Nilai Ketakteraturan Jarak pada Graf Sarang Laba-laba (*Distance Irregularity Strength on Cobweb Graph*)

Masyita Dini Islami, Slamin, Dafik,
Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember (UNEJ)
Jln. Kalimantan 37, Jember 68121
E-mail: slamin@unej.ac.id

Abstrak

Sebuah pelabelan irregular jarak dari sebuah graf G dengan v merupakan titik-titik dari G memetakan λ pada bilangan bulat positif sehingga bobot yang dihitung pada titik-titik adalah berbeda. Bobot dari sebuah titik x di G didefnisikan sebagai penjumlahan dari semua label titik-titik yang bertetangga ke x (jarak 1 dari x). Distance irregular strength dinotasikan dengan dis(G) adalah nilai terkecil dari label terbesar pada suatu graf G. Dalam paper ini akan dibuktikan bahwa terdapat nilai ketakteraturan jarak dari pelabelan jarak tidak teratur pada graf sarang laba-laba, gabungan saling lepas graf sarang laba-laba isomorfis dan non-isomorfis, amalgamation dari graf sarang laba-laba, dan shackle dari graf sarang laba-laba.

Kata Kunci: Graf Sarang Laba-laba, nilai ketakteraturan jarak, berpikur tingkat tinggi

Abstract

A distance irregular vertex labeling on a graph G with v vertices as an assignment λ *of positive integer labels to vertices so that the weights calculated at vertices are distinct. The weight of a vertex x in G is defined as the sum of all the adjacent vertices label of to x. The strength of irregular distance of G, denoted by dis(G), is the minimum value of the largest label in a graph. In this paper will be proven that there is strength irregular distance of the cobweb graph, combined cobweb graph, amalgamation and shackle of the cobweb graph.*

Keywords: *cobweb graph, distance irregularity strength, high order thinking*

Pendahuluan

Matematika merupakan kunci pokok dalam pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, terutama pada era globalisasi dan informasi saat ini. Matematika sebagai suatu ilmu memiliki objek dasar berupa fakta, konsep, skill, dan prinsip. Konsep dan prinsip matematika banyak digunakan sebagai alat bantu dalam penerapan-penerapan bidang ilmu lain maupun dalam pengembangan matematika itu sendiri.

Salah satu cabang ilmu mateamatika adalah Teori graf. Graf G adalah pasangan himpunan (V;E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut titik (vertex), dan E adalah himpunan (boleh kosong)dari pasangan tidak terurut dua titik (v1; v2) dimana v1; v2 elemen V, yang disebut sisi (edges). V disebut himpunan titik dari G, dan E disebut himpunan sisi dari G. Seringkali kita menuliskan V (G) adalah himpunan titik dari graf G dan E(G) adalah himpunan sisi dari graf G[2].

Pelabelan graf merupakan salah satu topik dalam teori graf. Ada 3 jenis pelabelan pada graf diantaranya adalah: pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan jarak tidak teratur termasuk dalam pelabelan titik.

Jarak atau *distance* dari titik u ke titik v adalah panjang lintasan (*path*) minimum dari titik u ke titik v [4]. Definisi dari pelabelan jarak tidak teratur pada graf G merupakan pemberian nilai bilangan bulat positif (nilai yang dipakai boleh berulang) pada himpunan titik dari graf G dan bobot titik x di G didefinisikan sebagai jumlah dari semua label titik yang berdekatan dengan x (jarak 1 dari x) dengan bobot setiap titik berbeda [5]. Untuk sebuah graf G terdapat beberapa variansi pelabelan, dengan kata lain pelabelannya tidak tunggal. Permasalahannya adalah bagaimana melabeli graf tersebut sedemikian hingga bilangan bulat positif terbesar yang dijadikan label adalah seminimum mungkin. Bilangan bulat positif terbesar yang minimum tersebut dinamakan dengan *the distance irregularity strength* dari graf G yang dinotasikan dengan *dis(G)*.

Graf sarang laba-laba (Sl_n) adalah sebuah generalisasi dari graf prisma dengan ujung siklus luar dihapus. Gabungan saling lepas graf sarang laba-laba isomorfis didefinisikan gabungan saling lepas dari sebanyak c graf sarang laba-laba (Sl_n) . Gabungan saling lepas graf srag laba-laba non-isomorfis adalah gabungan saling lepas dari graf sarang laba-laba sebanyak c graf sarang laba-laba dengan titik yang berberda. Amalgamasi graf sarang laba-laba adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan simpul dari graf sarang laba-laba dengan jumlah titik yang sama pada satu simpul. Shackle graf sarang laba-laba adalah gabungan tidak saling lepas dari graf sarang laba-laba dengan c copy graf sarang laba-laba Sl_n dimana terdapat satu titik yang menjadi titik terminal dari beberapa graf yang direkatkan menjadi satu titik.

Sampai saat ini, pelabelan jarak tidak teratur masih sedikit famili yang ditemukan. Hal ini dikarenakan pelabelan jarak tidak teratur masih tergolong kedalam pelabelan titik jenis baru. Selain itu, Pada penelitian sebelumnya, pelabelan jarak tidak teratur hanya dilakukan pada graf tunggal saja. Namun dalam penelitian ini dilakukan pelabelan jarak tidak teratur pada graf tunggal dan gabungan dari graf sarang laba-laba. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui nilai ketakteraturan jarak dari graf sarang laba-laba tunggal, gabungan graf sarang laba-laba ismorfis dan non-isomorfis, serta amalgamasi dan shackle dari graf sarang laba-laba.

Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini deduktif aksiomatik, yaitu dengan menerapkan lemma yang telah ada yakni lemma 1. Lemma tersebut digunakan untuk menentukan batas bawah dari dis (G) pada suatu graf G termasuk dalam menentukan $dis(Sl_n)$ pada graf sarang laba-laba. Apabila hasil investigasi pada pelabelan ini terbukti dapat digunakan dan berpola, maka dapat dicari pola dan perumusan pelabean irregular jarak pada graf sarang laba-laba dengan menggunakan metode pendekatan pola(pattern recognition. Penelitian ini juga mengaitkan dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan tahapan-tahapan pada taksonomi bloom.

Adapun teknik penelitian pada pelabelan jarak tidak teratur pada graf sarang laba-laba adalah sebagai berikut:

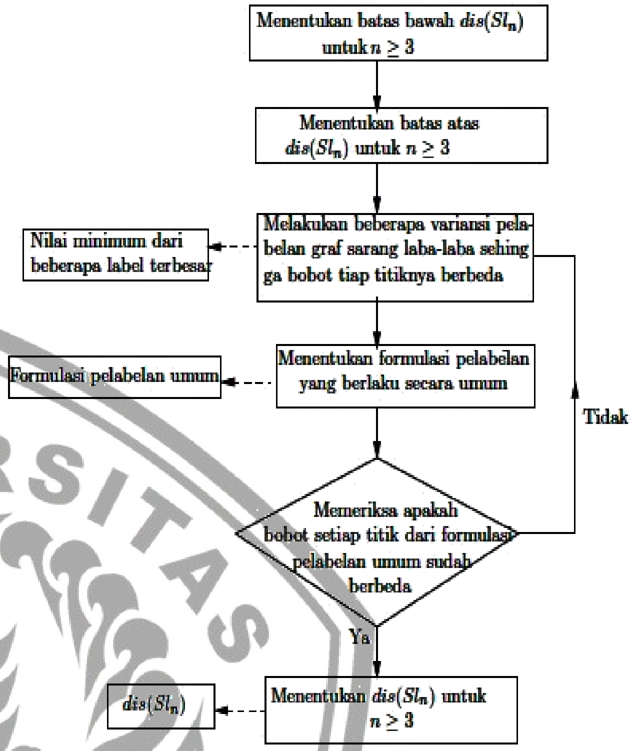
1. Menentukan batas bawah dari graf sarang laba-laba menggunakan lemma 1[5] dan definisi dari pelabelan jarak tidak teratur;
2. Menentukan batas atas dari $dis(Sl_n)$ untuk $n \geq 3$ dengan cara sebagai berikut:
(a) Melabeli setiap titik pada Sl_n dengan label {1, 2, ... , m} sedemikian hingga setiap bobot titiknya berbeda,
(b) Menentukan formulasi dari pelabelan yang berupa fungsi yang memetakan himpunan titik pada bilangan bulat positif,
(c) Memeriksa kembali dengan menggunakan formulasi yang sudah ditentukan apakah bobot setiap titiknya sudah berbeda;
3. Menentukan nilai $dis(Sl_n)$ untuk $n \geq 3$ dengan menggunakan batas bawah dan batas atas yang sudah diperoleh;
4. Melakukan prosedur yang sama seperti langkah-lagkah di atas untuk menentukan nilai *dis* dari gabungan saling lepas graf sarang laba-laba isomorfis dan non-isomorfis.
5. Melakukan prosedur yang sama seperti langkah-langkah di atas untuk menentukan nilai *dis* dari amalgamasi dan shackle graf sarang laba-laba.

Rancangan penelitian disajikan dalam Gambar 1 dalam bentuk diagram alir.

Pembahasan

Teorema 1 Misalkan Sl_n adalah graf sarang laba-laba tunggal. Nilai ketakteraturan jarak graf sarang laba-laba tunggal adalah $dis(Sl_n)=n$ untuk $n \geq 3$

Bukti: Setiap titik pada bandul dari graf sarang laba-laba tunggal mempunyai derajat 1 sehingga bobotnya merupakan label dari titik yang bertetangga dengan masing-masing bandul. Berdasarkan definisi 1 bahwa setiap bobot pada titik harus berbeda maka label setiap titik pada siklus (titik yang bertetangga dengan titik bandul) harus berbeda. Karena ada sebanyak n titik pada siklus, maka label tertinggi pada siklus paling sedikit adalah n. Dengan demikian $dis(Sl_n) \geq n$



Gambar 1 diagram alir

Setelah menentukan batas bawah dari graf sarang laba-laba, selanjutnya adalah menentukan batas atas dari graf sarang laba-laba. Untuk menentukan batas atas dari graf sarang laba-laba dilakukan dengan cara melabeli setiap titik pada graf sarang laba-laba dengan mengikuti formula berikut:

$$\lambda(u_i)=n-i+1, 1 \leq i \leq n$$

$$\lambda(v_i)=i, 1 \leq i \leq n$$

untuk n=3

$$\lambda(w_i)=1, i=1,2$$

$$\lambda(w_i)=1, i=1,2,3$$

untuk $n \geq 4$

$$\lambda(w_i)=n-2, i=1,2$$

$$\lambda(w_i)=n-1, 3 \leq i \leq n-1$$

$$\lambda(w_i)=1, i=n$$

Untuk bobot titiknya mengikuti formula berikut:

$$w_t(u_i)=n+1, i=1$$

$$w_t(u_i)=2(n+1)-i, 2 \leq i \leq n-1$$

$$w_t(u_i)=2(n+1), i=n$$

$$w_t(w_i)=i, 1 \leq i \leq n$$

untuk n=3

$$w_t(v_1)=9, w_t(v_2)=7, w_t(v_3)=5$$

untuk $n\geq 4$

$$w_t(v_i)=3\mathrm{n}, i=1$$

$$w_t(v_i)=2\mathrm{n}+1, i=2$$

$$w_t(v_i)=2\mathrm{n}+i, 3\leq i\leq n-1$$

$$w_t(v_i)=n+2, i=n$$

Formula di atas maka menghasilkan himpunan bobot titik {1, 2,3, ..., 3n} sehingga terbukti bobot setiap titik berbeda.

Jadi, $dis(Sl_n)=n$

Teorema 2 misalkan cSl_n adalah gabungan saling lepas graf sarang laba-laba isomorfis. Nilai ketakteraturan jarak pada gabu-ngan saling lepas graf sarang laba-laba isomorfis adalah $dis(cSl_n)=cn$ untuk $n\geq 3$ dan $c\geq 2$

Bukti: Setiap titik pada bandul dari gabungan saling lepas graf sarang laba-laba isomorfis mempunyai derajat 1 sehingga bobotnya merupakan label dari titik yang bertetangga dengan masing-masing bandul. Berdasarkan definisi 1 bahwa setiap bobot pada titik harus berbeda maka label setiap titik pada siklus (titik yang bertetangga dengan titik bandul) harus berbeda. Karena ada sebanyak cn titik pada siklus, maka label tertinggi pada siklus paling sedikit adalah cn. Dengan demikian batas bawahnya adalah $dis(cSl_n)\geq cn$

Selanjutnya adalah menentukan batas atas dari gabungan saling lepas graf sarang laba-laba isomorfis. Untuk menetukan batas atasnya dilakukan dengan cara melabeli setiap titik pada gabungan saling lepas graf sarang laba-laba ismorfis dengan mengikuti formula berikut:

$$\lambda(u_{k,i})=c(n-i+1); 1\leq i\leq n; 1\leq k\leq c$$

$$\lambda(v_{k,i})=c(i-1)+k; 1\leq i\leq n; 1\leq k\leq c$$

untuk n=3

$$\lambda(w_{k,i})=c(n-1)-k; i=1,2; 1\leq k\leq c$$

$$\lambda(w_{k,i})=2\mathrm{c}-k; i=3; 1\leq k\leq c$$

untuk $n\geq 4$

$$\lambda(w_{k,i})=c(n-1)-k; i=1,2; 1\leq k\leq c$$

$$\lambda(w_{k,i})=cn-k; 3\leq i\leq n-1; 1\leq k\leq c$$

$$\lambda(w_{k,i})=2\mathrm{c}-k; i=n; 1\leq k\leq c$$

Untuk bobot titiknya mengikuti formula berikut:

$$w_t(u_{k,i})=cn+k; i=1; 1\leq k\leq c$$

$$w_t(u_{k,i})=c(2\mathrm{n}-i+1)+k; 2\leq i\leq n-1; 1\leq k\leq c$$

$$w_t(u_{k,i})=c(2\mathrm{n}+1)+k; i=n; 1\leq k\leq c$$

$$w_t(w_{k,i})=c(i-1)+k; 1\leq i\leq n; 1\leq k\leq c$$

untuk n=3

$$w_t(v_{k,i})=3\mathrm{nc}-c+k; i=1; 1\leq k\leq c$$

$$w_t(v_{k,i})=2\mathrm{nc}+k; i=2; 1\leq k\leq c$$

$$w_t(v_{k,i})=c(n+1)+k; i=n; 1\leq k\leq c$$

untuk $n\geq 4$

$$w_t(v_{k,i})=3\mathrm{nc}-c+k; i=1; 1\leq k\leq c$$

$$w_t(v_{k,i})=2\mathrm{nc}+k; i=2; 1\leq k\leq c$$

$$w_t(v_{k,i})=c(2\mathrm{n}+i-1)+k; 3\leq i\leq n-1; 1\leq k\leq c$$

$$w_t(v_{k,i})=c(n+1)+k; i=n; 1\leq k\leq c$$

Formula di atas menghasilkan himpunan bobot titik {1,2,3,..,3nc} sehingga terbukti bahwa bobot setiap titik berbeda.

jadi, $dis(cSl_n)=cn$

Teorema 3 misalkan $U_{k=1}^{c} Sl_{k+2}$ adalah gabungan saling lepas graf sarang laba-laba non-isomorfis dengan jumlah bandul berurutan. Nilai ketakteraturan jarak pada graf tersebut adalah $dis(U_{k=1}^{c} Sl_{k+2})=\Sigma_{k=1}^{c} k+2$ untuk $n\geq 3$ dan $c\geq 2$

Bukti: Setiap titik pada bandul dari gabungan saling lepas graf sarang laba-laba non-isomorfis dengan jumlah bandul berurutan mempunyai derajat 1 sehingga bobotnya merupakan label dari titik yang bertetangga dengan masing-ma-sing bandul. Berdasarkan definisi bahwa setiap bobot pada titik harus berbeda maka label setiap titik pada siklus (titik yang bertetangga dengan titik bandul) harus berbeda. Karena ada sebanyak $\Sigma_{k=1}^{c} k+2$ titik pada sik-lus maka label labeltertinggi pada siklus paling sedikit ada-lah $\Sigma_{k=1}^{c} k+2$ Dengan demikian batas bawahnya ada-lah $dis(U_{k=1}^{c} Sl_{k+2})\geq\Sigma_{k=1}^{c} k+2$

Selanjutnya adalah menentukan batas atasnya dengan cara melabeli setiap titik pada graf tersebut dengan mengikuti formula berikut:

$$\lambda(u_{k,i})=\frac{c^2+5\mathrm{c}-k^2-3\mathrm{k}}{2}-i+2; 1\leq i\leq n$$
$$1\leq k\leq c$$

$$\lambda(v_{k,i})=\frac{k^2+3\mathrm{k}-2}{2}+i-1; 1\leq i\leq n; 1\leq k\leq c$$

untuk n=3

$$\lambda(w_{k,i})=\frac{c^2+5\mathrm{c}-4}{2}; i=1,2; k=1$$

$$\lambda(w_{k,i})=1; i=3; k=1$$

untuk $n\geq 4$

$$\lambda(w_{k,i})=\frac{c^2+5\mathrm{c}-4}{2}; i=1; 2\leq k\leq c$$

$$\lambda(w_{k,i})=\frac{c^2+5\mathrm{c}-2}{2}; 2\leq i=n-1; 2\leq k\leq c$$

$$\lambda(w_{k,i})=\frac{c^2+5c}{2}\,;i=n\,;2\le k\le c$$

Untuk bobot titiknya mengikuti formula berikut:

$$w_t(u_{k,i})=\frac{2c^2+10c-k^2-3k-2}{2}-n-4\,;i=1$$

$$1\le k\le c$$

$$w_t(u_{k,i})=\frac{2c^2+10c-k^2-3k-2}{2}-i+5\,;$$

$$2\le i\le n-1\,;1\le k\le c$$

$$w_t(u_{k,i})=\frac{2c^2+10c-k^2-3k-2}{2}+5\,;i=n$$

$$1\le k\le c$$

$$w_t(w_{k,i})=\frac{k^2+3k-2}{2}+i-1\,;1\le i\le n\,;1\le k\le c$$

untuk n=3

$$w_t(v_{k,i})=\frac{2c^2+10c}{2}+3\,;i=1\,;k=1$$

$$w_t(v_{k,i})=c^2+5c+1\,;i=2\,;k=1$$

$$w_t(v_{k,i})=\frac{c^2+5c+4}{2}\,;i=3\,;k=1$$

untuk $n\ge 4$

$$w_t(v_{k,i})=\frac{2c^2+10c+k^2+3k-4}{2}+n\,;i=1$$

$$2\le k\le c$$

$$w_t(v_{k,i})=\frac{2c^2+10c+k^2+3k-6}{2}+i+1\,;$$

$$2\le i\le n-1\,;2\le k\le c$$

$$w_t(v_{k,i})=\frac{2c^2+10c+k^2+3k-4}{2}+1\,;i=n$$

$$2\le k\le c$$

Formula bobot titik di atas menghasilkan himpunan bobot yaitu $\{1,2,3,\ldots,3(\Sigma_{k=1}^{c}k+2)\}$ sehingga bobot setiap titiknya berbeda.

Jadi, $dis(U_{k=1}^{c}Sl_{k+2})=\Sigma_{k=1}^{c}k+2$

Teorema 4 Misalkan $U_{k=1}^{c}Sl_{2k+1}$ adalah gabungan saling lepas graf sarang laba-laba non-isomorfis dengn jumlah bandul bilangan ganjil. Nilai ketakteraturak jarak gabungan graf sarang laba-laba non-isomorfis dengan jumlah bandul bilangan ganjil adalah $dis(U_{k=1}^{c}Sl_{2k+1})=\Sigma_{k=1}^{c}2k+1$ untuk $n\ge 3$ dan $c\ge 2$

Bukti: Setiap titik bandul dari gabungan graf sarang laba-laba non-isomorfis dengan jumlah bandul bilangan ganjil mempunyai derajat 1 sehingga bobotnya merupakan label dari titik yang bertetangga dengan masing-masing bandul. Berdasarkan definisi 1 bahwa setiap bobot pada titik harus berbeda maka label setiap titik pada siklus (titik yang bertetangga dengan titik bandul) harus berbeda. Karena ada sebanyak $\Sigma_{k=1}^{c}2k+1$ titik pada siklus, maka label tertinggi pada siklus paling sedikit adalah $\Sigma_{k=1}^{c}2k+1$ Dengan demikian diperoleh batas bawahnya adalah $dis(U_{k=1}^{c}Sl_{2k+1})\ge\Sigma_{k=1}^{c}2k+1$

Setelah menentukan batas bawah dari gabungan saling lepas graf sarang laba-laba non-isomorfis dengan jumlah bandul bilangan ganjil, selanjutnya menentukan batas atasnya dengan cara melabeli setiap titik dari graf tersebut dengan mengikuti formula berikut:

$$\lambda(u_{k,i})=c^2+2c-k^2-i+2\,;1\le i\le n\,;1\le k\le c$$

$$\lambda(v_{k,i})=k^2+i-1\,;1\le i\le n\,;1\le k\le c$$

untuk n=3

$$\lambda(w_{k,i})=c^2+2c-2\,;i=1,2\,;k=1$$

$$\lambda(w_{k,i})=1\,;i=3\,;k=1$$

untuk $n\ge 4$

$$\lambda(w_{k,i})=c^2+2c-2\,;i=1\,;2\le k\le c$$

$$\lambda(w_{k,i})=c^2+2c-1\,;2\le i\le n-1\,;2\le k\le c$$

$$\lambda(w_{k,i})=c^2+2c\,;i=n\,;2\le k\le c$$

Untuk bobot titik mengikuti formula berikut:

$$w_t(u_{k,i})=2c^2+4c-k^2-2k+1\,;i=1\,;1\le k\le c$$

$$w_t(u_{k,i})=2c^2+4c-k^2+3-i\,;2\le i\le n-1$$

$$;1\le k\le c$$

$$w_t(u_{k,i})=2c^2+4c-k^2+3\,;i=n\,;1\le k\le c$$

$$w_t(w_{k,i})=k^2+i-1\,;1\le i\le n\,;1\le k\le c$$

untuk n=3

$$w_t(v_{k,i})=2c^2+4c+k^2+2k\,;i=1\,;k=1$$

$$w_t(v_{k,i})=c^2+5c+1\,;i=1\,;k=1$$

$$w_t(v_{k,i})=\frac{c^2+5c+4}{2}\,;i=1\,;k=1$$

untuk $n\ge 4$

$$w_t(v_{k,i})=2c^2+4c+k^2+2k\,;i=1\,;2\le k\le c$$

$$w_t(v_{k,i})=2c^2+4c+k^2+i-1\,;2\le i\le n-1$$

$$2\le k\le c$$

$$w_t(v_{k,i})=2c^2+4c+k^2\,;i=n\,;2\le k\le c$$

Formula di atas menghasilkan himpunan bobot titik yaitu $\{1,2,3,\ldots,3(\Sigma_{k=1}^{c}2k+1)\}$ sehingga bobot setiap titik dari graf sarang laba-laba dengan jumlah bandul bilangan ganjil adalah berbeda.

Jadi, $dis(U_{k=1}^{c}Sl_{2k+1})=\Sigma_{k=1}^{c}2k+1$

Teorema 5 Misalkan $Amal(Sl_n, v, r)$ adalah amalgamasi graf sarang laba-laba. Nilai ketakteraturan jaraknya $dis(Amal(Sl_n, v, r))=3(n-1)$ untuk $n\geq 7$ dan $r=3$

Bukti: Ada sebanyak 3 buah graf sarang laba-laba yang isomorfis di gabungkan menjadi satu pada sebuah titik, sehingga bandul dari masing-masing graf sarang laba-laba yang semula n menjadi n-1. Karena ada 3 buah graf sarang laba-laba yang isomorfis dijadikan satu pada sebuah titik maka jumlah bandul pada graf sarang laba-laba adalah 3(n-1). Setiap titik pada bandul amalgamasi graf sarang laba-laba mempunyai derajat 1 sehingga bobotnya merupakan label dari titik yang bertetangga dengan masing-masing bandul. Berdasarkan definisi 1 bahwa setiap bobot pada titik harus berbeda maka label setiap titik pada siklus (titik yang bertetangga dengan titik bandul) harus berbeda. Karena bandul sebanyak 3(n–1) maka label tertiggi pada graf tersebut paling sedikit adalah 3(n-1). Dengan demikian batas bawahnya $dis(Amal(Sl_n, v, 3))\geq 3(n-1)$

Selanjutnya menentukan batas atas dari amalgamasi graf sarang laba-laba dengan cara melabeli setiap titik amalagamasi graf sarang laba-laba mengikuti formula berikut:

$\lambda(x_0)=n+2$

$\lambda(u_{1,i})=2\text{n}-i\,;1\leq i\leq n-2\,;i=n$

$\lambda(u_{1,i})=2\text{n}-1\,;i=n-1$

$\lambda(u_{2,i})=2\text{n}\,;1\leq i\leq n$

$\lambda(v_{r,i})=(n-1)(r-1)+i\,;1\leq i\leq n-1$

$\lambda(v_{r,i})=1\,;i=n\,;r=1$

$\lambda(v_{r,i})=(n-1)(r-1)\,;i=n\,;r=2{,}3$

$\lambda(w_{1,i})=n-2\,;i=1$

$\lambda(w_{1,i})=2\text{n}-1\,;2\leq i\leq n-2$

$\lambda(w_{1,i})=2\text{n}\,;i=n-1$

$\lambda(w_{2,i})=2\text{n}-1\,;i=1$

$\lambda(w_{2,i})=2\text{n}+1-i\,;2\leq i\leq n-2$

$\lambda(w_{2,i})=2\text{n}+2\,;i=n-1$

untuk $n\geq 7, n\in$ bilangan ganjil

$\lambda(u_{3,i})=5(\frac{n-5}{2})+13\,;1\leq i\leq n$

$\lambda(w_{3,i})=3(\frac{n+1}{2})-i\,;1\leq i\leq\frac{n-1}{2}$

$\lambda(w_{3,i})=\frac{3\text{n}+5}{2}-i\,;\frac{n+1}{2}\leq i\leq n-2$

$\lambda(w_{3,i})=\frac{3\text{n}+7}{2}\,;i=n-1$

untuk $n\geq 8, n\in$ bilangan genap

$\lambda(u_{3,i})=5(\frac{n-5}{2})+16\,;1\leq i\leq n$

$\lambda(w_{3,i})=\frac{n}{2}\,;i=1$

$\lambda(w_{3,i})=\frac{3\text{n}}{2}-i\,;2\leq i\leq\frac{n}{2}$

$\lambda(w_{3,i})=\frac{3\text{n}}{2}-i+1\,;\frac{n}{2}+1\leq i\leq n-2$

$\lambda(w_{3,i})=\frac{3\text{n}+6}{2}\,;i=n-1$

untuk memperoleh bobot dari setiap titik mengikuti formula berikut:

$w_t(x_0)=3\text{n}-2$

$w_t(u_{1,i})=3\text{n}-1\,;i=1$

$w_t(u_{1,i})=4\text{n}-i\,;2\leq i\leq n-3$

$w_t(u_{1,i})=4\text{n}\,;i=n-2$

$w_t(u_{1,i})=4\text{n}-1\,;i=n-1$

$w_t(u_{1,i})=3\text{n}-1\,;i=n$

$w_t(u_{2,i})=5\text{n}+i-1\,;1\leq i\leq n-1$

$w_t(u_{2,i})=5\text{n}-1\,;i=n$

$w_t(v_{1,i})=3\text{n}\,;i=1$

$w_t(v_{1,i})=4\text{n}+i-1\,;2\leq i\leq n-1$

$w_t(v_{1,i})=3\text{n}+2\,;i=n$

$w_t(v_{2,i})=6\text{n}-1\,;i=1$

$w_t(v_{2,i})=6\text{n}+i-1\,;2\leq i\leq n-1$

$w_t(v_{2,i})=6\text{n}\,;i=n$

$w_t(w_{r,i})=(n-1)(r-1)+i\,;1\leq i\leq n-1\,;1\leq r\leq 3$

untuk $n\geq 7, n\in$ bilangan ganjil

$w_t(u_{3,i})=7\text{n}+i-1\,;1\leq i\leq n-1$

$w_t(u_{3,i})=7\text{n}-1\,;i=n$

$w_t(v_{3,i})=8\text{n}+i-2\,;1\leq i\leq\frac{n-1}{2}$

$w_t(v_{3,i})=8\text{n}+i-1\,;\frac{n+1}{2}\leq i\leq n-1$

$w_t(v_{3,i})=17(\frac{n-5}{2})+41\,;i=n$

untuk $n\geq 8, n\in$ bilangan genap

$w_t(u_{3,i})=7\text{n}+i\,;1\leq i\leq n-1$

$w_t(u_{3,i})=7\text{n}\,;i=n$

$w_t(v_{3,i})=7\text{n}-1\,;i=1$

$w_t(v_{3,i})=8\text{n}+i-2\,;1\leq i\leq\frac{n}{2}$

$w_t(v_{3,i})=8\text{n}+i-1\,;\frac{n+2}{2}\leq i\leq n-1$

$w_t(v_{3,i})=17(\frac{n-6}{2})+50\,;i=n$

Formula bobot titik di atas himpunan menghasilkan bobot titik yaitu {1, 2 ,... , 9n-2} sehingga bobot setiap titik berbeda.

Jadi $dis(Amal(Sl_n, v, 3))=3(n-1)$

Teorema6 Misalkan $Shack(Sl_n, v, m)$ adalah Shackle graf sarang laba-laba. Nilai ketakteraturan jaraknya $dis(Shack(Sl_n, v, m))=3n-4$ untuk $n\geq 10$ dan $m=3$

Bukti: Ada sebanyak 3 buah graf sarang laba-laba yang isomorfis digabungkan, sehingga titik pada bandul graf ke-1 dan ke-3 menjadi n-1 dan titik pada bandul ke-2 menjadi n-2. Jumlah bandul pada shackel graf sarang laba-laba menjadi 3n-4. Setiap bandul mempunyai derajat 1 sehingga bobotnya merupakan label dari titik yang bertetangga dengan masing-masing bandul. Berdasarkan definisi 1 bahwa setiap bobot pada titik harus berbeda maka label setiap pada siklus (titik yang bertetangga dengan titik bandul) harus berbeda. Karena bandulnya sebanyak 3n-4, maka label tertinggi pada graf tersebut paling sedikit adalah 3n-4. Dengan demikian batas bawah adalah $dis(Shack(Sl_n, v, 3))\geq 3n-4$

Selanjutnya menenutukan batas atas dari shackle graf sarang laba-laba. Caranya adalah dengan melabeli setiap titik pada shackle graf sarang laba-laba mengikuti formula berikut:

$\lambda(v_{1,i})=i\,;1\leq i\leq n-2$
$\lambda(v_{1,i})=n+1\,;i=n-1$
$\lambda(v_{1,i})=n-1\,;i=n$
$\lambda(v_{m,i})=nm-n-m+i\,;1\leq i\leq n-1\,;m=2,3$
$\lambda(v_{m,i})=2n-m\,;i=n\,;m=2,3$
$\lambda(w_{3,i})=\frac{3n}{2}+2\,;i=1$
$\lambda(w_{3,i})=\frac{3n}{2}-i+4\,;2\leq i\leq n-2$
$\lambda(w_{3,i})=\frac{3n}{2}+5\,;i=n-1$

untuk $n\geq 10, n\in$ bilangan genap

$\lambda(y_1)=\frac{3n}{2}-1$
$\lambda(y_2)=\frac{n}{2}+5$
$\lambda(u_{1,i})=\frac{3n}{2}-1\,;1\leq i\leq n$
$\lambda(u_{2,i})=2n\,;1\leq i\leq n$
$\lambda(u_{3,i})=\frac{5n}{2}+1\,;1\leq i\leq n$
$\lambda(w_{1,i})=\frac{3n}{2}-2\,;i=1$
$\lambda(w_{1,i})=\frac{5n}{2}-i+1\,;2\leq i\leq n-3$
$\lambda(w_{1,i})=\frac{3n}{2}+1\,;i=n-2$
$\lambda(w_{2,i})=n+1\,;i=1$

untuk n=10

$\lambda(w_{2,i})=2n-i+3\,;2\leq i\leq n-1$

untuk $n\geq 12, n\in$ bilangan genap

$\lambda(w_{2,i})=2n-i+2\,;2\leq i\leq\frac{n-8}{2}$
$\lambda(w_{2,i})=2n-i+3\,;\frac{n-6}{2}\leq i\leq n-1$

untuk $n\geq 11, n\in$ bilangan ganjil

$\lambda(y_1)=\frac{3n-5}{2}$
$\lambda(y_1)=\frac{n+9}{2}$
$\lambda(u_{1,i})=\frac{3n-1}{2}\,;1\leq i\leq n-2, i=n$
$\lambda(u_{1,i})=2n-1\,;i=n-1$
$\lambda(u_{2,i})=2n\,;1\leq i\leq n$
$\lambda(u_{3,i})=\frac{5n+3}{2}\,;1\leq i\leq n$
$\lambda(w_{1,i})=\frac{n-3}{2}\,;i=1$
$\lambda(w_{1,i})=\frac{5n+1}{2}-i\,;2\leq i\leq n-3$
$\lambda(w_{1,i})=\frac{3n}{2}+1\,;i=n-2$
$\lambda(w_{3,i})=\frac{n+3}{2}\,;i=1$
$\lambda(w_{3,i})=\frac{3n+7}{2}-i\,;2\leq i\leq n-2$

untuk n=11

$\lambda(w_{2,i})=n+2\,;i=1$

untuk n=11,13

$\lambda(w_{2,i})=2n-i+3\,;2\leq i\leq n-1$

untuk $n\geq 13, n\in$ bilangan ganjil

$\lambda(w_{2,i})=n+1\,;i=1$

untuk $n\geq 15, n\in$ bilangan ganjil

$\lambda(w_{2,i})=2n-i+2\,;2\leq i\leq\frac{n-11}{2}$
$\lambda(w_{2,i})=2n-i+3\,;\frac{n-9}{2}\leq i\leq n-1$

Untuk bobot titik mengikuti formula berikut:

$w_t(y_i)=3n+i-4\,;i=1,2$
$w_t(w_{1,i})=i\,;1\leq i\leq n-2$
$w_t(w_{1,i})=n+1\,;i=n-1$
$w_t(w_{1,i})=n-1\,;i=n$
$w_t(w_{m,i})=nm-n-m+i\,;1\leq i\leq n-1\,;m=2,3$
$w_t(w_{m,i})=2n-m\,;i=n\,;m=2,3$

untuk $n\geq 10, n\in$ bilangan genap

$w_t(u_{1,i})=3n+i-2\,;1\leq i\leq n-2$

$w_t(u_{1,i})=4\text{n}-1\,;i=n-1$
$w_t(u_{1,i})=4\text{n}-3\,;i=n$
$w_t(u_{2,i})=5\text{n}+i-2\,;1\leq i\leq n$
$w_t(u_{3,i})=7\text{n}+i-1\,;1\leq i\leq n-1$
$w_t(u_{3,i})=7\text{n}-1\,;i=n$
$w_t(v_{1,i})=4\text{n}-2\,;i=1$
$w_t(v_{1,i})=4\text{n}+i\,;2\leq i\leq n-2$
$w_t(v_{1,i})=5\text{n}-i\,;i=n-1,n$
$w_t(v_{2,i})=6\text{n}-1\,;i=1$
$w_t(v_{2,i})=\frac{13\text{n}}{2}-5\,;i=n$
$w_t(v_{3,i})=8\text{n}-1\,;i=1$
$w_t(v_{3,i})=8\text{n}+i-1\,;2\leq i\leq n-1$
$w_t(v_{3,i})=8\text{n}\,;i=n$

untuk n=10

$w_t(v_{2,i})=6\text{n}+i-1\,;2\leq i\leq n-1$

untuk $n\geq 12, n\in$ bilangan genap

$w_t(v_{2,i})=6\text{n}+i-2\,;2\leq i\leq \frac{n-8}{2}$
$w_t(v_{2,i})=6\text{n}+i-1\,;\frac{n-6}{2}\leq i\leq n-1$

untuk $n\geq 11, n\in$ bilangan ganjil

$w_t(u_{1,i})=3\text{n}+i-1\,;1\leq i\leq n-2$
$w_t(u_{1,i})=4\text{n}\,;i=n-1$
$w_t(u_{1,i})=4\text{n}-2\,;i=n$
$w_t(u_{2,i})=5\text{n}+i-2\,;1\leq i\leq n$
$w_t(u_{3,i})=7\text{n}+i\,;1\leq i\leq n-1$
$w_t(u_{3,i})=7\text{n}\,;i=n$
$w_t(v_{1,i})=3\text{n}-1\,;i=1$
$w_t(v_{1,i})=4\text{n}+i\,;2\leq i\leq n-2$
$w_t(v_{1,i})=4\text{n}+1\,;i=n-1$
$w_t(v_{1,i})=4\text{n}-1\,;i=n$
$w_t(v_{3,i})=7\text{n}-1\,;i=1$
$w_t(v_{3,i})=8\text{n}+i-1\,;2\leq i\leq n-1$
$w_t(v_{3,i})=8\text{n}\,;i=n$

untuk n=11

$w_t(v_{2,i})=6\text{n}+i-1\,;1\leq i\leq n-1$
$w_t(v_{2,i})=6\text{n}-1\,;i=n$

untuk n=13

$w_t(v_{2,i})=6\text{n}+i-1\,;2\leq i\leq n-1$

untuk $n\geq 13, n\in$ bilangan ganjil

$w_t(v_{2,i})=6\text{n}-1\,;i=1$
$w_t(v_{2,i})=\frac{13(n-1)}{2}\,;i=n$

untuk $n\geq 15, n\in$ bilangan ganjil

$w_t(v_{2,i})=6\text{n}+i-2\,;2\leq i\leq \frac{n-11}{2}$
$w_t(v_{2,i})=6\text{n}+i-1\,;\frac{n-9}{2}\leq i\leq n-1$

Formula bobot titik di atas himpunan menghasilkan bobot titik yaitu {1, 2 ,... , 9n-2} sehingga bobot setiap titik berbeda.

Jadi $dis(Shack(Sl_n, v, 3))=3\text{n}-4$

Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa nilai *distance irregular strength (dis)* dari pelabelan jarak tidak teratur pada graf sarang laba-laba adalah sebagai berikut :

1. Nilai ketakteraturan jarak graf sarang laba-laba tunggal adalah $dis(Sl_n)=n$ untuk $n\geq 3$
2. Nilai ketakteraturan jarak pada gabungan graf sarang laba-laba isomorfis adalah $dis(cSl_n)=cn$ untuk $n\geq 3$ dan $c\geq 2$
3. Nilai ketakteraturan jarak pada gabungan saling lepas graf sarang laba-laba non-isomorfis dengan jumlah bandul berurutan adalah $dis(U_{k=1}^{c} Sl_{k+2})=\Sigma_{k=1}^{c} k+2$ untuk $n\geq 3$ dan $c\geq 2$
4. Nilai ketakteraturan jarak pada gabungan saling lepas graf sarang laba-laba non-isomorfis dengan jumlah bandul ganjil adalah $dis(U_{k=1}^{c} Sl_{2\text{k}+1})=\Sigma_{k=1}^{c} 2\text{k}+1$ untuk $n\geq 3$ dan $c\geq 2$
5. Nilai ketakteraturan jarak dari amalgamasi graf sarang laba-laba adalah $dis(Amal(Sl_n, v, r))=3(n-1)$ untuk $n\geq 7$ dan $r=3$
6. Nilai ketakteraturan jarak dari shackle graf sarang laba-laba adalah $dis(Shack(Sl_n, v, m))=3\text{n}-4$ untuk $n\geq 10$ dan $m=3$

Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai nilai ketakteraturan jarak pada graf sarang laba-laba tunggal dan pada gabungan graf sarang laba-laba isomorfis,maupun gabungan graf sarang laba-laba non-isomorfis maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian, antara lain:

1. pembaca dapat melakukan penelitian mengenai nilai ketakteraturan jarak pada gabungan graf sarang laba-laba dengan jumlah bandul tidak berurutan,
2. pembaca dapat melakukan penelitian mengenai nilai ketakteraturan jarak graf sarang laba-laba $r>3$ dan $m>3$

Daftar Pustaka

[1] Abdussakir, Azizah, dan Nofandik. 2009. *Teori Graf.* Malang: UIN Malang Press.

[2] Gross, J.L., Khan, I. F., and Poshni, M. I. 2010. *Genus Distribution of Graph Amalgamation: Pasing at Root-vertices. Ars. Combinatoria* Vol. 94(2010):33-35.

[3] Hartsfield, N. and Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. London: Accademic Press Limited.
[4] Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf.* Jember: Jember University Press.
[5] Slamin. 2014. *Distance Irregular Labelings of Graphs.* Dipresentasikan dalam International Workshop on Graph Masters and Seminar on Mathematics Education on Graph Theory.,7-9 Juni 2013, Malang