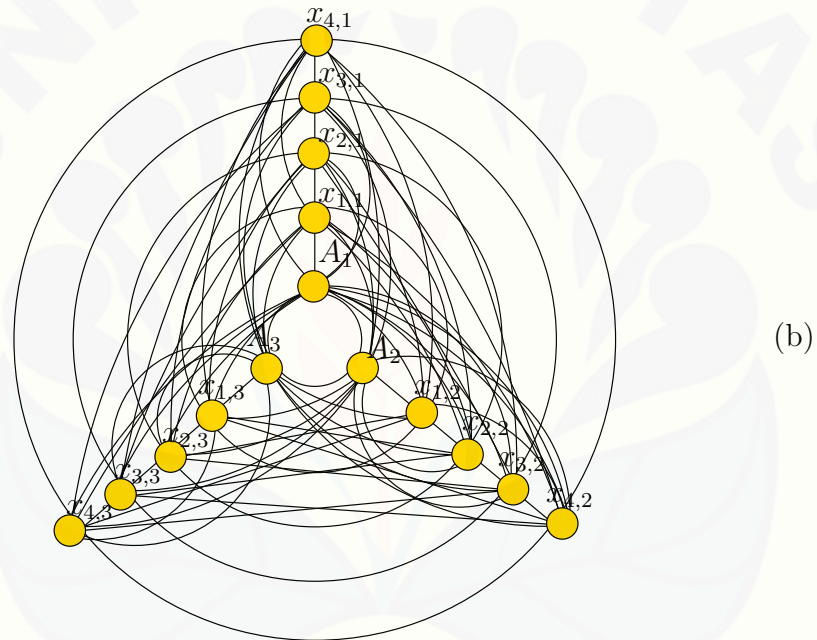
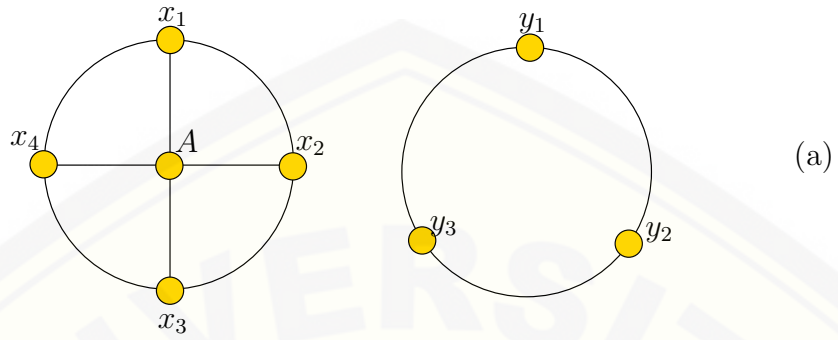
W_n dan C_m dengan *disjoint* himpunan titik V_1 dan V_2 dan himpunan sisi X_1 dan X_2 adalah graf dengan titik $V_1 \otimes V_2$ dan $x = (x_1, x_2)$ yang *adjacent* dengan $y = (y_1, y_2)$ ketika $[x_1 \text{ adj } y_1]$ atau $[x_1 = y_1 \text{ dan } x_2 \text{ adj } y_2]$. Operasi *composition* merupakan kombinasi dari operasi *tensor product* dan operasi *cartesian product*. Diawali dengan mengkalikan titik-titik pada graf roda dan graf lingkaran seperti pada operasi *tensor product* dan operasi *cartesian product*, kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan graf roda dan graf lingkaran seperti pada operasi *cartesian product* dan hasil perkalian titik-titik tersebut yang *adjacent* dihubungkan seperti pada operasi *tensor product*. Pengoperasian ini diperoleh himpunan titik dan himpunan sisinya yaitu $V = \{A_j, x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_j x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_j x_{i,j-1}; 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq m-1\} \cup \{A_1 x_{i,m}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{A_m x_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j+1}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,j} x_{i-1,j+1}; 2 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{n,j} x_{1,j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{n,j+1} x_{1,j}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,m} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,m} x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{1,m} x_{n,1}\} \cup \{x_{n,m} x_{1,1}\} \cup \{x_{1,m} x_{n,1}\} \cup \{x_{i,m} x_{i-1,1}; 2 \leq i \leq n\} \cup \{A_j A_{j+1}; 1 \leq i \leq m-1\} \cup \{A_m A_1\} \cup \{A_j x_{i,j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{1,j} x_{n,j}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,m} x_{i,1}; 1 \leq i \leq n\}$.

Dari Observasi 4.1.11 dapat diilustrasikan seperti Gambar 4.24. Untuk Gambar 4.24 (a) merupakan graf roda dan graf lingkaran, kemudian (b) merupakan graf hasil operasi *composition* dari kedua graf tersebut dan untuk analisa sifat komutatifnya sama dengan graf hasil operasi *composition* pada graf roda dan graf lintasan. Setelah observasi pada graf hasil operasi *composition* dari graf roda dan graf lingkaran, ditentukan bilangan kromatik, pewarnaan titik dinamis dan fungsi pewarnaan titik pada graf hasil operasi *composition* yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1.11. *Misal G adalah composition dari graf roda dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis G adalah*

$$\chi(W_n[C_m]) = \chi_3(W_n[C_m]) = 9, \text{ untuk } n \text{ genap pada saat } m \text{ ganjil}$$

$$\chi(W_n[C_m]) = \chi_5(W_n[C_m]) = 6, \text{ untuk } n \text{ genap pada saat } m \text{ genap}$$



Gambar 4.24 (a) W_4 dan C_3 (b) $(W_4[C_3])$

$\chi(W_n[C_m]) = \chi_5(W_n[C_m]) = 8$, untuk n ganjil pada saat m genap

$\chi(W_n[C_m]) = \chi_7(W_n[C_m]) = 12$, untuk n ganjil pada saat m ganjil

Bukti. Berdasarkan teorema 2.2.1 dinyatakan bahwa $(\chi - 1)p \leq 2q$. Sesuai dengan Observasi 4.1.11 didapatkan $|V| = p = nm + m$ dan $|E| = q = 7nm + m$ maka batas atas dari bilangan kromatik adalah $\chi(W_n[C_m]) \leq (\frac{15nm+3m}{nm+m})$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $G = (W_n[C_m])$ adalah

untuk m ganjil

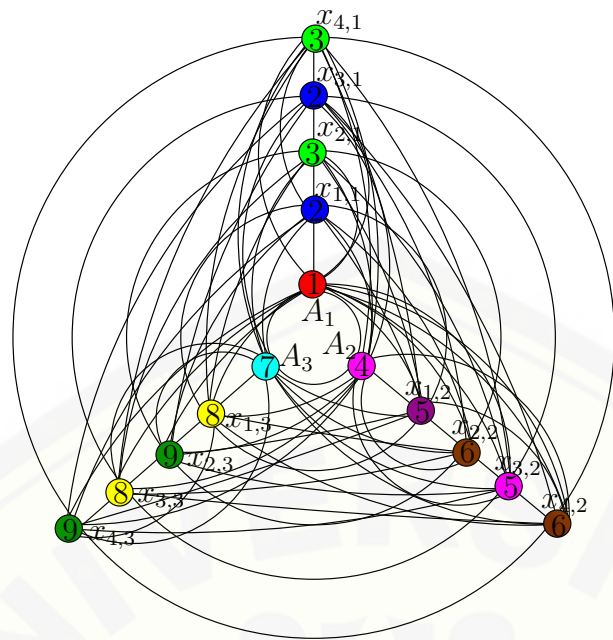
$$f(A_j) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil} \\ 4, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \\ 7, & i = n \end{cases}$$

untuk m ganjil dan n genap

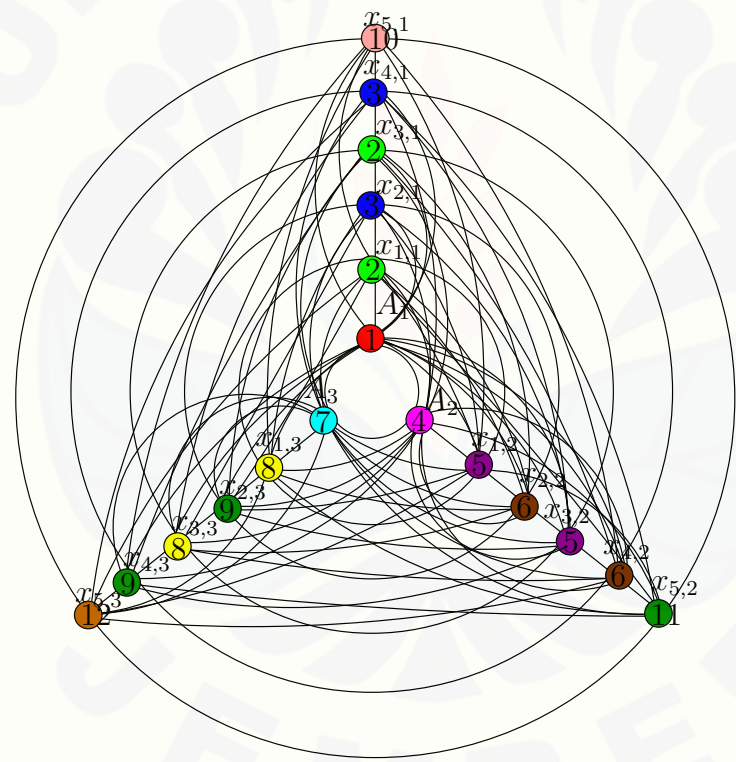
$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 2, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m-1, j \text{ ganjil} \\ 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m-1, j \text{ ganjil} \\ 5, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 6, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 8, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}; j = m \\ 9, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; j = m \end{cases}$$

untuk n ganjil dan m ganjil

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 2, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m-1, j \text{ ganjil} \\ 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m-1, j \text{ ganjil} \\ 5, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 6, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 8, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil}; j = m \\ 9, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; j = m \\ 10, & i = n; 1 \leq j \leq m-1, j \text{ ganjil} \\ 11, & i = n; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 12, & i = n; j = m \end{cases}$$

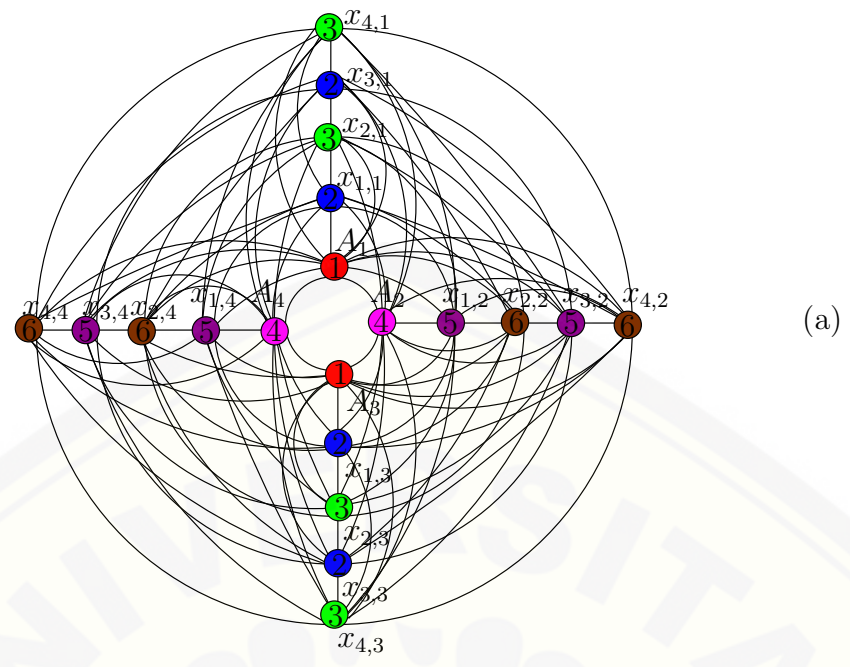


(a)

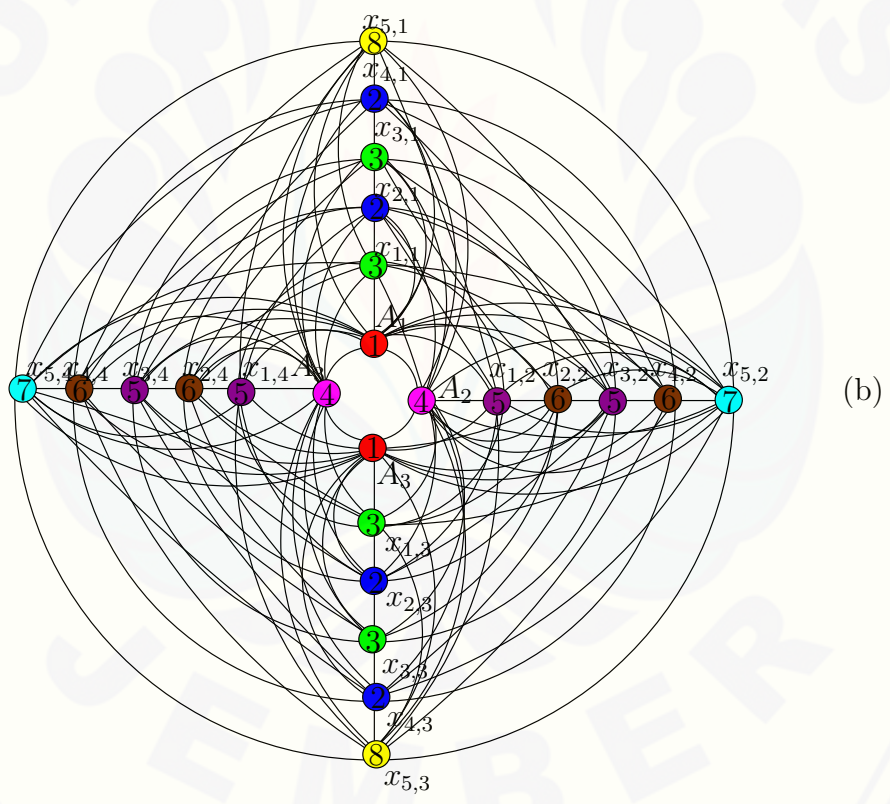


(b)

Gambar 4.25 (a) Pewarnaan titik ($W_4[C_3]$) (b) Pewarnaan titik ($W_5[C_3]$)



(a)



(b)

Gambar 4.26 (a) Pewarnaan titik ($W_4[C_4]$) (b) Pewarnaan titik ($W_5[C_4]$)

untuk n genap dan n ganjil pada saat m genap

$$f(A_j) = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 4, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

untuk n genap dan m genap

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 2, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 5, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 6, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$

untuk n ganjil dan m genap

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 2, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 5, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 6, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 7, & i = n; 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \\ 8, & i = n; 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $W_n[C_m]$ mempunyai bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $\chi(W_n[C_m]) = \chi_3(W_n[C_m]) = 9$ untuk n genap pada saat m ganjil, $\chi(W_n[C_m]) = \chi_5(W_n[C_m]) = 6$ untuk n genap pada saat m genap, $\chi(W_n[C_m]) = \chi_5(W_n[C_m]) = 8$ untuk n ganjil pada saat m genap, dan $\chi(W_n[C_m]) = \chi_7(W_n[C_m]) = 12$ untuk n genap pada saat m ganjil. Pada operasi *composition* ini berlaku sifat komutatif yang diperoleh dari kesamaan graf hasil operasi, kardinalitas, dan bilangan kromatik. \square

Observasi 4.1.12. Misal diketahui G adalah graf roda W_n dengan $V(W_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan graf lintasan dengan $V(P_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq m\}$ dan $E(P_m) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq m-1\}$. Graf G adalah amalgamation dari graf hasil operasi graf roda dan graf lintasan

yang dinotasikan $Amal(W_n + P_m), v = 1, r$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{A_k, x_i^k, y_j^k, y_1; 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\}$ dan $E = \{A_k x_i^k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A_k y_1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A_k y_j; 2 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_i^k x_{i+1}^k; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_i^k y_j^k; 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_i^k y_j + 1^k; 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{y_1 x_i^k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq r\} \cup \{y_j^k y_j + 1^k; 2 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{y_1 y_2^k; 1 \leq k \leq r\}$, sehingga $|V| = p = nr + mr + 1$ dan $|E| = q = 2nmr + nr + 2mr - r$.

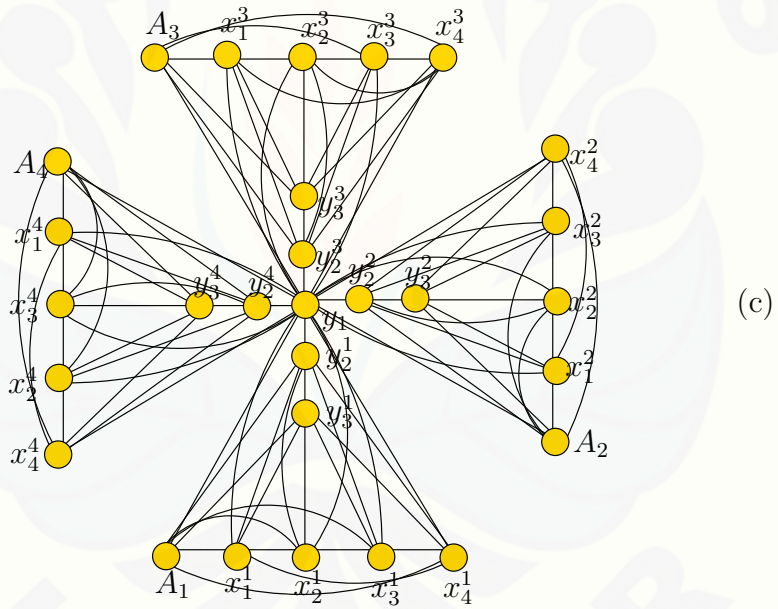
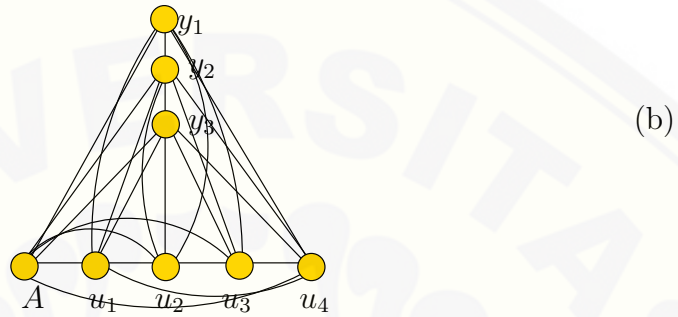
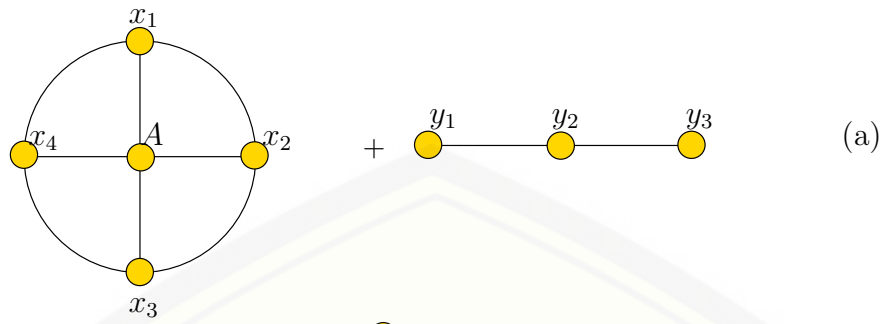
Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.5.7 dituliskan bahwa *amalgamation* dinotasikan dengan $Amal(H_i, v_{0i})$. Misalkan H_i adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap H_1 mempunyai suatu titik v_{0i} yang disebut titik terminal. Dimulai dengan menduplikasi graf hasil operasi *joint* dari graf roda dan graf lintasan sebanyak r , setelah itu semua duplikasi dilekatkan pada satu titik yang menjadi titik terminalnya. Graf hasil operasi *amalgamation* tersebut diperoleh $V = \{A_k, x_i^k, y_j^k, y_1; 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\}$ dan $E = \{A_k x_i^k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A_k y_1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A_k y_j; 2 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_i^k x_{i+1}^k; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_i^k y_j^k; 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_i^k y_j + 1^k; 1 \leq i \leq n; 2 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{y_1 x_i^k; 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq r\} \cup \{y_j^k y_j + 1^k; 2 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{y_1 y_2^k; 1 \leq k \leq r\}$.

Setelah observasi pada graf hasil operasi *amalgamation* dari graf roda dan graf lintasan, ditentukan bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan titik pada graf hasil operasi *amalgamation* yang disajikan dalam teorema berikut.

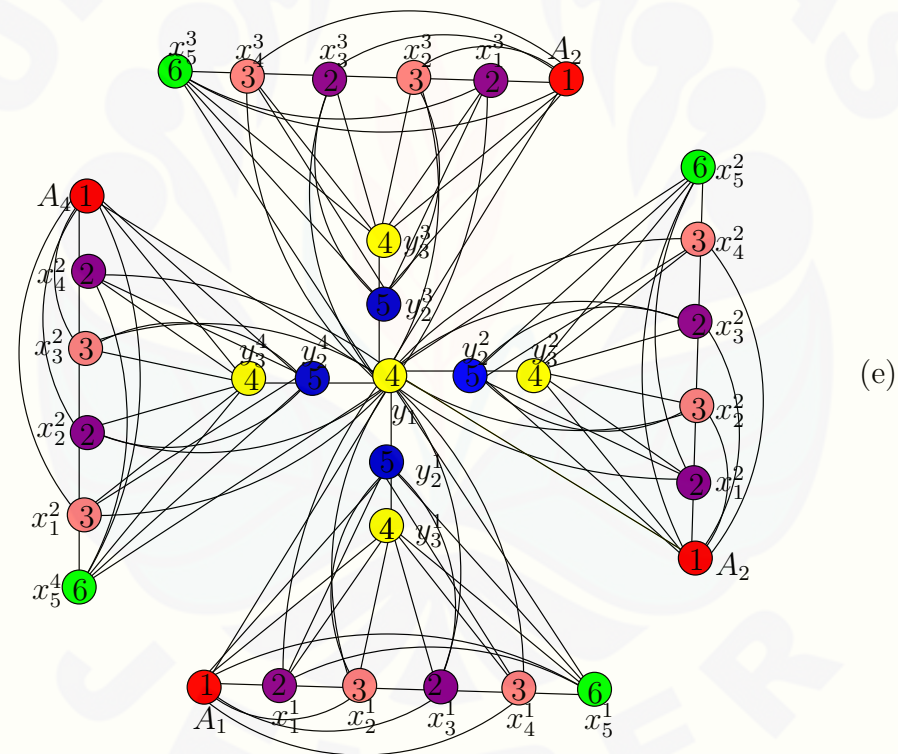
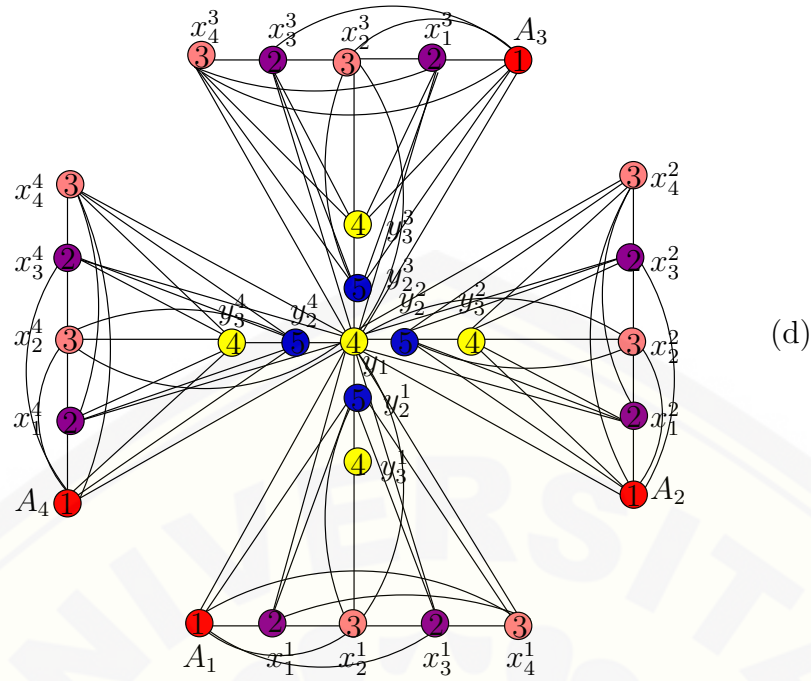
Teorema 4.1.12. Misal G adalah *amalgamation* dari hasil operasi *joint* graf roda dan graf lintasan. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $G = (Amal(W_n + P_m, v = 1, r))$ adalah

$$\chi(Amal(W_n + P_m, v = 1, r)) = \chi_4(Amal(W_n + P_m, v = 1, r)) \begin{cases} 5, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 6, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Bukti. Berdasarkan teorema 2.2.1 dinyatakan bahwa $(\chi - 1)p \leq 2q$. Perhatikan Observasi 4.1.12 maka $|V| = p = nr + mr + 1$ dan $|E| = q =$



Gambar 4.27 (a) W_4 dan P_3 (b) $(W_4 + P_3)$ (c) $(Amal(W_n + P_m), v = 1, r)$



Gambar 4.28 (a) Pewarnaan titik $Amal(W_4 + P_3, v = 1, 4)$ (b) Pewarnaan titik $Amal(W_5 + P_3, v = 1, 4)$

$2nm + n + 2m - 2$ maka batas atas dari bilangan kromatik adalah $\chi_{Amal}(W_n + P_m, v = 1, r) \leq \left(\frac{r(4nmr+3nr+3mr-2r+1)}{nr-mr+1}\right)$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $G = Amal(W_n + P_m, v = 1, r)$ adalah $f(A_k) = 1$

$$f(y_1) = 4$$

$$f(y_{j^k}) = \begin{cases} 4, & 2 \leq j \leq m, j \text{ ganjil}; 1 \leq k \leq r \\ 5, & 2 \leq j \leq m, j \text{ genap}; 1 \leq k \leq r \end{cases}$$

untuk n genap

$$f(x_{i^k}) = \begin{cases} 2, & 1 \leq i \leq n - 1, j \text{ ganjil}; 1 \leq k \leq r \\ 3, & 1 \leq i \leq n - 1, j \text{ genap}; 1 \leq k \leq r \end{cases}$$

$$f(p) = 3$$

untuk n ganjil

$$f(x_{i^k}) = \begin{cases} 2, & 1 \leq i \leq n - 1, j \text{ ganjil}; 1 \leq k \leq r \\ 3, & 1 \leq i \leq n - 1, j \text{ genap}; 1 \leq k \leq r \end{cases}$$

$$f(p) = 6$$

Sehingga terbukti bahwa graf $Amal(W_n + P_m, v = 1, r)$ mempunyai bilangan kromatik $\chi(Amal(W_n + P_m, v = 1, r)) = 5$ untuk n genap dan $\chi(Amal(W_n + P_m, v = 1, r)) = 6$ untuk n ganjil. Pewarnaan titik dinamis graf $Amal(W_n + P_m, v = 1, r)$ yaitu $\chi_r(Amal(W_n + P_m, v = 1, r)) = 4$. \square

Observasi 4.1.13. Misal G adalah amalgamation dari graf hasil operasi joint graf bintang dan graf lintasan. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{A_k, x_1, x_i^k, y_j^k; 2 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\}$ dan $E = \{x_1 A_k; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A_k x_{i^k}; 2 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_i y_j^k; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\} \cup \{y_j^k x_i; 2 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A_k y_j^k; 1 \leq k \leq r; 1 \leq j \leq m\}$

$j \leq m\} \cup \{y_j^k y_j + 1^k; 1 \leq k \leq r; 1 \leq j \leq m - 1\}$.

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.5.7 dituliskan bahwa *amalgamation* dinotasikan dengan $Amal(H_i, v_{0i})$. Misalkan H_i adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap H_1 mempunyai suatu titik v_{0i} yang disebut titik terminal. Dimulai dengan menduplikasi graf hasil operasi *joint* dari graf bintang dan graf lintasan sebanyak r , setelah itu semua duplikasi dilekatkan pada satu titik yang menjadi titik terminalnya. Graf hasil operasi *amalgamation* tersebut diperoleh $V = \{A_k, x_1, x_i^k, y_j^k; 2 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\}$ dan $E = \{x_1 A_k; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A_k x_{ik}; 2 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_i y_j^k; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\} \cup \{y_j^k x_i; 2 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A_k y_j^k; 1 \leq k \leq r; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j^k y_j + 1^k; 1 \leq k \leq r; 1 \leq j \leq m - 1\}$.

Setelah observasi pada graf hasil operasi *amalgamation* dari graf bintang dan graf lintasan, ditentukan bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan titik pada graf hasil operasi *amalgamation* yang disajikan dalam teorema berikut.

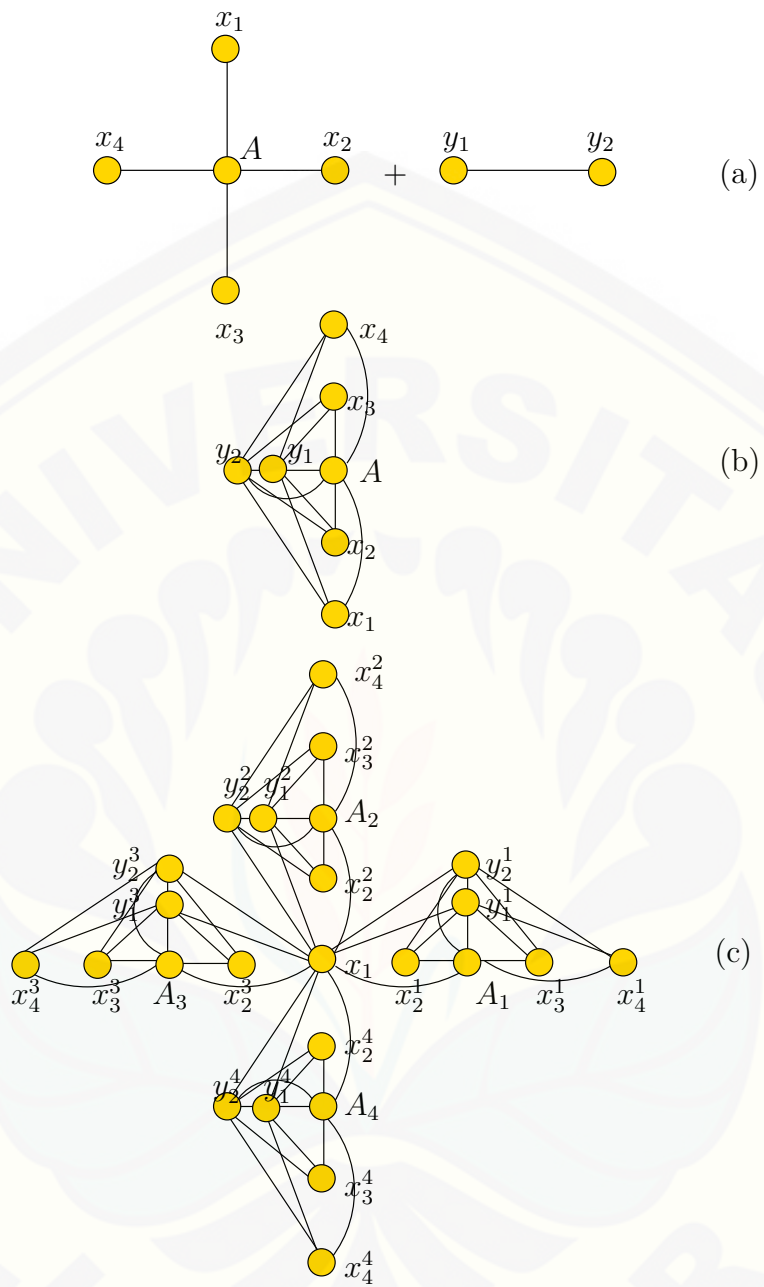
Teorema 4.1.13. *Misal G adalah amalgamation dari hasil operasi joint graf bintang dan graf lintasan. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $G = (Amal(S_n + P_m, v = 1, r))$ adalah*

$$\chi(Amal(S_n + P_m, v = 1, r)) = \chi_3(Amal(S_n + P_m, v = 1, r)) = 4$$

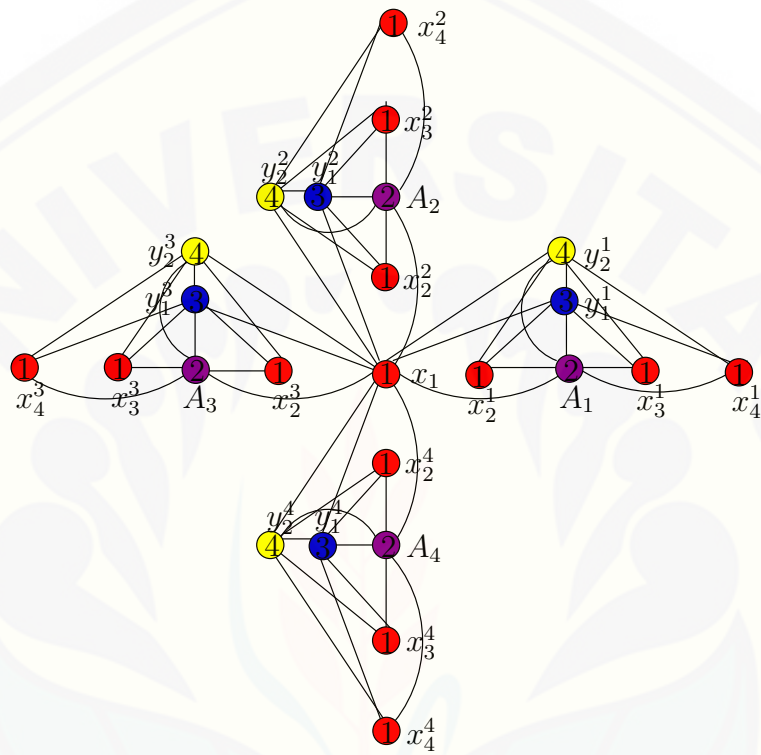
Bukti. Berdasarkan Teorema 2.2.1 dinyatakan bahwa $(\chi - 1)p \leq 2q$. Memperhatikan Observasi 4.1.13 maka $|V| = p = 1 + r(n + m)$ dan $|E| = q = r(nm + n + 2m - 1)$ maka batas atas dari bilangan kromatik adalah $\chi Amal(W_n + P_m, v = 1, r) \leq (\frac{r(2nm+3n+5m-2)+1}{nr+mr+1})$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $G = Amal(S_n + P_m, v = 1, r)$ adalah

$$f(A_k) = 1, \quad 1 \leq k \leq r$$

$$f(x_1) = 1$$



Gambar 4.29 (a) S_4 dan P_2 (b) S_4+P_2 (c) $(Amal(S_4 + P_2), v = 1, 4)$



Gambar 4.30 Pewarnaan titik $Amal(S_4 + P_3, v = 1, 4)$

$$f(x_{ik}) = 1, \quad 2 \leq i \leq n; \quad 1 \leq k \leq r$$

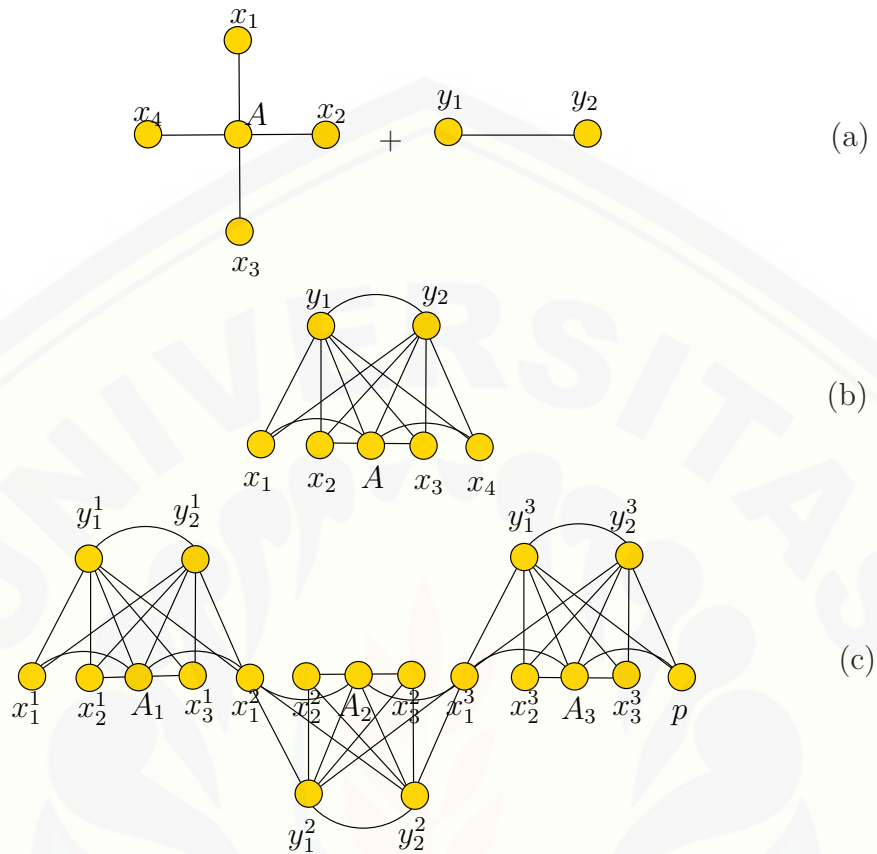
$$f(y_{jk}) = \begin{cases} 3, & 1 \leq k \leq r, \quad j \text{ ganjil} \\ 4, & 1 \leq k \leq r, \quad j \text{ genap} \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $Amal(S_n + P_m, v = 1, r)$ mempunyai bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $\chi(Amal(S_n + P_m, v = 1, r)) = \chi_3(Amal(S_n + P_m, v = 1, r)) = 4$. \square

Observasi 4.1.14. Misal diketahui graf bintang S_n dengan $V(S_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(S_n) = \{x_i A; 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan graf lintasan dengan $V(P_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\}$. Graf G adalah *shackle* dari graf bintang dan graf lintasan yang dinotasikan $G = Shack(S_n + P_m, r)$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{A_k, x_1^k, x_i^k, y_j^k, p; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\}$ dan $E = \{A_k x_i^k; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A_k x_i^{k+1}; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A_r p\} \cup \{y_j^k y_{j+1}^k; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A^k y_j^k; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_i^k y_j^k; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_1^{k+1} y_j^k; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r - 1\} \cup \{p y_j^r; 1 \leq j \leq m\}$, sehingga $|V| = p = nr + mr + 1$ dan $|E| = q = nmr + nr + 2mr - r$.

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.5.6 disebutkan bahwa *shackel* dinotasikan dengan $Shack(G_1, G_2, \dots, G_k)$ merupakan graf yang dibangun dari graf terhubung nontrivial dan order graf (G_1, G_2, \dots, G_k) sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq i, j \leq k$ dengan $|i - j| \geq 2$, G_i dan G_j tidak memiliki titik umum, dan untuk setiap $1 \leq i \leq k - 1$, G_i dan G_{i+1} tepat satu titik yang sama, disebut *vertex linkage* dimana $k - 1$ linkage titik semua berbeda. Dimulai dengan menduplikasi graf hasil operasi *joint* dari graf bintang dan graf lintasan sebanyak k , setelah itu semua duplikasi diletakkan secara paralel dan terdapat titik pelekatannya dimana titik pelekatannya harus berbeda satu sama lain. Graf hasil operasi *shackle* tersebut diperoleh $V = \{A_k, x_1^k, x_i^k, y_j^k, p; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\}$ dan $E = \{A_k x_i^k; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A_k x_i^{k+1}; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A_r p\} \cup \{y_j^k y_{j+1}^k; 1 \leq j \leq m - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A^k y_j^k; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\}$

$$\cup \{x_i^k y_j^k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_1^{k+1} y_j^k; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r-1\} \\ \cup \{p y_j^r; 1 \leq j \leq m\}.$$

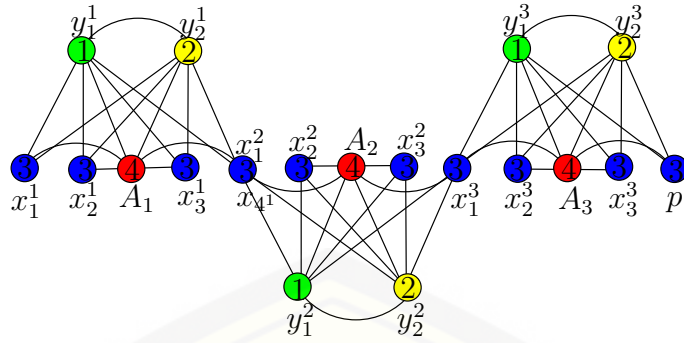


Gambar 4.31 (a) S_n dan P_m (b) $(S_n + P_m)$ (c) $Shack(S_n + P_m, r)$

Setelah observasi pada graf hasil operasi *shackle* dari graf roda dan graf lingkaran, ditentukan bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan titik pada graf hasil operasi *shackle* yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.1.14. *Misal G adalah shackle dari graf hasil operasi joint graf bintang dan graf lintasan. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $G = (Shack(S_n + P_m, r))$ adalah*

$$\chi(Shack(S_n + P_m, r)) = \chi_3(Shack(S_n + P_m, r)) = 4$$



Gambar 4.32 Pewarnaan titik $Shack(S_4 + P_2, v = 1, 3)$

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.2.1 dinyatakan bahwa $(\chi - 1)p \leq 2q$. Memperhatikan Observasi 4.1.14 maka $|V| = p = nr + mr + 1$ dan $|E| = q = 2nmr + nr + 2mr - r$ maka batas atas dari bilangan kromatik adalah $\chi_{Shack}(S_n + P_m, r) \leq (\frac{2nmr+3nr+5mr-2r+1}{nr+mr+1})$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $G = (Shack(S_n + P_m, r))$ adalah $f(A_k) = 4$

$$f(x_i^k) = 3, 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq r$$

$$f(y_i^k) = \begin{cases} 1, 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil}; 1 \leq k \leq r \\ 2, 1 \leq i \leq m, j \text{ genap}; 1 \leq k \leq r \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $Shack(S_n + P_m, v = r)$ mempunyai bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $\chi(Shack(S_n + P_m, v = r)) = \chi_3(Shack(S_n + P_m, v = r)) = 4$. □

Observasi 4.1.15. Misal diketahui graf roda W_n dengan $V(W_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \cup\{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{A x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan graf lingkaran dengan $V(C_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(C_m) = \cup\{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{y_m y_1\}$. Graf G adalah shackle dari graf roda dan graf lingkaran yang dinotasikan $G = Shack(W_n + C_m, r)$, maka untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V = \{A_k, x_i^k, y_j^k; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_k x_i^k; 1 \leq i \leq n - 1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A_k y_j^k; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\}$

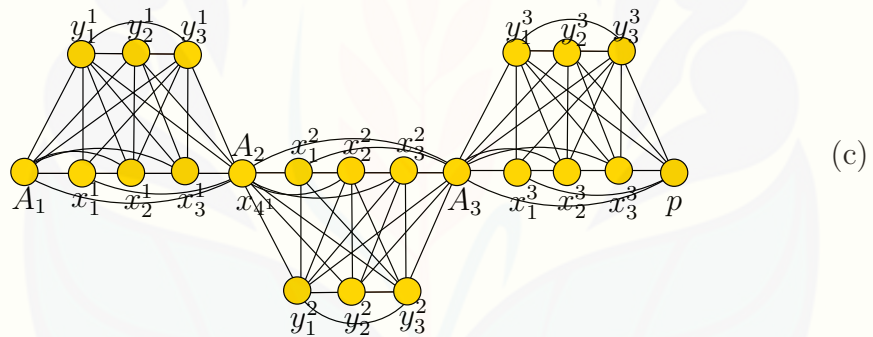
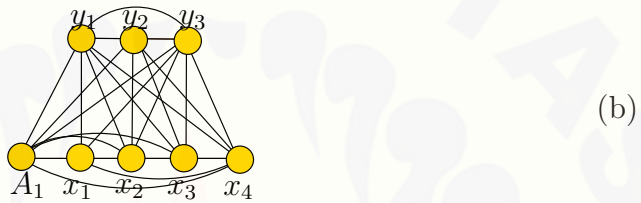
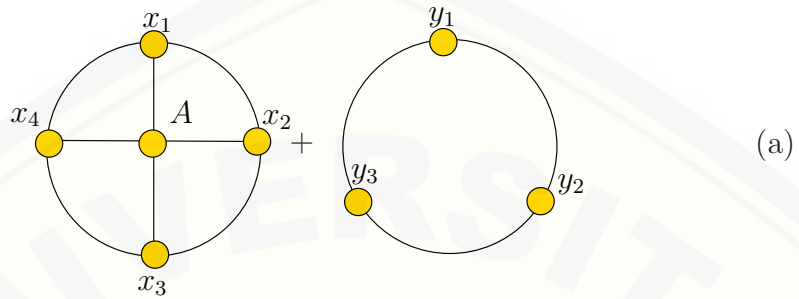
$\cup \{x_i^k x_{i+1}^k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_1^k A^{k+1}; 1 \leq k \leq r-1\} \cup \{x_i^k y_j^k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\} \cup \{y_j^k y_{j+1}^k; 1 \leq j \leq m-1; 1 \leq k \leq r\}$
 $\cup \{y_1^k y_m^k; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A_k A_{k+1}; 1 \leq k \leq r-1\} \cup \{A_{k+1} y_m^k; 1 \leq k \leq r-1\} \cup \{p A_r\}$
 $\cup \{p x_1^r\} \cup \{p x_{n-1}^r\} \cup \{A_{k+1} y_j^k; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r-1\} \cup \{p y_j^r; 1 \leq j \leq m\},$
 sehingga $|V| = p = nr + mr + 1$ dan $|E| = q = nmr + 2nr + 2mr$.

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.5.7 disebutkan bahwa *shackel* dinotasikan dengan $Shack(G_1, G_2, \dots, G_k)$ merupakan graf yang dibangun dari graf terhubung nontrivial dan order graf (G_1, G_2, \dots, G_k) sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq i, j \leq k$ dengan $|i - j| \geq 2$, G_i dan G_j tidak memiliki titik umum, dan untuk setiap $1 \leq i \leq k-1$, G_i dan G_{i+1} tepat satu titik yang sama, disebut *vertex linkage* dimana $k-1$ linkage titik semua berbeda. Dimulai dengan menduplikasi graf hasil operasi *joint* dari graf roda dan graf lingkaran sebanyak k , setelah itu semua duplikasi diletakkan secara paralel dan terdapat titik pelekatannya dimana titik pelekatannya harus berbeda satu sama lain. Dari pengoperasian *shackle* tersebut diperoleh $V = \{A_k, x_i^k, y_j^k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E = \{A_k x_i^k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A_k y_j^k; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_i^k x_{i+1}^k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{x_1^k A^{k+1}; 1 \leq k \leq r-1\} \cup \{x_i^k y_j^k; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r\} \cup \{y_j^k y_{j+1}^k; 1 \leq j \leq m-1; 1 \leq k \leq r\} \cup \{y_1^k y_m^k; 1 \leq k \leq r\} \cup \{A_k A_{k+1}; 1 \leq k \leq r-1\} \cup \{A_{k+1} y_m^k; 1 \leq k \leq r-1\} \cup \{p A_r\} \cup \{p x_1^r\} \cup \{p x_{n-1}^r\} \cup \{A_{k+1} y_j^k; 1 \leq j \leq m; 1 \leq k \leq r-1\} \cup \{p y_j^r; 1 \leq j \leq m\}$.

Setelah observasi pada graf hasil operasi *shackle* dari graf roda dan graf lingkaran, ditentukan bilangan kromatik dan fungsi pewarnaan titik pada graf hasil operasi *shackle* yang disajikan dalam teorema berikut.

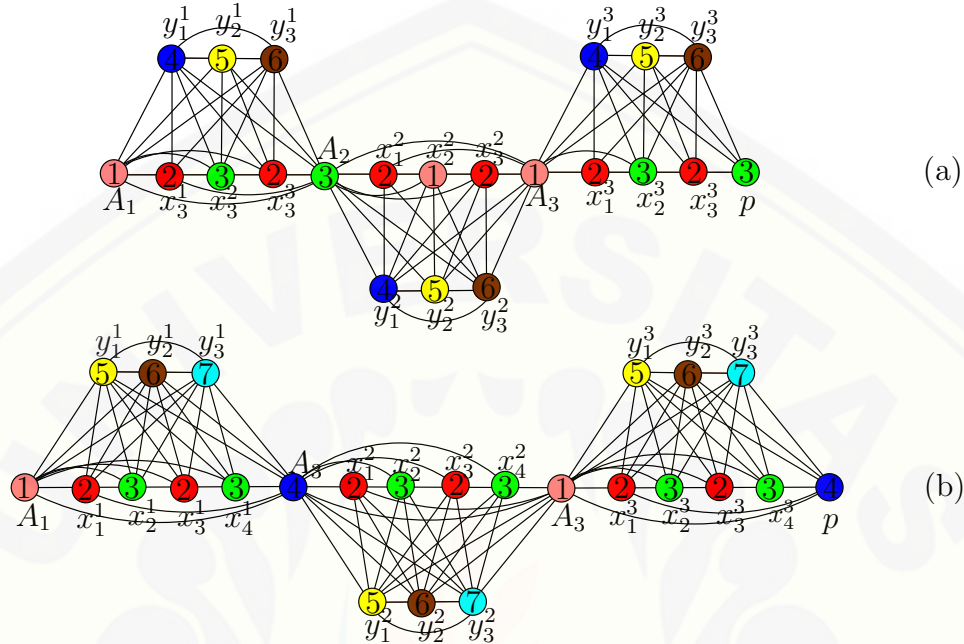
Teorema 4.1.15. Misal G adalah *shackle* dari graf hasil operasi *joint* graf roda dan graf lingkaran. Untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $G = (Shack(W_n + C_m, r))$ adalah

$$\chi(Shack(W_n + C_m, r)) = \chi_4(Shack(W_n + C_m, r)) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } n \text{ genap } m \text{ genap} \\ 6, & \text{untuk } n \text{ ganjil } m \text{ genap} \end{cases}$$



Gambar 4.33 (a) W_4 dan C_3 (b) $(W_4$ dan $C_3)$ (c) $Shack(W_4 + C_3, v = 3)$

$$\chi(Shack(W_n+C_m, r)) = \chi_5(Shack(W_n+C_m, r)) = \begin{cases} 6, & \text{untuk } n \text{ genap } m \text{ ganjil} \\ 7, & \text{untuk } n \text{ ganjil } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

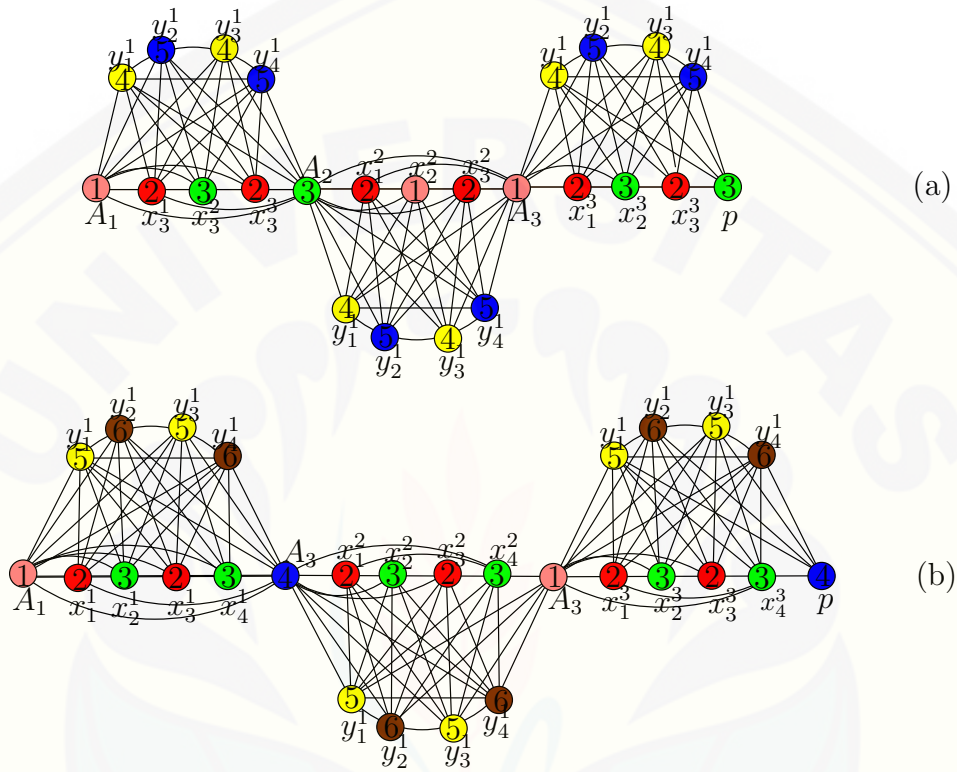


Gambar 4.34 (a) Pewarnaan titik $Shack(W_4 + C_3, v = 3)$ (b) Pewarnaan titik $Shack(W_5 + C_3, v = 3)$

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.2.1 dinyatakan bahwa $(\chi - 1)p \leq 2q$. Memperhatikan Observasi 4.1.15 maka $|V| = p = nr + mr + 1$ dan $|E| = q = nmr + 2nr + 2mr$ maka batas atas dari bilangan kromatik adalah $\chi_{Shack(W_n + C_m, r)} \leq \left(\frac{2nmr + 3nr + 3mr + 1}{nr + mr + 1}\right)$. Fungsi pewarnaan titik pada graf $G = (Shack(W_n + C_m, v = r))$ adalah

untuk n genap dan m ganjil

$$f(A_k) = \begin{cases} 1, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil} \\ 3, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap} \end{cases}$$



Gambar 4.35 (a) Pewarnaan titik $Shack(W_4 + C_4, v = 1, 3)$ (b) Pewarnaan titik $Shack(W_5 + C_4, v = 1, 3)$

$$f(p) = 3$$

$$f(x_i^k) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ genap}; 1 \leq k \leq r, k \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil}; 1 \leq k \leq r \\ 1, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ genap}; 1 \leq k \leq r, k \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$f(y_j^k) = \begin{cases} 4, & 1 \leq j \leq m-1, j \text{ ganjil} \\ 5, & 1 \leq j \leq m-1, j \text{ genap} \\ 6, & j = m \end{cases}$$

untuk n ganjil dan m ganjil

$$f(A_k) = \begin{cases} 1, & 1 \leq k \leq r, k \text{ ganjil} \\ 4, & 1 \leq k \leq r, k \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(p) = 4$$

$$f(x_i^k) = \begin{cases} 2, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil}; 1 \leq k \leq r \\ 3, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ genap}; 1 \leq k \leq r \end{cases}$$

$$f(y_j^k) = \begin{cases} 5, & 1 \leq j \leq m-1, j \text{ ganjil}; 1 \leq k \leq r \\ 6, & 1 \leq j \leq m-1, j \text{ genap}; 1 \leq k \leq r \\ 7, & j = m \end{cases}$$

untuk n genap dan m genap

$$f(A_k) = \begin{cases} 1, & 1 \leq k \leq r, k \text{ ganjil} \\ 3, & 1 \leq k \leq r, k \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(p) = 3$$

$$f(x_i^k) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ genap}; 1 \leq k \leq r, k \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil}; 1 \leq k \leq r \\ 2, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ genap}; 1 \leq k \leq r, k \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$f(y_j^k) = \begin{cases} 4, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil}; 1 \leq k \leq r \\ 5, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap}; 1 \leq k \leq r \end{cases}$$

untuk n ganjil dan m genap

$$f(A_k) = \begin{cases} 1, & 1 \leq k \leq r, k \text{ ganjil} \\ 3, & 1 \leq k \leq r, k \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(p) = 3$$

$$f(x_i^k) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ genap}; 1 \leq k \leq r, k \text{ genap} \\ 2, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil}; 1 \leq k \leq r \\ 2, & 1 \leq i \leq n-1, i \text{ genap}; 1 \leq k \leq r, k \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$f(y_j^k) = \begin{cases} 4, & 1 \leq j \leq m, j \text{ ganjil}; 1 \leq k \leq r \\ 5, & 1 \leq j \leq m, j \text{ genap}; 1 \leq k \leq r \end{cases}$$

Sehingga terbukti bahwa graf $Shack(W_n + C_m, v = r)$ mempunyai bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis $\chi(Shack(W_n + C_m, v = r)) = \chi_4(Shack(W_n + C_m, v = r)) = 5$ untuk n genap pada saat m genap, dan 6 untuk n ganjil pada saat m genap. Kemudian $\chi(Shack(W_n + C_m, v = r)) = \chi_5(Shack(W_n + C_m, v = r)) = 6$ untuk n genap pada saat m ganjil, dan 7 untuk n ganjil pada saat m ganjil. \square

4.2 Pembahasan

Penelitian ini bertujuan untuk mencari bilangan kromatik, fungsi pewarnaan titik, batas atas dari operasi graf serta menentukan bilangan kromatik r -

Dynamic Vertex Coloring. Selain itu, peneliti juga menganalisa sifat komutatif yang dimiliki operasi graf. Graf-graf dasar yang digunakan adalah graf roda, graf bintang, graf lingkaran dan graf lintasan. Bilangan kromatik untuk graf roda W_n adalah 3 untuk n genap dan 4 untuk n ganjil, bilangan kromatik dari graf bintang S_n adalah 2, graf lingkaran C_n mempunyai bilangan kromatik 2 untuk n genap dan 3 untuk n ganjil, serta bilangan kromatik untuk graf lintasan P_n adalah 2. Setelah dilakukan pengoperasian yaitu pada operasi *joint* ($W_n + P_m$) menghasilkan bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis dengan $r=4$ yaitu 5 untuk n genap dan 6 untuk n ganjil. Setelah dilakukan pengoperasian yaitu pada operasi *joint* ($W_n + C_m$) menghasilkan bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis dengan $r=4$ yaitu 5 untuk n genap pada saat m genap dan 6 untuk n ganjil pada saat m genap. Sedangkan untuk $r=5$ yaitu 6 untuk n genap pada saat m ganjil dan 7 untuk n ganjil pada saat m ganjil. Berdasarkan hal tersebut maka bilangan kromatik hasil dari *joint* dua graf adalah penjumlahan dari masing-masing graf dasarnya yaitu $\chi(G_1 + G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$.

Pada operasi *crown product* dilakukan pengoperasian *crown product* ($W_n \odot P_m$) menghasilkan bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis dengan $r=2$ yaitu 3 untuk m genap dan 4 untuk m ganjil. Operasi *crown product* ($P_m \odot W_n$) menghasilkan bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis dengan $r=3$ yaitu 4 untuk n genap dan untuk n ganjil. Bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis yang dihasilkan dari *crown product* ($W_n \odot C_m$) dengan $r=2$ adalah 4 untuk m genap dan $r=3$ yaitu 4 untuk m ganjil.

Sabidussi melakukan penelitian pada tahun 1954 mengenai operasi *cartesian product* yang menghasilkan sebuah teorema yang menyatakan bahwa bilangan kromatik hasil dari operasi *cartesian product* adalah maksimum dari bilangan kromatik graf-graf dasarnya yaitu $\chi(G_1 \otimes G_2) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$. Pada operasi *cartesian product* ($W_n \square P_m$) menghasilkan bilangan kromatik dan pewarnaan dinamis dengan $r=2$ yaitu 3 untuk n genap dan 4 untuk n ganjil. Operasi *cartesian product* ($W_n \square C_m$) menghasilkan bilangan kromatik dan pewarnaan dinamis dengan $r=2$ yaitu 3 untuk m genap dan m ganjil pada saat n genap serta 4 untuk n ganjil pada saat m genap. Bilangan kromatik dan pewarnaan dinamis dengan

$r=3$ adalah 4 untuk n ganjil pada saat m ganjil. Oleh karena itu terbukti bahwa bilangan kromatik hasil operasi *cartesian product* $(W_n \square P_m)$ dan $(W_n \square C_m)$ sesuai dengan teorema yang ditemukan Sabidussi.

Hedetniemi juga melakukan penelitian yang sama pada tahun 1966 pada operasi *tensor product* yang menghasilkan sebuah teorema. Teorema tersebut menyatakan bahwa bilangan kromatik dari operasi *tensor product* adalah minimal dari bilangan kromatik graf dasarnya yaitu $\chi(G_1 \otimes G_2) = \chi(G) = \min\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$. Operasi *tensor product* $(W_n \otimes P_m)$ menghasilkan bilangan kromatik yaitu 2 dan pewarnaan titik dinamis dengan $r=2$ yaitu 4 baik untuk n genap maupun n ganjil. Operasi *tensor product* $(W_n \otimes C_m)$ menghasilkan bilangan kromatik yaitu 2 untuk m genap dan 3 untuk m ganjil. Operasi *tensor product* $(W_n \otimes C_m)$ menghasilkan pewarnaan titik dinamis dengan $r=2$ yaitu 3 untuk m ganjil dan 4 untuk m genap. Oleh karena itu terbukti bahwa bilangan kromatik hasil operasi *tensor product* $(W_n \otimes P_m)$ dan $(W_n \otimes C_m)$ sesuai dengan teorema yang ditemukan oleh Hedetniemi.

Pada operasi *composition* $(W_n[P_m])$ menghasilkan bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis dengan $r=5$ yaitu 6 untuk n genap dan dengan $r=6$ yaitu 8 untuk n ganjil. Operasi *composition* $(W_n[C_m])$ menghasilkan bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis dengan $r=3$ yaitu 9 untuk n genap pada saat m ganjil, $r=5$ yaitu 6 untuk n genap pada saat m genap dan 8 untuk n ganjil pada saat m genap serta $r=7$ yaitu 12 untuk n ganjil pada saat m ganjil.

Pada operasi *amalgamation* $(Amal(W_n + P_m, v=1, r))$ menghasilkan bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis dengan $r=4$ yaitu 5 untuk n genap dan 6 untuk n ganjil. Pada operasi *amalgamation* $(Amal(S_n + P_m, v=1, r))$ menghasilkan bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis dengan $r=3$ yaitu 4. Berdasarkan hal tersebut maka bilangan kromatik hasil dari *amalgamation* sama dengan bilangan kromatik dari graf yang akan dioperasikan $\chi(Amal(G, r)) = \chi(G)$. Pewarnaan titik dinamis pada operasi *amalgamation* $(Amal(W_n + P_m, v=1, r))$ menghasilkan bilangan kromatik sebanyak 4.

Selanjutnya pada operasi *shackel* dilakukan pengoperasian yaitu operasi *shackel* $(Shack(S_n + P_m, r))$ menghasilkan bilangan kromatik dan pewarnaan titik

dinamis dengan $r=3$ yaitu 4. Sedangkan operasi *shackel* ($Shack(W_n + C_m, r)$) menghasilkan bilangan kromatik dan pewarnaan titik dinamis dengan $r=4$ yaitu 5 untuk n genap pada saat m genap dan 6 pada saat n ganjil pada saat m genap. Kemudian $r=5$ menghasilkan pewarnaan sebanyak 6 untuk n genap pada saat m ganjil dan 7 untuk n ganjil pada saat m ganjil. Berdasarkan hal tersebut maka bilangan kromatik hasil dari *shackel* sama dengan bilangan kromatik dari graf yang akan dioperasikan $\chi(Shack(G, v = 1, r)) = \chi(G)$.

Pembahasan selanjutnya mengenai sifat komutatif terhadap keisomorfisan graf hasil operasi, kardinalitas, dan bilangan kromatik. Keisomorfisan yang dimaksud yaitu dari dua buah graf yang jika dibalik akan menghasilkan struktur yang sama dengan kata lain memiliki titik dan sisi yang sama. Selanjutnya kardinalitas dalam hal ini adalah kardinalitas titik dan sisi yang dihasilkan dari dua graf hasil operasi, sifat komutatif berlaku jika kardinalitas dari dua graf hasil operasi menunjukkan hasil yang sama. Seperti yang sudah dibahas sebelumnya bahwa bilangan kromatik merupakan minimum pewarnaan titik, jika dua graf hasil operasi memperlihatkan bilangan kromatik yang sama maka berlaku sifat komutatif. Penjelasan sifat komutatif yang telah dianalisis dari setiap hasil operasi graf dapat dirangkum dalam Tabel 4.1.

Tabel 4.1: Tabel Sifat Komutatif

No.	Operasi	Graf Hasil Operasi	Kardinalitas	Kromatik
1.	$W_n + P_m$	Isomorfis	$ V = n + m + 1$	5, untuk n genap
	$P_m + W_n$		$ E = nm + 2n + 2m - 1$	6, untuk n ganjil
2.	$W_n \odot P_m$	Tidak isomorfis	$ V = nm + n + m + 1$	3, untuk n genap
	$P_m \odot W_n$		$ E = 2nm + n + 2m - 1$	4, untuk n ganjil
3.	$W_n \otimes P_m$	Isomorfis	$ V = nm + m$	2, untuk n genap dan n ganjil
	$P_m \otimes W_n$		$ E = 4nm - 4n$	

No.	Operasi	Graf Hasil Operasi	Kardinalitas	Kromatik
4.	$W_n \square P_m$ $P_m \square W_n$	Isomorfis	$ V = nm + m$ $ E = 3nm - n + m - 1$	3, untuk n genap 4, untuk n ganjil
5.	$W_n[P_m]$ $P_m[W_n]$	Isomorfis	$ V = nm + m$ $ E = 7nm - 5n + m - 1$	6, untuk n genap 8, untuk n ganjil



BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa pewarnaan titik dan r -dynamic colouring pada operasi graf khusus yaitu pada graf roda, lintasan, graf lingkaran dan graf bintang didapatkan 15 teorema dan 4 akibat dari teorema sebelumnya, diantaranya adalah:

1. *Joint*

$$\chi(G = (W_n + P_m)) = \chi_4(G = (W_n + P_m)) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 6, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\chi(W_n + C_m) = \chi_4(W_n + C_m) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } n \text{ genap pada saat } m \text{ genap} \\ 6, & \text{untuk } n \text{ ganjil pada saat } m \text{ genap} \end{cases}$$

$$\chi(W_n + C_m) = \chi_5(W_n + C_m) = \begin{cases} 6, & \text{untuk } n \text{ genap pada saat } m \text{ ganjil} \\ 7, & \text{untuk } n \text{ ganjil pada saat } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

2. *Crown Product*

$$\chi(W_n \odot P_m) = \chi_2(W_n \odot P_m) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 4, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\chi(P_m \odot W_n) = \chi_3(W_n \odot P_m) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 5, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\chi(W_n \odot C_m) = \chi_2(W_n \odot C_m) = 4, \text{ untuk } m \text{ genap}$$

$$\chi(W_n \odot C_m) = \chi_3(W_n \odot C_m) = 4, \text{ untuk } m \text{ ganjil}$$

3. *Tensor Product*

$$\chi(W_n \otimes P_m) = 2$$

$$\chi_2(W_n \otimes P_m) = 3$$

$$\chi(W_n \otimes C_m) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } m \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

4. *Cartesian Product*

$$\chi(W_n \square P_m) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 4, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\chi_2(W_n \square P_m) = 3, \text{ untuk } m \text{ genap}$$

$$\chi_2(W_n \square P_m) = 4, \text{ untuk } m \text{ ganjil}$$

$$\chi(W_n \square C_m) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } m \text{ genap dan } m \text{ ganjil pada saat } n \text{ genap} \\ 4, & \text{untuk } m \text{ genap dan } m \text{ ganjil pada saat } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\chi_2(W_n \square C_m) = 3, \text{ untuk } m \text{ genap dan } m \text{ ganjil pada saat } n \text{ genap}$$

$$\chi_3(W_n \square C_m) = 4, \text{ untuk } m \text{ genap dan } m \text{ ganjil pada saat } n \text{ ganjil}$$

5. *Composition*

$$\chi(W_n[P_m]) = \chi_5(W_n[P_m]) = 6, \text{ untuk } n \text{ genap}$$

$$\chi(W_n[P_m]) = \chi_6(W_n[P_m]) = 8, \text{ untuk } n \text{ ganjil}$$

$$\chi(W_n[C_m]) = \chi_3(W_n[C_m]) = 9, \text{ untuk } n \text{ genap pada saat } m \text{ ganjil}$$

$$\chi(W_n[C_m]) = \chi_5(W_n[C_m]) = 6, \text{ untuk } n \text{ genap pada saat } m \text{ genap}$$

$$\chi(W_n[C_m]) = \chi_5(W_n[C_m]) = 8, \text{ untuk } n \text{ ganjil pada saat } m \text{ genap}$$

$$\chi(W_n[C_m]) = \chi_7(W_n[C_m]) = 12, \text{ untuk } n \text{ ganjil pada saat } m \text{ ganjil}$$

6. Amalgamation

$$\chi(\text{Amal}(W_n+P_m, v=1, r)) = \chi_4(\text{Amal}(W_n+P_m, v=1, r)) \begin{cases} 5, \text{ untuk } n \text{ genap} \\ 6, \text{ untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\chi(\text{Amal}(S_n + P_m, v=1, r)) = \chi_3(\text{Amal}(S_n + P_m, v=1, r)) = 4$$

7. Shackel

$$\chi(\text{Shack}(S_n + P_m, r)) = \chi_3(\text{Shack}(S_n + P_m, r)) = 4$$

$$\chi(\text{Shack}(W_n+C_m, r)) = \chi_4(\text{Shack}(W_n+C_m, r)) = \begin{cases} 5, \text{ untuk } n \text{ genap } m \text{ genap} \\ 6, \text{ untuk } n \text{ ganjil } m \text{ genap} \end{cases}$$

Setelah menganalisa pewarnaan titik beserta *r-Dynamic Vertex Coloring*, peneliti juga menemukan sifat komutatif yang dimiliki oleh operasi graf berdasarkan keisomorfisan, kardinalitas, dan bilangan kromatik. Setelah dianalisa, dapat diketahui dan disimpulkan bahwa operasi graf yang memiliki sifat komutatif yaitu operasi *Joint*, operasi *Tensor Product*, operasi *Cartesian Product*, dan operasi *Composition*. Untuk operasi *Crown Product* tidak berlaku sifat komutatif.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pewarnaan titik pada graf khusus yaitu pada graf roda, lintasan, lingkaran dan bintang, peneliti juga menentukan sifat komutatif serta *r-Dynamic Vertex Coloring* sehingga peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat mengembangkan pewarnaan titik pada graf khusus lainnya menggunakan metode yang lainnya serta mencari batas bawah pada pewarnaan titik.

DAFTAR PUSTAKA

- Alauddin (2009). Bilangan kromatik pada graf prisma. *ITS*.
- Alisashi, M. (2012). Dynamic chromatic number of regular graphs, discrete applied math. *Jurnal*.
- Ardiansyah, R. (2013). Bilangan kromatik graf hasil amalgamasi dua buah graf. *Jurnal: ITS*, Vol 2(1).
- Budayasa, K. (2007). Teori graf dan aplikasinya. *Universitas Negeri Surabaya*.
- Dewi, N. and Dafik (2014). Pengembangan pewarnaan titik pada operasi graf khusus. *UNEJ*.
- Endrayana, S. (2013). Pelabelan product cordial pada tensor product path and siklus. *Prosiding Semnas Matematika FMIPA Universitas Jember*, Vol. 2(1).
- Harrary, F. (2007). Graph theory. *Addison: Wesley*.
- Harsya, A., Agustin, I., and Dafik (2014). Pewarnaan titik pada graf siklus dan graf lintasan. *Prosiding Semnas Matematika FMIPA Universitas Jember*.
- Inayah, N. (2013). Pelabelan (a, d) -h anti ajaib pada beberapa kelas graf. *ITB*.
- Irwanto, J. and Dafik (2014). Pewarnaan titik pada spesial graf dan operasinya. *Prosiding Semnas Matematika FMIPA Universitas Jember*.
- Kaiser, T. (2014). Strong parity vertex colouring of plane graphs. *University of Primorska*, Vol(16):14315.
- Lai, H. and Montgomery, B. (2002). Dynamic coloring of graphs. *Departement of Mathematics West Virginia University, Morgantown*.
- Lu, H. (2013). Vertex colouring edge weighting of bipartite graphs with two edge weight. *Jurnal: Xian Jiatong University*.

- Mohanapriya, N., Kumar, S. V., Vivin, J. V., and Venkatachalam, M. (2015). Domination in 4-regular graphs with girth 3. *Proceeding of the National Academy of Sciences, India*, 85:259–264.
- Mussafi, M. (2013). Optimasi radio frequency unit berbasis interferensi kanal menggunakan pendekatan upper bound bilangan kromatik. *UIN Sunan Kalijaga*.
- Puspasari, D. and Dafik (2014). Pewarnaan titik pada graf khusus. *Prosiding Semnas Matematika FMIPA Universitas Jember*.
- Ringel, G. (1994). *Pearls in Graph Theory*. United Kingdom: Academi Press Limited.
- Sesa, J. (2014). Penentuan bilangan kromatik fraksional pada operasi amalgamasi graf lintasan dan graf siklus. *UNEJ*.