Analisa Pelabelan Selimut *(a,d)-ℋ*-Anti Ajaib Super pada Graf Rantai (*The Analysis of Super (a,d)-ℋ-Antimagic Covering of Chain Graph*)

Dina Rizki Anggraini, Dafik, Susi Setiawani
Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember (UNEJ)
Jln. Kalimantan 37, Jember 68121
e-mail: d.dafik@gmail.com

Abstrak

Pelabelan graf merupakan suatu pemetaan satu satu atau onto (fungsi bijektif) yang memetakan himpunan dari elemen elemen graf (sisi dan titik) ke himpunan biangan bulat pofitif. Pelabean selimut (*a,d*) -ℋ anti ajaib super adalah pelabelan terhadap unsur titik dan sisi pada graf dengan bilangan asli {*1,2,3, . . . , p+q*} sedemikian hingga bobot selimut ℋ membentuk barisan aritmatika *{a,a+d,a+2d, . . . , a+(k-1)d}* dengan *a* adalah suku pertama, *d* adalah beda, dan *k* adalah jumlah selimutnya dan label terkecil ada pada titiknya. Graf Rantai adalah graf yang dinotasikan dengan K_4P_n. Graf Rantai berasal dari graf lintasan yang terdiri dari graf Lengkap. Graf Rantai merupakan shackle titik yang disimbolkan dengan *shack*(K_4,*v,n*), sehingga *shack*(K_4,*v,n*) memiliki arti sama dengan K_4P_n. Pada penelitian ini, akan dipelajari tentang pelabelan selimut (a,d)-ℋ-anti ajaib super pada graf Rantai dengan menggunakan aksioma deduktif dan metode pendektesian pola. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pelabelan selimut (a,d)-ℋ-anti ajaib super pada graf Rantai mempunyai batas atas d $\leq$ 48 dan mengasilkan teorema.

Kata Kunci: barisan aritmatika, beda, Graf Rantai, Pelabelan Selimut *(a,d)-ℋ*-Anti Ajaib Super.

Abstract

Labelling is untion to put population of elements graph (edge and vertex) to population of natural numbers. Super (a,d) -ℋ-antimagic covering is labelling about vertexs and edges on graph by natural numbers {1,2,3, . . . , p+q} such that wight cover ℋ are forming arithmetic squence {a,a+d,a+2d, . . . , a+(k-1)d}with a is first tribe, d is different, and k is number of covers and the smallest label there on verteks. Chains graph is graph denoted by K_4P_n*. Chains graph forming path graph which consistcomplete graph. Chains graphis vertexs shackle which denote shack(*K_4*,v,n), such that shack(*K_4*,v,n) same meaning with* K_4P_n *. On this research, will be learn about Super (a,d) -ℋ-antimagic covering on Chains graph useaxiom deductive and detection pattern method. This result showed that super (a,d) -ℋ-antimagic covering on Chains graph have upper bown d* $\leq$ *48 and produce as theorems.*

Keywords:*arithmetic squence, Chains graph, different, Super (a,d) -ℋ-antimagic covering*

Pendahuluan

Matematika merupakan ilmu hitung yang penting bagi kehidupan manusia. Teori graf adalah salah satu cabang dari ilmu matematika. Pelabelan graf melrupaka suatu topik dalam Teori Graf. Pelabelan suatu graf adalah pemetaan bijektif yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif. Terdapat ba-nyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan anti ajaib, dikenal juga pelabelan total *(a,d)* -titik anti ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total *(a, d)*-sisi anti ajaib, dan pelabelan total sisi ajaib super. Pada penelitian ini selimut graf yang digunakan adalah graf baru yang belum pernah diteliti yaitu graf Rantai yang dinotasikan dengan K_4P_n.

Definisi 1. Graf Rantai adalah graf yang dinotasikan dengan K_4P_n. Graf Rantai berasal dari graf lintasan yang terdiri dari graf Rantai. Graf Rantai merupakan shackle titik yang disimbolkan dengan *shack*(K_4*,v,n*), sehingga *shack*(K_4*,v,n*) memiliki arti sama dengan K_4P_n dimana

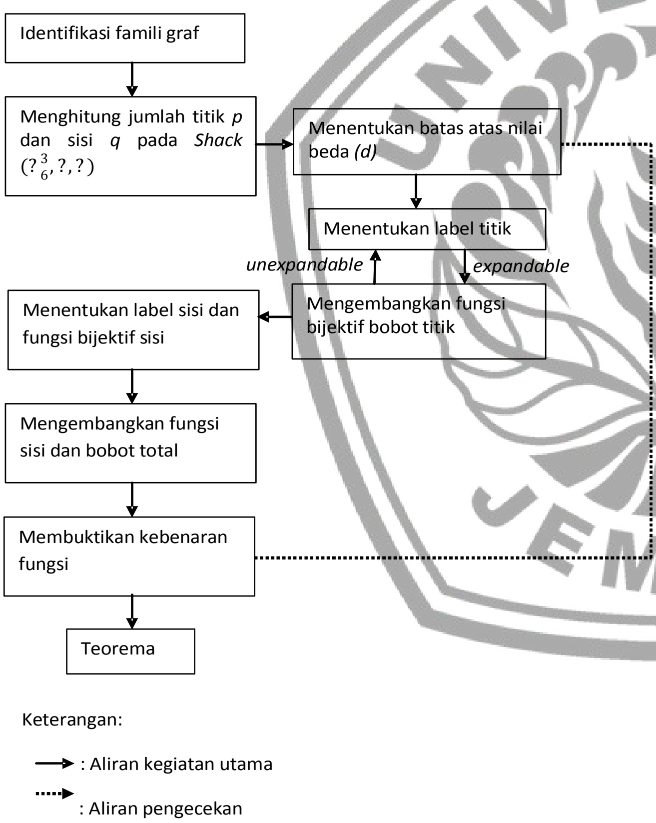
$V(K_4P_n)=\{x_i, y_j, z_i; 1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n+1\}$
$E(K_4P_n)=\{x_iz_i, x_iy_i, y_iy_{i+1}, x_iy_{i+1}, y_iz_i, z_iy_{i+1}; 1\leq i\leq n\}$

Penelitian mengenai pelabelan selimut (*a,d*) -ℋ-anti ajaib super telah dilakukan oleh Inayah pada tahun 2013. Menurut Inayah (2013:36), suatu selimut dari G adalah ℋ={$H_1, H_2, \dots, H_k$} keluarga subgraf dari G dengan sifat setiap sisi di G termuat pada sekurang- kurangnya satu graf H_i, untuk suatu $i\in\{1,2,...,k\}$. Pelabean selimut (a,d)- ℋ anti ajaib super adalah pelabelan terhadap unsur titik dan sisi pada graf dengan bilangan {*1,2,3,...,p+q*} sedemikian hingga bobot selimut ℋ membentuk barisan aritmatika *{a,a+d, a+2d,...,a+(k-1)d}* dengan *a* adalah suku pertama, *b* adalah beda, dan k adalah jumlah selimutnya. graf *G* dikatakan su-per apabila kemungkinan label terkecil ada pada titiknya.

Adapun manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini adalah untuk memberikan konstribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pelabelan graf dengan menunjukkan pelabelan selimut (*a,d*) -ℋ anti ajaib super pada graf Rantai. Untuk me-ngetahui keterkaitan proses menemukan pelabelan selimut (*a,d*) -ℋ-anti ajaib super dan keterampilan berpikir tingkat tinggi Penelitian ini dapat memberikan motivasi pada peneliti lain untuk melakukan penelitian tentang pelabelan selimut (*a,d*) -ℋ anti ajaib super pada jenis-jenis graf yang berbeda. Selain itu, hasil penelitian ini diharapkan dapat dijadikan pengembangan atau perluasan ilmu serta aplikasi dalam masalah pelabelan selimut (*a,d*) -ℋ anti ajaib super di program studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember.

Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deskriptif aksiomatik yaitu metode menurunkan aksioma atau teorema yang sudah ada, kemudian diterapkan dalam pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super pada graf Rantai dan kaitannya dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi. Adapun langkah-langkah penelitian yang tersaji pada diagram alur penelitian berikut:



Gambar 1. Rancangan Penelitian

Hasil Penelitian

Hasil dar penenilian ini adalah batas atas d pelabelan selimut (*a,d*) -ℋ anti ajaib super pada graf Rantai yaitu $d \leq 48$ serta 10 teorema *p*elabean selimut (*a,d*) - ℋ anti ajaib super pada graf Rantai yaitu :

1. Ada pelabelan selimut (18n+37,48)-K_4 anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk $n \geq 2$;
2. Ada pelabelan selimut (24n+31,36)-K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n \geq 2$.
3. Ada pelabelan selimut (54n+1,24)-K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n \geq 2$.
4. Ada pelabelan selimut (31n+24,22)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n \geq 2$.
5. Ada pelabelan selimut (33n+22,18)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n \geq 2$.
6. Ada pelabelan selimut (34n+21,16)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n \geq 2$.
7. Ada pelabelan selimut (35n+20,14)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n \geq 2$.
8. Ada pelabelan selimut (36n+19,12)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n \geq 2$.
9. Ada pelabelan selimut (37n+18,10)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n \geq 2$.
10. Ada pelabelan selimut (38n+17,8- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n \geq 2$.

Pembahasan

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan batas atas pelabelan selimut (*a,d*)-ℋ-nanti ajaib super tunggal dan untuk menentukan pelabelan selimut *(a,d)-ℋ* anti ajaib super pada Rantai K_4P_n tunggal. Adapun batas atas pelabe-lan selimut (a,d)-ℋ-anti ajaib super dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 1, (dalam Dafik, 2014) sebagai berikut:

Lemma 1. Jika sebuah graf *G(V,E)* adalah pelabelan selimut *(a,d)-ℋ* anti ajaib super, maka

$$d \leq \frac{(p_G - p_H)\, p_H + (q_G - q_H) q_H}{s-1}$$

dimana $s = |H_i|$, $H \subseteq G$ yang isomorfik dengan ℋ, $p_G = |V(G)|, q_G = |E(G)|, p_H = |V(H)|, q_H = |E(H)|$.

Hasil penelitian untuk pelabelan selimut (a,d)-ℋ-anti ajaib super pada sgraf Rantai K_4P_n, yakni:

Batas Atas *d*. Diketahui jumlah titik $p_G = 3n+1$ dan jumlah sisi $q_G = 6n$, jumlah titik selimut adalah $p_H = 4$ serta jumlah sisi selimut adalah $q_H = 6$ dengan jumlah selimut n . Dengan demikian batas atas nilai beda *d* tersebut adalah:

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{(p_G - p_H)\, p_H + (q_G - q_H) q_H}{s-1} \\ &\leq \frac{(3n+1-4)4 + (6n-6)6}{n-1} \\ &\leq \frac{(3n-3)6 + (6n-6)6}{n-1} \\ &\leq \frac{48n-48}{n-1} \\ &\leq \frac{48(n-1)}{n-1} \\ &\leq 48 \end{aligned}$$

Pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super selalu menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai $d \geq 0$ dan *d* adalah bilangan bulat, sehingga $d \in \{0, 1, 2, \ldots, 48\}$. Selanjutnya penentuan fungsi bijektif pelabelan selimut *(a,d)-ℋ*-anti ajaib super akan disesuaikan dengan nilai *d* yang telah ditetapkan. Adapun teorema-teorema yang telah ditemukan sebagai berikut:

Teorema 1. Ada pelabelan selimut (18n+37,48)-K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 dengan label sebagai berikut:

$f_1(y_j)=3j-2$, untuk $1 \leq j \leq n+1$

$f_1(y_j)=3i-1$, untuk $1 \leq i \leq n$

$f_1(z_i)=3i$, untuk $1 \leq i \leq n$

Dapat dilihat bahwa f_1 adalah fungsi bijektif yang memetakan K_4P_n ke himpunan bilangan bulat {1,2, . . . , 3n+1}. Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot titik selimut dari pelabelan selimut total pada dimana bobot tik K_4P_n titik selimut tersebut diperoleh dari penjumlahan 4 label titik dari K_4 yang menjadi selimut pada, maka fungsi K_4P_n bijektif w_{f_1} dapat ditentukan sebagai berikut:

$$w_{f_1}=f_1(y_j)+f_1(x_i)+f_1(z_i)$$
$$=(3j-2)+(3i-1)+3i$$
$$=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$$

Labeli sisi graf Rantai K_4P_n dengan fungsi f_1 yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$f_1(x_i y_{i+1})=3n+6i-2$, untuk $1 \leq i \leq n$

$f_1(z_i y_{i+1})=3n+6i-1$, untuk $1 \leq i \leq n$

$f_1(x_i y_i)=3n+6i-4$, untuk $1 \leq i \leq n$

$f_1(y_i z_i)=3n+6i-3$, untuk $1 \leq i \leq n$

$f_1(y_i y_{i+1})=3n+6i$, untuk $1 \leq i \leq n$

$f_1(x_i z_i)=3n+6i$, untuk $1 \leq i \leq n$

Jika W_{f_1} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bo-bot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_1} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_1} dan rumus label sisi f_1 sehingga dapat dituliskan seba-gai berikut:

$$W_{f_1}=w_{f_1}+f_1(x_i y_{i+1})+f_1(z_i y_{i+1})+f_1(x_i y_i)+f_1(y_i z_i)$$
$$+f_1(y_i y_{i+1})+f_1(x_i z_i)$$
$$W_{f_1}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)+3n+6i-2+3n+6i-1+3n$$
$$+6i-4+3n+6i-3+3n+6i+3n+6i+1$$
$$W_{f_1}=18n+42i-10+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk i, j pada interval $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n+1$ didapat himpunan $W_{f1}=\{18n+37, 18n+85, \ldots, 8n-23\}$ karena $U_n=a+(n-1)b= 18n+37+(n-1)48=66n-11$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut (18n+37,48)-K_4 anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk n $\geq$ 2.

Teorema 2. Ada pelabelan selimut (24n+31,36)-K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 sehingga $f_2(y_j)=f_1(y_j)$, $f_2(x_i)=f_1(x_i)$, dan $f_2(z_i)=f_1(z_i)$ maka $w_{f_2}=w_{f_1}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$. Labeli sisi graf Leng-kap Lintasan K_4P_n dengan fungsi f_2 yang dapat ditulis-kan sebagai berikut:

$f_2(x_i y_{i+1})=3n+6i-3$, untuk $1 \leq i \leq n$

$f_2(z_i y_{i+1})=3n+6i-1$, untuk $1 \leq i \leq n$

$f_2(x_i y_i)=3n+6i-4$, untuk $1 \leq i \leq n$

$f_2(y_i z_i)=3n+6i-2$, untuk $1 \leq i \leq n$

$f_2(y_i y_{i+1})=3n+6i$, untuk $1 \leq i \leq n$

$f_2(x_i z_i)=3n+6i+7$, untuk $1 \leq i \leq n$

Jika W_{f_2} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bo-bot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_2} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_2} dan rumus label sisi f_2 dapat dituliskan sebagai berikut

$$W_{f_2}=w_{f_2}+f_2(x_i y_{i+1})+f_2(z_i y_{i+1})+f_2(x_i y_i)+f_2(y_i z_i)$$
$$+f_2(y_i y_{i+1})+f_2(x_i z_i)$$
$$W_{f_2}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)+3n+6i-3+3n+6i-1+3n$$
$$+6i-4+3n+6i-2+3n+6i+3n+6i+7$$
$$W_{f_2}=24n+30i-4+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk *i, j* pada interval $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n+1$ didapat himpunan $W_{f2}=\{24n+31, 24n+67, \ldots, 67n-5\}$ karena $U_n=a+(n-1)b= 24n+31+(n-1)36=67n-5$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut (24n+31,36)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk n $\geq$ 2.

Teorema 3. Ada pelabelan selimut (54n+1,24)-K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 sehingga $f_3(y_j)=f_1(y_j)$, $f_3(x_i)=f_1(x_i)$, dan $f_3(z_i)=f_1(z_i)$ maka $w_{f_3}=w_{f_1}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$. Labeli sisi graf Leng-kap Lintasan K_4P_n dengan f_3 fungsi yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$f_3(x_i y_{i+1})=9n-6i+2$, untuk $1 \leq i \leq n$

$f_3(z_i y_{i+1})=9n-6i+3$, untuk $1 \leq i \leq n$

$f_3(x_i y_i)=9n-6i+4$, untuk $1 \leq i \leq n$

$f_3(y_i z_i)=9n-6i+5$, untuk $1 \leq i \leq n$

$f_3(y_i y_{i+1})=9n-6i+6$, untuk $1 \leq i \leq n$

$f_3(x_i z_i)=9n-6i+7$, untuk $1 \leq i \leq n$

Jika W_{f_3} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bo-bot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_3} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_3} dan rumus label sisi f_3 dapat dituliskan sebagai berikut

$$W_{f_3}=w_{f_3}+f_3(x_i y_{i+1})+f_3(z_i y_{i+1})+f_3(x_i y_i)+f_3(y_i z_i)$$
$$+f_3(y_i y_{i+1})+f_3(x_i z_i)$$
$$W_{f_3}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)+9n-6i+2+9n-6i+3+9n$$
$$+9n-6i+4+6n-6i+5+6n-6i+6+6n-6i+7$$
$$W_{f_3}=54n-30i+26+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk *i, j* pada interval $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n+1$ didapat himpunan $W_{f3}=\{54n+1, 54n+25,, \ldots, 78n-23\}$ karena $U_n=a+(n-1)b= 54n+1+(n-1)24=78n-23$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut (54n+1,24)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk n $\geq$ 2.

Teorema 4. Ada pelabelan selimut (31n+24,22)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n \geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 sehingga $f_4(y_j)=f_1(y_j)$, $f_4(x_i)=f_1(x_i)$, dan $f_4(z_i)=f_1(z_i)$ maka $w_{f_4}=w_{f_1}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$. Labeli sisi graf Leng-kap Lintasan K_4P_n dengan f_4 fungsi yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_4(x_i y_{i+1})=3n+2i+1, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_4(z_i y_{i+1})=6n+2i+1, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_4(x_i y_i)=3n+2i, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_4(y_i z_i)=6n+2i, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_4(y_i y_{i+1})=5n+i+1, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_4(x_i z_i)=8n+i+1, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$

Jika W_{f_4} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_3} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_3} dan ru-mus label sisi f_4 dapat dituliskan sebagai berikut

$$W_{f_4}=w_{f_4}+f_4(x_i y_{i+1})+f_4(z_i y_{i+1})+f_4(x_i y_i)+f_4(y_i z_i)$$
$$+f_4(y_i y_{i+1})+f_4(x_i z_i)$$
$$W_{f_4}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)+3n+2i+1+6n+2i+1+3n$$
$$+2i+6n+2i+5n+i+1+8n+i+1$$
$$W_{f_4}=31n+16i+3+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk *i, j* pada interval $1 \le i \le n$ dan $1 \le j\le n+1$ didapat himpunan $W_{f4}=\{31n+24,31n+46, \dots, 53n+2\}$ karena $U_{n}=a+(n-1)b= 31n+24+(n-1)22=53n+2$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut (34n+21,16)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk n $\ge$ 2.

Teorema 5. Ada pelabelan selimut (33n+22,18)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n\ge 2$.

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 sehingga $f_5(y_j)=f_1(y_j)$, $f_5(x_i)=f_1(x_i)$, dan $f_5(z_i)=f_1(z_i)$ maka $w_{f_5}=w_{f_1}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$. Labeli sisi graf Leng-kap Lintasan K_4P_n dengan f_5 fungsi yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_5(x_i y_{i+1})=3n+2i+1, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_5(z_i y_{i+1})=6n+2i+1, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_5(x_i y_i)=3n+2i, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_5(y_i z_i)=6n+2i, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_5(y_i y_{i+1})=6n-i+2, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_5(x_i z_i)=9n-i+2, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$

Jika W_{f_4} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bo-bot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_3} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_3} dan rumus label sisi f_5 dapat dituliskan sebagai berikut

$$W_{f_5}=w_{f_5}+f_5(x_i y_{i+1})+f_5(z_i y_{i+1})+f_5(x_i y_i)+f_5(y_i z_i)$$
$$+f_5(y_i y_{i+1})+f_5(x_i z_i)$$
$$W_{f_5}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)+3n+2i+1+6n+2i+1+3n$$
$$+2i+6n+2i+6n-i+2+9n-i+2$$
$$W_{f_5}=33n+12i+5+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk *i, j* pada interval $1 \le i \le n$ dan $1 \le j\le n+1$ didapat himpunan $W_{f5}=\{33n+22,33n+40, \dots, 51n+4\}$ karena $U_{n}=a+(n-1)b= 33n+24+(n-1)18=51n+4$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut (33n+22,18)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk n $\ge$ 2.

Teorema 6. Ada pelabelan selimut (34n+21,16)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n\ge 2$.

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 sehingga $f_6(y_j)=f_1(y_j)$, $f_6(x_i)=f_1(x_i)$, dan $f_6(z_i)=f_1(z_i)$ maka $w_{f_6}=w_{f_1}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$. Labeli sisi graf Leng-kap Lintasan K_4P_n dengan f_6 fungsi yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_6(x_i y_{i+1})=5n+i+1, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_6(z_i y_{i+1})=8n-i+2, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_6(x_i y_i)=6n+i+1, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_6(y_i z_i)=8n+i+1, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_6(y_i y_{i+1})=3n+i+1, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_6(x_i z_i)=3n+i+1, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$

Jika W_{f_6} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_6} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_6} dan rumus label sisi f_6 dapat dituliskan sebagai berikut

$$W_{f_6}=w_{f_6}+f_6(x_i y_{i+1})+f_6(z_i y_{i+1})+f_6(x_i y_i)+f_6(y_i z_i)$$
$$+f_6(y_i y_{i+1})+f_6(x_i z_i)$$
$$W_{f_6}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)+5n+i+1+8n-i+2+6n$$
$$+i+1+8n+i+1+3n+i+1+3n+i+1$$
$$W_{f_6}=34n+10i+6+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk *i, j* pada interval $1 \le i \le n$ dan $1 \le j\le n+1$ didapat himpunan $W_{f6}=\{34n+21,34n+37, \dots, 50n+5\}$ karena $U_{n}=a+(n-1)b= 34n+21+(n-1)16=50n+5$. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut (34n+21,18)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk n $\ge$ 2.

Teorema 7. Ada pelabelan selimut (35n+20,14)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n\ge 2$.

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 sehingga $f_7(y_j)=f_1(y_j)$, $f_7(x_i)=f_1(x_i)$, dan $f_7(z_i)=f_1(z_i)$ maka $w_{f_7}=w_{f_1}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$. Labeli sisi graf Leng-kap Lintasan K_4P_n dengan f_7 fungsi yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_7(x_i y_{i+1})=5n-2i+2,, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_7(z_i y_{i+1})=6n+2i+1, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_7(x_i y_i)=5n-2i+3, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_7(y_i z_i)=6n+2i, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_7(y_i y_{i+1})=5n+i+1, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$
$$f_7(x_i z_i)=8n+i+1, \quad \text{untuk} \quad 1\le i\le n$$

Jika W_{f_7} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_7} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_7} dan rumus label sisi f_7 dapat dituliskan sebagai berikut

$$W_{f_7}=w_{f_7}+f_7(x_i y_{i+1})+f_7(z_i y_{i+1})+f_7(x_i y_i)+f_7(y_i z_i)+f_7(y_i y_{i+1})+f_7(x_i z_i)$$

$$W_{f_7}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)+5n-2i+2+6n+2i+1+5n\pm 2i+3+6n+2i+5n+i+1+8n+i+1$$

$$W_{f_7}=35n+8i+7\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk *i, j* pada interval $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n+1$ didapat himpunan *W_{f7}={35n+23, 35n+44, . . . , 49n+6}* karena *U_n=a+(n-1)b= 35n+23,+(n-1)14=49n+6*. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut (35n+20,14)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk n $\geq$ 2.

Teorema 8. Ada pelabelan selimut (36n+19,12)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n\geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 sehingga $f_8(y_j)=f_8(y_j)$, $f_8(x_i)=f8x_i)$, dan $f_8(z_i)=f_1(z_i)$ maka $w_{f_8}=w_{f_1}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$. Labeli sisi graf Leng-kap Lintasan K_4P_n dengan f_8 fungsi yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_8(x_i y_{i+1})=5n-2i+3,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$
$$f_8(z_i y_{i+1})=5n-2i+2,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$
$$f_8(x_i y_i)=5n-2i+4,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$
$$f_8(y_i z_i)=5n-2i+1,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$
$$f_8(y_i y_{i+1})=7n+i+1,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$
$$f_8(x_i z_i)=9n-i+2,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$

Jika W_{f_8} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_8} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_8} dan rumus label sisi f_8 dapat dituliskan sebagai berikut

$$W_{f_8}=w_{f_8}+f_8(x_i y_{i+1})+f_8(z_i y_{i+1})+f_8(x_i y_i)+f_8(y_i z_i)+f_8(y_i y_{i+1})+f_8(x_i z_i)$$

$$W_{f_8}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)+5n-2i+3+5n-2i+2+5n-2i+4+5n-2i+1+7n+i+1+9n-i+2$$

$$W_{f_8}=36n+2i+12\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk *i, j* pada interval $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n+1$ didapat himpunan *W_{f8}={36n+19,36n+31, . . . ,48n+7}* karena *U_n=a+(n-1)b= 36n+19,+(n-1)14=49n+6*. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut (35n+20,14)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk n $\geq$ 2.

Teorema 9. Ada pelabelan selimut (37n+18,10)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n\geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 sehingga $f_9(y_j)=f_1(y_j)$, $f_9(x_i)=f_1(x_i)$, dan $f_9(z_i)=f_1(z_i)$ maka $w_{f_9}=w_{f_1}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$. Labeli sisi graf Leng-kap Lintasan K_4P_n dengan f_9 fungsi yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_9(x_i y_{i+1})=7n-i+2,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$
$$f_9(z_i y_{i+1})=7n+i+1,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$
$$f_9(x_i y_i)=6n-i+2,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$
$$f_9(y_i z_i)=8n+i+1,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$
$$f_9(y_i y_{i+1})=4n-i+2,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$
$$f_9(x_i z_i)=5n-i+2,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$

Jika W_{f_9} didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka W_{f_9} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut w_{f_9} dan rumus label sisi f_8 dapat dituliskan sebagai berikut

$$W_{f_9}=w_{f_9}+f_9(x_i y_{i+1})+f_9(z_i y_{i+1})+f_9(x_i y_i)+f_9(y_i z_i)+f_9(y_i y_{i+1})+f_9(x_i z_i)$$

$$W_{f_9}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)+7n+i+16n-i+2+8n+i+1+4n-i+2+5n-i+2$$

$$W_{f_9}=37n+4i+9\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk *i, j* pada interval $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n+1$ didapat himpunan *W_{f9}={37n+18,37n+28, . . . ,47n+8}* karena *U_n=a+(n-1)b= 37n+18+(n-1)10=47n+8*. Sehingga terbukti ada pelabelan selimut (37n+18,10)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk n $\geq$ 2.

Teorema 10. Ada pelabelan selimut (38n+17,8)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai untuk $n\geq 2$.

Bukti. Labeli titik graf Rantai K_4P_n dengan fungsi bijektif f_1 sehingga $f_{10}(y_j)=f_1(y_j)$, $f_{10}(x_i)=f_1(x_i)$, dan $f_{10}(z_i)=f_1(z_i)$ maka $w_{f_{10}}=w_{f_1}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$. Labeli sisi graf Leng-kap Lintasan K_4P_n dengan f_9 fungsi yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_{10}(x_i y_{i+1})=5n-i+2,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$
$$f_{10}(z_i y_{i+1})=7n-i+2,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$
$$f_{10}(x_i y_i)=4n-i+2,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$
$$f_{10}(y_i z_i)=6n-i+2,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$
$$f_{10}(y_i y_{i+1})=8n-i+2,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$
$$f_{10}(x_i z_i)=8n+i+1,\quad \text{untuk}\quad 1\leq i\leq n$$

Jika $W_{f_{10}}$ didefinisikan sebagai bobot total selimut pada graf Rantai berdasarkan penjumlahan bobot titik selimut dengan label sisinya maka $W_{f_{10}}$ dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot selimut $w_{f_{10}}$ dan rumus label sisi f_8 dapat dituliskan sebagai berikut

$$W_{f_{10}}=w_{f_{10}}+f_{10}(x_i y_{i+1})+f_{10}(z_i y_{i+1})+f_{10}(x_i y_i)+f_{10}(y_i z_i)+f_{10}(y_i y_{i+1})+f_{10}(x_i z_i)$$

$$W_{f_{10}}=6i-1+\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)+5n-i+27n-i+2+4n-i+2\ 6n-i+2+8n-i+2+8n+i+1$$

$$W_{f_{10}}=38n+2i+10\cup_{j=1}^{i+1}(3j-2)$$

Berdasarkan bobot selimut total dapat diuraikan, untuk *i, j* pada interval $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n+1$ didapat himpunan *W_{f10}={38n+17,38n+25,. . . ,46n+9}* karena *U_n=a+(n-1)b= 38n+17+(n-1)8=46n+9* . Sehingga terbukti ada pelabelan selimut (38n+17,8)- K_4 anti ajaib super pada graf Rantai K_4P_n untuk n $\geq$ 2.

Kesimpulan dan Saran

Pelabelan Selimut *(a,d)-$\mathcal{H}$* Anti Ajaib Super pada Graf Rantai memiliki batas atas $d\leq 48$. Graf Rantai konektif memiliki pelabelan selimut (a,d)-K_4 anti ajaib super untuk d={0,1,2, . . . , 48}. Hasil Penelitian ini. Hasil penelitian ini dibuktikan pada teorema bahwa Graf Rantai K_4P_n, terdapat fungsi bijektif pelabelan selimut yaitu (18n+37,48), (24n+31,36), (54n+1,24), (31n+24,22), (33n+22,18), (34n+21,16), (35n+20,14), (36n+19,12), (37n+18,10), (38n+17,8). Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan selimut (*a,d*) -ℋ anti ajaib super pada graf Rantai karena pelabelan *d* yang di temukan hanya d genap saja serta mengacu pada hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat melakukan penelitian pada pelabelan selimut *(a,d)*-K_4 anti ajaib super pada graf Rantai dengan $n \geq 2$ untuk $d \leq 48$ selain d={48, 36, 24, 22, 18, 16, 14, 12, 10, 8} dan meneliti pelabelan selimut (*a,d*) -ℋ anti ajaib super pada graf graf yang lain.

Ucapan Terima Kasih

Paper disusun untuk memenuhi syarat memeperoleh gelar sarjana (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Jember. Penulis DRA mengucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing yang telah membantu menyekesaikan tugas akhir ini.

Daftar Pustaka

[1] Dafik, 2014.“*Batas Atas d dari Sebuah Graf yang Memiliki Super* (*a, d*) *- H- Antimagic Covering*”, Working Paper, FKIP UNEJ.

[2] Inayah, N., Simanjuntak R., dan Salman. 2013. Super (*a, d*)-*H*-antimagic total labelings for shackles of a connected graph H. *Australasian Journal of Combinatorics*. Vol. 57: 127-138.

[3] Simanjuntak,R.,Salman, A. 2010. *Super* (*a; d*)*¡H Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph H*. Australian Journal of Combinatorics.

[4] Slamin. 2009. *Pendekatan Teori Graf.* Jember: Universitas Jember.