Nilai Ketakteraturan Jarak pada Graf Matahari
(*Distance Irregularity Strength Of Sun Graph*)

Rizky Titie Riddiyani, Slamin, Dafik
Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember (UNEJ)
Jln. Kalimantan 37, Jember 68121
e-mail: slamin@unej.ac.id

Abstrak

Pelabelan jarak tidak teratur dari graf G dengan V merupakan titik-titik dari graf G adalah sebuah pemetaan $\lambda : V \to \{1, 2, ..., k\}$ sehingga bobot yang dihitung pada titik-titik adalah berbeda. Bobot dari sebuah titik x di G didefinisikan sebagai penjumlahan dari semua label titik-titik yang bertetangga ke x (jarak 1 dari x), yaitu: $W_t(x) = \Sigma_{y \in N(x)} \lambda(y)$. Nilai ketakteraturan jarak (*distance irregularity strength*) dari graf G yang dinotasikan dengan $dis(G)$ adalah nilai minimum dari label k yang terbesar. Di dalam artikel ini, kami mengkaji tentang nilai ketakteraturan jarak pada graf matahari ($dis(M_n)$), gabungan saling lepas s graf matahari isomorfis ($dis(sM_n)$), gabungan saling lepas dari dua graf matahari non-isomorfis ($dis(M_m \cup M_n)$), amalgamasi graf matahari ($dis(Amal(M_n, v, r))$), dan shackle graf matahari ($dis(Shack(M_n, v, 3))$).

Kata Kunci: Pelabelan Jarak Tidak Teratur, Nilai Ketakteraturan Jarak, Graf Matahari

Abstract

A distance irregular vertex labeling of the graph G with v vertices is an assignment $\lambda : V \to \{1, 2, ..., k\}$ *so that the weights calculated at vertices are distinct. The weight of a vertex x in G is defined as the sum of the labels of all the vertices adjacent to x (distance 1 from x), that is,* $W_t(x) = \Sigma_{y \in N(x)} \lambda(y)$ *. The distance irregularity strength of G, denoted by dis(G), is the minimum value of the largest label k over all such irregular assignments. In this article, we consider about the distance irregularity strength of sun graph* ($dis(M_n)$)*, disjoint union of s isomorphic sun graphs* ($dis(sM_n)$)*, disjoint union of two non-isomorphic sun graphs* ($dis(M_n \cup M_m)$)*, amalgamation of sun graph* ($dis(Amal(M_n, v, r))$)*, and shackle of sun graph* ($dis(Shack(M_n, v, 3))$).

Keywords: *Distance Irregular Labeling , Distance Irregularity Strength, Sun Graph*

Pendahuluan

Teori graf adalah salah salah kajian dalam matematika diskrit. Teori graf banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan atau menyatakan suatu persoalan agar lebih mudah dimegerti dan diselesaikan. Pelabelan graf
merupakan salah satu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan cacah yang disebut label. Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan jarak tidak teratur.

Definisi 1. Pelabelan jarak tidak teratur dari graf G dengan V merupakan titik-titik dari graf G adalah sebuah pemetaan $\lambda : V \to \{1, 2, ..., k\}$ sehingga bobot yang dihitung pada setiap titiknya adalah berbeda. Bobot dari sebuah titik x di G didefinisikan sebagai penjumlahan dari semua label titik-titik yang bertetangga ke x (jarak 1 dari x), yaitu:

$$W_t(x) = \Sigma_{y \in N(x)} \lambda(y)$$

Untuk sebuah graf G terdapat beberapa variansi pelabelan, dengan kata lain pelabelannya tidak tunggal. Permasalahannya adalah bagaimana melabeli graf tersebut sedemikian hingga bilangan bulat positif terbesar yang dijadikan label adalah seminimum mungkin. Bilangan bulat positif terbesar yang minimum tersebut dinamakan dengan nilai ketakteraturan jarak (*distance irregularity* strength) dari graf G yang dinotasikan dengan $dis(G)$. Untuk mencari nilai $dis(G)$ dari suatu pelabelan graf G, berikut adalah lemma yang dapat dijadikan sebagai acuan.

Lemma 1. Misalkan G adalah sebuah graf yang terhubung pada titik v dengan derajat minimum δ dan derajat maksi-mum Δ dan tidak ada titik yang mempunyai tetangga yang sama maka,

$$dis(G) \geq \left\lceil \frac{v + \delta - 1}{\Delta} \right\rceil$$

Penelitian mengenai pelabelan jarak tidak teratur telah dilakukan oleh Slamin pada tahun 2014 yaitu pada graf leng-kap, graf lintasan, graf siklus, serta graf roda dan menghasil-kan teorema sebagai berikut:

Teorema 1. Misalkan K_n adalah graf lengkap dengan titik $n \geq 3$, maka $dis(K_n) = n$

Teorema 2. Misalkan P_n adalah graf lintasan dengan titik $n \geq 3$, maka $dis(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

Teorema 3. Misalkan C_n adalah graf siklus dengan titik $n \geq 5$ dimana $n \neq 3(mod\ 4)$, maka $dis(C_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$

Teorema 4. Misalkan W_n adalah graf roda dengan titik $n \geq 5$ dimana $n \neq 3(mod\ 4)$, maka $dis(W_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ [5].

Jenis graf khusus yang lain yang belum pernah diketahui pelabelan jarak tidak teratur adalah graf matahari. Graf matahari yang dinotasikan dengan M_n adalah sebuah graf yang dibentuk dari graf siklus (*cycle*) dengan n titik pada siklus (C_n) dan pada setiap titiknya terdapat bandul sedemikian hingga jika vi adalah titik ke-i dari C_n dan u_i adalah titik pada bandul ke-i, maka v_iu_i adalah sisi pada bandul ke-i untuk setiap i=1, 2, 3, …, n[6]. Graf matahari mempunyai himpunan titik $V(M_n) = \{v_i, u_i ; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(M_n)=\{v_iv_{i+1} ; 1 \leq i \leq n\text{-}1\} \cup \{u_iv_i ; 1 \leq i \leq n\}$. Dalam graf matahari M_n berlaku $|V(M_n)| = |E(M_n)|=2n$.

Gabungan graf Matahari dalam penelitian ini terdiri dari gabungan graf matahari isomorfis dan non-isomorfis yang merupakan gabungan saling lepas dari s duplikat graf mata-hari. Untuk gabungan graf matahari isomorfis dinotasikan dengan sM_n dengan $s \geq 2$ dan $n \geq 3$ sedangkan untuk ga-bungan graf matahari non-isomorfis dinotasikan dengan $M_m \cup M_n$ untuk $m < n$, $n = m + 1$ dan $m \geq 3$.

Amalgamasi dari graf matahari dinotasikan dengan $Amal(M_n, v, r)$, dimana r merupakan notasi dari banyaknya graf matahari M_n dan berpusat pada satu titik v. Sedangkan shackle dari graf matahari dinotasikan dengan $Shack\ (M_n, v, r)$, dapat dikatakan sebagai gabungan tidak saling lepas (*connected*) dari graf matahari dengan r *copy* graf Matahari M_n dimana terdapat satu titik v yang menjadi terminal dari dua graf yang akan direkatkan menjadi satu titik.

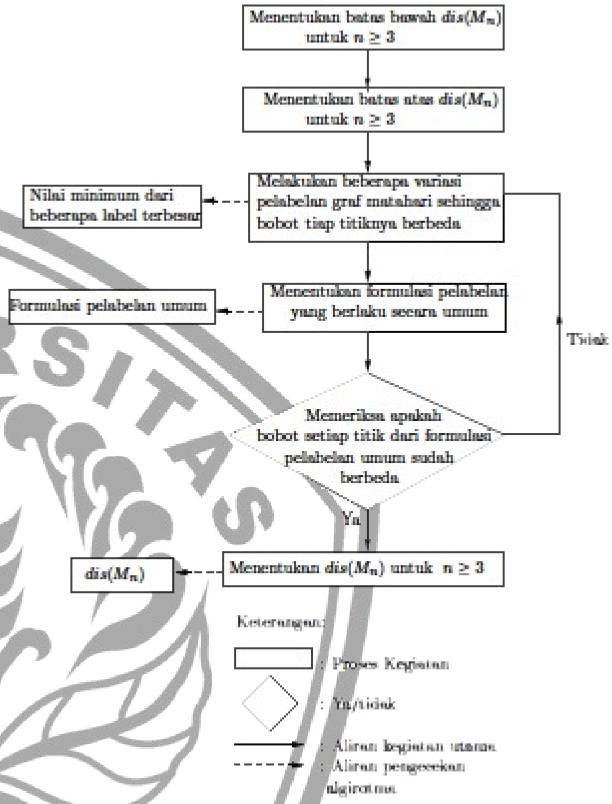
Dalam penelitian ini akan diinvestigasi mengenai pelabelan jarak tidak teratur pada graf matahari karena belum ada penelitian tentang pelabelan jarak tidak teratur pada graf matahari sebelumnya. Setelah dilakukan pelabelan jarak tidak teratur pada graf matahari, akan didapatkan nilai ketakteraturan jarak (*dis*) dari graf matahari.

Adapun manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini adalah untuk memberikan konstribusi terhadap berkembang-nya pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khusunya dalam ruang lingkup pelabelan graf dengan menunjukkan eksistensi pelabelan jarak tidak teratur pada graf matahari. Penelitian ini dapat memberikan motivasi pada peneliti lain untuk melakukan penelitian tentang pelabelan jarak tidak teratur pada jenis-jenis graf yang berbeda. Selain itu, hasil penelitian ini diharapkan dapat dijadikan pengembangan atau perluasan ilmu serta aplikasi dalam masalah pelabelan jarak tidak teratur di program studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember.

Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik yaitu dengan menerapkan lemma yang telah ada yakni Lemma 1. Lemma tersebut digunakan untuk menentukan nilai batas bawah dari *dis* pada graf matahari. Apabila hasil investigasi pada pelabelan ini terbukti dapat digunakan dan berpola, maka dapat dicari pola dan perumusan pelabelan jarak tidak teratur pada graf matahari dengan menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*).

Adapun teknik penelitian tersebut tersaji pada diagram alur penelitian berikut:



Gambar 1. Prosedur Penelitian

Pembahasan

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui nilai ketakteraturan jarak (*dis*) dari pelabelan jarak tidak teratur pada graf matahari tunggal M_n dengan $n \geq 3$, gabungan graf matahari isomorfis sM_n dengan $s \geq 2$ dan $n \geq 3$, gabungan matahari non-isomorfis $M_m \cup M_n$ dengan $m < n$, $n = m + 1$, dan $m \geq 3$, amalgamasi dari graf matahari $Amal(M_n, v, r)$ dengan $n \geq 5$ dan $2 \leq r \leq n - 2$, dan shackle dari graf matahari $Shack(M_n, v, 3)$ dengan $n \geq 5$ dan $r = 3$.

Hasil penelitian untuk kasus pelabelan jarak tidak teratur pada graf matahari tunggal M_n dengan $n \geq 3$, diperoleh sebuah teorema baru tentang nilai ketakteraturan jarak (*dis*) dari pelabelan jarak tidak teratur pada graf matahari tunggal, yakni:

Teorema 1. Misalkan M_n adalah graf matahari tunggal, maka nilai ketakteraturan jarak (*dis*) dari M_n adalah n untuk $n \geq 3$.

Bukti. Setiap titik bandul u_i mempunyai derajat 1 dan bobotnya merupakan label dari titik yang bertetangga dengan masing-masing bandul. Karena bobot harus berbeda, maka label setiap titik pada siklus v_i (titik yang bertetangga dengan titik bandul) harus berbeda. Karena sebanyak n titik pada siklus v_i, maka label tertinggi pada M_n paling sedikit adalah n. Dengan demikian batas bawah dari $dis(M_n) \geq n$.

Setelah terbukti bahwa batas bawah dari $dis(M_n) \geq n$, selanjutnya akan ditunjukkan bahwa batas atas dari $dis(M_n) \leq n$, dengan cara melabeli titik-titik pada graf matahari M_n, $n \geq 3$ dengan mengikuti formula berikut:

$$\lambda(v_i) = i,\ 1 \leq i \leq n$$
$$\lambda(u_i) = n - i - 1,\ 1 \leq i \leq n-2$$
$$\lambda(u_i) = 1,\ i = n-1$$
$$\lambda(u_i) = n-2,\ i = n$$

Dari formulasi pelabelan di atas, dapat dihitung bobot setiap titik pada M_n. Untuk graf matahari M_n dengan n=3, mengikuti fungsi bobot titik berikut:

$$W_t(v_i) = 6,\ i = 1$$
$$W_t(v_i) = 5,\ i = 2$$
$$W_t(v_i) = 4,\ i = 3$$
$$W_t(u_i) = i,\ 1 \leq i \leq 3$$

Sedangkan untuk graf matahari M_n dengan n > 3, mengikuti fungsi bobot titik berikut:

$$W_t(v_i) = i + n - 1,\ 2 \leq i \leq n-2$$
$$W_t(v_i) = 2\mathrm{n},\ i = 1$$
$$W_t(v_i) = 2(n-1)+1,\ i = n-1$$
$$W_t(v_i) = 2(n-1),\ i = n$$
$$W_t(u_i) = i,\ 1 \leq i \leq n$$

Berdasarkan rumus bobot titik di atas, terlihat bahwa himpunan bobot titik yang diperoleh yaitu: $W_t = \{1, 2, 3, ..., 2n\}$. Hal ini menunjukkan bahwa bobot titik pada graf matahari tunggal M_n adalah berbeda untuk setiap titiknya. Perhatikan pula bahwa untuk setiap titik pada graf matahari tunggal M_n dilabeli dengan menggunakan himpunan bilang-an bulat positif yang dimulai dari 1 hingga label terbesarnya adalah n, dimana n merupakan *dis* dari graf matahari tunggal M_n sehingga tidak ada label titik yang lebih besar dari n. Jadi dapat dikatakan bahwa batas atas $dis(M_n)$ = batas bawah $dis(M_n)$, sehingga terbukti bahwa $dis(M_n) = n$ untuk untuk $n \geq 3$.

Hasil penelitian untuk kasus pelabelan jarak tidak teratur pada gabungan graf matahari isomorfis sM_n dengan $s \geq 2$ dan $n \geq 3$, diperoleh sebuah teorema baru tentang nilai ketakteraturan jarak (*dis*) dari pelabelan jarak tidak teratur pada gabungan graf matahari isomorfis, yakni:

Teorema 2. Misalkan sM_n adalah gabungan graf matahari isomorfis, maka nilai ketakteraturan jarak (*dis)* dari sM_n adalah sn untuk $s \geq 2$ dan $n \geq 3$.

Bukti. Setiap titik bandul u_i^k mempunyai derajat 1 dan bobotnya merupakan label dari titik yang bertetangga dengan masing-masing bandul. Karena bobot harus berbeda, maka label setiap titik pada siklus v_i^k (titik yang bertetangga dengan titik bandul) harus berbeda. Karena sebanyak sn titik pada siklus v_i^k, maka label tertinggi pada sM_n paling sedikit adalah sn. Dengan demikian batas bawah dari $dis(sM_n) \geq sn$.

Setelah terbukti bahwa batas bawah dari $dis(sM_n) \geq sn$, selanjutnya akan ditunjukkan bahwa batas atas dari $dis(sM_n) \leq sn$, dengan cara melabeli titik-titik pada gabungan graf matahari isomorfis sM_n, untuk $s \geq 2$ dan $n \geq 3$ dengan mengikuti formula berikut:

$$\lambda(v_i^k) = \lambda(v_i) + i(s-1) + k - s,\ 1 \leq i \leq n;\ 1 \leq k \leq s$$
$$\lambda(u_i^k) = \lambda(u_i) + (n-i)(s-1) - k + 1,\quad 1 \leq i \leq n-2;\ 1 \leq k \leq s$$
$$\lambda(u_i^k) = \lambda(u_i) + 2\mathrm{s} - k - 1,\ i = n-1;\ 1 \leq k \leq s$$
$$\lambda(u_i^k) = \lambda(u_i) + (n-1)(s-1) - k + 1,\ i = n;\ 1 \leq k \leq s$$

Dari formulasi pelabelan di atas, dapat dihitung bobot setiap titik pada sM_n. Untuk gabungan graf matahari isomorfis sM_n dengan $s \geq 2$ dan $n=3$, mengikuti fungsi bobot titik berikut:

$$W_t(v_i^k) = W_t(v_i) + 5\mathrm{s} + k - 6,\ i = 1;\ 1 \leq k \leq s$$
$$W_t(v_i^k) = W_t(v_i) + 4\mathrm{s} + k - 5,\ i = 2;\ 1 \leq k \leq s$$
$$W_t(v_i^k) = W_t(v_i) + 3\mathrm{s} + k - 4,\ i = 3;\ 1 \leq k \leq s$$
$$W_t(u_i^k) = W_t(u_i) + k + i(s-1) - s,\ 1 \leq i \leq 3;\ 1 \leq k \leq s$$

Sedangkan untuk gabungan graf matahari isomorfis sM_n dengan $s \geq 2$ dan n >3, mengikuti fungsi bobot titik berikut:

$$W_t(v_i^k) = W_t(v_i) + (s-1) + (n+i-1) + k - s,\quad 2 \leq i \leq n-2;\ 1 \leq k \leq s$$
$$W_t(v_i^k) = W_t(v_i) + 2\mathrm{n}(s-1) + k - s,\ i = 1;\ 1 \leq k \leq s$$
$$W_t(v_i^k) = W_t(v_i) + (2\mathrm{s}-2)(n-1) + k - 1,\quad i = n-1;\ 1 \leq k \leq s$$
$$W_t(v_i^k) = W_t(v_i) + (2\mathrm{s}-2)(n-1) + k - s,\quad i = n,\ 1 \leq k \leq s$$
$$W_t(u_i^k) = W_t(u_i) + k + i(s-1) - s,\ 1 \leq i \leq n;\ 1 \leq k \leq s$$

Berdasarkan rumus bobot titik di atas, terlihat bahwa himpunan bobot titik yang diperoleh yaitu: $W_t = \{1, 2, 3, ..., 2sn\}$. Hal ini menunjukkan bahwa bobot titik pada gabungan graf matahari isomorfis sM_n adalah berbeda untuk setiap titiknya. Perhatikan pula bahwa untuk setiap titik pada gabungan graf matahari isomorfis sM_n dilabeli dengan menggunakan himpunan bilangan bulat positif yang dimulai dari 1 hingga label terbesarnya adalah sn, dimana sn meru-pakan *dis* dari gabungan graf matahari isomorfis sM_n sehingga tidak ada label titik yang lebih besar dari sn. Jadi dapat dikatakan bahwa batas atas $dis(sM_n)$ = batas bawah $dis(sM_n)$, sehingga terbukti bahwa $dis(sM_n) = sn$ untuk $s \geq 2$ dan $n \geq 3$.

Hasil penelitian untuk kasus pelabelan jarak tidak teratur pada gabungan graf matahari non-isomorfis $M_m \cup M_n$

dengan $m<n$, $n=m+1$ dan $m \geq 3$, diperoleh sebuah teorema baru tentang nilai ketakteraturan jarak (*dis*) dari pelabelan jarak tidak teratur pada gabungan graf matahari non-isomorfis, yakni:

Teorema 3. Misalkan $M_m \cup M_n$ adalah gabungan graf matahari non-isomorfis, maka nilai ketakteraturan jarak *(dis)* dari $M_m \cup M_n$ adalah $m+n$ untuk $m<n$, $n=m+1$ dan $m\geq 3$.

Bukti. Setiap titik bandul u_i^k mempunyai derajat 1 dan bobotnya merupakan label dari titik yang bertetangga dengan masing-masing bandul. Karena bobot harus berbeda, maka label setiap titik pada siklus v_i^k (titik yang bertetangga dengan titik bandul) harus berbeda. Karena sebanyak $m+n$ titik pada siklus, maka label tertinggi pada $M_m \cup M_n$ paling sedikit adalah $m+n$. Dengan demikian batas bawah dari $dis(M_m \cup M_n) \geq m+n$.

Setelah terbukti bahwa batas bawah dari $dis(M_m \cup M_n) \geq m+n$, selanjutnya akan ditunjukkan bahwa batas atas dari $dis(M_m \cup M_n) \leq m+n$, dengan cara melabeli titik-titik pada gabungan graf matahari non-isomorfis $M_m \cup M_n$ untuk $m<n$, $n = m+1$ dan $m\geq 3$ dengan mengikuti formula berikut:

$$\lambda(v_i^k)=i+(k-1)m , k=1 ; i=1,2,\ldots, m \, dan \; k=2 ; i=1,2,\ldots, n$$

$$\lambda(u_i^k)=m(3-k)-i , k=1 ; i=1,2,\ldots, m-2 \, dan \; k=2, i=1,2,\ldots, n-2$$

$$\lambda(u_i^k)=m+2-n(k-1), k=1 ; i=m-1 \, dan \; k=2 ; i=n-1$$

$$\lambda(u_i^k)=m(3-k)-1, k=1 ; i=m \, dan \, k=2 ; i=n$$

Dari formulasi pelabelan di atas, dapat dihitung bobot setiap titik pada $M_m \cup M_n$. Untuk gabungan graf matahari non-isomorfis $M_m \cup M_n$ dengan $m < n$, $m = 3$ dan $n = 4$, mengikuti fungsi bobot titik berikut:

$$W_t(v_i^k)=3(k+1)+1, k=2 ; i=2$$

$$W_t(v_i^k)=4(k+1), k=1 ; i=3 \, dan \, k=2 ; i=4$$

$$W_t(v_i^k)=2(k+3)-1, k=1 ; i=2 \, dan \, k=2 ; i=3$$

$$W_t(v_i^k)=2(2k+3), k=1 ; i=1 \, dan \, k=2 ; i=1$$

$$W_t(u_i^k)=i+3k(k-1), k=1 ; 1\leq i\leq 3 \, dan \; k=2 ; 1\leq i\leq 4$$

Sedangkan untuk gabungan graf matahari non-isomorfis $M_m \cup M_n$ dengan $m < n$, $m \geq 3$ dan $n \geq 4$, mengikuti fungsi bobot titik berikut:

$$W_t(v_i^k)=n+i+km-1, k=1 ; i=1,2,\ldots, m-2 \, dan \; k=2 ; i=1,2,\ldots, n-2$$

$$W_t(v_i^k)=nk+2m-2, k=1 ; i=m \, dan \, k=2 ; i=n$$

$$W_t(v_i^k)=nk+2m-1, k=1 ; i=m-1 \, dan \; k=2 ; i=n-1$$

$$W_t(v_i^k)=nk+2m , k=1 ; i=1 \, dan \, k=2 ; i=1$$

$$W_t(u_i^k)=i+k(k-1)m , k=1 ; i=1,2,\ldots, m \, dan \; k=2 ; i=1,2,\ldots, n$$

Berdasarkan rumus bobot titik di atas, terlihat bahwa himpunan bobot titik yang diperoleh yaitu: $W_t=\{1, 2, 3, ..., 2(m+n)\}$. Hal ini menunjukkan bahwa bobot titik pada gabungan graf matahari non-isomorfis $M_m \cup M_n$ adalah berbeda untuk setiap titiknya. Perhatikan pula bahwa untuk setiap titik pada gabungan graf matahari non-isomorfis $M_m \cup M_n$ dilabeli dengan menggunakan himpunan bilangan bulat positif yang dimulai dari 1 hingga label terbesarnya adalah $m+n$, dimana $m+n$ merupakan *dis* dari gabungan graf

matahari non-isomorfis $M_m \cup M_n$ sehingga tidak ada label titik yang lebih besar dari $m+n$. Jadi dapat dikatakan bahwa batas atas $dis(M_m \cup M_n)$ = batas bawah $dis(M_m \cup M_n)$, sehingga terbukti bahwa $dis(M_m \cup M_n) = m+n$ untuk $m<n$, $n=m+1$ dan $m \geq 3$.

Hasil penelitian untuk kasus pelabelan jarak tidak teratur pada amalgamasi graf matahari $Amal(M_n, v, r)$ dengan $n \geq 5$ dan $2 \leq r \leq n-2$, diperoleh sebuah teorema baru tentang nilai ketakteraturan jarak (*dis*) dari pelabelan jarak tidak teratur pada amalgamasi graf matahari, yakni:

Teorema 4. Misalkan $Amal(M_n, v, r)$ adalah amalgamasi dari graf matahari, maka nilai ketakteraturan jarak (*dis*) dari $Amal(M_n, v, r)$ adalah $r(n-1)$ dengan $n\geq 5$ dan $2 \leq r \leq n-2$.

Bukti. Setiap titik bandul u_j^t pada amalgamasi graf matahari mempunyai derajat 1 dan bobotnya merupakan label dari titik yang bertetangga dengan masing-masing titik bandul. Karena bobot harus berbeda, maka label setiap titik pada siklus v_i^t (titik yang bertetangga dengan titik bandul) harus berbeda kecuali titik siklus v_n^t yang bertetangga dengan titik pusat v. Karena sebanyak $r(n-1)$ titik pada siklus v_i^t untuk $1\leq i \leq n-1$ dan $1\leq t \leq r$, maka label tertinggi pada $Amal(M_n, v, r)$ paling sedikit adalah $r(n-1)$. Dengan demikian batas bawah dari $dis(Amal(M_n, v, r)) \geq r(n-1)$.

Setelah terbukti bahwa batas bawah dari $dis(Amal(M_n, v, r)) \geq r(n-1)$, selanjutnya akan ditunjukkan bahwa batas atas dari $dis(Amal(M_n, v, r)) \leq r(n-1)$, dengan cara melabeli titik-titik pada amalgamasi graf matahari $Amal(M_n, v, r)$ untuk $n \geq 5$ dan $2 \leq r\leq n-2$. Untuk $Amal(M_n, v, r)$ dengan $n \geq 5$, $n \in ganjil$, dan $2 \leq r \leq n-2$, mengikuti formula berikut:

$$\lambda(v_i^t)=r\left(\frac{i+1}{2}-1\right)+t , i=1,3,5,\ldots, n-2 ; 1\leq t\leq r$$

$$\lambda(v_i^t)=r\left(\frac{n+i-3}{2}\right)+t , i=2,4,6,\ldots, n-1 ; 1\leq t\leq r$$

$$\lambda(v_i^t)=n-1, i=n ; 1\leq t\leq r-1$$

$$\lambda(v_i^t)=n , i=n ; t=r$$

$$\lambda(v)=r$$

$\lambda(u_j^t)=r(\frac{n-1}{2}),\ j=2\,;1\le t\le r$

$\lambda(u_j^t)=r(\frac{n-j}{2}+2)-t+1,\ j=3,5,7,\ldots,n-2\,;\ 1\le t\le r$

$\lambda(u_j^t)=r(\frac{2n-j}{2})-t+1,\ j=4,6,8,\ldots,n-3\,;\ 1\le t\le r$

$\lambda(u_j^t)=2n+2,\ j=1,n-1\,;1\le t\le r-1$

$\lambda(u_j^t)=2n+1,\ j=1,n-1\,;t=r$

Sedangkan untuk *Amal(Mn, v, r)*, $n\ge 5$, *n ∈ genap*, dan $2\le r\le n-2$, mengikuti formula berikut:

$\lambda(v_i^t)=r(\frac{i+1}{2}-1)+t\,,i=1,3,5,\ldots,n-1\,;1\le t\le r$

$\lambda(v_i^t)=r(\frac{n+i}{2}-1)+t\,,i=2,4,6,\ldots,n-2\,;1\le t\le r$

$\lambda(v_i^t)=n-1,i=n\,;1\le t\le r-1$

$\lambda(v_i^t)=n\,,i=n\,;t=r$

$\lambda(v)=r(\frac{n}{2})$

$\lambda(u_j^t)=r(n-2)+1,\ j=2\,;1\le t\le r$

$\lambda(u_j^t)=r(\frac{n-j-1}{2})-t+1,\ j=3,5,7,\ldots,n-3\,;\ 1\le t\le r$

$\lambda(u_j^t)=r(\frac{2n-j}{2})-t+1,\ j=4,6,8,\ldots,n-2\,;\ 1\le t\le r$

$\lambda(u_j^t)=2n+2,\ j=n-1\,;1\le t\le r-1$

$\lambda(u_j^t)=2n+1,\ j=n-1\,;t=r$

$\lambda(u_j^t)=2n-1,\ j=1\,;1\le t\le r-1$

$\lambda(u_j^t)=2n-2,\ j=1\,;t=r$

Dari formulasi pelabelan di atas, dapat dihitung bobot setiap titik pada *Amal(Mn, v, r)*. Untuk *Amal(Mn, v, r)*) dengan $n\ge 5$, *n ∈ ganjil*, dan $2\le r\le n-2$, mengikuti fungsi bobot titik berikut:

$W_t(u_j^t)=r(\frac{j+1}{2}-1)+t\,,\ j=1,3,5,\ldots,n-2\,;\ 1\le t\le r$

$W_t(u_j^t)=r(\frac{n+j-3}{2})+t\,,\ j=2,4,6,\ldots,n-1\,;\ 1\le t\le r$

$W_t(v)=r(n-1)$

$W_t(v_i^t)=r(n-1)+2t\,,i=n\,;1\le t\le r$

$W_t(v_i^t)=r(n-1)+2t+1,i=2\,;1\le t\le r$

$W_t(v_i^t)=r(n+\frac{i}{2}-1)+t+1,i=4,6,8,\ldots,n-1\,;\ 1\le t\le r$

$W_t(v_i^t)=r(\frac{3n+i}{2}-1)+t+1,i=1,3,5\ldots,n-2\,;\ 1\le t\le r$

Sedangkan untuk *Amal(Mn, v, r)*), $n\ge 5$, *n ∈ genap*, dan $2\le r\le n-2$, mengikuti fungsi bobot titik berikut:

$W_t(u_j^t)=r(\frac{j+1}{2}-1)+t\,,\ j=1,3,5,\ldots,n-1\,;\ 1\le t\le r$

$W_t(u_j^t)=r(\frac{n+j}{2}-1)+t\,,\ j=2,4,6,\ldots,n-2\,;\ 1\le t\le r$

$W_t(v)=r(n-1)+1$

$W_t(v_i^t)=r(n-1)+2t\,,i=n\,;1\le t\le r$

$W_t(v_i^t)=r(n-1)+2t+1,i=2\,;1\le t\le r$

$W_t(v_i^t)=r(n+\frac{i}{2}-1)+t+1,i=4,6,8,\ldots,n-2\,;\ 1\le t\le r$

$W_t(v_i^t)=r(\frac{3n+i-3}{2})+t+1,i=1,3,5\ldots,n-1\,;\ 1\le t\le r$

Berdasarkan rumus bobot titik di atas, terlihat bahwa himpunan bobot titik yang diperoleh yaitu: $W_t=\{1, 2, 3, ..., 2nr-r+1\}$. Hal ini menunjukkan bahwa bobot titik pada amalgamasi graf matahari *Amal(Mn, v, r)* adalah berbeda untuk setiap titiknya. Perhatikan pula bahwa untuk setiap titik pada amalgamasi graf matahari *Amal(Mn, v, r)* dilabeli dengan menggunakan himpunan bilangan bulat positif yang dimulai dari 1 hingga label terbesarnya adalah *r(n – 1)*, dimana *r(n – 1)* merupakan *dis* dari amalgamasi graf mata-hari *Amal(Mn, v, r)* sehingga tidak ada label titik yang lebih besar dari *r(n – 1)*. Jadi dapat dikatakan bahwa batas atas *dis (Amal(Mn, v, r))*=batas bawah *dis(Amal(Mn, v, r))*, sehingga terbukti bahwa *dis(Amal(Mn, v, r))= r (n – 1)* untuk $n\ge 5$ dan $2\le r\le n-2$.

Hasil penelitian untuk kasus pelabelan jarak tidak teratur pada shackle graf matahari *Shack(Mn, v, 3)* dengan $n\ge 5$ dan $r=3$, diperoleh sebuah teorema baru tentang nilai ketakteraturan jarak (*dis*) dari pelabelan jarak tidak teratur pada shackle graf matahari, yakni:

Teorema 5. Misalkan *Shack(Mn, v, 3)* adalah shackle dari graf matahari, maka nilai ketakteraturan jarak (*dis*) dari *Shack(Mn, v, 3)* adalah $3n-4$ untuk $n\ge 5$ dan $r=3$.

Bukti. Setiap titik bandul u_j^t pada shackle graf matahari mempunyai derajat 1 dan bobotnya merupakan label dari titik yang bertetangga dengan masing-masing titik bandul. Karena bobot harus berbeda, maka label setiap titik pada siklus v_i^t (titik yang bertetangga dengan titik bandul) harus berbeda kecuali titik siklus v_n^t, $1\le t\le 2$ yang bertetangga dengan titik v^1 serta titik v_{n-1}^{t} , t = 2 dan titik v_n^t, t = 3 yang bertetangga dengan titik v^2 . Karena sebanyak $3n-4$ titik pada siklus v_i^t untuk $1\leq i \leq n-1$, $t \in ganjil$ dan $1\leq i\leq n-2$, $t\in genap$, maka label tertinggi pada $Shack(M_n,v,3)$ paling sedikit adalah $3n-4$. Dengan demikian batas bawah dari $dis(Shack(M_n, v, 3))\geq 3n-4$.

Setelah terbukti bahwa batas bawah dari $dis(Shack(M_n, v, 3))\geq 3n-4$, selanjutnya akan ditunjukkan bahwa batas atas dari $dis(Shack(M_n, v, 3))\leq 3n-4$, dengan cara melabeli titik-titik pada shackle graf matahari $Shack(M_n, v, 3)$. Untuk $Shack(M_n, v, 3)$ dengan $n \geq 5$dan $r = 3$, mengikuti formula berikut:

$$\lambda(v_i^t)=(2n-3)\left(\frac{t+1}{2}-1\right)+i\,,\ t=1\,;\ i=1,2,3,\ldots,n$$
$$dan\ t=3\,;\ i=1,2,3,\ldots,n-1$$
$$\lambda(v_i^t)=n+i-1,\ t=2\,;\ i=1,2,3,\ldots,n-2$$
$$\lambda(v_i^t)=n+i-3,\ t=2\,;\ i=n-1,n$$
$$\lambda(v_i^t)=2n-3,\ t=2\,;\ i=n$$
$$\lambda(u_j^t)=2(2n-3)-(n+j)+4,\ t=1\,;\ j=2,3,\ldots,n-1$$
$$\lambda(u_j^t)=2(2n-3)-2(n+3)-j\,,\ t=3\,;\ j=1,2,3,\ldots,n-2$$
$$\lambda(u_j^t)=2(2n-3)-2(n-4)-j\,,\ t=2\,;\ j=2,3,\ldots,n-3$$
$$\lambda(u_j^t)=2(2n-3)+t(2n-7)-3(n-3),\ t=1,2\,;\ j=1$$
$$\lambda(u_j^t)=2(2n-3)+t(5-n)+n-8,\ t=2\,;\ j=n-2$$
$$dan\ t=3\,;\ j=n-1$$
$$\lambda(v^1)=2(2n-3)-2n+5$$
$$\lambda(v^2)=5$$

Dari formulasi pelabelan di atas, dapat dihitung bobot setiap titik pada $Shack(M_n, v, 3)$. Perhitungan bobot dari setiap titik pada shackle graf matahari $Shack(M_n, v, 3)$adalah berikut:

$$W_t(v_i^t)=(2n-3)+n+i+1,\ t=1\,;\ i=2,3,\ldots,n-1$$
$$W_t(v_i^t)=(2n-3)+2n+1,\ t=1\,;\ i=1$$
$$W_t(v_i^t)=(2n-3)+n+2,\ t=1\,;\ i=n$$
$$W_t(v_i^t)=(2n-3)+t(n-1)+i-n+5,\ t=2\,;\ i=n-1,n\ dan\ t=3\,;\ i=n$$
$$W_t(v_i^t)=(2n-3)+t(n-1)+i+5,\ t=2\,;\ i=1,2,\ldots,n-2\ dan\ t=3\,;\ i=1,2,\ldots,n-1$$
$$W_t(u_j^t)=(2n-3)+j\,,\ t=1\,;\ j=1,2,3,\ldots,n-1\ dan\ t=3\,;\ i=1,2,3,\ldots,n-1$$
$$W_t(u_j^t)=n+j-1,\ t=2\,;\ j=1,2,3,\ldots,n-2$$
$$W_t(v^1)=3(n-1)$$
$$W_t(v^2)=3n-2$$

Berdasarkan rumus bobot titik di atas, terlihat bahwa himpunan bobot titik yang diperoleh yaitu: $W_t=\{1, 2, 3, ..., 6n-2\}$. Hal ini menunjukkan bahwa bobot titik pada shackle graf matahari $Shack(M_n, v, 3)$ adalah berbeda untuk setiap titiknya. Perhatikan pula bahwa untuk setiap titik pada shackle graf matahari $Shack(M_n, v, 3)$ dilabeli dengan meng-gunakan himpunan bilangan bulat positif yang dimulai dari 1 hingga label terbesarnya adalah $3n-4$, dimana $3n-4$ merupa-kan *dis* dari shackle graf matahari $Shack(M_n, v, 3)$ sehingga tidak ada label titik yang lebih besar dari $3n-4$. Jadi dapat dikatakan bahwa batas atas $dis(Shack(M_n, v, 3))$ = batas bawah $dis(Shack(M_n, v, 3))$, sehingga terbukti bahwa $dis\ (Shack(M_n, v, 3))= 3n-4$ untuk $n\geq 5$ dan $r= 3$.

Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa nilai ketakteraturan jarak (*dis*) dari pelabelan jarak tidak teratur pada graf matahari tunggal, gabungan graf matahari baik isomorfis maupun non-isomorfis, amalgamasi dan shackle dari graf matahari adalah sebagai berikut:

1. nilai ketakteraturan jarak (*dis*) dari pelabelan jarak tidak teratur pada graf matahari tunggal adalah $dis(M_n)= n$, untuk $n \geq 3$.
2. nilai ketakteraturan jarak (*dis*) dari pelabelan jarak tidak teratur pada gabungan graf matahari isomorfis adalah $dis(sM_n)= sn$, untuk $s \geq 2$ dan $n \geq 3$.
3. nilai ketakteraturan jarak (*dis*) dari pelabelan jarak tidak teratur pada gabungan graf matahari non-isomorfis yaitu $dis\ (M_m \cup M_n) = m + n$ untuk $m < n$, $n = m+1$ dan $n \geq 3$.
4. nilai ketakteraturan jarak (*dis*) dari pelabelan jarak tidak teratur pada amalgamasi graf matahari adalah $dis(Amal(M_n, v, r)) = r\ (n-1)$, untuk $n \geq 5$ dan $2 \leq r \leq n-2$.
5. nilai ketakteraturan jarak (*dis*) dari pelabelan jarak tidak teratur pada shackle graf matahari adalah $dis(Shack\ (M_n, v, 3)) = 3n-4$, untuk $n \geq 5$ dan $r = 3$.

Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan jarak tidak teratur pada graf matahari, maka peneliti memberikan saran, antara lain:

1. pembaca dapat melakukan penelitian tentang pelabelan jarak tidak teratur pada gabungan graf matahari non-isomorfis $\bigcup_{i=1}^{s} M_{ni}$ untuk $s \geq 2$, $n \geq 3$;
2. pembaca dapat melakukan penelitian tentang pelabelan jarak tidak teratur pada gabungan graf matahari non-isomorfis dengan jumlah titik yang tidak berurutan, $\bigcup_{i=1}^{s} M_{ni}$ untuk $s \geq 2$, $n \geq 3$, $n_{i+1}>n_i$ dan $1 \leq i \leq s$;
3. pembaca dapat melakukan penelitian tentang pelabelan jarak tidak teratur pada amalgamasi graf matahari $Amal(Mn, v, r)$ untuk $n \geq 3$ dan $r > n-2$;

4. pembaca dapat melakukan penelitian tentang pelabelan jarak tidak teratur pada shackle graf matahari *Shack(Mn,, v, r)* untuk $n \geq 3$ dan $r > 3$.

Daftar Pustaka

[1] Arumugam, S. dan Kamatchi, N. 2012. On (*a, d*)-Distance Antimagic Graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*. Vol. 54 (2012): 279-287.

[2] Inayah, N., Simanjuntak R., dan Salman. 2013. Super (*a, d*)-*H*-antimagic total labelings for shackles of a connected graph H. *Australasian Journal of Combinatorics*. Vol. 57 (2013): 127-138.

[3] Khan, I.F., Poshni, M. I., Gross, J. L. 2010. Genus distribution of graph amalgamations: Pasting at root-vertices. *Ars Combinatoria*. Vol. 94(2010): 33-35.

[4] Miller, M., Rodger, C., dan Simanjuntak, R. 2003. Distance Magic Labelings of graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*. Vol. 28 (2003): 305-315.

[5] Slamin. 2014. *Distance Irregular Labelings of Graphs*. Dipresentasikan dalam International Workshop on Graph Masters and Seminar on Mathematics Education on Graph Theory, 7-9 Juni 2013, Malang.

[6] Winnona, Slamin, dan Dafik. 2012. Total Vertex Irregularity Strength of the Disjoint Union of Sun Graphs. *International Journal of Combinatorics*. Vol 2012 (1): 1-9.