Pelabelan Total Super *(a,d)* - Sisi Antimagic Pada Graf *Crown String* (*Super (a,d)-Edge Antimagic Total Labeling of Crown String Graph*)

Enin Lutfi Sundari, Dafik, Slamin
Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember (UNEJ)
Jln. Kalimantan 37, Jember 68121
e-mail: d.dafik@gmail.com

Abstrak

Pelabelan total super sebuah graf $G = (V,E)$ dengan jumlah titik p dan jumlah sisi q adalah pelabelan titik terhadap himpunan $\{1, 2, 3, ...p\}$ dan pelabelan sisi terhadap himpunan $\{p+1, p+2, ...p+q\}$. Sehingga barisan yang dibentuk oleh $w(uv)=f(u)+f(v)+f(uv), uv\in E(G)$ membentuk sebuah barisan aritmatika dengan suku awal atau $a>0$ dan $d>0$ dengan $f(u)$ adalah label titik u, $f(v)$ merupakan label titik v, dan $f(uv)$ merupakan label sisi uv. Dalam penilitian ini akan dibahas mengenai pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic dari graf *Crown String* konektif atau tunggal. Graf ini disimbolkan dengan $Cs_{m,n}$.. Hasil penelitian menunjukkan bahwa ada pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic dari graf Crown String konektif atau tunggal dari $d = 0, 1, 2$. Berdasarkan hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa graf *Crown String* konektif atau tunggal memiliki pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic untuk semua nilai d yang memenuhi.

Kata Kunci: Pelabelan total super *(a,d)*, graf *Crown String*

Abstract

Super edge-antimagic total labeling of a graph G = (V,E) with order p and size q, is a vertex labeling {1, 2, 3, ...p} and an edge labeling {p+1, p+2, ...p+q} such that the edge-weights $w(uv)=f(u)+f(v)+f(uv), uv\in E(G)$ *form an arithmetic sequence and for a > 0 and d 0, where f(u) is a label of vertex u, f(v) is a label of vertex v and f(uv) is a label of edge (uv). In this paper we discuss about super edge-antimagic total labelings properties of connected Crown String graph, denoted by* $Cs_{m,n}$. *The result shows that a connected Crown String graph admit a super (a, d)-edge antimagic total labeling for d = 0, 1, 2. It can be concluded that the result has covered all the feasible d.*
Keywords: *Super (a, d)-edge-antimagic total labeling, Crown String graph*

Pendahuluan

Teori graf adalah salah salah kajian dalam matematika diskrit. Teori graf banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan atau menyatakan suatu persoalan agar lebih mudah dimegerti dan diselesaikan. Pelabelan graf
merupakan salah satu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan cacah yang disebut label.[1]

Definisi 1. S*ebuah graf G merupakan pasangan himpunan (V(G),E(G)), dimana V(G) adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik,dan E(G) adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut u,v dari titik-titik u,v V(G) yang disebut sisi. V(G) disebut himpunan titik dari G dan E(G) disebut himpunan sisi dari G.* [5]

Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic. Pelabelan graf adalah suatu pemetaan satu-satu dan onto (fungsi bijektif) yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif.[3] Pelabelan merupakan suatu pemetaan yang disebut juga fungsi. Fungsi yang digunakan dalam pelabelan total super *(a,d)* adalah fungsi bijektif.

Suatu graf dikatakan memiliki pelabelan total *(a,d)*-sisi antimagic jika terdapat sebuah pemetaan satu-satu dari suatu $V(G)\cup E(G)$ ke bilangan bulat $\{1,2,3,...,p+q\}$ sehingga himpunan bobot sisinya $w(uv)=f(u)+f(v)+f(uv)$ pada semua sisi G adalah $\{a,a+d,...,a+(q-1)d\}$ untuk $a>0$ dan $d>0$ keduanya bilangan bulat. Sebuah pelabelan total *(a,d)*- sisi antimagic disebut pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic jika $f(v)=\{1,2,3,...,p\}$ dan $f(E)=\{p+1,p+2,p+3,...p+q\}$.

Berdasarkan penjelasan sebelumnya dapat juga diartikan bahwa pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic pada sebuah graf $G=(V,E)$ adalah pelabelan titik dengan bilangan bulat $\{1,2,3,...,p\}$ dan pelabelan sisi dengan bilangan bulat $f(E)=\{p+1,p+2,p+3,...p+q\}$ dari sebuah graf G dimana p adalah banyaknya titik dan q adalah banyaknya sisi pada graf G.

Untuk mencari batas atas nilai beda d pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic dapat ditentukan dengan lemma 1 [2]:

Lemma 1. Jika sebuah graf *(p,q)* adalah pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic maka:

$$d \le \frac{2p+q-5}{q-1}$$

Misalkan graf-*(p,q)* adalah pelabelan total super *(a,d)* – sisi antimagic dengan $f: V(G)\cup E(G)\rightarrow\{p+1, p+2, ..., p+q\}$

.Nilai minimum yang mungkin dari bobot sisi terkecil $f(u)+f(uv)+f(v)=1+(p+1)+2=p+4$. Dapat ditulis : $p+4\leq a$ Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari bobot sisi terbesar yaitu dengan menjumlahkan dua label titik terbesar *(p - 1)* dan *p* dengan satu label sisi terbesar *(p + q)*, sehingga diperoleh: $(p-1)+(p+q)+p=3p+q-1$. Akibatnya:

$$a+(q-1)d\leq 3\mathrm{p}+q-1$$
$$d\leq\frac{p+q-1-(p+4)}{q-1}$$
$$d\leq\frac{2\mathrm{p}+q-5}{q-1}$$

Graf khusus yang belum pernah diketahui pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic nya adalah graf *Crown String*.[4] Graf *Crown String* merupakan famili dari graf Buku Segitiga. Graf *Crown String* adalah salah satu graf yang dikembangkan dari graf buku segitiga dengan menambahkan sisi berupa lintasan. Graf *Crown String* termasuk graf sederhana. Graf *Crown String* dinotasikan dengan $Cs_{m,n}$ dimana m adalah banyaknya perluasan graf ke samping dan *n* banyaknya perluasan puncak graf ke atas. Sedangkan himpunan *V* dan *E* dari graf *Crown String* adalah sebagai berikut. $V = x_i;\ y_j\ ;\ y_{j;k};\ 1\leq i\leq m\ ;\ 1\leq j\leq 2m\ ;\ 1\leq k\leq n$ dan himpunan *E*

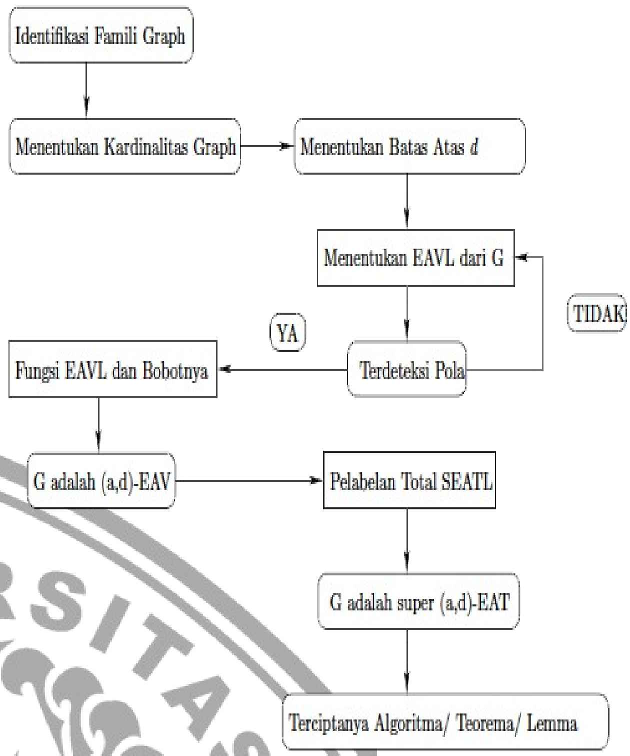
$$E=\{y_j y_{j+1};1\leq j\leq 2\mathrm{m}-1\}\cup$$
$$\{y_j y_{j,k};1\leq j\leq 2\mathrm{m},1\leq k\leq n\}\cup$$
$$\{x_i y_j;1\leq i\leq m,1\leq j\leq 2\mathrm{m}\}\cup$$
$$\{x_i y_{j,k};1\leq i\leq m,1\leq j\leq 2\mathrm{m},1\leq k\leq n\}\cup$$
$$\{y_j y_{j-1,1};3\leq j\leq 2\mathrm{m}-1\}$$

Adapun manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini adalah untuk memberikan konstribusi terhadap berkembang-nya pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khusunya dalam ruang lingkup pelabelan graf dengan menunjukkan eksistensi pelabelan total super (a,d) pada graf ini. Penelitian ini dapat memberikan motivasi pada peneliti lain untuk melakukan penelitian tentang pelabelan jarak tidak teratur pada jenis-jenis graf yang berbeda. Selain itu, hasil penelitian ini diharapkan dapat dijadikan pengembangan atau perluasan ilmu serta aplikasi dalam masalah pelabelan jarak tidak teratur di program studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember.

Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik yaitu dengan menerapkan lemma yang telah ada yakni Lemma 1. Lemma tersebut digunakan untuk menentukan nilai batas atas dari graf *Crown String.* Apabila hasil investigasi pada pelabelan ini terbukti dapat digunakan dan berpola, maka dapat dicari pola dan perumusan pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic dengan menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*).

Adapun teknik penelitian tersebut tersaji pada diagram alur penelitian berikut:



Gambar 1. Prosedur Penelitian

Pembahasan

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic pada graf *Crown String*. Penelitian ini diawali dengan menentukan batas atas *d* dari graf *Crown String*, menentukan *EAVL* dan bobot sisi *EAV* , menentukan *SEATL* dan menentukan bobot total *SEATL* pada graf *Crown String.* Penelitian tersebut dilakukan untuk membuktikan bahwa graf *Crown String* tunggal memiliki pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic atau *SEATL*.

Hasil penelitian pada pelabelan total super (*a,d*)-sisi antimagic pada graf *Crown String* tunggal berupa 1 lemma dan 2 teorema. Penyajian pada penelitian ini, dengan menuliskan lemma ataupun teorema terlebih dahulu, dilanjutkan dengan disertai bukti mengenai lemma dan teorema tersebut.

Batas Atas *d* Graf *Crown String*. Diketahui jumlah titik pada graf *Crown String* adalah *2mn + 3m* dan jumlah sisi *2mn* + 3*m* . Dengan demikian batas atas nilai beda *d* tersebut adalah:

$$d\leq\frac{2\mathrm{p}+q-5}{q-1}$$
$$d\leq\frac{2(2\mathrm{mn}+3\mathrm{m})+(4\mathrm{mn}+6\mathrm{m}-3)-5}{(4\mathrm{mn}+6\mathrm{m}-3)-1}$$
$$d\leq\frac{4\mathrm{mn}+6\mathrm{m}+4\mathrm{mn}+6\mathrm{m}-3-5}{4\mathrm{mn}+6\mathrm{m}-4}$$

$$d \le \frac{8mn+12m-8}{4mn+6m-4}$$
$$d \le 2$$

Karena *SEATL* selalu menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai *d* adalah bilangan bulat, sehingga *d = 0, 1, 2*. Selanjutnya penentuan fungsi bijektif pelabelan total super (*a,d*)-sisi antimagic akan disesuaikan dengan nilai *d* yang telah ditetapkan.

Lemma 1. Ada pelabelan titik (3,1)-sisi antimagic pada graf *Crown String Csm,n* jika $m \ge 1$ dan $n \ge 1$.

Bukti. Labeli titik graf *Crown String Csm,n* dengan sebuah fungsi definisikan pelabelan *f*1 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_1(y_j)=(2n+3)\frac{j+1}{2}-2n+2, untuk\,; \quad 1\le j\le 2m,\ j=ganjil$$

$$f_1(y_j)=(2n+3)\frac{j}{2}, untuk\,; \quad 1\le j\le 2m,\ j=genap$$

$$f_1(y_{j,k})=(2n+3)\frac{j+1}{2}-n-k-1, untuk\,; \quad 1\le k\le n,\ 1\le j\le 2m,\ j=ganjil$$

$$f_1(y_{j,k})=(2n+3)\frac{j}{2}-k, untuk\,; \quad 1\le k\le n,\ 1\le j\le 2m,\ j=genap$$

$$f_1(x_i)=(2n+3)i-n-1, untuk\,; \quad 1\le i\le m,$$

Pelabelan titik *f*1 merupakan fungsi bijektif yang memetakan *V* (*Csm,n*) ke himpunan bilangan bulat. Jika *wf*1 didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan titik *f*1 yang diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang bersisian, maka fungsi bijektif *wf*1 dapat ditentukan melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika sebagai berikut:

$$w_{f1}(y_j y_{j,k})=(2n+3)j+\left(\frac{(-1)^j-1}{2}\right)n-k\,; \quad 1\le k\le n, 1\le j\le 2m$$

$$w_{f1}(x_i y_j)=(4n+6)i+((-1)^j-2)(n+1)\,; \quad 1\le i\le m, 1\le j\le 2m$$

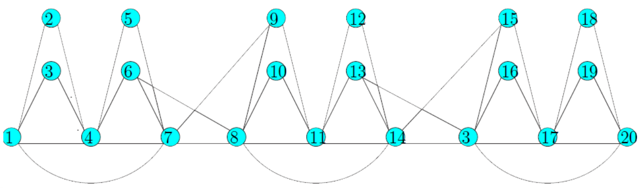
$$w_{f1}(x_i y_{j,k})=(4n+6)i+\left(\frac{(-1)^j-3}{2}(n+1)\right)-k\,; \quad 1\le i\le m, 1\le j\le 2m,\ 1\le k\le n,$$

$$w_{f1}(y_i y_{j+1})=(2n+3)j+1\,; \quad 1\le j\le 2m-1,$$

$$w_{f1}(y_i y_{j-1,1})=(2n+3)(j-1)\,; \quad 3\le j\le 2m-1,\ j=ganjil$$

$$w_{f1}(y_i y_{j+1,n})=(2n+3)j+2\,; \quad 2\le j\le 2m-2,\ j=genap$$

Berdasarkan bobot sisi *EAV* ini, bobot sisi terkecil terletak pada *wf*1(*yjyj,k*) yaitu (2*n* + 3)*j* , *n* =*k* untuk *j* = 1 dan *k* = *n*. Sedangkan bobot sisi terbesar terletak pada *wf*1(*yjyj,k*) yaitu (2*n* + 3)*j* , *j* = 2*m* dan *k* = 1. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa *f*1 adalah suatu pelabelan titik (3*;* 1).



Gambar 2. Label titik Cs3,2

Berdasarkan Lemma 1 maka diperoleh pelabelan titik (3, 1)-sisi antimagic. Kemudian dapat ditentukan pelabelan total super sisi antimagic dengan nilai awal *a* dan nilai beda *d* = 0 atau dapat dituliskan dengan pelabelan total super (*a,* 0)- sisi antimagic. Pelabelan tersebut ditentukan berdasarkan label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL *w* dengan urutan yang berkebalikan. Sehingga sisi dengan *w* terkecil dilabeli dengan label sisi terbesar dan sisi dengan *w* terbesar dilabeli dengan label sisi terkecil. Melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika, maka dapat ditentukan fungsi bijektifnya. Dari uraian di atas dapat diturunkan teorema 1.

Teorema 1. Ada pelabelan total super *((6n+9)m,0),* dan *((2n+3)m+4,2)*-sisi antimagic pada graf *Crown String Csm,n* jika *m ≥* 1,dan *n ≥* 1.

Bukti. Gunakan pelabelan titik *f*1 untuk melabeli titik graf *Crown String Csm,n,* kemudian definisikan label sisi *f*2 sehingga label sisi *f*2 untuk pelabelan total super (*a,* 0)-sisi antimagic pada graf *Csm,n,* dapat dirumuskan sebagai berikut.(lihat gambar 3 sebagai ilustrasi cara melabeli sisi *d=0*)

$$f_2(y_j y_{j,k})=(6n+9)m-(2n+3)j+\left(\frac{1-(-1)^j}{2}\right)(n)\,; \quad 1\le k\le n, 1\le j\le 2m$$

$$f_2(x_i y_j)=(6n+9)m-(4n+6)i+(2-(-1)^j)(n+1)\,; \quad 1\le i\le m, 1\le j\le 2m$$

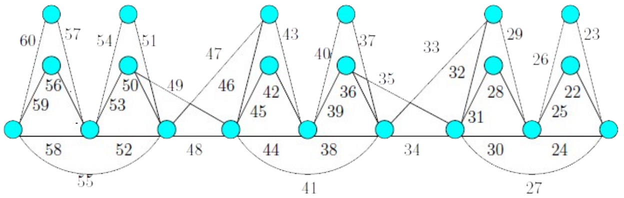
$$f_2(x_i y_{j,k})=(6n+9)m-(4n+6)i+\left(\frac{3-(-1)^j}{2}(n+1)\right)+k\,; \quad 1\le i\le m, 1\le j\le 2m,\ 1\le k\le n,$$

$$f_2(y_i y_{j+1})=(6n+9)m-(2n+3)j-1\,; \quad 1\le j\le 2m-1,$$

$$f_2(y_i y_{j-1,1})=(6n+9)m-(2n+3)(j-1)\,; \quad 3\le j\le 2m-1,$$

$$j = ganjil$$

$$f_2(y_i y_{j+1,n}) = (6n+9)m - (2n+3)j - 2; \quad 2 \le j \le 2m-2, \quad j = genap$$

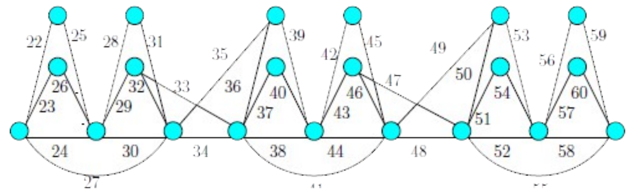


Gambar 3. Label sisi d=0

Jika W_{f2} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total graf *Crown String* berdasarkan penjumlahan bobot sisi dengan label sisinya maka W_{f2} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot sisi EAVL *wf*1 dan rumus label sisi f_2 dengan syarat batas i , *j* dan *k* yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$w_{f2}(y_j y_{j,k}) = (6n+9)m$$
$$w_{f2}(x_i y_j) = (6n+9)m$$
$$w_{f2}(x_i y_{j,k}) = (6n+9)m$$
$$w_{f2}(y_i y_{j+1}) = (6n+9)m$$
$$w_{f2}(y_i y_{j-1,1}) = (6n+9)m$$
$$w_{f2}(y_i y_{j+1,n}) = (6n+9)m$$

Berdasarkan hasil diatas, dapat dilihat bahwa setiap bobot sisi nilainya (6*n*+9)*m*. Sehingga dapat disimpulkan bahwa graf *Crown String* mempunyai pelabelan total super(*a, d*)-sisi antimagic dengan *a* = (6*n* + 9)*m* dan *d* = 0, dengan kata lain graf *Crown String* mempunyai pelabelan total super ((6*n*+9)*m,* 0)-sisi antimagic. Untuk mencari pelabelan sisi untuk *d* = 2 menggunakan hasil pelabelan sisi dari *d* = 0 dan menggunakan jumlah sisi dan jumlah titik. (lihat gambar 4 sebagai ilustrasi cara melabeli sisi d=2)



Gambar 4. Label sisi d=2

$$f_3(y_j y_{j,k}) = (2n+3)(m+j) + \left(\frac{(-1)^j - 1}{2}\right)(n) - k - 2; \quad 1 \le k \le n, 1 \le j \le 2m$$

$$f_3(x_i y_j) = (2n+3)m + (4n+6)i + ((-1)^j - 1)(n+1) - n - 3; \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le 2m$$

$$f_3(x_i y_{j,k}) = (2n+3)m + (4n+6)i + \left(\frac{(-1)^j - 1}{2}(n+1)\right) - n - k - 3; \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le 2m, \quad 1 \le k \le n,$$

$$f_3(y_i y_{j+1}) = (2n+3)m + (2n+3)j - 1; \quad 1 \le j \le 2m-1,$$

$$f_3(y_i y_{j-1,1}) = (2n+3)m + (2n+3)(j-1) - 2; \quad 3 \le j \le 2m-1, \quad j = ganjil$$

$$f_3(y_i y_{j+1,n}) = (2n+3)m + (2n+3)j; \quad 2 \le j \le 2m-2, \quad j = genap$$

Untuk mencari bobot total *d* = 2 dengan menjumlahkan bobot sisi dan fungsi label sisi *d* = 2 atau dituliskan sebagai *Wf*3.

$$w_{f3}(y_j y_{j,k}) = (2n+3)j + (4n+6)j + ((-1)^j - 1)n - 2k - 2; \quad 1 \le k \le n, 1 \le j \le 2m$$

$$w_{f3}(x_i y_j) = (2n+3)m + (4n+6)2i + (2(-1)^j - 2)(n+1) - 2n - 4; \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le 2m$$

$$w_{f3}(x_i y_{j,k}) = (2n+3)m + (4n+6)2i + ((-1)^j - 2(n+1)) - 2k - 2n - 4; \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le 2m, \quad 1 \le k \le n,$$

$$w_{f3}(y_i y_{j+1}) = (2n+3)m + (4n+6)j; \quad 1 \le j \le 2m-1,$$

$$w_{f3}(y_i y_{j-1,1}) = (2n+3)m + (4n+6)(j-1) - 2; \quad 3 \le j \le 2m-1, \quad j = ganjil$$

$$w_{f3}(y_i y_{j+1,n}) = (2n+3)m + (4n+6)j + 2; \quad 2 \le j \le 2m-2, \quad j = genap$$

Teorema 2. Ada pelabelan total super ((4n+6)m+2, 1)-sisi antimagic pada graf *Crown String* $Cs_{m,n}$ jika $m, n \ge 1$ dan m genap.

Bukti. elabelan total super *(a,1)*-sisi antimagic pada graf $(Cs_{m,n})$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$f_4(y_i y_{j+1}) = (4n+6)m + (2n+3)j - 2; \quad 1 \le j \le m-1, \quad j = ganjil$$

$$f_4(y_i y_{j+1}) = (2n+3)j + 1; \quad m \le j \le 2m-1, \quad j = ganjil$$

$$f_4(y_i y_{j+1,n}) = (4n+6)m + (2n+3)j - 1; \quad 2 \le j \le m-2, \quad j = genap$$

$$f_4(y_i y_{j+1,n})=(2n+3)j+2;\quad m\le j\le 2m-2,\ j=genap$$

$$f_4(y_j y_{j,k})=(4n+6)m+(2n+3)j-\left(\frac{(-1)^j-1}{2}\right)n-k-3;\quad 1\le k\le n,\ 1\le j\le m$$

$$f_4(y_j y_{j,k})=(2n+3)j-\left(\frac{(-1)^j-1}{2}\right)n-k;\quad 1\le k\le n,\ m+1\le j\le 2m$$

$$f_4(x_i y_j)=(4n+6)(m+i)+((-1)^j-2)n+(-1)^j-5\quad 1\le i\le \frac{m}{2},\ 1\le j\le m$$

$$f_4(x_i y_j)=(4n+6)i+((-1)^j-2)(n+1);\quad \frac{m}{2}+1\le i\le m,\ m+1\le j\le 2m$$

$$f_4(x_i y_{j,k})=(4n+6)(m+i)+\left(\frac{(-1)^j-3}{2}\right)n+\frac{(-1)^j-9}{2}-k;\quad 1\le i\le \frac{m}{2},\ 1\le j\le m,\ 1\le k\le n$$

$$f_4(x_i y_{j,k})=(4n+6)i+\left(\frac{(-1)^j-3}{2}\right)(n+1)-k;\quad \frac{m}{2}+1\le i\le m,\ m+1\le j\le 2m,\ 1\le k\le n$$

$$f_4(y_i y_{j-1,1})=(4n+6)m+(2n+3)j-2n-6;\quad 3\le j\le m+1,\ j=ganjil$$

$$f_4(y_i y_{j-1,1})=(2n+3)j-2n-3;\quad m+3\le j\le 2m-2,\ j=ganjil$$

Jika W_{f_4} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total, berdasarkan pelabelan f_4 maka dapat d W_{f_4} iperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL da W_{f_1} n rumus label sisi f_4 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$w_{f4}(y_i y_{j+1})=(4n+6)(m+j)\pm 1;\quad 1\le j\le m-1,\ j=ganjil$$

$$w_{f4}(y_i y_{j+1})=(4n+6)j+2;\quad m\le j\le 2m-1,\ j=ganjil$$

$$w_{f4}(y_i y_{j+1,n})=(4n+6)(m+j)+1;\quad 2\le j\le m-2,\ j=genap$$

$$w_{f4}(y_i y_{j+1,n})=(4n+6)j+4;\quad m\le j\le 2m-2,\ j=genap$$

$$w_{f4}(y_j y_{j,k})=(4n+6)(m+j)+\left(\frac{(-1)^j-1}{2}\right)n-2k-3;\quad 1\le k\le n,\ 1\le j\le m$$

$$w_{f4}(y_j y_{j,k})=(4n+6)j-\left(\frac{(-1)^j-1}{2}\right)n-2k;\quad 1\le k\le n,\ m+1\le j\le 2m$$

$$w_{f4}(x_i y_j)=(4n+6)(m+2i)+(2(-1)^j-4)n+2(-1)^j-7;\quad 1\le i\le \frac{m}{2},\ 1\le j\le m$$

$$w_{f4}(x_i y_j)=(4n+6)2i+(2(-1)^j-4)(n+1);\quad \frac{m}{2}+1\le i\le m,\ m+1\le j\le 2m$$

$$1\le i\le \frac{m}{2},\ 1\le j\le m,\ 1\le k\le n$$

$$w_{f4}(x_i y_{j,k})=(4n+6)2i+\left(\frac{(-1)^j-1}{2}\right)(n+1)-2k;\quad \frac{m}{2}+1\le i\le m,\ m+1\le j\le 2m,\ 1\le k\le n$$

$$w_{f4}(y_i y_{j-1,1})=(4n+6)(m+j)-4n-9;\quad 3\le j\le m+1,\ j=ganjil$$

$$w_{f4}(y_i y_{j-1,1})=(4n+6)(m+j)-1;\quad m+3\le j\le 2m-2,\ j=ganjil$$

Dengan kata lain graf *Crown String* $(Cs_{m,n})$ mempunyai pelabelan total super ((4n+6)m+2, 1)-sisi antimagic.

Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan

Graf *Crown String* konektif $(Cs_{m,n})$ memiliki pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic untuk d=0,1,2. Hasil penelitiannya telah dibuktikan bahwa ada pelabelan titik (3,1)-sisi antimagic pada graf *Crown String* $(Cs_{m,n})$ jika $m,n \geq 1$. Ada pelabelan total super ((6n+9)m,0), dan ((2n+3)m+4,2)-sisi antimagic pada graf *Crown String* $(Cs_{m,n})$ jika $m,n \geq 1$. Serta ada pelabelan total super ((4n+6)m+2, 1)-sisi antimagic pada graf *Crown String* $(Cs_{m,n})$ dan m genap.

Saran

Dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran pembaca dapat melakukan penelitian pada pelabelan total super *(a,d)* -sisi antimagic pada konektif graf *Crown String* $(Cs_{m,n})$, dengan m ganjil untuk d=1.

Daftar Pustaka

[1] Chartrand, G. 2009. *Introdutory Graph Theory*. United Stated of America: Dover Publication inc.

[2] Dafik, dkk. 2009. *On Super (a,d)-Edge anti magic Total Labeling of Disconnected graphs*. *Jurnal discrete mathematics jilid 309* (2009): 4909-4915

[3] Dafik., Fajriatin,Alfin., dan Miladiyah,Kunti. 2012. *Super Antimagicness of a Well-defined Graph*. *Saintifika*. Vol. 14 No.1 (2012): 106-118.

[4] Gallian,Joseph A. 2011. *Dynamic Survey of Graph Labeling. The Electronic Journal of Combinatorics 18* (2011)

[5] Slamin. 2009. *Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.