



**ANALISIS NUMERIK MODEL TRANSFER POLUTAN DI SUNGAI
DENGAN METODE *FORWARD TIME CENTER SPACE***

SKRIPSI

Oleh

**Retna Yunita Puspitasari
NIM 111810101034**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2015**



**ANALISIS NUMERIK MODEL TRANSFER POLUTAN DI SUNGAI
DENGAN METODE *FORWARD TIME CENTER SPACE***

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Retna Yunita Puspitasari
NIM 111810101034**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2015**

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan kepada:

1. kedua orang tuaku Ayahanda Suharto S.Pd. dan Ibunda Sulistiani tercinta dan tersayang yang telah memberikan cinta setiap hari, dukungan dalam keadaan suka dan duka, serta memberikan doa dalam perjuangan putrinya;
2. kakak-kakakku Dian Andika Kuriawan, Feri Bakuh Prasetyo dan adikku Doni Satya Darmawan yang selalu memberi dukungan, semangat, dan keceriaan;
3. guru-guru dan dosen sejak taman kanak-kanak sampai perguruan tinggi, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, SMAN 4 Jember, SMPN 4 Tanggul, SDN 3 Semboro, TK Aisyiyah Bustanul Athfal III.

MOTTO

“Karena sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Maka apabila engkau telah selesai (dari suatu urusan), tetaplah bekerja keras (untuk urusan yang lain). dan hanya kepada Allah saja hendaklah menaruh harapan.”

(QS. Al – Insyirah: 94;6-8*)

“Barangsiapa bertawakal kepada Allah niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya.”

(QS. At – Thalaq: 65; 3**)

Keberhasilan adalah kemampuan untuk melewati dan mengatasi dari satu kegagalan ke kegagalan berikutnya tanpa kehilangan semangat.

(Winston Churchill ***)

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2006. *Al-Qur'an Al – Karim dan Terjemah Bahasa Indonesia*. Kudus: MENARA KUDUS.

***) Departemen Agama Republik Indonesia. 2006. *Al-Qur'an Al – Karim dan Terjemah Bahasa Indonesia*. Kudus: MENARA KUDUS.

****) <http://joko-motivasi.blogspot.co.id/2011/06/70-kata-kata-bijak-dari-tokoh-terkenal.html> [10 September 2015]

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Retna Yunita Puspitasari

NIM : 111810101034

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul “Analisis Numerik Model Transfer Polutan di Sungai dengan Metode *Forward Time Center Space*” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, September 2015

Yang menyatakan,

Retna Yunita Puspitasari

NIM. 111810101034

SKRIPSI

**ANALISIS NUMERIK MODEL TRANSFER POLUTAN DI SUNGAI
DENGAN METODE *FORWARD TIME CENTER SPACE***

Oleh

Retna Yunita Puspitasari
NIM 111810101034

Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utama : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

Dosen Pembimbing Anggota : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul “Analisis Numerik Model Transfer Polutan di Sungai dengan Metode *Forward Time Center Space*” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas
Jember.

Tim Penguji:

Ketua,

Sekretaris,

Drs. Rusli Hidayat M.Sc.

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

NIP. 196610121993031001

NIP. 198408012008012006

Penguji I,

Penguji II,

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.

Ahmad Kamsyakawuni S.Si., M.Kom

NIP. 196908281998021001

NIP. 197211291998021001

Mengesahkan

Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.

NIP. 196101081986021001

RINGKASAN

Analisis Numerik Model Transfer Polutan di Sungai dengan Metode *Forward Time Center Space*; Retna Yunita Puspitasari, 111810101034; 2015: 58 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Sungai memiliki peran penting untuk kegiatan manusia sehari-hari. Namun semakin hari kondisi sungai semakin tidak sehat, hal ini dikarenakan air yang dapat bergerak bebas memudahkan zat-zat dari sampah yang dibuang di sungai menyebar secara cepat menyebabkan kandungan air sungai terkontaminasi oleh polutan. Polutan merupakan zat pencemar yang dapat menimbulkan dampak negatif bagi makhluk hidup. Keberadaan polutan merupakan salah satu ancaman berbahaya bagi kesehatan sehingga perlu adanya kajian yang membahas mengenai proses transfer polutan. Tujuan dari penelitian ini adalah menemukan solusi penyelesaian dari model transfer polutan di sungai dengan metode FTCS, menganalisis pergerakan polutan yang disimulasikan menggunakan *software* Matlab dan menganalisis kestabilan dan kekonvergenan dari model transfer polutan dengan metode FTCS.

Pada penelitian ini terdapat beberapa langkah yang akan dilakukan. Langkah yang pertama adalah kajian pustaka mengenai model transfer polutan, metode FTCS dan penyelesaian solusi numerik dengan metode FTCS dari berbagai sumber. Langkah kedua adalah melakukan diskritisasi dan penyelesaian model transfer polutan menggunakan metode FTCS. Metode ini menggunakan pendekatan beda hingga maju dalam waktu dan beda hingga pusat dalam ruang, dengan hasil yang didapatkan yaitu solusi penyelesaian model transfer polutan dengan metode FTCS pada persamaan berikut:

$$C_{i,j}^{n+1} = [1 - 2A_x - 2A_y]C_{i,j}^n + [A_x - \frac{1}{2}B]C_{i+1,j}^n + [A_x + \frac{1}{2}B]C_{i-1,j}^n + [A_y]C_{i,j-1}^n + [A_y]C_{i,j+1}^n.$$

Langkah selanjutnya adalah membuat program dan melakukan simulasi transfer polutan dari hasil program yang sudah dibuat menggunakan *software* Matlab. Berdasarkan hasil simulasi proses transfer polutan di sungai dengan interval pengamatan panjang 10 meter dan lebar sungai 5 meter. Dengan waktu pengamatan 700 detik menunjukkan proses transfer polutan dari waktu ke waktu menunjukkan konsentrasi polutan semakin lama semakin meningkat, namun polutan yang bergerak menjauhi sumber aliran konsentrasinya semakin menurun. Perbedaan letak sumber polutan dan pemberian konsentrasi awal polutan juga akan mempengaruhi besar konsentrasi polutan yang menyebar pada bagian-bagian sungai yang terkontaminasi polutan.

Langkah akhir yang dilakukan selanjutnya untuk uji kestabilan dan kekonvergenan akan digunakan metode analisis stabilitas *Von Neumann* yaitu dengan menggunakan komponen *fourier* dan mensubstitusikan pada persamaan beda hingga. Hasil yang didapatkan nilai $\rho = 0,3$ dengan begitu hasil tersebut memenuhi syarat dari analisis stabilitas *Von Neumann* yaitu $|\rho| \leq 1$ sehingga penyelesaian model transfer polutan menggunakan metode FTCS dapat dikatakan stabil dan konvergen.

PRAKATA

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadiran Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan rahmat, taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini tepat pada waktunya. Tugas akhir yang berjudul “Analisis Numerik Model Transfer Polutan di Sungai dengan Metode *Forward Time-Center Space*” ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Drs. Rusli Hidayat, M.Sc., dan Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan dan arahan dengan penuh perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Bapak Kosala Dwidja Purnomo S.Si, M.Si dan Bapak Ahmad Kamsyakawuni S.Si., M.Kom selaku Dosen Penguji yang telah memberikan saran-saran;
3. Drs. Moh. Hasan M.Sc., Ph.D, selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing selama penulis menjadi mahasiswa;
4. seluruh staf pengajar Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember yang telah memberikan ilmu serta bimbingannya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
5. Bapak Suharto S.Pd., Ibu Sulistiani, dan seluruh keluarga yang telah memberikan doa dan motivasi;
6. teman-teman KRAMAT 11 atas dukungan, keceriaan dan canda tawa yang telah diberikan selama masa studi;

7. sahabat-sahabatku selama kuliah “REMPONGERS” Rima, Rani, Rifka, Rika, Renny, Anjar, Fia, Diana, Diah, yang telah meluangkan waktu untuk memberikan semangat dalam keadaan suka dan duka.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, September 2015

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN.....	iv
HALAMAN PEMBIMBING	v
HALAMAN PENGESAHAN.....	vi
RINGKASAN	vii
PRAKATA.....	ix
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	4
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1 Pencemaran Air	5
2.2 Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsial	6
2.3 Adveksi – Difusi	7
2.4 Saluran Terbuka	8
2.5 Model Matematika Transfer Polutan	9
2.6 Metode Beda Hingga	11

2.6.1 Pendekatan Deret Taylor	11
2.6.2 Diskritisasi	14
2.6.3 Kestabilan dan Kekonvergenan	18
2.7 Metode FTCS	20
BAB 3. METODE PENELITIAN	21
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN	24
4.1 Model Transfer Polutan dengan Syarat Awal dan Syarat Batas	24
4.2 Diskritisasi dan Penyelesaian Model Menggunakan Metode FTCS	26
4.3 Pembuatan Program	31
4.4 Simulasi Program	32
4.5 Kestabilan dan Kekonvergenan	44
BAB 5. PENUTUP	47
5.1 Kesimpulan	47
5.2 Saran	48
DAFTAR PUSTAKA	49
LAMPIRAN	51

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1	9
Gambar 2.2	15
Gambar 2.3	15
Gambar 2.4	16
Gambar 2.5	17
Gambar 2.6	18
Gambar 2.7	20
Gambar 3.1	21
Gambar 4.1	25
Gambar 4.2	26
Gambar 4.3	30
Gambar 4.4	31
Gambar 4.5	32
Gambar 4.6	34
Gambar 4.7	37
Gambar 4.8	39

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 4.1 Simulasi satu pada kasus 1 dengan polutan 1 mg/L	40
Tabel 4.2 Simulasi satu pada kasus 2 dengan polutan 1 mg/L	41
Tabel 4.3 Simulasi satu pada kasus 1 dengan polutan 2 mg/L	42
Tabel 4.4 Simulasi satu pada kasus 2 dengan polutan 2 mg/L	43

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada umumnya sungai merupakan salah satu bentuk aliran air dangkal yang memanjang. Dilihat dari fungsinya, sungai memiliki peran penting untuk kegiatan manusia sehari-hari. Sungai masih banyak dimanfaatkan oleh masyarakat untuk melakukan aktifitas, seperti kegiatan rumah tangga, mengairi sawah, sumber energi dan masih banyak lagi. Kondisi sungai semakin hari semakin tidak sehat, hal ini dikarenakan perilaku manusia yang masih saja membuang sampah atau limbah pabrik di sungai. Keberadaan sampah dan limbah tersebut dapat memicu pencemaran pada sungai, terlihat dari warna air sungai yang berubah warna coklat atau keruh. Akibat hal tersebut, sungai menjadi tidak mampu memenuhi fungsinya karena menurunnya kualitas air. Air yang dapat bergerak bebas memudahkan zat-zat dari sampah yang dibuang di sungai menyebar secara cepat, menyebabkan kandungan air sungai terkontaminasi oleh partikel-partikel kecil (polutan). Polutan disebut sebagai zat pencemar jika jumlahnya melebihi jumlah normal, berada pada tempat yang tak semestinya dan berada pada waktu yang tidak tepat. Polutan yang berada di dalam air akan membahayakan kesehatan jika masuk ke dalam tubuh organisme air dan manusia. Dalam jangka panjang, kadar polutan yang terus meningkat di dalam tubuh makhluk hidup dapat menyebabkan berbagai penyakit yang serius. Proses penyebaran polutan di sungai merupakan fenomena alam yang menarik untuk dipelajari, karena dapat memberikan informasi pada banyak bidang ilmu. Proses penyebaran polutan tersebut dapat disebut dengan transfer polutan.

Penelitian sebelumnya yaitu Alman *et al.* (2013) membangun model persamaan adveksi difusi 2D untuk menyelesaikan persamaan numerik proses transfer polutan dengan menggunakan metode beda hingga *Dufort-Frankel*. Model pembangun tersebut berdasarkan polutan yang berada pada aliran sungai, mengalami proses pengangkutan

(adveksi) dan proses penyebaran (difusi). Hasilnya metode *Dufort-Frankel* dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan adveksi difusi 2D tersebut dan dapat dikatakan stabil dan konvergen untuk ukuran grid yang kecil. Berdasarkan penelitian tersebut penulis menggunakan model persamaan adveksi difusi 2D tersebut sebagai model transfer polutan yang akan diselesaikan menggunakan metode beda hingga *Forward Time-Centered Space*.

Metode *Forward Time-Centered Space* atau bisa disebut metode FTCS merupakan salah satu metode beda hingga yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial secara numerik. Sebelumnya metode FTCS digunakan oleh Candra (2011) untuk menyelesaikan persamaan adveksi dan membandingkan kestabilan dari metode FTCS dengan metode *Lax Wendroff*. Hasil yang diperoleh yaitu metode FTCS dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan adveksi, namun untuk kestabilan metode *Lax Wendroff* lebih stabil dibandingkan metode FTCS, karena metode FTCS hanya menunjukkan kestabilan untuk *time step* yang lebih kecil. Metode FTCS juga digunakan oleh Wisodo (2005) untuk pengkajian konduksi panas tak tunak 2D. Penelitian ini menentukan penyelesaian persamaan difusi pada masalah konduktivitas termal dua dimensi, hasil yang didapatkan yaitu pemilihan lebar grid dan langkah waktu harus memenuhi syarat stabilitas karena merupakan konsekuensi metode beda hingga FTCS.

Pemilihan untuk menggunakan metode FTCS karena metode ini merupakan metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan adveksi difusi. Metode FTCS digunakan untuk mengetahui pergerakan polutan yang bergerak di dalam aliran air sungai yang mengalir pada saluran terbuka. Selanjutnya, proses transfer polutan tersebut akan disimulasikan menggunakan software MATLAB R2009a dan penulis akan menganalisis kestabilan dan kekonvergenan dari pergerakan polutan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini antara lain.

- a. Bagaimana solusi penyelesaian model transfer polutan dengan metode FTCS dalam aliran air sungai yang mengalir pada saluran terbuka.
- b. Bagaimana analisis hasil pergerakan polutan yang disimulasikan menggunakan *software* MATLAB.
- c. Bagaimana menganalisis kestabilan dan kekonvergenan dari model transfer polutan menggunakan metode FTCS.

1.3 Batasan Masalah

Pada penyusunan tugas akhir ini batasan-batasan masalah yang digunakan antara lain.

- a. Pergerakan polutan dalam aliran air sungai yang mengalir pada saluran terbuka.
- b. Model matematika transfer polutan yang digunakan yaitu persamaan adveksi difusi 2D.
- c. Kecepatan aliran air yang masuk dan keluar pada daerah domain adalah konstan.
- d. Mengasumsikan transfer polutan dalam dua kasus, yaitu:
 1. Kasus pertama : mengasumsikan bahwa polutan pada awalnya berada pada sepanjang sumber aliran.
 2. Kasus kedua : mengasumsikan bahwa selain polutan di sumber aliran, polutan juga berada disepanjang sisi aliran.

1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah, tujuan dari penyusunan tugas akhir ini antara lain.

- a. Menentukan solusi penyelesaian dari model transfer polutan dengan metode FTCS dalam aliran air sungai yang mengalir pada aliran terbuka.

- b. Menganalisis pergerakan polutan yang disimulasikan menggunakan *software* MATLAB.
- c. Menganalisis kestabilan dan kekonvergenan dari model transfer polutan menggunakan metode FTCS.

1.5 Manfaat

Manfaat yang didapatkan dari tugas akhir, adalah sebagai berikut.

- a. Mendapatkan informasi tentang solusi penyelesaian model transfer polutan menggunakan metode FTCS di sungai yang mengalir pada saluran terbuka.
- b. Mengetahui hasil simulasi pergerakan polutan melalui *software* MATLAB.
- c. Mengetahui kestabilan dan kekonvergenan dari model transfer polutan menggunakan metode FTCS.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pencemaran Sungai

Pencemaran sungai dapat menyebabkan dampak buruk bagi lingkungan dan mengganggu kesehatan makhluk hidup didalamnya. Hal ini dikarenakan di dalam air yang tercemar, selain mengandung mikroorganisme patogen, juga mengandung banyak komponen beracun. Sungai dapat dikatakan tercemar tergantung dari kemampuan badan air dalam mereduksi kadar polutan secara alami. Jika kemampuan badan air tersebut rendah dalam mereduksi kadar polutan yang diterima, maka akan terjadi akumulasi polutan dalam badan air sehingga terjadi pencemaran air yang semakin luas (Fardiaz, 1992). Beberapa polutan yang berada di lingkungan sekitar diantaranya berupa zat-zat kimia logam berat, gas beracun, limbah pabrik, limbah rumah tangga dan masih banyak lagi. Logam berat merupakan polutan yang seringkali berada di perairan seperti Cd, Cr, Cu, Hg, Ni, Pb dan Zn. Selain mencemari air, logam berat juga akan mengendap di dasar perairan dalam jangka waktu yang sangat lama dan logam berat akan terkonsentrasi masuk ke dalam tubuh makhluk hidup melalui beberapa jalan diantaranya saluran pernapasan, saluran makanan dan melalui kulit.

Sumber polutan yang dapat menyebabkan terjadinya pencemaran sungai berasal dari beberapa komponen sebagai berikut :

- a. Bahan buangan yang dibuang disungai berbentuk padat
- b. Bahan buangan organik seperti limbah yang dapat membusuk atau terdegradasi oleh mikroorganisme.
- c. Bahan buangan anorganik merupakan limbah yang berasal dari limbah industri yang melibatkan unsur-unsur kimia sehingga tidak dapat membusuk atau sulit terdegradasi oleh mikroorganisme.

Berdasarkan sumber pencemar, polutan yang masuk ke perairan dapat dibedakan menjadi dua sumber yaitu sumber titik (*point source*) dan sumber

memanjang (*non point source*). Sumber pencemar yang masuk ke perairan berasal sumber titik merupakan sumber yang dapat berasal dari kegiatan industri yang membuang sampah atau air limbahnya ke sungai. Sedangkan untuk sumber memanjang dapat berasal dari buangan kegiatan pertanian yang mengandung pupuk dan pestisida serta dari limbah cair kegiatan domestik yaitu permukiman, perdagangan, dan perkantoran (Davis dan Cornwell, 1991). Berikut ini beberapa akibat yang ditimbulkan dari pencemaran air yaitu:

- a. terganggunya kehidupan organisme air;
- b. pendangkalan dasar perairan;
- c. punahnya biota air seperti ikan;
- d. menjalarnya wabah penyakit seperti muntaber;
- e. banjir akibat tersumbatnya saluran air.

2.2 Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan-turunan parsial. Berikut ini merupakan klasifikasi tiga tipe dasar persamaan differensial parsial dua peubah:

- a. Persamaan Parabolik

Persamaan parabolik menggambarkan aliran panas dan proses difusi polutan memenuhi sifat $B^2 - 4AC = 0$.

- b. Persamaan Hiperbolik

Persamaan hiperbolik menggambarkan sistem getaran dan gerak gelombang yang memenuhi sifat $B^2 - 4AC > 0$.

- c. Persamaan Eliptik

Persamaan eliptik menggambarkan potensial dan fenomena yang tidak bergantung kepada waktu dan memenuhi sifat $B^2 - 4AC < 0$ (Hidayat, 2006).

2.3 Adveksi – Difusi

Model numerik merupakan suatu bentuk simulasi untuk memberi gambaran penting dalam mempertimbangkan prediksi transportasi polutan dalam aliran air sungai. Terdapat beberapa gerak angkutan materi di dalam badan air atau proses transport massa, diantaranya gerak yang dibagi menjadi dua kategori yaitu adveksi dan difusi. Model adveksi difusi numerik dimaksudkan untuk memberikan analisis pergerakan polutan dalam aliran air sungai yang mengalami proses adveksi dan difusi.

Adveksi atau proses angkutan merupakan gerakan yang dihasilkan oleh aliran air yang bergerak searah dan tidak mengubah identitas materi yang sedang mengalir atau yang sedang dipindahkan. Besar nilai fluks massa suatu angkutan akibat adveksi secara matematis dituliskan sebagai berikut:

$$J = u \cdot c$$

dengan:

J = fluks massa dalam arah x

u = besar kecepatan aliran dalam arah x

c = besar konsentrasi debit *inflow* atau perpindahan.

Proses difusi merujuk pada pergerakan massa akibat gerak acak dari molekul air, hal ini sering dikenal dengan nama gerak brown atau akibat dari percampuran yang menggambarkan proses bertambah luasnya areal. Fenomena penyebaran polutan diturunkan berdasarkan persamaan umum angkutan massa pada fluida dan hukum Fick. Hukum Fick dapat dinyatakan dalam rumus matematika sebagai berikut:

$$F = -D \frac{\partial c}{\partial x}$$

dengan:

F = fluks massa bahan terlarut

c = konsentrasi bahan terlarut

D = koefisien difusi

Tanda minus menunjukkan bahwa difusi memiliki kecenderungan untuk meminimalisir gradient, yaitu perbedaan konsentrasi dengan memindahkan suatu

materi dari daerah dengan konsentrasi tinggi ke daerah dengan konsentrasi yang lebih rendah (Chapra, 1997). Proses adveksi dan difusi dalam pembahasannya pada cairan yang mengalir merupakan dua proses terpisah dan dapat digabungkan, dengan begitu dalam proses transfer polutan di sungai merupakan gabungan dari proses adveksi difusi yang disajikan bersama-sama.

2.4 Saluran Terbuka

Sungai merupakan salah satu bentuk dari saluran terbuka, secara umum saluran terbuka adalah saluran dimana air mengalir dengan muka air bebas. Pada saluran terbuka tekanan di permukaan air adalah sama di semua titik sepanjang saluran. Sungai dikatakan salah satu bentuk dari saluran terbuka karena sungai merupakan saluran alam yang terbentuk secara alami, sehingga parameter saluran tidak teratur baik terhadap ruang dan waktu. Parameter saluran yang dimaksud adalah tampang lintang saluran, kekasaran, kemiringan dasar, belokan, pembendungan, debit aliran dan sebagainya. Perilaku aliran ini sering dikenal dengan mekanika fluida karena menyangkut sifat-sifat fluida dan pengaruhnya terhadap pola aliran dan gaya yang ditimbulkan antara fluida dan pembatas (dinding). Dengan adanya perilaku aliran yang berubah-ubah menyebabkan terjadinya perubahan alur aliran dalam arah horizontal maupun vertikal (Harseno, 2007).

Berdasarkan saluran terbuka, aliran fluida dapat diklasifikasikan menjadi berbagai golongan antara lain:

- a. Aliran tunak (*steady flow*) dan aliran tak tunak (*unsteady flow*)

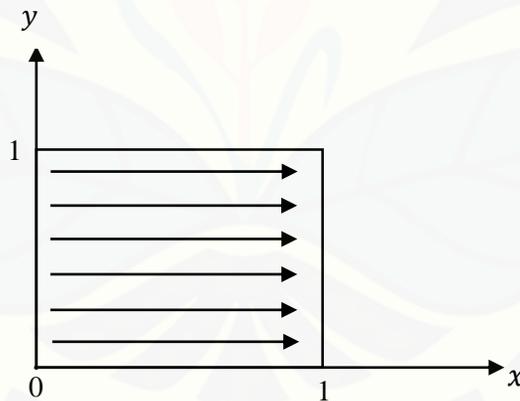
Aliran tunak yaitu keadaan aliran yang berada dalam kondisi kedalaman, debit dan kecepatan rata-rata pada setiap penampang tidak berubah menurut waktu atau berada dalam keadaan konstan pada selang waktu tertentu. Sedangkan untuk aliran tak tunak yaitu keadaan aliran yang berada dalam kondisi kedalaman, debit dan kecepatan rata-rata pada setiap penampang berubah terhadap waktu.

b. Aliran seragam (*uniform flow*) dan aliran tak seragam (*non- uniform flow*)

Aliran seragam yaitu kondisi aliran yang berada dalam keadaan garis-garis arusnya sejajar dan kecepatannya adalah konstan. Dengan begitu kecepatan aliran dianggap tidak berubah di setiap titik pada tampang melintang. Aliran dikatakan seragam, jika kedalaman aliran sama pada setiap penampang saluran. Selain itu permukaan aliran sejajar dengan permukaan dasar saluran, sehingga kecepatan dan kedalaman aliran disebut dalam kondisi seimbang (kondisi *equilibrium*). Aliran tak seragam adalah kedalaman dan kecepatan aliran di sepanjang saluran tidak konstan, garis-garis arusnya tidak sejajar dengan garis muka air dan dasar saluran (Saidin, 2010).

2.5 Model Matematika Transfer Polutan

Penentuan model transfer polutan yaitu dengan menggunakan bentuk arah aliran yang dimisalkan berada dalam sebuah bidang datar dengan panjang x dan lebar y . Domain dari permasalahan yang dibahas adalah $0 \leq x \leq 1$ dan $0 \leq y \leq 1$ dapat dilihat dari gambar 2.1.



Gambar 2.1 Garis-garis arah aliran air

Aliran pada bidang datar tersebut terkontaminasi polutan yang mengalir ke arah sumbu x dengan kecepatan konstan v_x aliran air yang masuk dan keluar pada daerah domain. Konsentrasi polutan yang terangkut dalam arah x dengan kecepatan aliran v_x

dan sekaligus berdifusi dalam arah horizontal arah x dan y dengan koefisien difusi yang juga konstan D_x dan D_y , digambarkan dalam persamaan berikut:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_x \frac{\partial C}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (2.1)$$

dengan,

C = konsentrasi polutan

v_x = kecepatan aliran dalam arah x

D_x, D_y = koefisien difusi dalam arah x dan y

Persamaan (2.1) di atas sering dikenal sebagai persamaan adveksi difusi 2D atau disebut sebagai model transfer polutan. Kasus pertama: mengasumsikan bahwa pada awalnya polutan berada di sepanjang sumber aliran, maka persamaan (2.1) diselesaikan dengan syarat awal (*initial conditions*):

$$C(x, y, 0) = 0, 0 \leq x, y \leq 1 \quad (2.2)$$

dan syarat batas (*boundary conditions*):

$$\begin{aligned} C(0, y, t) &= m, 0 \leq y \leq 1, t > 0 \\ C(1, y, t) &= 0, 0 \leq y \leq 1, t > 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$C(x, 0, t) = 0, 0 \leq x \leq 1, t > 0$$

$$C(x, 1, t) = 0, 0 \leq x \leq 1, t > 0$$

Kasus kedua: mengasumsikan bahwa pada awalnya polutan berada pada sumber aliran dan juga berada di sepanjang sisi aliran, maka persamaan (2.1) diselesaikan dengan syarat awal (*initial conditions*) pada persamaan (2.2) dan syarat batas (*boundary conditions*):

$$\begin{aligned} C(0, y, t) &= m, 0 \leq y \leq 1, t > 0 \\ C(1, y, t) &= 0, 0 \leq y \leq 1, t > 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$C(x, 0, t) = m, 0 \leq x \leq 1, t > 0$$

$$C(x, 1, t) = m, 0 \leq x \leq 1, t > 0$$

(Alman *et al*, 2013).

2.6 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial secara numerik. Berikut ini adalah beberapa langkah dalam menyelesaikan permasalahan metode beda hingga.

2.6.1 Pendekatan deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan permasalahan dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Jika suatu fungsi $u(x)$ diketahui di titik x_i dan semua turunan dari u terhadap x diketahui di titik tersebut, maka dinyatakan nilai u pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i dapat dituliskan secara matematis dengan menggunakan deret Taylor.

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + u'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + u''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + u'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + u^{(n)}(x_i) \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \quad (2.5)$$

dengan,

$u(x_i)$ = fungsi di titik x_i

$u(x_{i+1})$ = fungsi di titik x_{i+1}

$u', u'', \dots, u^{(n)}$ = turunan pertama, kedua, ..., ke n dari fungsi

Δx = langkah ruang yaitu jarak antara x_i dan x_{i+1}

R_n = Kesalahan pemotongan (Triatmodjo, 2002).

Metode beda hingga memanfaatkan deret Taylor dengan mengaproksimasi atau melakukan pendekatan turunan-turunan yang ada pada persamaan diferensial parsial menjadi bentuk persamaan linier. Bentuk tersebut dapat diturunkan berdasarkan deret Taylor, terdapat tiga beda hingga, yaitu :

a. Beda hingga maju

Pendekatan beda hingga maju dilakukan dengan ekspansi deret Taylor di titik x_i dan titik x_{i+1} . Apabila diberikan fungsi $C(x)$ dengan satu variabel bebas secara analitis untuk $C(x_{i+1})$ dapat dijabarkan berdasarkan deret Taylor sekitar x sebagai berikut :

$$C(x_{i+1}) = C(x_i) + C'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + O(\Delta x^2) \quad (2.6)$$

dengan mengeluarkan faktor $C'(x_i)$ pada persamaan (2.6) diperoleh:

$$C'(x_i) = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x_{i+1}) - C(x_i)}{\Delta x} - \mathcal{O}(\Delta x) \quad (2.7)$$

Jika $h = \Delta x$ dan interval Δx bernilai kecil maka persamaan (2.7) menjadi,

$$C'(x_i) = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x_{i+1}) - C(x_i)}{h} \quad (2.8)$$

Apabila fungsi mengandung lebih dari satu variabel bebas yaitu (x, y) maka bentuk dari beda hingga maju menjadi,

$$C'(x_i) = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x_{i+1}, y_j) - C(x_i, y_j)}{\Delta x} \quad (2.9)$$

$$C'(y_j) = \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{C(x_i, y_{j+1}) - C(x_i, y_j)}{\Delta y}$$

b. Beda hingga mundur

Pendekatan beda hingga mundur dilakukan dengan ekspansi deret Taylor di titik x_i dan titik x_{i-1} , sehingga deret Taylor dari fungsi $C(x)$ dengan satu variabel bebas menjadi,

$$C(x_{i-1}) = C(x_i) - C'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (2.10)$$

$$C'(x_i) = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x_i) - C(x_{i-1})}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (2.11)$$

Jika $h = \Delta x$ dan interval Δx bernilai kecil maka persamaan (2.11) dapat ditulis kembali dengan bentuk:

$$C'(x_i) = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x_i) - C(x_{i-1})}{h} \quad (2.12)$$

Persamaan beda hingga mundur dengan dua variabel bebas (x, y) menjadi

$$C'(x_i) = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x_i, y_j) - C(x_{i-1}, y_j)}{\Delta x} \quad (2.13)$$

$$C'(y_j) = \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{C(x_i, y_j) - C(x_i, y_{j-1})}{\Delta y}$$

c. Beda hingga tengah atau pusat

Pendekatan beda hingga pusat untuk turunan pertama dilakukan di titik x_{i-1} dan titik x_{i+1} . Sehingga pendekatan dengan satu variabel bebas ini diperoleh dengan cara mengurangkan persamaan (2.6) dengan persamaan (2.10).

$$C(x_{i+1}) - C(x_{i-1}) = 2C'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + \mathcal{O}(\Delta x^3) \quad (2.14)$$

atau dapat dituliskan kembali menjadi,

$$C'(x_i) = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x_{i+1}) - C(x_{i-1})}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (2.15)$$

Beda hinga pusat dengan dua variabel bebas maka persamaannya menjadi

$$C'(x_i) = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x_{i+1}, y_j) - C(x_{i-1}, y_j)}{2\Delta x} \quad (2.16)$$

$$C'(y_j) = \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{C(x_i, y_{j+1}) - C(x_i, y_{j-1})}{2\Delta y}$$

Sedangkan turunan kedua dari beda hinga pusat dengan dua variabel bebas (x, y) dapat ditulis menjadi,

$$C''(x_i) = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{C(x_{i-1}, y_j) - 2C(x_i, y_j) + C(x_{i+1}, y_j)}{\Delta x^2} \quad (2.17)$$

$$C''(y_j) = \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{C(x_i, y_{j-1}) - 2C(x_i, y_j) + C(x_i, y_{j+1})}{\Delta y^2}$$

Deret Taylor akan memberikan perkiraan suatu fungsi dengan benar jika semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Namun, seringkali hanya beberapa suku pertama saja yang diperhitungkan, sehingga hasil perkiraan tidak tepat seperti pada penyelesaian analitik, maka perlu adanya kesalahan pemotongan.

Kesalahan pemotongan (*truncation error*) adalah kesalahan yang dihasilkan dari tidak diperhitungkannya suku-suku terakhir dari deret Taylor. Nilai fungsi tersebut akan didekati dengan memotong beberapa suku berhingga dari deret Taylor. Untuk menghampiri kesalahan pemotongan dapat menggunakan rumus suku sisa sebagai berikut:

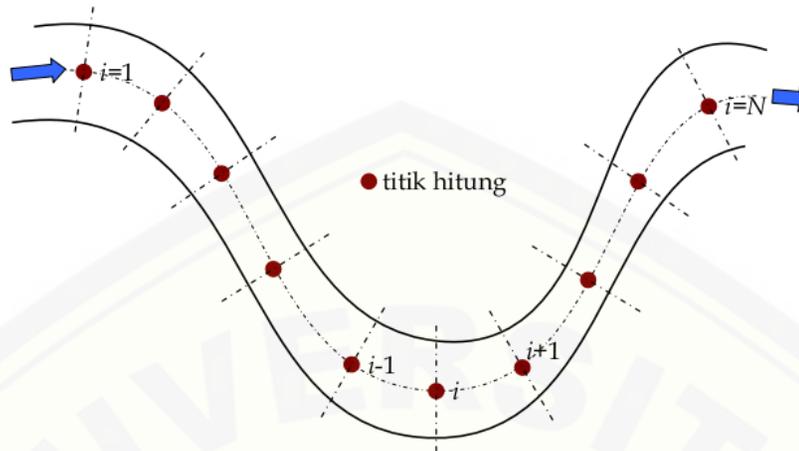
$$R_n(x) = u^{n+1}(x_i) \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} + u^{n+2}(x_i) \frac{\Delta x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots \quad (2.18)$$

Persamaan (2.18) mempunyai suku sebanyak tak terhingga, sehingga akan memberikan perkiraan nilai suatu fungsi yang lebih mendekati penyelesaian eksaknya. Persamaan tersebut juga dapat dituliskan dengan $R_n(x) = \mathcal{O}(\Delta x^{n+1})$ dengan indeks n menunjukkan bahwa deret yang diperhitungkan sampai dengan suku ke n , sedangkan

$n + 1$ menunjukkan kesalahan pemotongan berorder $n + 1$. Notasi $\mathcal{O}(\Delta x^{n+1})$ berarti kesalahan pemotongan mempunyai order Δx^{n+1} . Dari persamaan tersebut dapat diketahui bahwa kesalahan pemotongan pada beda hingga pusat berorde Δx^2 , sedangkan pada beda hingga maju dan mundur berorde Δx . Nilai kesalahan pemotongan yang berorde $2(\Delta x^2)$ lebih kecil dari orde $1(\Delta x)$. Hal ini menunjukkan bahwa beda hingga pusat lebih teliti dibandingkan beda hingga yang lainnya (Triatmodjo, 2002).

2.6.2 Diskritisasi

Metode beda hingga dapat digunakan untuk memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskrit, kegiatan tersebut biasa dikenal dengan proses diskritisasi. Diskritisasi adalah proses membagi atau memecah suatu bagian atau bidang menjadi beberapa bagian-bagian kecil yang disebut dengan grid. Banyaknya grid yang dibentuk bergantung pada bentuk benda yang akan dianalisis. Diskritisasi dilakukan karena suatu benda yang akan dianalisis memiliki bentuk yang tidak beraturan, sehingga diskritisasi digunakan untuk memudahkan dalam menganalisis benda atau bagian tersebut. Semakin banyak grid-grid yang digunakan dalam membagi sebuah benda maka akan semakin sedikit *error* yang dihasilkan karena semakin mendekati bentuk asli dari benda yang dianalisis. Berikut ini contoh diskritisasi aliran sungai yang sudah dibagi menjadi beberapa grid pada gambar 2.2.



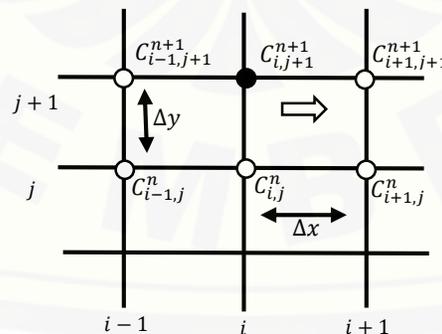
Gambar 2.2 Situasi sungai dengan titik-titik hitung

Dengan adanya diskritisasi, grid yang lebih kecil tidak mengurangi sistem yang asli karena sistem yang asli merupakan suatu keseluruhan benda sebelum dicacah. Metode beda hingga membutuhkan grid untuk menggambarkan daerah yang ditinjau. Bila kita akan menghitung $C'(x_i, y_j)$ dan $C''(x_i, y_j)$, maka digunakan grid dan notasi berikut:

$$C'(x_i) = \frac{C_{i+1,j}^n - C_{i,j}^n}{\Delta x} \tag{2.19}$$

$$C'(y_j) = \frac{C_{i,j+1}^n - C_{i,j}^n}{\Delta y}$$

Persamaan tersebut adalah beda hingga maju yaitu titik hitung i dihubungkan dengan titik hitung $(i + 1)$. Subskrip i dan j menunjukkan komponen dalam arah sumbu x dan sumbu y persamaan tersebut dapat dilihat dari gambar skema maju 2.3.



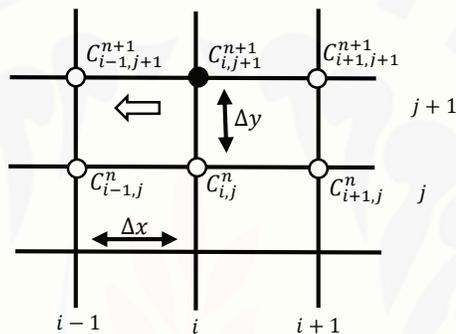
Gambar 2.3 Skema maju

Persamaan diskritisasi pada beda hingga mundur dituliskan seperti berikut:

$$C'(x_i) = \frac{C_{i,j}^n - C_{i-1,j}^n}{\Delta x} \quad (2.20)$$

$$C'(y_j) = \frac{C_{i,j}^n - C_{i,j-1}^n}{\Delta y}$$

Informasi titik hitung i dihubungkan dengan titik hitung $(i - 1)$ atau arahnya ke kiri, lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar skema mundur 2.4.



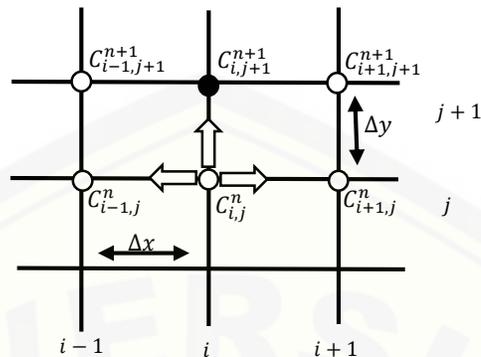
Gambar 2.4 Skema mundur

Pada beda hingga pusat persamaan untuk diskritisasi pada turunan pertama dituliskan pada persamaan berikut ini:

$$C'(x_i) = \frac{C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \quad (2.21)$$

$$C'(y_j) = \frac{C_{i,j+1}^n - C_{i,j-1}^n}{2\Delta y}$$

Beda hingga pusat informasi titik hitung i dihubungkan dengan titik hitung $(i - 1)$ dan $(i + 1)$, gambar skema dari beda hingga pusat dapat dilihat pada gambar 2.5.



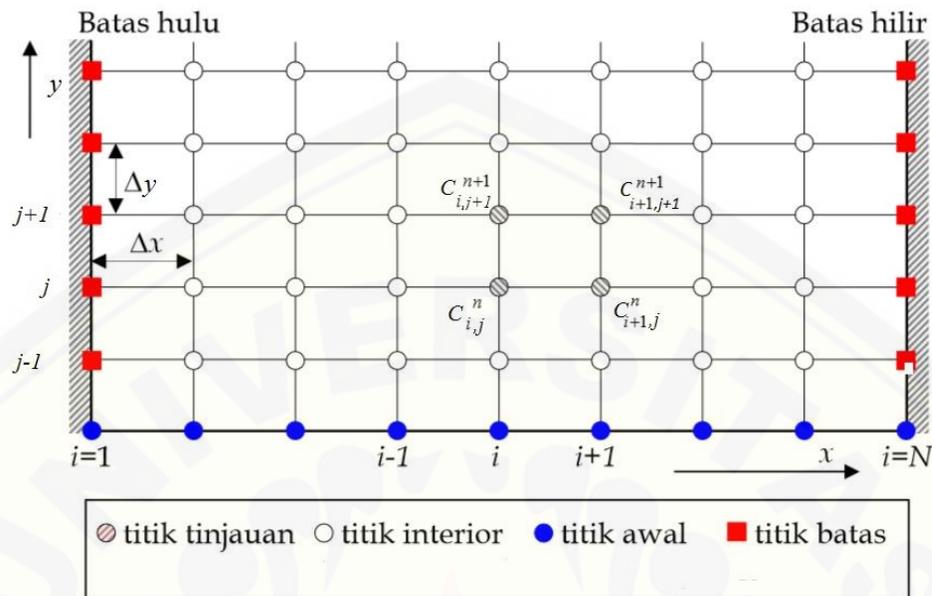
Gambar 2.5 Skema tengah

Turunan kedua dari persamaan beda hingga pusat dengan variabel bebas x dan y di atas terhadap ruang dapat diperoleh sebagai berikut :

$$C''(x_i) = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\frac{C_{i+1,j}^n - C_{i,j}^n}{\Delta x} - \frac{C_{i,j}^n - C_{i-1,j}^n}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad (2.22)$$

$$C''(y_j) = \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)}{\partial y} = \frac{\frac{C_{i,j+1}^n - C_{i,j}^n}{\Delta y} - \frac{C_{i,j}^n - C_{i,j-1}^n}{\Delta y}}{\Delta y} = \frac{C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}$$

Berikut ini diberikan diskritisasi pada bagian sungai yang menggambarkan bagian sungai dari batas hulu sampai batas hilir pada gambar 2.6. Grid-grid tersebut penentuannya harus dibuat sedemikian rupa sehingga hasilnya sesuai dengan yang ada dilapangan. Segala parameter dari sungai yang bersangkutan diwakili oleh parameter fisik di titik-titik hitungan. Pada gambar tersebut mengandung diskritisasi terhadap ruang dan waktu. Titik hitung tersebut terbagi dalam poin pertama yaitu titik tinjauan merupakan titik yang digunakan untuk meninjau titik hitung dari bagian yang dianalisis. Poin kedua yaitu titik interior merupakan keseluruhan titik-titik hitung dari grid yang berada didalam domain bagian sungai yang dianalisis. Poin ketiga yaitu titik awal digunakan dalam menentukan lokasi yang akan dianalisis. Poin keempat yaitu titik batas merupakan titik yang membatasi bagian yang akan di analisis sehingga grid yang dibentuk tidak melewati titik batas (Luknanto, 2003).



Gambar 2.6 Kisi beda hingga ruang dan waktu

2.6.3 Kestabilan dan Kekonvergenan

Kriteria stabilitas merupakan kondisi perlu dan cukup agar diperoleh solusi konvergen. Terminologi Stabilitas menunjukkan karakteristik persamaan diferensial tertentu jika $\Delta t \rightarrow 0$ serta berhubungan dengan amplifikasi selama proses komputasi. Jika amplifikasi solusi semakin besar, maka proses komputasi akan divergen dan tidak memperoleh hasil atau tidak konvergen. Metode yang akan digunakan untuk analisis kestabilan persamaan beda hingga adalah analisis stabilitas *Von Neumann*. Metode analisis stabilitas *Von Neumann* atau juga dikenal dengan analisis stabilitas *fourier* yaitu sebuah prosedur yang digunakan untuk memeriksa kestabilan skema beda hingga yang diaplikasikan pada persamaan diferensial parsial linier (Candra, 2011). Berikut adalah komponen *fourier* yang akan disubstitusikan dalam persamaan beda hingga.

$$C_{i,j}^n = \rho^n e^{I(P\Delta xi + Q\Delta yj)}$$

dengan:

$C_{i,j}^n$ = konsentrasi polutan saat n pada indeks i, j

ρ^n = amplitud pada waktu n

I = bilangan imajiner $\sqrt{-1}$

P = gelombang pada arah x

Q = gelombang pada arah y

Hasil dari substitusi komponen *fourier* pada persamaan beda hingga dapat dikatakan stabil atau tidak dilihat berdasarkan nilai ρ yang dihasilkan, dimana syarat perlu dari analisis stabilitas *Von Neumann* adalah modulus dari faktor amplifikasi harus kurang dari sama dengan 1 atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$|\rho| \leq 1$$

Jika nilai ρ terpenuhi pada kondisi tersebut maka metode yang digunakan dapat dikatakan stabil (Alman *et al*, 2013).

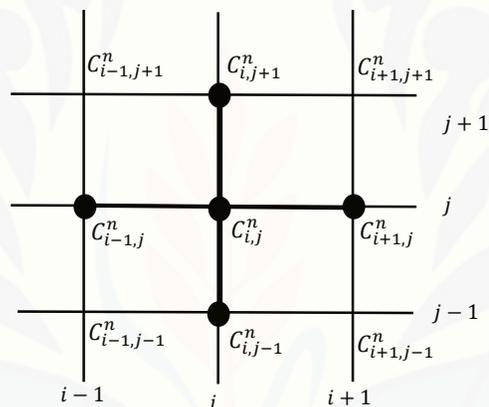
Kekonvergenan merupakan elemen penting dari metode numerik. Dalam persamaan differensial parsial, persamaan parabolik dan hiperbolik harus memperhatikan kekonvergenan tersebut untuk melakukan pendekatan numerik. Kekonvergenan berhubungan dengan besarnya penyimpangan solusi pendekatan oleh metode numerik terhadap solusi eksak atau solusi analitik. Kriteria konvergen merupakan kriteria dimana solusi metode beda hingga merupakan solusi pendekatan PDP tanpa hadirnya kesalahan pembulatan (*round off error*), jika $h \rightarrow 0$ dan $\Delta t \rightarrow 0$. Kekonvergenan beda hingga terkait dengan *Teorema Ekuivalensi Lax*.

Teorema Ekuivalensi Lax : Diberikan sebuah persamaan diferensial linier dan masalah nilai awal yang *well-posed* dan suatu metode beda hingga yang konsisten terhadap persamaan diferensial tersebut, maka kestabilan merupakan syarat perlu dan cukup agar metode beda hingga tersebut konvergen.

Berdasarkan *Teorema Ekuivalensi Lax*, karena stabilitas merupakan syarat perlu dan cukup untuk membuktikan metode beda hingga tersebut agar konvergen, maka cukup membuktikan kestabilan dari metode beda hingga dengan begitu metode tersebut dapat diketahui kekonvergenannya (Greenberg, 1978).

2.7 Metode *Forward Time Center Space* (FTCS)

Pada analisis numerik, metode FTCS adalah metode beda hingga yang umum digunakan pada pemecahan numerik persamaan panas dan persamaan diferensial parsial yang sejenis. Metode FTCS yang diterapkan pada persamaan difusi menunjukkan bahwa aproksimasi metode FTCS persamaan difusi adalah kondisional stabil. Namun, bila diterapkan pada persamaan adveksi metode FTCS adalah tanpa syarat stabil. Metode ini menggunakan beda hingga maju dalam waktu dan beda hingga pusat dalam ruang. Gambar 2.7 berikut ini merupakan skema untuk menggambarkan metode FTCS (Hoffman, 2001).

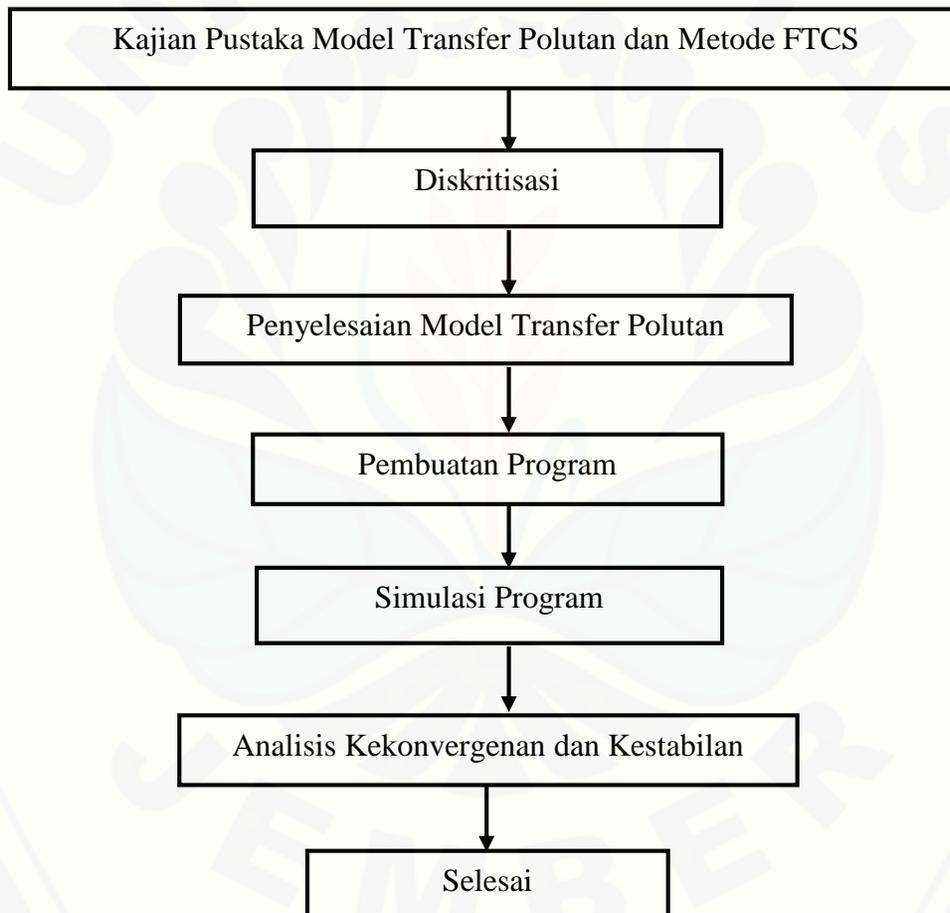


Gambar 2.7 Skema FTCS

Jaringan titik hitungan pada skema FTCS memudahkan untuk menurunkan persamaan diferensial menjadi persamaan beda hingga, dimana pendekatan orde pertama digunakan untuk turunan waktu dan persamaan orde duanya digunakan untuk turunan ruang (Wisodo, 2005).

BAB 3. METODE PENELITIAN

Bab ini akan membahas tentang prosedur yang akan dilakukan dalam penyelesaian analisis numerik transfer polutan di sungai pada saluran terbuka menggunakan metode beda hingga FTCS. Berikut adalah skema langkah-langkah penelitian:



Gambar 3.1 Skema Metode Penelitian

Berdasarkan skema pada gambar 3.1 langkah-langkah penelitian dapat dijelaskan sebagai berikut:

a. Kajian Pustaka Model Transfer Polutan dan Metode FTCS

Kajian Pustaka merupakan langkah awal dalam memulai penelitian. Hal ini bertujuan untuk mengetahui informasi apa saja yang terkait dengan penyebaran polutan di sungai pada saluran terbuka dan model transfer polutan melalui media internet, buku, jurnal dan skripsi yang terdahulu. Selanjutnya mencari informasi tentang penggunaan metode beda hingga FTCS untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial.

b. Diskritisasi

Diskritisasi dilakukan dengan pendekatan metode beda hingga. Ada tiga tipe dalam metode beda hingga yaitu beda hingga maju, beda hingga mundur, dan beda hingga pusat. Diskritisasi dilakukan dengan metode FTCS yaitu, mengubah turunan terhadap waktu menggunakan beda hingga maju dan turunan terhadap ruang menggunakan beda hingga pusat sehingga didapatkan persamaan dalam bentuk diskrit.

c. Penyelesaian Model Transfer Polutan

Penyelesaian model transfer polutan yaitu hasil dari diskritisasi kemudian akan di substitusikan dalam model transfer polutan dan diselesaikan dengan menggunakan metode FTCS, sehingga terbentuk suatu persamaan linier dan penyelesaian dalam bentuk matriks.

d. Pembuatan Program

Pembuatan program untuk simulasi penyebaran polutan di saluran terbuka menggunakan software MATLAB R2009a. Prosedur pembuatan program diantaranya yaitu, menginputkan nilai parameter Koefisien Diffusi D_x , D_y ,

kecepatan aliran (v_x), konsentrasi polutan dan lama aliran (T). Proses yang dilakukan adalah membuat subprogram untuk metode FTCS. *Output* yang didapatkan yaitu berupa grafik kontur pergerakan polutan.

e. Simulasi Program

Setelah pembuatan program selanjutnya melakukan simulasi dengan interval pengamatan panjang sungai 10 meter dan lebar sungai 5 meter. Simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pola pergerakan polutan dari dua kasus yang diasumsikan yaitu polutan pada awalnya berada di sepanjang sumber aliran dan yang kedua mengasumsikan selain polutan berada di sepanjang sumber aliran, polutan juga berada di sepanjang sisi aliran dengan daerah domain dibagi dalam gri-grid dengan ukuran $\Delta x = \Delta y = 0,1$ meter dan grid waktu dengan ukuran $\Delta t = 1$ detik.

f. Analisis Kekonvergenan dan Kestabilan

Hasil yang sudah diperoleh selanjutnya akan dianalisis untuk uji kekonvergenan dan kestabilan dari pergerakan polutan dengan menggunakan metode FTCS. Untuk uji kestabilan akan digunakan metode analisis stabilitas *Von Neumann* yaitu dengan menggunakan komponen *fourier* dan mensubstitusikan pada hasil solusi penyelesaian model transfer polutan menggunakan metode FTCS.

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini akan membahas mengenai langkah-langkah dalam menyelesaikan model transfer polutan menggunakan metode beda hingga secara numerik. Ada beberapa metode beda hingga yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial parsial, diantaranya metode *Dufort-Frankel*, metode *Cranck Nicholson*, metode FTCS, metode BTCS dan masih banyak lainnya. Pada tugas akhir ini, metode yang digunakan dalam menyelesaikan model transfer polutan di sungai adalah metode FTCS, yaitu merupakan metode beda hingga yang menggunakan beda hingga maju untuk diskritisasi terhadap waktu dan menggunakan beda hingga pusat untuk diskritisasi terhadap ruang. Dalam menyelesaikan komputasi numerik, akan dilakukan menggunakan *software* MATLAB.

Beberapa langkah yang perlu diperhatikan dalam menyelesaikan solusi numerik model transfer polutan di sungai, antara lain.

- a. Menentukan model transfer polutan yang akan diselesaikan dengan kondisi syarat awal dan syarat batas yang sudah ditentukan.
- b. Melakukan diskritisasi dan penyelesaian model menggunakan metode FTCS.
- c. Pembuatan program menggunakan *software* MATLAB.
- d. Melakukan simulasi numerik dari program yang sudah dibuat.
- e. Melakukan uji kestabilan dan kekonvergenan.

4.1 Model Transfer Polutan dengan Syarat Awal dan Syarat Batas

Langkah awal penyelesaian tugas akhir ini yaitu menentukan model matematik yang berkaitan dengan polutan yang bergerak dan menyebar di aliran sungai yang disebut model transfer polutan. Model tersebut penggunaannya terbatas karena hanya dapat digunakan di sungai pada saluran terbuka dan aliran air satu arah

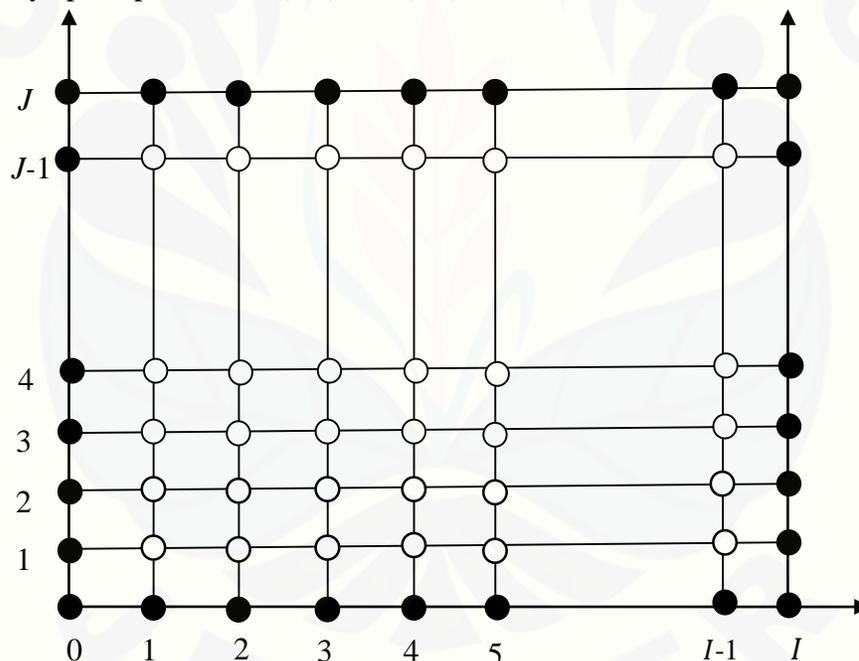
dengan kecepatan air yang masuk dan keluar adalah konstan. Secara umum persamaan model transfer polutan adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_x \frac{\partial C}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (4.1)$$

Persamaan (4.1) akan diselesaikan dengan syarat awal:

$$C(x, y, 0) = 0, 0 \leq x, y \leq 1 \quad (4.2)$$

dengan $0 \leq x, y \leq 1$ mewakili panjang sungai (x) yang dinalisis yaitu dari 0 sampai dengan 10 meter dan lebar sungai (y) mewakili 0 sampai dengan 5 meter. Berikut ini adalah gambar kisi sungai menggunakan titik- titik yang membagi bagian sungai dengan syarat awal pada persamaan (4.2) dan syarat batas yang sudah ditentukan sebelumnya pada persamaan (2.7) dan (2.8) .

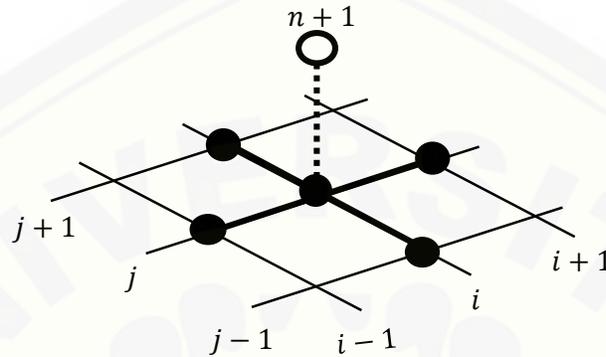


Gambar 4.1 Kisi sungai dengan syarat awal dan syarat batas

Gambar 4.1 merupakan bagian sungai yang dibagi oleh titik-titik dengan lambang ● adalah titik-titik syarat awal dan syarat batas yang sudah diketahui nilainya, sedangkan titik-titik dengan lambang ○ merupakan titik interior yang akan dicari nilainya. I merupakan panjang sungai ke arah x dan J merupakan lebar sungai ke arah y .

4.2 Diskritisasi dan Penyelesaian Model Menggunakan Metode FTCS

Persamaan transfer polutan akan dibawa dalam bentuk diskrit, dengan menggunakan metode beda hingga pada skema FTCS.



Gambar 4.2 Skema metode FTCS dengan titik eksekusi

Pada gambar 4.2 bulatan kosong menggambarkan titik baru yang akan ditentukan nilainya atau titik eksekusi, sedangkan bulatan hitam merupakan titik-titik fungsi yang sudah diketahui yang akan digunakan untuk memperoleh penyelesaian pada bulatan kosong. Garis sambung menghubungkan antara titik-titik yang akan digunakan untuk menghitung derivatif ruang, sedangkan garis putus-putus menghubungkan titik-titik yang akan digunakan untuk menghitung derivatif waktu. Berdasarkan skema tersebut maka untuk mencari solusi $C_{i,j}^{n+1}$ harus mengetahui nilai $C_{i-1,j}^n$, $C_{i+1,j}^n$, $C_{i,j}^n$, $C_{i,j-1}^n$ dan $C_{i,j+1}^n$ dengan cara melakukan diskritisasi dengan pendekatan beda hingga yang sesuai dengan suku derivatif terhadap ruang dan terhadap waktu. Berikut ini diskritisasi untuk suku derivatif terhadap waktu menggunakan pendekatan beda maju.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (4.5)$$

Sedangkan untuk suku derivatif terhadap ruang diskritisasi dilakukan dengan menggunakan pendekatan beda pusat. Pada metode FTCS untuk turunan orde dua juga diturunkan terhadap ruang sehingga pendekatan pada $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ dan $\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$ juga menggunakan pendekatan beda hingga pusat sebagai berikut.

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{C_{i-1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{C_{i,j-1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \quad (4.8)$$

Diskritisasi yang didapatkan dari pendekatan menggunakan metode beda hingga, selanjutnya akan disubstitusikan ke dalam model transfer polutan pada persamaan (4.1) dengan hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^n}{\Delta t} &= D_x \frac{C_{i-1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + D_y \frac{C_{i,j-1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} - \left(v_x \frac{C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) \\ C_{i,j}^{n+1} &= \left[1 - \frac{2D_x \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{2D_y \Delta t}{\Delta y^2} \right] C_{i,j}^n + \frac{D_x \Delta t}{\Delta x^2} [C_{i-1,j}^n + C_{i+1,j}^n] + \frac{D_y \Delta t}{\Delta y^2} [C_{i,j-1}^n + C_{i,j+1}^n] \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{v_x \Delta t}{\Delta x} [C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Misalkan:

$$A_x = \frac{D_x \Delta t}{\Delta x^2}, \quad A_y = \frac{D_y \Delta t}{\Delta y^2}, \quad B = \frac{v_x \Delta t}{\Delta x}$$

maka,

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{n+1} &= [1 - 2A_x - 2A_y] C_{i,j}^n + A_x [C_{i-1,j}^n + C_{i+1,j}^n] + A_y [C_{i,j-1}^n + C_{i,j+1}^n] \\ &\quad - \frac{1}{2} B [C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n] \\ C_{i,j}^{n+1} &= [1 - 2A_x - 2A_y] C_{i,j}^n + \left[A_x - \frac{1}{2} B \right] C_{i+1,j}^n + \left[A_x + \frac{1}{2} B \right] C_{i-1,j}^n \\ &\quad + A_y (C_{i,j-1}^n + C_{i,j+1}^n) \\ C_{i,j}^{n+1} &= [1 - 2A_x - 2A_y] C_{i,j}^n + \left[A_x - \frac{1}{2} B \right] C_{i+1,j}^n + \left[A_x + \frac{1}{2} B \right] C_{i-1,j}^n \\ &\quad + [A_y] C_{i,j-1}^n + [A_y] C_{i,j+1}^n \end{aligned} \quad (4.10)$$

Persamaan (4.10) merupakan hasil bentuk diskrit dari persamaan transfer polutan, selanjutnya penyelesaiannya akan dilakukan dengan memasukkan persamaan diskrit tersebut dalam bentuk matriks.

Misalkan:

$$\alpha = 1 - 2A_x - 2A_y$$

$$\beta = A_x - \frac{1}{2}B$$

$$\gamma = A_x + \frac{1}{2}B$$

$$\theta = A_y$$

Maka persamaan (4.10) akan menjadi sebagai berikut:

$$C_{i,j}^{n+1} = \alpha C_{i,j}^n + \beta C_{i+1,j}^n + \gamma C_{i-1,j}^n + \theta C_{i,j-1}^n + \theta C_{i,j+1}^n \quad (4.11)$$

Persamaan (4.11) untuk $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$ maka diperoleh sistem persamaan sebagai berikut:

$$\text{untuk } i = 1 \text{ dan } j = 1 \rightarrow C_{1,1}^{n+1} = \alpha C_{1,1}^n + \beta C_{2,1}^n + \gamma C_{0,1}^n + \theta C_{1,0}^n + \theta C_{1,2}^n$$

$$\text{untuk } i = 1 \text{ dan } j = 2 \rightarrow C_{1,2}^{n+1} = \alpha C_{1,2}^n + \beta C_{2,2}^n + \gamma C_{0,2}^n + \theta C_{1,1}^n + \theta C_{1,3}^n$$

$$\text{untuk } i = 1 \text{ dan } j = 3 \rightarrow C_{1,3}^{n+1} = \alpha C_{1,3}^n + \beta C_{2,3}^n + \gamma C_{0,3}^n + \theta C_{1,2}^n + \theta C_{1,4}^n$$

⋮

$$\text{untuk } i = 1 \text{ dan } j = n \rightarrow C_{1,n}^{n+1} = \alpha C_{1,n}^n + \beta C_{2,n}^n + \gamma C_{0,n}^n + \theta C_{1,n-1}^n + \theta C_{1,n+1}^n$$

$$\text{untuk } i = 2 \text{ dan } j = 1 \rightarrow C_{2,1}^{n+1} = \alpha C_{2,1}^n + \beta C_{3,1}^n + \gamma C_{1,1}^n + \theta C_{2,0}^n + \theta C_{2,2}^n$$

$$\text{untuk } i = 2 \text{ dan } j = 2 \rightarrow C_{2,2}^{n+1} = \alpha C_{2,2}^n + \beta C_{3,2}^n + \gamma C_{1,2}^n + \theta C_{2,1}^n + \theta C_{2,3}^n$$

⋮

$$\text{untuk } i = 2 \text{ dan } j = n \rightarrow C_{2,n}^{n+1} = \alpha C_{2,n}^n + \beta C_{3,n}^n + \gamma C_{1,n}^n + \theta C_{2,n-1}^n + \theta C_{2,n+1}^n$$

$$\text{untuk } i = 3 \text{ dan } j = 1 \rightarrow C_{3,1}^{n+1} = \alpha C_{3,1}^n + \beta C_{4,1}^n + \gamma C_{2,1}^n + \theta C_{3,0}^n + \theta C_{3,2}^n$$

⋮

$$\text{untuk } i = 3 \text{ dan } j = n \rightarrow C_{3,n}^{n+1} = \alpha C_{3,n}^n + \beta C_{4,n}^n + \gamma C_{2,n}^n + \theta C_{3,n-1}^n + \theta C_{3,n+1}^n$$

⋮

$$\text{untuk } i = m \text{ dan } j = 1 \rightarrow C_{m,1}^{n+1} = \alpha C_{m,1}^n + \beta C_{m+1,1}^n + \gamma C_{m-1,1}^n + \theta C_{m,0}^n + \theta C_{m,2}^n$$

$$\text{untuk } i = m \text{ dan } j = 2 \rightarrow C_{m,2}^{n+1} = \alpha C_{m,2}^n + \beta C_{m+1,2}^n + \gamma C_{m-1,2}^n + \theta C_{m,1}^n + \theta C_{m,3}^n$$

⋮

$$\text{untuk } i = m \text{ dan } j = n \rightarrow C_{m,n}^{n+1} = \alpha C_{m,n}^n + \beta C_{m+1,n}^n + \gamma C_{m-1,n}^n + \theta C_{m,n-1}^n + \theta C_{m,n+1}^n$$

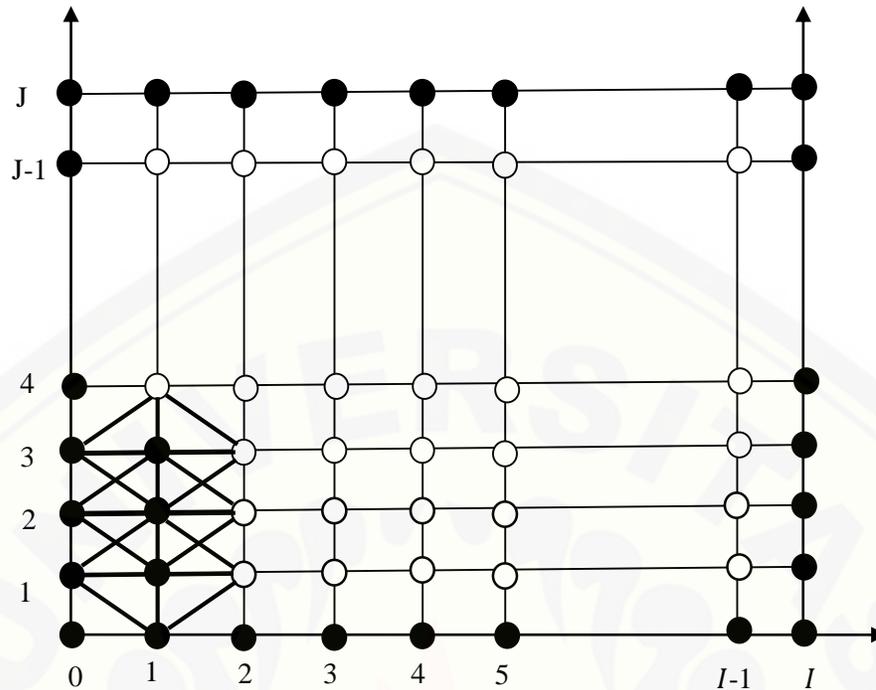
Jika disajikan dalam matriks, sistem persamaan tersebut menjadi:

$$C_{i,j}^{n+1} = A C_{i,j}^n$$

sehingga di dapatkan bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} C_{1,1} \\ C_{1,2} \\ C_{1,3} \\ \vdots \\ C_{1,n} \\ C_{2,1} \\ C_{2,2} \\ \vdots \\ C_{2,n} \\ C_{3,1} \\ \vdots \\ C_{3,n} \\ \vdots \\ C_{m,1} \\ C_{m,2} \\ \vdots \\ C_{m,n} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} \alpha & \theta & 0 & \cdots & 0 & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \theta & \alpha & \theta & \cdots & 0 & 0 & \beta & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta & \alpha & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1,n} & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 0 & 0 & \cdots & \beta & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_{2,1} & \gamma & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 & \beta & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_{2,2} & 0 & \gamma & \cdots & 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{2,n} & 0 & 0 & \cdots & \gamma & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 0 & \cdots & \beta & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_{3,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma & 0 & \cdots & 0 & \alpha & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{3,n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha & \theta & \cdots & 0 \\ C_{m,2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \theta & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m,n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1,1} \\ C_{1,2} \\ C_{1,3} \\ \vdots \\ C_{1,n} \\ C_{2,1} \\ C_{2,2} \\ \vdots \\ C_{2,n} \\ C_{3,1} \\ \vdots \\ C_{3,n} \\ \vdots \\ C_{m,1} \\ C_{m,2} \\ \vdots \\ C_{m,n} \end{bmatrix}^n$$

Matriks yang didapatkan dari penyelesaian sebelumnya adalah matriks diagonal. Setelah dicari solusi menggunakan metode FTCS maka kisi sungai dari hasil penyelesaian model transfer polutan dapat dilihat pada gambar 4.3.



Gambar 4.3 Kisi Sungai dengan Skema FTCS

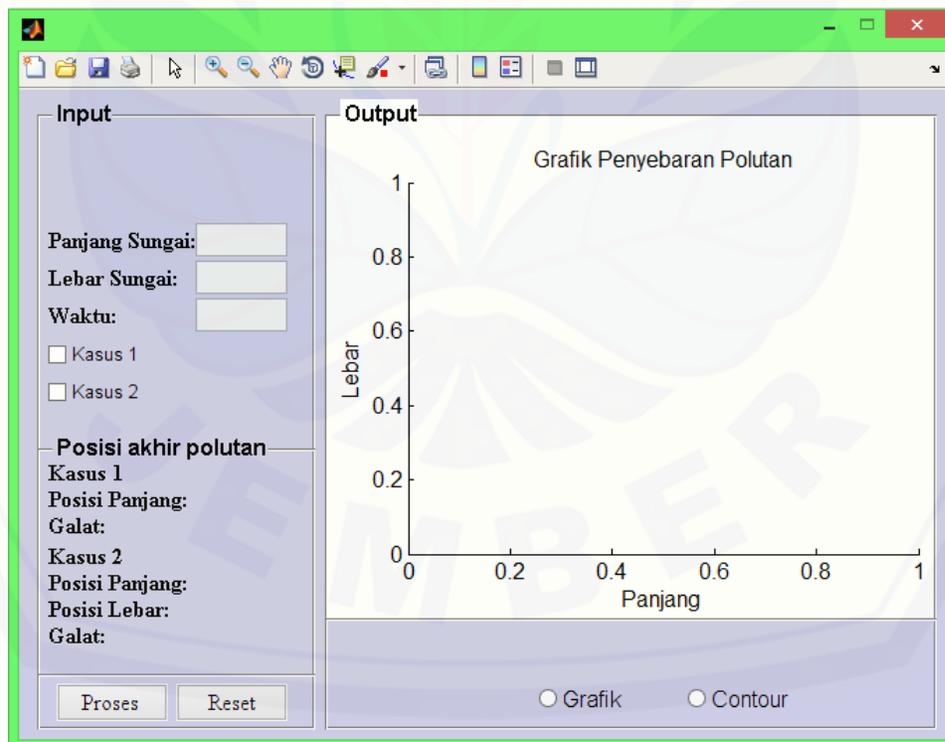
Menggunakan persamaan (4.10) proses penyebaran polutan yang terjadi di sungai pada gambar 4.3 akan dihitung $C_{i,j}^{n+1}$ dengan menggunakan nilai $[1 - 2A_x - 2A_y]C_{i,j}^n + [A_x - \frac{1}{2}B]C_{i+1,j}^n + [A_x + \frac{1}{2}B]C_{i-1,j}^n + [A_y]C_{i,j-1}^n + [A_y]C_{i,j+1}^n$ yang diketahui sampai iterasi yang diinginkan. Lambang ● merupakan titik yang diketahui dan lambang ○ merupakan titik yang belum diketahui. Perhitungan tersebut bertujuan untuk mengetahui konsentrasi polutan yang berada pada bagian-bagian sungai. Karena proses perhitungan yang sangat panjang, maka akan diselesaikan secara numerik menggunakan MATLAB. Berdasarkan metode numerik yang merupakan solusi pendekatan maka selalu terkait dengan galat (*error*), untuk memperoleh akurasi solusi yang lebih mendekati penyelesaian eksaknya diperlukan diskritisasi yang tepat sehingga memiliki *error* yang kecil, yaitu didapatkan dari iterasi polutan dengan rumus.

$$\text{Galat} = \left| \frac{C_n - C_{n-1}}{C_{n-1}} \right| \times 100\%.$$

Selanjutnya untuk proses pembuatan program akan dilanjutkan dengan menggunakan *software* MATLAB.

4.3 Pembuatan Program

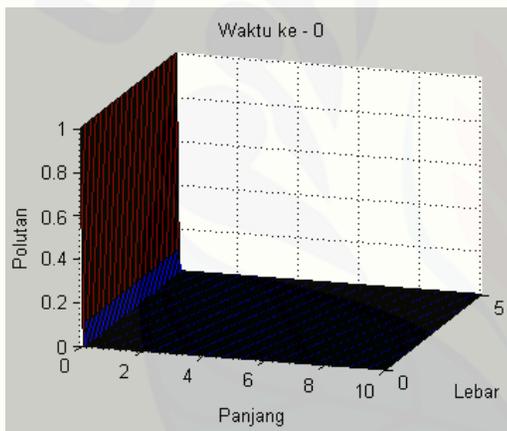
Pembuatan program dalam menyelesaikan model transfer polutan selanjutnya dengan menggunakan *software* MATLAB R2009a. Prosedur pembuatan program dalam MATLAB yaitu dengan menginputkan parameter koefisien difusi $D_x = 0,0004 \text{ m}^2/\text{det}$, $D_y = 0,0001 \text{ m}^2/\text{det}$, dan membagi daerah domain dalam gri-grid dengan ukuran $\Delta x = \Delta y = 0,1$ meter dan grid waktu dengan ukuran $\Delta t = 1$ detik. Polutan yang di analisis merupakan polutan konservatif yaitu konsentrasi akan mengalami pengurangan bila terjadi pengenceran dan adanya proses difusi. Kemudian program akan ditampilkan dalam bentuk GUI untuk memudahkan dalam menganalisis hasil dari proses transfer polutan. *Output* yang dihasilkan dari program ini yaitu penyebaran polutan dari dua kasus yang berbentuk grafik kontur dari hubungan antara nilai konsentrasi polutan dalam mg/L dengan jarak sungai yang memanjang dalam meter pada titik tertentu dan saat tertentu. Berikut ini adalah tampilan GUI dari program transfer polutan di sungai.



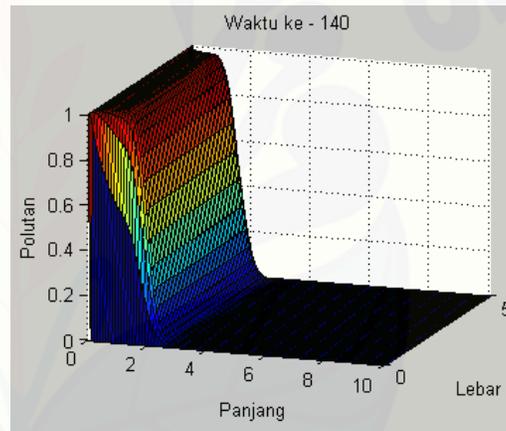
Gambar 4.4 Tampilan GUI program transfer polutan di sungai

4.4 Simulasi Program

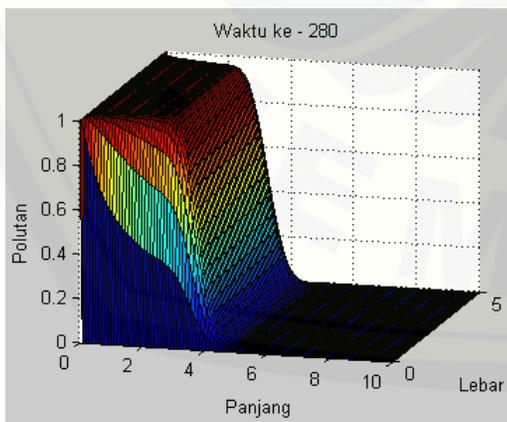
Simulasi program bertujuan untuk memberikan gambaran mengenai proses transfer polutan di sungai yang sudah diselesaikan menggunakan metode FTCS. Simulasi ini dilakukan untuk mengetahui penyebaran konsentrasi polutan di sungai pada saluran terbuka, dimana interval pengamatan panjang sungai 10 meter dan lebar sungai 5 meter. Dengan waktu pengamatan yang digunakan selama 700 detik, kecepatan aliran air yang masuk dan keluar adalah konstan yaitu $v_x = 0,0125$ m/detik. Berikut adalah simulasi polutan dari waktu ke waktu pada kasus satu yaitu mengasumsikan bahwa polutan pada awalnya berada pada sepanjang sumber aliran. Pada simulasi ini, sumber aliran akan diberikan polutan sebesar 1 mg/L yang ditampilkan pada gambar 4.5 (a), (b), (c), (d), (e) dan (f)



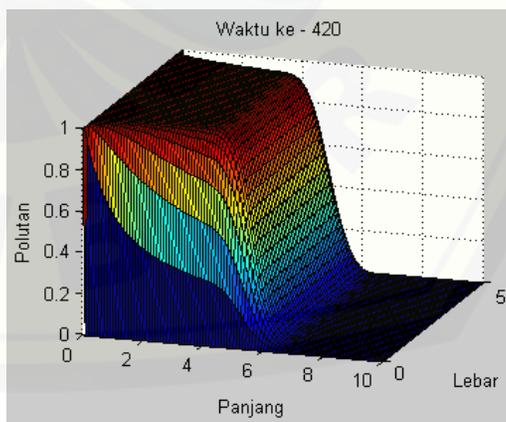
(a)



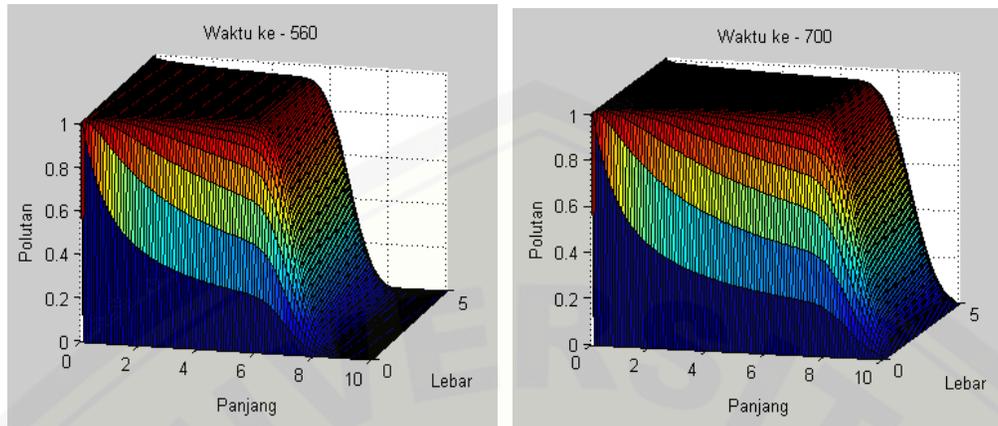
(b)



(c)



(d)



(e)

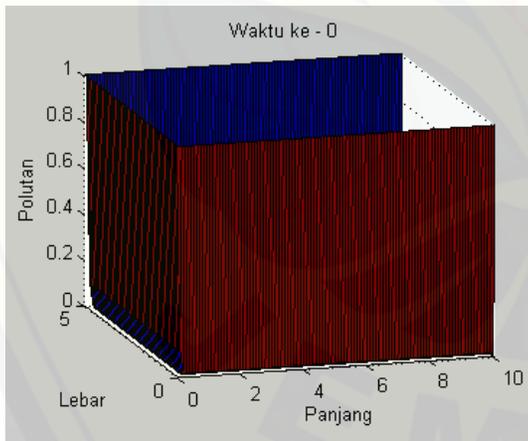
(f)

Gambar 4.5 Simulasi satu pada kasus 1 konsentrasi polutan 1 mg/L dengan (a) $T = 0$ detik; (b) $T = 140$ detik; (c) $T = 280$ detik; (d) $T = 420$ detik; (e) $T = 560$ detik dan (f) $T = 700$ detik.

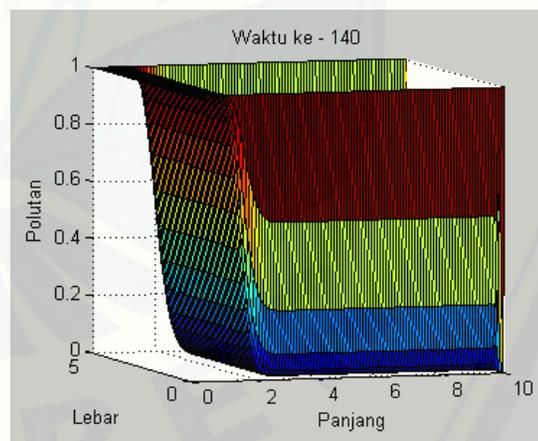
Gambar-gambar tersebut menunjukkan penyebaran polutan di sungai dalam waktu pengamatan 700 detik. Panjang awal sungai yaitu 0 meter merupakan sumber aliran. Pada waktu ke 0 detik pada gambar 4.5 (a) kondisi sungai yang diberi polutan terlihat berwarna coklat pada gambar tersebut menunjukkan konsentrasi polutan sebesar 1 mg/L berada pada sepanjang sumber aliran. Penyebaran polutan pada waktu ke 0 detik masih mendekati sumber aliran pada awal sungai 0 meter. Selanjutnya gambar 4.5 (b) pada waktu ke 140 detik penyebaran polutan mulai bergerak menuju panjang sungai 2 meter dan mengalami penurunan konsentrasi selama pergerakan berlangsung. Penurunan konsentrasi polutan yang terjadi dapat dilihat berdasarkan warna-warna yang berawal dari warna coklat menunjukkan konsentrasi polutan sebesar 1 mg/L, selanjutnya konsentrasi menurun yang ditandai dengan warna coklat muda sampai dengan warna biru tua. Konsentrasi polutan pada awal sungai 0 meter sebesar 1 mg/L saat sampai pada posisi panjang sungai 2 meter konsentrasi polutan sudah menurun menjadi 0,1125 mg/L. Penyebaran polutan pada gambar 4.5 (f) semakin lama semakin memanjang dan menjauhi sumber aliran, dalam waktu 700 detik pergerakan polutan menunjukkan bergerak menuju panjang sungai 10 meter dengan konsentrasi polutan pada batas akhir pengamatan panjang sungai bernilai 0 mg/L yaitu belum

sampai pada panjang sungai tersebut. Proses penyebaran polutan terjadi karena adanya proses adveksi dan difusi, polutan dapat bergerak menuju batas akhir interval pengamatan sejauh 10 meter karena adanya proses pengangkutan atau adveksi dan penurunan konsentrasi polutan saat menyebar karena adanya proses difusi sehingga konsentrasi polutan semakin lama akan semakin menurun.

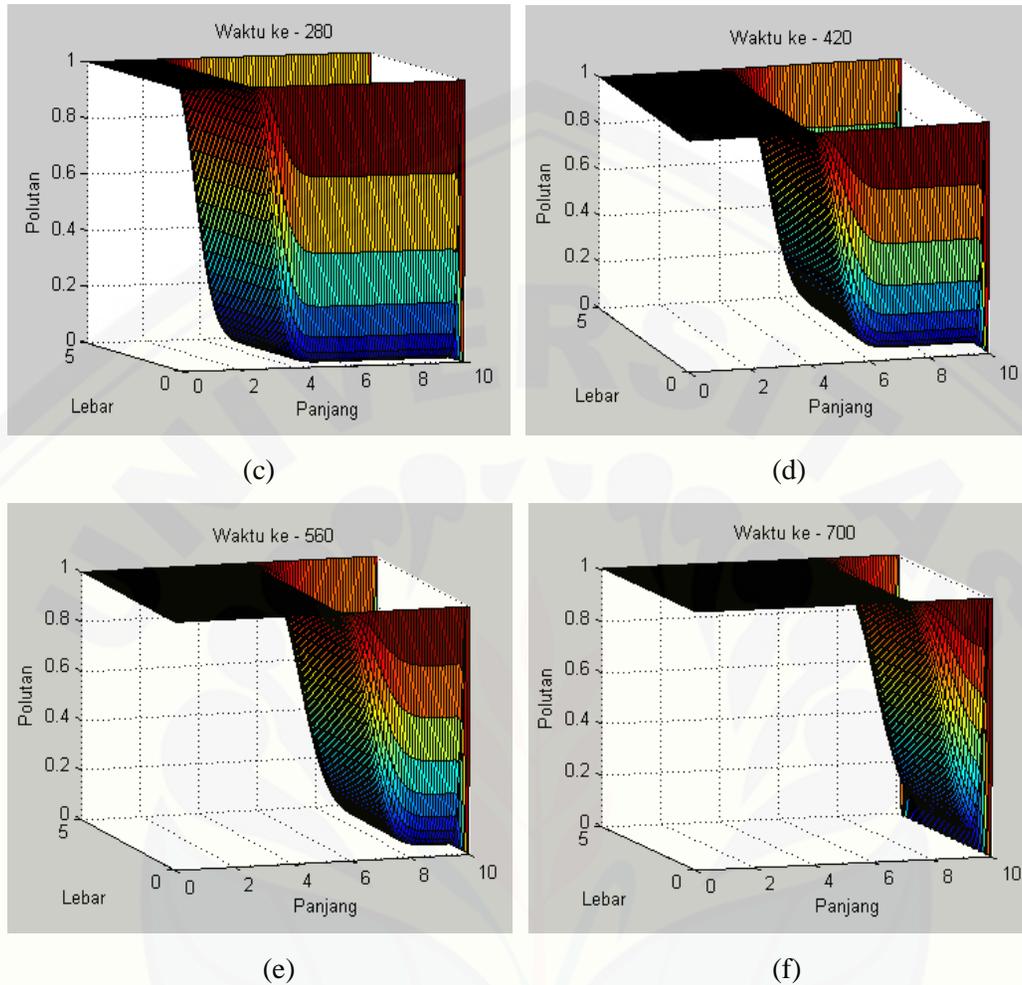
Selanjutnya akan dilakukan simulasi penyebaran polutan pada kasus dua dengan kondisi pemberian polutan yang berbeda. Kasus kedua mengasumsikan pada awalnya polutan tidak hanya berada pada sumber aliran tetapi polutan juga akan diberikan pada sepanjang sisi-sisi aliran sungai. Pengamatan juga akan dilakukan dengan melakukan simulasi pada interval pengamatan panjang sungai 10 meter dan lebar sungai 5 meter dengan kecepatan aliran air sungai yang masuk dan keluar pada daerah domain adalah konstan yaitu $v_x = 0,0125$ m/detik selama 700 detik. Pada kasus kedua ini polutan yang berada pada sumber aliran akan bergerak ke arah x dan polutan yang berada pada sepanjang sisi aliran akan bergerak menuju arah y . Berikut ini merupakan simulasi pada kasus dua dapat dilihat pada gambar 4.6 (a),(b),(c), (d), (e) dan (f).



(a)



(b)

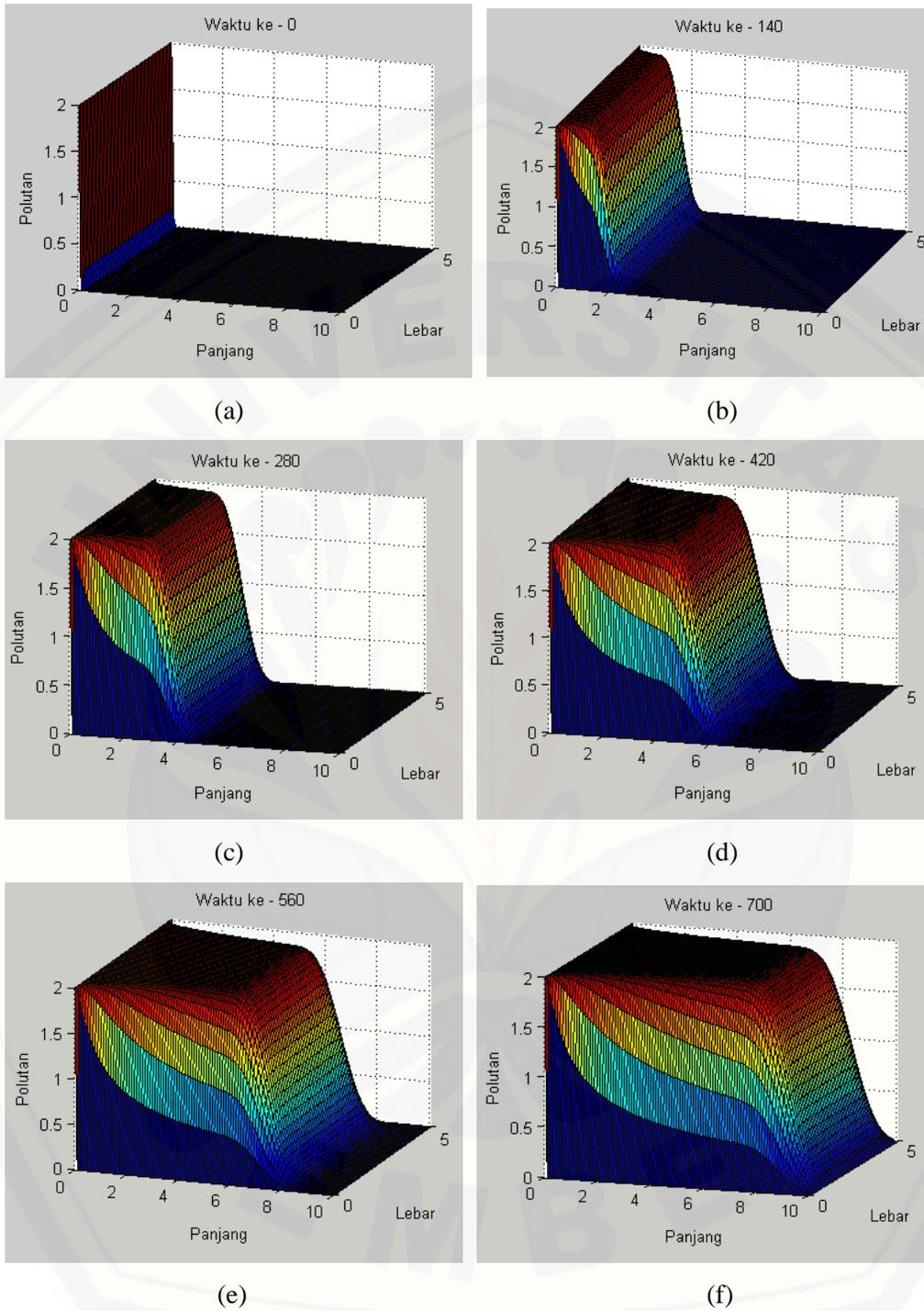


Gambar 4.6 Simulasi satu pada kasus 2 konsentrasi polutan 1 mg/L dengan (a) $T = 0$ detik; (b) $T = 140$ detik; (c) $T = 280$ detik; (d) $T = 420$ detik; (e) $T = 560$ detik dan (f) $T = 700$ detik.

Penyebaran polutan pada kasus dua gambar 4.6 (a) pada waktu ke 0 konsentrasi polutan sebesar 1 mg/L tidak hanya berada pada sumber aliran seperti pada kasus satu, tetapi juga berada di sepanjang sisi-sisi aliran sungai sehingga konsentrasi polutan pada sepanjang sisi aliran juga sebesar 1 mg/L. Pada waktu ke 0 detik pergerakan polutan juga masih mendekati sumber aliran dan sisi aliran, sehingga belum terlihat penurunan konsentrasi polutan. Pada waktu selanjutnya gambar 4.6 (b) polutan mulai mengalami pergerakan dan menyebar menuju tengah sungai, sehingga penurunan konsentrasi polutan pada penyebarannya mulai terlihat. Pada waktu 140 detik pergerakan polutan

tidak hanya terlihat menuju arah x karena polutan yang berada pada sepanjang sisi aliran akan berdifusi, sehingga mengalami penurunan konsentrasi polutan yang menuju ke arah y . Pada waktu yang lebih lama yaitu 700 detik penyebaran polutan lebih merata karena polutan yang menuju arah x semakin lama akan bertemu dengan polutan yang berada pada sepanjang sisi aliran yang menuju ke arah y menyebabkan tingkat konsentrasi polutan pada bagian-bagian sungai tersebut lebih tinggi dibandingkan dengan simulasi pada kasus satu. Pergerakan polutan yang menuju ke arah x lebih cepat dibandingkan dengan kecepatan penyebaran polutan yang berada pada sepanjang sisi aliran sungai. Hal ini dikarenakan proses penyebaran polutan menuju ke arah x mengalami proses adveksi sehingga polutan yang terangkut dalam aliran sungai lebih cepat bergerak dan mengalami proses difusi sehingga konsentrasi polutan semakin lama akan semakin menurun, sedangkan polutan yang menuju arah y hanya mengalami proses difusi sehingga polutan tersebut akan mengalami penurunan konsentrasi dan pergerakan polutannya masih mendekati sumber polutan yang bearada pada sepanjang sisi aliran sungai.

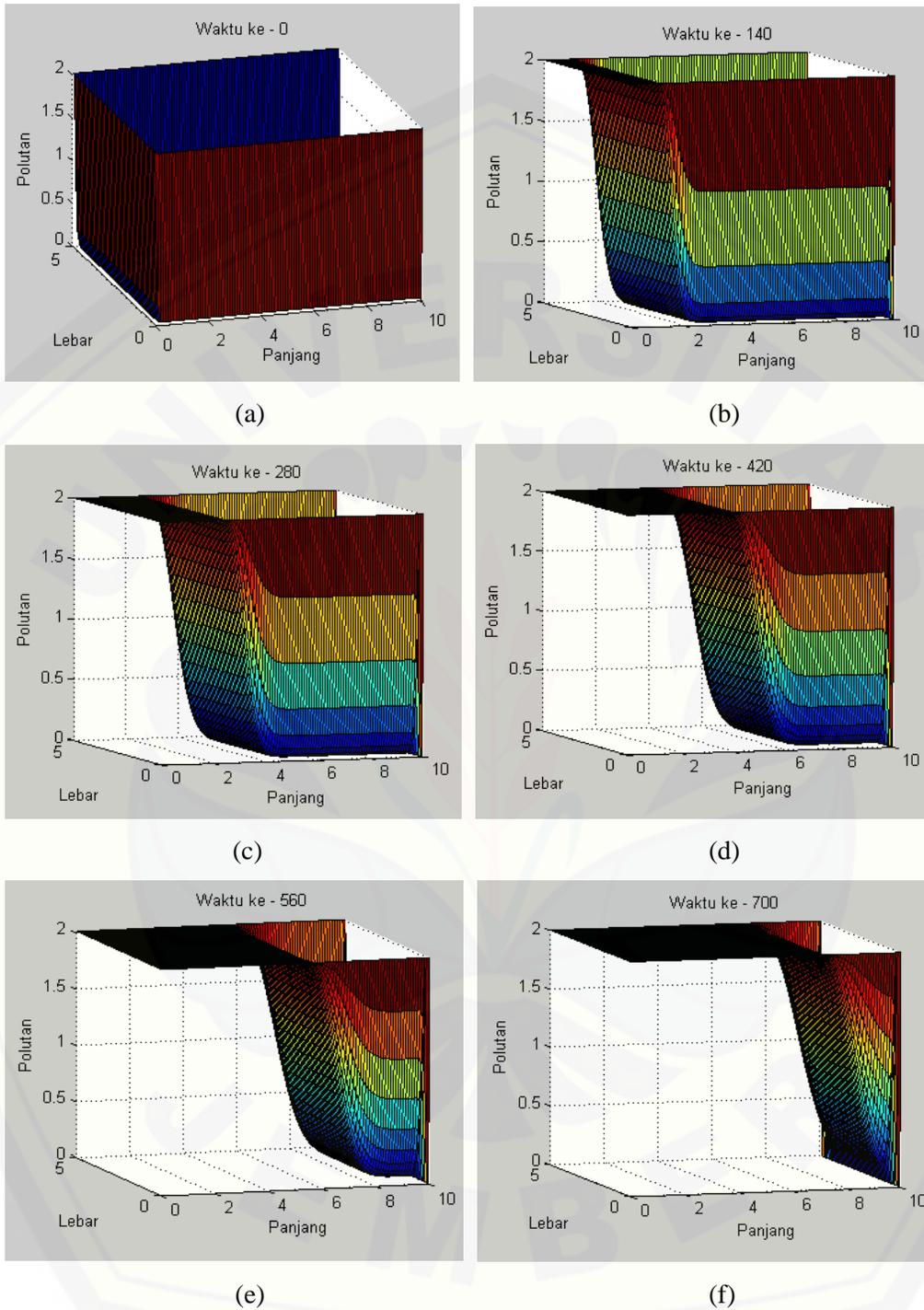
Selanjutnya akan disimulasikan proses transfer polutan di sungai pada dua kasus seperti sebelumnya dengan memvariasikan polutan yang diberikan sebesar 2 mg/L. Dengan interval pengamatan panjang sungai yang sama yaitu 10 meter, lebar sungai 5 meter dan kecepatan $v_x = 0,0125$ m/detik. Waktu pengamatan yang dilakukan sampai dengan 700 detik. Hal ini dilakukan untuk mengetahui perbedaan konsentrasi polutan yang dihasilkan dari proses transfer polutan dengan pemberian konsentrasi polutan awal yang berbeda. Berikut simulasi pada kasus satu dengan asumsi polutan awalnya berada pada sumber aliran dengan konsentrasi polutan sebesar 2 mg/L dapat dilihat pada gambar 4.7 (a), (b), (c), (d), (e) dan (f).



Gambar 4.7 Simulasi dua pada kasus 1 konsentrasi polutan 2 mg/L dengan (a) $T = 0$ detik; (b) $T = 140$ detik; (c) $T = 280$ detik; (d) $T = 420$ detik; (e) $T = 560$ detik dan (f) $T = 700$ detik.

Dengan konsentrasi polutan yang diberikan lebih besar dari sebelumnya maka dapat dipastikan konsentrasi polutan yang menyebar juga akan lebih besar dibandingkan simulasi sebelumnya, maka pada bagian-bagian sungai konsentrasinya akan berbeda dengan hasil sebelumnya. Pada gambar 4.7 (a), (b), (c), (d), (e) dan (f) pergerakan polutan dengan konsentrasi polutan awal 2 mg/L akan menyebar dan mengalami penurunan konsentrasi dari waktu ke waktu. Pada waktu ke 0 penyebaran polutan masih mendekati sumber aliran dan belum menunjukkan adanya perubahan konsentrasi yang secara langsung. Sedangkan pada waktu 140 detik selanjutnya penyebaran polutan mulai menunjukkan adanya pergerakan menuju panjang sungai 2 meter dari sumber aliran. Konsentrasi polutan pada awalnya di sumber aliran sebesar 2 mg/L mengalami penurunan konsentrasi menjadi 0,2251 mg/L. Hal ini menunjukkan sumber polutan yang diberikan pada awal sungai akan mempengaruhi besar konsentrasi polutan yang bergerak. Pada waktu selanjutnya pergerakan polutan semakin lama akan semakin memanjang menuju panjang sungai 10 meter dan memberikan nilai konsentrasi 0 mg/L pada saat tersebut.

Simulasi selanjutnya juga akan dilakukan pada kasus dua dengan pengamatan pada interval panjang sungai yang sama 10 meter, lebar sungai 5 meter, kecepatan konstan $v_x = 0,0125$ m/detik. Penyebaran pada kasus dua dengan konsentrasi polutan 2 mg/L juga akan diamati dari waktu ke waktu sampai dengan 700 detik, dengan mengasumsikan polutan sebesar 2 mg/L tidak hanya berada pada sumber aliran tetapi juga berada pada sepanjang sisi aliran, sehingga pada sepanjang sisi aliran juga diberikan polutan dengan konsentrasi sebesar 2 mg/L. Berikut gambar simulasi dua pada kasus dua dapat dilihat pada gambar 4.8 (a), (b), (c), (d), (e) dan (f).



Gambar 4.8 Simulasi dua pada kasus 2 konsentrasi polutan 2 mg/L dengan (a) $T = 0$ detik; (b) $T = 140$ detik; (c) $T = 280$ detik; (d) $T = 420$ detik; (e) $T = 560$ detik dan (f) $T = 700$ detik.

Pada gambar-gambar tersebut menunjukkan penyebaran polutan pada aliran sungai sepanjang 10 meter dan lebar sungai 5 meter. Dimana pergerakan polutan yang menuju ke arah x dari waktu ke waktu menunjukkan polutan yang bergerak semakin memanjang menuju 10 meter dalam waktu 700 detik. Sedangkan polutan yang berada pada sepanjang sisi aliran sungai hanya mengalami proses difusi sehingga pergerakan polutannya masih mendekati sisi aliran sungai, dengan penurunan konsentrasinya seiring berjalannya waktu. Pada gambar 4.8 (a), (b), (c), (d), (e) dan (f) terlihat penyebaran polutan semakin merata, karena adanya polutan yang bergerak ke arah y akan berdifusi di sepanjang sisi aliran. Selain itu polutan yang bergerak menuju arah x akan bertemu dengan polutan yang berdifusi ke arah y , sehingga konsentrasi polutan pada titik pertemuan polutan tersebut, semakin lama akan semakin meningkat dibandingkan dengan simulasi pada kasus satu. Berikut ini merupakan tabel analisis konsentrasi polutan dari dua simulasi dengan variasi konsentrasi polutan sebesar 1 mg/L dan 2 mg/L pada masing masing kasus.

Tabel 4.1 Simulasi satu pada kasus 1 dengan polutan 1 mg/L

Waktu (detik)	Konsentrasi Polutan (mg/L)					
	$x_0, y_{0,1}$	$x_2, y_{0,1}$	$x_4, y_{0,1}$	$x_6, y_{0,1}$	$x_8, y_{0,1}$	$x_{10}, y_{0,1}$
0	1	0	0	0	0	0
140	1	0,1125	0	0	0	0
280	1	0,4314	0,0489	0	0	0
420	1	0,4314	0,3102	0,0258	0	0
560	1	0,4314	0,3108	0,2469	0,0149	0
700	1	0,4314	0,3108	0,2551	0,1965	0

Tabel 4.1 menunjukkan pada waktu ke 0 detik konsentrasi polutan di titik $(x_0, y_{0,1})$ menunjukkan polutan pada panjang sungai $x = 0$ meter dan lebar sungai $y = 0,1$ meter berada pada konsentrasi polutan sebesar 1 mg/L, selanjutnya pergerakan polutan yang menuju ke arah x belum sampai pada panjang sungai $x = 2$ meter dan lebar sungai $y = 0,1$ meter, sehingga nilai konsentrasi polutan pada titik $(x_2, y_{0,1})$ tersebut 0 mg/L. Pada waktu ke 140 detik konsentrasi polutan pada titik

$(x_0, y_{0,1})$ juga menunjukkan konsentrasi polutan sebesar 1 mg/L kemudian mengalami penurunan konsentrasi sebesar 0,1125 mg/L dan menyebar di titik $(x_2, y_{0,1})$. Pada waktu yang sama polutan yang berada pada titik $(x_4, y_{0,1})$ konsentrasi polutan sebesar 0 mg/L hal ini menunjukkan pergerakan polutan belum sampai pada titik tersebut. Selanjutnya proses penyebaran polutan terus berlangsung dan bergerak sampai pada waktu 700 detik dengan konsentrasi polutan awal 1 mg/L semakin lama bergerak semakin menjauhi titik sumber aliran dengan konsentrasi polutan pada titik $(x_2, y_{0,1})$ sebesar 0,4314 mg/L dan terus bergerak dan mengalami penurunan konsentrasi sampai pada titik $(x_{10}, y_{0,1})$ konsentrasi polutan sudah menjadi 0 mg/L.

Tabel 4.2 Simulasi satu pada kasus 2 dengan polutan 1 mg/L

Waktu (detik)	Konsentrasi Polutan (mg/L)					
	$x_0, y_{0,1}$	$x_2, y_{0,1}$	$x_4, y_{0,1}$	$x_6, y_{0,1}$	$x_8, y_{0,1}$	$x_{10}, y_{0,1}$
0	1	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100	0
140	1	0,6542	0,5474	0,5474	0,5474	0
280	1	1	0,7183	0,6710	0,6710	0
420	1	1	0,9994	0,7543	0,7291	0
560	1	1	1	0,9915	0,7790	0
700	1	1	1	1	0,9507	0

Pada kasus dua tabel 4.2, polutan pada waktu ke 0 detik di titik $(x_0, y_{0,1})$ menunjukkan polutan pada panjang sungai $x = 0$ meter dan lebar sungai $y = 0,1$ meter berada pada konsentrasi polutan sebesar 1 mg/L. Selanjutnya di titik $(x_2, y_{0,1})$ menunjukkan polutan pada panjang sungai $x = 2$ meter dan lebar sungai $y = 0,1$ meter berada pada konsentrasi polutan sebesar 0,0100 mg/L sampai dititik $(x_8, y_{0,1})$. Pada panjang sungai 2 meter sampai dengan 8 meter konsentrasinya tetap sebesar 0,0100 mg/L, hal ini terjadi karena keberadaan polutan yang berada pada sepanjang sisi aliran sungai juga terdapat polutan. Pergerakan polutan pada waktu 700 detik di titik $(x_2, y_{0,1})$ konsentrasi polutan sebesar 1 mg/L, konsentrasi polutan pada titik tersebut sama dengan konsentrasi awal polutan, hal ini karena polutan yang menuju arah x bertemu dengan polutan yang berdifusi ke arah y , sehingga konsentrasi polutan

menjadi sebesar 1 mg/L. Pada titik $(x_6, y_{0,1})$ konsentrasi polutan juga masih sebesar 1 mg/L dan mulai menurun pada titik $(x_8, y_{0,1})$ konsentrasi polutan menjadi 0,9507 mg/L. Selanjutnya pergerakan polutan pada panjang sungai 10 meter dan lebar sungai 0,1 meter sudah mulai berhenti sehingga konsentrasi polutan sudah menjadi 0 mg/L.

Tabel 4.1 dan 4.2 penyebaran polutan yang diamati yaitu berdasarkan panjang sungai ke arah $x = 10$ meter dan pada lebar sungai yang konstan pada titik $y = 0,1$ meter. Hal ini dilakukan untuk mengetahui konsentrasi polutan yang bergerak ke arah x pada posisi lebar sungai y tetap sehingga dapat diketahui perbedaan konsentrasi polutan yang terjadi pada kasus satu dan kasus dua. Kesimpulan yang dapat diambil dari kedua tabel tersebut yaitu penyebaran polutan pada titik yang sama dan waktu yang sama konsentrasi polutan yang dihasilkan dari kasus dua lebih besar dibandingkan konsentrasi polutan yang dihasilkan dari pergerakan polutan pada kasus satu.

Berikut adalah tabel konsentrasi polutan pada simulasi kedua dengan konsentrasi polutan awal yang diberikan sebesar 2 mg/L pada tiap kasusnya.

Tabel 4.3 Simulasi dua pada kasus 1 dengan polutan 2 mg/L

Waktu (detik)	Konsentrasi Polutan (mg/L)					
	$x_0, y_{0,1}$	$x_2, y_{0,1}$	$x_4, y_{0,1}$	$x_6, y_{0,1}$	$x_8, y_{0,1}$	$x_{10}, y_{0,1}$
0	2	0	0	0	0	0
140	2	0,2251	0	0	0	0
280	2	0,8629	0,0977	0	0	0
420	2	0,8629	0,6205	0,0517	0	0
560	2	0,8629	0,6215	0,4937	0,0298	0
700	2	0,8629	0,6215	0,5101	0,3929	0

Hasil yang didapatkan dari tabel 4.3 dengan pemberian konsentrasi polutan awal sebesar 2 mg/L, maka konsentrasi polutan yang menyebar juga lebih besar dibandingkan dengan konsentrasi awal polutan 1 mg/L. Pada saat 0 detik konsentrasi polutan sebesar 2 mg/L masih bergerak mendekati sumber aliran di titik $(x_0, y_{0,1})$, sehingga pada titik $(x_2, y_{0,1})$ dan seterusnya konsentrasi polutan masih bernilai 0 mg/L. Pada saat 140 detik konsentrasi polutan pada titik $(x_2, y_{0,1})$ sebesar 0,2251 mg/L dan

pada titik $(x_{10}, y_{0,1})$ konsentrasi polutan menurun menjadi 0 mg/L. Pada waktu 700 detik konsentrasi polutan pada titik $(x_2, y_{0,1})$ sebesar 0,8629 mg/L, pada titik $(x_4, y_{0,1})$ sebesar 0,6215 mg/L terus menurun pada titik $(x_6, y_{0,1})$ sebesar 0,5101 mg/L, pada $(x_8, y_{0,1})$ sebesar 0,3929 mg/L dan berakhir pada titik $(x_{10}, y_{0,1})$ konsentrasi polutan menjadi 0 mg/L. Pada kasus kedua akan ditampilkan tabel analisis hasil dari simulasi dua dengan konsentrasi polutan awal sebesar 2 mg/L pada tabel 4.4.

Tabel 4.4 Simulasi dua pada kasus 2 dengan polutan 2 mg/L

Waktu (detik)	Konsentrasi Polutan (mg/L)					
	$x_0, y_{0,1}$	$x_2, y_{0,1}$	$x_4, y_{0,1}$	$x_6, y_{0,1}$	$x_8, y_{0,1}$	$x_{10}, y_{0,1}$
0	2	0,0200	0,0200	0,0200	0,0200	0
140	2	1,3080	1,0950	1,0950	1,0950	0
280	2	2	1,4370	1,3420	1,3420	0
420	2	2	1,9990	1,5090	1,4580	0
560	2	2	2	1,9830	1,5580	0
700	2	2	2	2	1,9490	0

Hasil yang didapatkan dari tabel 4.4 dengan pemberian konsentrasi polutan awal sebesar 2 mg/L, pada saat 0 detik konsentrasi polutan pada titik $(x_2, y_{0,1})$ sampai dengan titik $(x_8, y_{0,1})$ berada dalam konsentrasi polutan yang sama sebesar 0,0200 mg/L dan pada titik $(x_{10}, y_{0,1})$ konsentrasi polutan menurun menjadi 0 mg/L. Sedangkan pada waktu 700 detik konsentrasi polutan pada titik $(x_0, y_{0,1})$ sampai titik $(x_6, y_{0,1})$ menjadi sebesar 2 mg/L, dan mulai menurun pada titik $(x_8, y_{0,1})$ konsentrasi polutan menjadi 1,9490 mg/L sampai pada titik $(x_{10}, y_{0,1})$ konsentrasi polutan menjadi 0 mg/L.

Berdasarkan hasil tabel secara keseluruhan proses transfer polutan dari waktu ke waktu menunjukkan konsentrasi polutan semakin lama semakin meningkat, namun polutan yang bergerak menjauhi sumber aliran konsentrasinya semakin menurun. Perbedaan letak sumber polutan dan pemberian konsentrasi awal akan mempengaruhi besar konsentrasi polutan pada bagian bagian sungai.

4.5 Uji Kestabilan dan Kekonvergenan.

Analisis kestabilan perlu dilakukan untuk mengetahui penggunaan metode FTCS dalam menyelesaikan model transfer polutan stabil atau tidak. Pengujian kestabilan dilakukan dengan menggunakan metode analisis stabilitas *Von Neumann* atau juga dikenal dengan analisis stabilitas Fourier. Langkah awal pengujian yaitu dengan mengganti konsentrasi polutan dengan komponen Fourier kemudian mensubstitusikan pada persamaan (4.10).

$$C_{i,j}^{n+1} = [1 - 2A_x - 2A_y]C_{i,j}^n + \left[A_x - \frac{1}{2}B\right]C_{i+1,j}^n + \left[A_x + \frac{1}{2}B\right]C_{i-1,j}^n \\ + [A_y]C_{i,j-1}^n + [A_y]C_{i,j+1}^n$$

Komponen Fourier

$$C_{i,j}^{n+1} = \rho^{n+1} e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y j)}$$

$$C_{i,j}^n = \rho^n e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y j)}$$

$$C_{i\pm 1,j}^n = \rho^n e^{I(P\Delta x(i\pm 1) + Q\Delta y j)}$$

$$C_{i,j\pm 1}^n = \rho^n e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y(j\pm 1))}$$

$$\rho^{n+1} e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y j)} = (1 - 2A_x - 2A_y) \rho^n e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y j)} + \\ \left(A_x - \frac{1}{2}B\right) \rho^n e^{I(P\Delta x(i+1) + Q\Delta y j)} + \\ \left(A_x + \frac{1}{2}B\right) \rho^n e^{I(P\Delta x(i-1) + Q\Delta y j)} + \\ (A_y) \rho^n e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y(j-1))} + (A_y) \rho^n e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y(j+1))} \quad (4.12)$$

Tahapan selanjutnya yaitu dengan mendefinisikan $\theta = P\Delta x$ dan $\omega = Q\Delta y$ substitusikan pada persamaan (4.12) sehingga didapatkan persamaan (4.13).

$$\rho^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j)} = (1 - 2A_x - 2A_y) \rho^n e^{I(\theta i + \omega j)} + \left(A_x - \frac{1}{2}B\right) \rho^n e^{I(\theta(i+1) + \omega j)}$$

$$+ \left(A_x + \frac{1}{2}B\right) \rho^n e^{I(\theta(i-1)+\omega j)} + (A_y) \rho^n e^{I(\theta i+\omega(j-1))} + (A_y) \rho^n e^{I(\theta i+\omega(j+1))} \quad (4.13)$$

Kemudian mengeleminasikan $\rho^n e^{I(\theta i+\omega j)}$ untuk mendapatkan bentuk yang lebih sederhana seperti berikut ini.

$$\rho = (1 - 2A_x - 2A_y) + \left(A_x - \frac{1}{2}B\right) e^{I\theta} + \left(A_x + \frac{1}{2}B\right) e^{-I\theta} + (A_y) e^{-I\omega} + (A_y) e^{I\omega} \quad (4.14)$$

$$\rho = (1 - 2A_x - 2A_y) + 2A_x(e^{I\theta} + e^{-I\theta}) - B(e^{I\theta} - e^{-I\theta}) + 2A_y(e^{-I\omega} + e^{I\omega}) \quad (4.15)$$

$$\rho = (1 - 2A_x - 2A_y) + 4A_x \left(\frac{e^{I\theta}+e^{-I\theta}}{2}\right) - 2IB \left(\frac{e^{I\theta}-e^{-I\theta}}{2I}\right) + 4A_y \left(\frac{e^{-I\omega}+e^{I\omega}}{2}\right) \quad (4.16)$$

Dengan menggunakan fungsi dasar Maclaurin untuk $\sin x$, $\cos x$ dan e^x diperoleh hubungan:

$$e^{I\theta} = \cos \theta + I \sin \theta$$

$$e^{-I\theta} = \cos \theta - I \sin \theta$$

Kedua persamaan diatas disebut persamaan Euler. Selanjutnya berdasarkan hubungan fungsi trigonometri dengan eksponensial kompleks maka didapatkan bentuk:

$$\sin \theta = \frac{e^{I\theta} - e^{-I\theta}}{2I}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{I\theta} + e^{-I\theta}}{2}$$

Menggunakan identitas $\cos \theta = \frac{e^{I\theta} + e^{-I\theta}}{2}$, $\cos \omega = \frac{e^{I\omega} + e^{-I\omega}}{2}$ dan $\sin \theta = \frac{e^{I\theta} - e^{-I\theta}}{2I}$ maka persamaan (4.16) menjadi:

$$\rho = (1 - 2A_x - 2A_y) + 4A_x \cos \theta - 4IB \sin \theta + 4A_y \cos \omega \quad (4.17)$$

$4A_x \cos \theta - 4IB \sin \theta$ merupakan bilangan kompleks yang memiliki bilangan imajiner yang bernilai $\sqrt{-1}$ maka untuk menghilangkan bilangan imajiner tersebut harus dikuadratkan dengan cara berikut ini.

Misalkan:

$$z = 4A_x \cos \theta - 4IB \sin \theta$$

$$z = |4A_x \cos \theta - 4B \sin \theta|$$

$$z = \sqrt{(4A_x \cos \theta)^2 - (4B \sin \theta)^2}$$

Karena nilai maksimum yang mungkin muncul untuk nilai $\cos \theta$ dan $\sin \theta$ adalah 1 maka

$$z = \sqrt{(4A_x)^2 - (4B)^2}$$

$$z = \sqrt{16A_x^2 - 16B^2}$$

Sehingga didapatkan nilai maksimum untuk $4A_x \cos \theta - 4B \sin \theta$ adalah

$$\sqrt{16A_x^2 - 16B^2} \text{ dan nilai maksimum untuk } 4A_y \cos \omega \text{ adalah } 4A_y$$

$$\rho = (1 - 2A_x - 2A_y) + \sqrt{16A_x^2 - 16B^2} + 4A_y \quad (4.18)$$

$$\rho = 1 - 2A_x - 2A_y + 4A_x + 4A_y - 4B \mid * \frac{1}{2}$$

$$\rho = \frac{1}{2} - A_x - A_y + 2A_x + 2A_y - 2B$$

$$\rho = \frac{1}{2} + A_x + A_y - 2B \quad (4.19)$$

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{D_x \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{D_y \Delta t}{\Delta y^2} - 2 \frac{v_x \Delta t}{\Delta x} \quad (4.20)$$

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{(0,0004)(1)}{(0,1)^2} + \frac{(0,0001)(1)}{(0,1)^2} - 2 \frac{(0,0125)(1)}{(0,1)}$$

$$\rho = 0,5 + 0,04 + 0,01 - 0,25$$

$$\rho = 0,3$$

dari hasil simulai yang dilakukan didapatkan nilai $\rho = 0,3$.

Berdasarkan kriteria syarat kestabilan metode beda hingga $|\rho| \leq 1$ maka pada penyelesaian model transfer polutan menggunakan metode FTCS dengan menggunakan nilai simulasi, syarat kestabilan tersebut terpenuhi yaitu $\rho = 0,3$, sehingga dapat dikatakan stabil dan konvergen.

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab 4 kesimpulan yang dapat diambil dari hasil penyelesaian model transfer polutan di sungai menggunakan metode FTCS yaitu sebagai berikut:

1. Solusi penyelesaian model transfer polutan di sungai yang mengalir pada saluran terbuka dapat diselesaikan menggunakan metode FTCS dengan persamaan berikut ini:

$$C_{i,j}^{n+1} = [1 - 2A_x - 2A_y]C_{i,j}^n + [A_x - \frac{1}{2}B]C_{i+1,j}^n + [A_x + \frac{1}{2}B]C_{i-1,j}^n + [A_y]C_{i,j-1}^n + [A_y]C_{i,j+1}^n$$

2. Berdasarkan hasil simulasi proses transfer polutan di sungai dengan interval pengamatan panjang 10 meter dan lebar sungai 5 meter. Dengan waktu pengamatan 700 detik menunjukkan proses transfer polutan dari waktu ke waktu menunjukkan konsentrasi polutan semakin lama semakin meningkat, namun polutan yang bergerak menjauhi sumber aliran konsentrasinya semakin menurun. Perbedaan letak sumber polutan pada kasus satu dan kasus dua memberikan hasil pada kasus dua penyebaran polutan lebih merata karena polutan juga berada di sepanjang sisi sungai dan konsentrasi polutan yang dihasilkan dari kasus dua lebih besar dibandingkan konsentrasi polutan pada kasus satu. Perbedaan tersebut berasal dari adanya proses adveksi dan difusi yang ada pada aliran sungai. Pemberian konsentrasi awal polutan juga akan mempengaruhi besar konsentrasi polutan yang menyebar pada bagian-bagian sungai yang terkontaminasi polutan.
3. Hasil yang didapatkan dari uji kestabilan dan kekonvergenan dengan mensubstitusikan komponen *fourier* pada persamaan solusi hasil penyelesaian model transfer polutan dengan metode FTCS, didapatkan nilai $\rho = 0,3$ dengan

begitu hasil tersebut memenuhi syarat dari analisis stabilitas *Von Neumann* yaitu $|\rho| \leq 1$ sehingga penyelesaian model transfer polutan menggunakan metode FTCS dapat dikatakan stabil dan konvergen.

5.2 Saran

Permasalahan yang dibahas dalam tugas akhir ini yaitu penyelesaian model transfer polutan di sungai dengan metode FTCS. Sebagai saran untuk penelitian selanjutnya, diharapkan bisa lebih melengkapi dengan meneliti penyebaran polutan yang berasal dari sumber titik atau sumber polutan pada tengah sungai dan menggunakan metode yang memiliki keakuratan yang lebih stabil dibandingkan metode FTCS.

DAFTAR PUSTAKA

- Alman, Kusuma, J., dan Amiruddin. 2013. Penyelesaian Numerik Persamaan Adveksi Difusi 2-D Untuk Transfer Polutan dengan Menggunakan Metode Beda Hingga Dufort Frankel. *Jurnal Matematika*, 1-14. Universitas Hasanudin.
- Candra, R. 2011. Analisis Stabilitas Metode Forward Time-Centre Space (FTCS) dan Lax-Wendroff pada Simulasi Penyelesaian Persamaan Adveksi. Tidak Diterbitkan. *Skripsi*. Medan: Universitas Sumatera Utara.
- Chapra, S. C. (1997). *Surface Water-Quality Modelling*. USA: Mc-Graw-Hill Companies.
- Davis, M. L. and D. A. Cornwell. 1991. *Introduction to Environmental Engineering. Second Edition*. New York: Mc-Graw-Hill, Inc.
- Fardiaz, S. 1992. *Polusi dan Udara*. Yogyakarta: Penerbit Kanisius.
- Greenberg, M. D. 1978. *Foundation of applied mathematics*. United States: Prentice-Hall, Inc.
- Harseno, E. 2007. Studi Eksperimental Aliran Berubah Beraturan Pada Saluran Terbuka Bentuk Prismatis. *Majalah Ilmiah*, 1-26. UKRIM Yogyakarta.
- Hidayat, R. 2006. *Persamaan Diferensial Parsial*. Jember: Jember University Press.
- Hoffman, J. D. 2001. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. New York: Marcel Dekker, Inc.
- Luknanto, D. 2003. *Model Matematika*. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.
- Saidin, M. 2010. *Profil Sedimenasi pada Sungai Model Shazy Shabayek*. <http://digilib.its.ac.id/public/ITS-Undergraduate-13431-Paper> [14 April 2015].
- Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.

Wisodo, H. 2005. Pengkajian Konduksi Panas Tak Tunak 2D Berdasarkan Hasil Tinjauan Komputasi Numerik. *FOTON*, 67-72. Universitas Malang.



LAMPIRAN

SCRIPT PROGRAM

Pembuatan program metode FTCS

```
% clc; clear all; close all;
n_pol=2; % mg/L konsentrasi polutan
Cawal=0;
Cakhir=1*n_pol;
dx=0.1;
dy=0.1;
dt=1;
galat=0;
x=str2num(get(edit1,'string')); %Panjang sungai
y=str2num(get(edit2,'string')); %Lebar Sungai
x=x;
n=x/dx+1;
m=y/dy+1;
waktu=str2num(get(edit3,'string'));
C=ones(n,m)*Cawal; % Nilai awal di semua grid, (y,z)
u1=get(step11,'value');
u2=get(step12,'value');
if u1==1
% syarat batas
C(n,:)=Cawal; % x akhir
C(:,1)=Cawal; % y awal
C(:,m)=Cawal; % y akhir
C(1,:)=Cakhir; % x awal
elseif u2==1
% syarat batas
C(1,:)=Cakhir; % x awal
C(n,:)=Cawal; % x akhir
C(:,1)=Cakhir; % y awal
C(:,m)=Cakhir; % y akhir
end
%-----
Dx=0.0004; Dy=0.0001; Vx=0.0125;
Ax=Dx*dt/dx^2;
Ay=Dy*dt/dy^2;
B=Vx*dt/dx;
%-----
Suhu(:, :, 1)=C;
iter=waktu/dt;
a=0;dx0=[];pol=[]; ket=cell(1);
```

```

waktu0=waktu/dt/5;
for k=1:iter
    C1=C;
    for i=2:(n-1)

        for j=2:(m-1)
            C1(i,j)=(1-2*Ax-2*Ay)*C(i,j)+Ax*(C(i-
1,j)+C(i+1,j))+Ay*(C(i,j-1)+C(i,j+1))-1/2*B*(C(i+1,j)-C(i-1,j));
            if C1(i,j)>n_pol
                C1(i,j)=n_pol;
            end
            galat(i,j)=abs(C1(i,j)-C(i,j))/C1(i,j)*100;

        end

    end

    C1(1,:)=Cakhir; % x awal

    if k==1 || mod(k,waktu0)==0
        if u1==1
            a=a+1;
            if k~=1
                pol(a,:)=smooth(C1(:,fix(m/2)));
                pol2(a,,:)=C1;
            else
                pol(a,:)=C1(:,fix(m/2));
                pol2(a,,:)=C1;
            end
            dx0(a,:)=dx*(0:n-1);
        elseif u2==1
            a=a+1;
            if k==1
                pol(a,:)=C1(:,2);
                pol2(a,,:)=C1;
            else
                pol(a,:)=smooth(smooth(C1(:,2)));
                pol2(a,,:)=C1;
            end
            dx0(a,:)=dx*(0:n-1);

        end
        if k==1
            ket(a)={'Waktu ke - 0'};
        elseif k==iter
            ket(a)={'Waktu ke - ' num2str(waktu)};

        else
            ket(a)={'Waktu ke - ' num2str(k*dt)};

        end
    end
end
end

```

```

        C=C1;
    end
    m1=fix(m/2);
    mm=find(0.1*n_pol>=C(:,m1));
    mn=find(0.1*n_pol>=C(:,m-2));

    set(label_x,'string',{'Kasus 1'};['Posisi Panjang: '];['Galat:
    ']);
    set(label_x1,'string',{'Kasus 2'};['Posisi Panjang: '];['Posisi
    Lebar: '];['Galat: ']);

    if get(step11,'value')==1
        set(label_x,'string',{'Kasus 1'};['Posisi Panjang: '
        num2str(mm(1)*dx-dx)];['Galat: ' num2str(max(max(galat))) ' %']);
    elseif get(step12,'value')==1
        mn=find(0.1>=C(x-3,:));
        if isempty(mn)
            set(label_x1,'string',{'Kasus 2'};['Posisi Panjang: '
            num2str(mm(1)*dx-dx)];['Posisi Lebar: '];['Galat: '
            num2str(max(max(galat))) ' %']);
        else
            set(label_x1,'string',{'Kasus 2'};['Posisi Panjang: '
            num2str(mm(1)*dx-dx)];['Posisi Lebar: ' num2str(mn(1)*dy-
            dy)];['Galat: ' num2str(max(max(galat))) ' %']);
        end
    end

    gambar1;

```

Menampilkan hasil pada gambar 1

```

set(step1,'value',1);
set(step2,'value',0);

        set(win1,'CurrentAxes',grafik1);
    % % plot3(dy*(1:n),dz*(1:m),T)
    % [A H]=grafikf(1*(0:n-1),dx*(0:m-1),C');
    % colorbar
    % clabel(A,H,'LabelSpacing',72);
    % xlabel('Panjang');
    % ylabel('Lebar');
    % if mm(1) <= y
    % xlim([0 y*1])
    %
    % else
    % xlim([0 mm(1)*1])
    %
    % end

plot(dx0',pol');

```

```

xlabel('Panjang');
ylabel('Konsentrasi Polutan (mg/L)');
ket=char(ket);
title('Grafik Penyebaran Polutan');
legend(ket);

```

Menampilkan hasil pada gambar 2

```

set(step1,'value',0);
set(step2,'value',1);

%         set(win1,'CurrentAxes',grafik1);
% [A H]=contour(dx*(0:n-1),dy*(0:m-1),C');
% colorbar;
% clabel(A,H,'LabelSpacing',72);
figure(2); ket=char(ket);
    C2(:,:)=pol2(1,,:);
subplot(2,3,1); surf(dx*(0:n-1),dy*(0:m-1),C2');
title(ket(1,:));
xlabel('Panjang');
ylabel('Lebar');
zlabel('Polutan');

    C2(:,:)=pol2(2,,:);
subplot(2,3,2); surf(dx*(0:n-1),dy*(0:m-1),C2');
title(ket(2,:));
xlabel('Panjang');
ylabel('Lebar');
zlabel('Polutan');

    C2(:,:)=pol2(3,,:);
subplot(2,3,3); surf(dx*(0:n-1),dy*(0:m-1),C2');
title(ket(3,:));
xlabel('Panjang');
ylabel('Lebar');
zlabel('Polutan');

    C2(:,:)=pol2(4,,:);
subplot(2,3,4); surf(dx*(0:n-1),dy*(0:m-1),C2');
title(ket(4,:));
xlabel('Panjang');
ylabel('Lebar');
zlabel('Polutan');

    C2(:,:)=pol2(5,,:);
subplot(2,3,5); surf(dx*(0:n-1),dy*(0:m-1),C2');
title(ket(5,:));
xlabel('Panjang');
ylabel('Lebar');
zlabel('Polutan');

    C2(:,:)=pol2(6,,:);
subplot(2,3,6); surf(dx*(0:n-1),dy*(0:m-1),C2');
title(ket(6,:));
% hold off;C2=[];

```

```

% for a=1:6
%     C2(:,:)=pol2(a, :, :);
% surf(dx*(0:n-1),dy*(0:m-1),C2'); hold on;
%
% end
% title('Contour Penyebaran Polutan');
xlabel('Panjang');
ylabel('Lebar');
zlabel('Polutan');
% if mm(1) <= y
% xlim([0 y*1])
%
% else
% xlim([0 mm(1)*1])
%
% end

```

Menampilkan hasil Program Keseluruhan

```

clc; clear all;
close all;
ada1=0; ada2=0;
set(0,'Units','points')
Screen = get(0,'screensize');
pos=[0 0 500 400-50];

win1=figure(...
'units','points',...
'position',[Screen(3:4)/2-pos(3:4)/2 pos(3:4)],...
'color',[.8 .8 .9],...
'resize','off',...
'menubar','none',...
'toolbar','figure',...
'numbertitle','off',...
'name','');
%=====
hp0 = uipanel('parent',win1,...
'Title','Input','FontSize',12,...
'units','points',...
'fontWeight','bold',...
'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
'Position',[10 5 150 340]);
hp0 = uipanel('parent',win1,...
'Title','Posisi akhir polutan','FontSize',12,...
'units','points',...
'fontWeight','bold',...
'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
'Position',[10 5 150 160]);
label_x=uicontrol('parent',win1,...
'units','points',...
'position',[15 105 130 45],...

```

```

        'style','text','horizontalalignment','left',...
        'string',{'Kasus 1';'Posisi Panjang: ';'Galat: '},...
        'fontname','times new roman','BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
        'fontsize',12,'fontweight','bold');

label_x1=icontrol('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[15 35 130 70],...
    'style','text','horizontalalignment','left',...
    'string',{'Kasus 2';'Posisi Panjang: ';'Posisi Lebar: ';'Galat:
'},...
    'fontname','times new roman','BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
    'fontsize',12,'fontweight','bold');

hp0 = uipanel('parent',win1,...
    'FontSize',12,...
    'units','points',...
    'fontweight','bold',...
    'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
    'Position',[10 5 150 30]);
hp0 = uipanel('parent',win1,...
    'Title','Output','FontSize',12,...
    'units','points',...
    'fontweight','bold',...
    'BackgroundColor',[1 1 1],...
    'Position',[165 5 330 340]);
hp0 = uipanel('parent',win1,...
    'Title','', 'FontSize',12,...
    'units','points',...
    'fontweight','bold',...
    'BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
    'Position',[165 5 330 60]);
labell=icontrol('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[15 240+20 100 15],...
    'style','text','horizontalalignment','left',...
    'string','Panjang Sungai: ',...
    'fontname','times new roman','BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
    'fontsize',12,'fontweight','bold');
edit1=icontrol('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[95 240+20 50 18],...
    'style','edit','horizontalalignment','left',...
    'string','',...
    'fontname','times new roman',...
    'fontsize',12,'fontweight','bold');

labell=icontrol('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[15 220+20 100 15],...
    'style','text','horizontalalignment','left',...

```

```

    'string','Lebar Sungai: ',...
    'fontname','times new roman','BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
    'fontsize',12,'fontweight','bold');
edit2=icontrol('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[95 220+20 50 18],...
    'style','edit','horizontalalignment','left',...
    'string','',...
    'fontname','times new roman',...
    'fontsize',12,'fontweight','bold');
labell=icontrol('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[15 200+20 100 15],...
    'style','text','horizontalalignment','left',...
    'string','Waktu: ',...
    'fontname','times new roman','BackgroundColor',[.8 .8 .9],...
    'fontsize',12,'fontweight','bold');
edit3=icontrol('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[95 200+20 50 18],...
    'style','edit','horizontalalignment','left',...
    'string','',...
    'fontname','times new roman',...
    'fontsize',12,'fontweight','bold');

grafik1=axes('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[210 100 pos(3)-200-25 185-35+50],...
    'fontsize',12,...
    'color',[1 1 1]);
title('Grafik Penyebaran Polutan');
ylabel('Lebar');
xlabel('Panjang');
step1 =
uicontrol('Style','radiobutton','String','Grafik','fontsize',12,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'units','points','pos',[280 15 80
15],'parent',win1,'callback','gambar1','value',0);
step2 =
uicontrol('Style','radiobutton','String','Contour','fontsize',12,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],...
    'units','points','pos',[360 15 80
15],'parent',win1,'callback','gambar2','value',0);

proses1=icontrol('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[20 10 60 20],...
    'style','Pushbutton',...
    'callback','POLUTAN',...
    'string','Proses ',...
    'fontname','times new roman',...
    'fontsize',12);

```

```
proses2=uicontrol('parent',win1,...
    'units','points',...
    'position',[85 10 60 20],...
    'style','Pushbutton',...
    'callback','PROGRAM',...
    'string','Reset',...
    'fontname','times new roman',...
    'fontsize',12);

step11 = uicontrol('Style','checkbox','String','Kasus
1','fontsize',10,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],'unit','points',...
    'pos',[15 200 80 15],'parent',win1,'value',0);
step12 = uicontrol('Style','checkbox','String','Kasus
2','fontsize',10,...
    'backgroundcolor',[.8 .8 .9],'unit','points',...
    'pos',[15 180 80 15],'parent',win1,'value',0);
```