



**PELABELAN TOTAL SUPER  $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC PADA  
GRAF TANGGA PERMATA**

**SKRIPSI**

Oleh

**Laelatus Sya'diyah**

**NIM 070210101096**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2011**



**PELABELAN TOTAL SUPER  $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC PADA  
GRAF TANGGA PERMATA**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1)  
dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

**Laelatus Sya'diyah**  
**NIM 070210101096**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN**  
**UNIVERSITAS JEMBER**  
**2011**

## PERSEMBAHAN

*Segala puji bagi Allah, Tuhan yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat dan salam semoga terlimpah kepada makhluk ciptaan-Mu yang paling mulia, Nabi Muhammad S.A.W. Kupersembahkan secuil kebahagiaan penggalan syair dalam setiap detik perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:*

- 1. Orang tuaku tercinta dan terkasih : Ayahanda Esbu (Alm.) dan Ibunda tercinta Sittiyani, Ayahanda Abdur Razak dan Ibunda Fatimah, yang senantiasa mengalirkan rasa kasih sayang, cinta dan do'a yang tiada henti, dalam penulisan skripsi ini;*
- 2. Saudara-saudaraku : Dek Rofiq, Dek Amel, Dek Elen, Dek Bilqis, Dek Dini, Dek Ufi, Kak Nur Fawaid, Kak Ridwan, Mas Andi, Mbik Titik, Mbik Titin dan Mbik Ida, terima kasih atas canda tawa, teguran, dan semangat-semangatnya, serta untuk segala doa-doanya.;*
- 3. Bapak Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D dan Bapak Drs. Antonius C.P, M.App.Sc selaku pembimbing skripsi yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan skripsiku;*
- 4. Para guru dan dosen, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;*
- 5. Bimbinku tersayang, Moh. Agus Susanto, A.Md yang telah memberikan dukungan positif bagiku dalam setiap hal yang akan dan telah aku lakukan dan semangat dalam penulisan skripsi ini;*
- 6. Sahabat-sahabat terkonyolku : Wewek Ira, Cuy Alfin, Cuy Diana, Ratna Wonderland, Ndul Nila, Mbok Dhe Anggi, Pak Dhe Fajar, Berrt Irfan, Mbah Puguh, Mbah Misbah, Biksu Hasan, Beny SEP, dan Om Agunk, terima kasih atas kebersamaan, perjuangan, canda tawa, ide-ide gila, bantuan, semangat dan kebersamaan kita setiap hari adalah kenangan yang termanis;*

7. *Teman seperjuanganku : Alfin, Ira, Yuni, Fitriana E.C., Kunti, Devi, Laras dan pecinta graf lainnya yang telah membagi ilmu dan pengalaman berharga;*
8. *Sobat-sobat tergilaku Warga Negara Bakti : Alpin (Flat), Ira (Bulbul), dan Kiekie (Mocin) yang telah meluangkan waktu selama kurang lebih empat tahun bersama baik dalam suka dan duka masa-masa perkuliahan, khayalan-khayalan kita kadang juga menjadi inspirasi buatku;*
9. *Kakak-kakak terbaikku FKIP Matematika : Mb Riris (Pentol), Mb Ony (Ondel), Mb Yiyin (Mami), Mb Dini Kerisa, Mb Yeni, Mb Riza, Mas Birul dan semuanya, terima kasih untuk semangat, dukungan, bimbingan, dan nasehatnya selama ini;*
10. *Warga Matematika Reguler dan Non Reguler '07 yang berjuang dalam 4 tahun kebersamaan;*
11. *Teman-teman PPL di SMADA Bondowoso : Aprilia, Listiana, Ayu, Riska, Selvi, Mb Diah, Ummi, Farid dan Jadnika, terima kasih untuk kebersamaan, kekompakan, canda tawa, nasehat dan telah membagi pengalaman berharga;*
12. *Murid-muridku tersayang : X.3 (Nightmare), X.6 (Arsenolite.com), XI.IPA 1 (Ksatria Muda) dan XI.IPA 5 (Hotel Palm), terimakasih untuk setiap tingkah konyol kalian, setiap kejutan, perhatian, canda tawa, hangatnya kebersamaan dan kenangan termanis. Terima kasih uda menjadi salah satu inspirasi dan buat Miss Ella tersenyum;*
13. *Teman-temanku di kosan "Ibu Mamik" dan kosan "Pak Rais" yang membuatku mengerti akan asam manis persahabatan, jagalah selalu kekompakan kosan kita;*
14. *Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.*

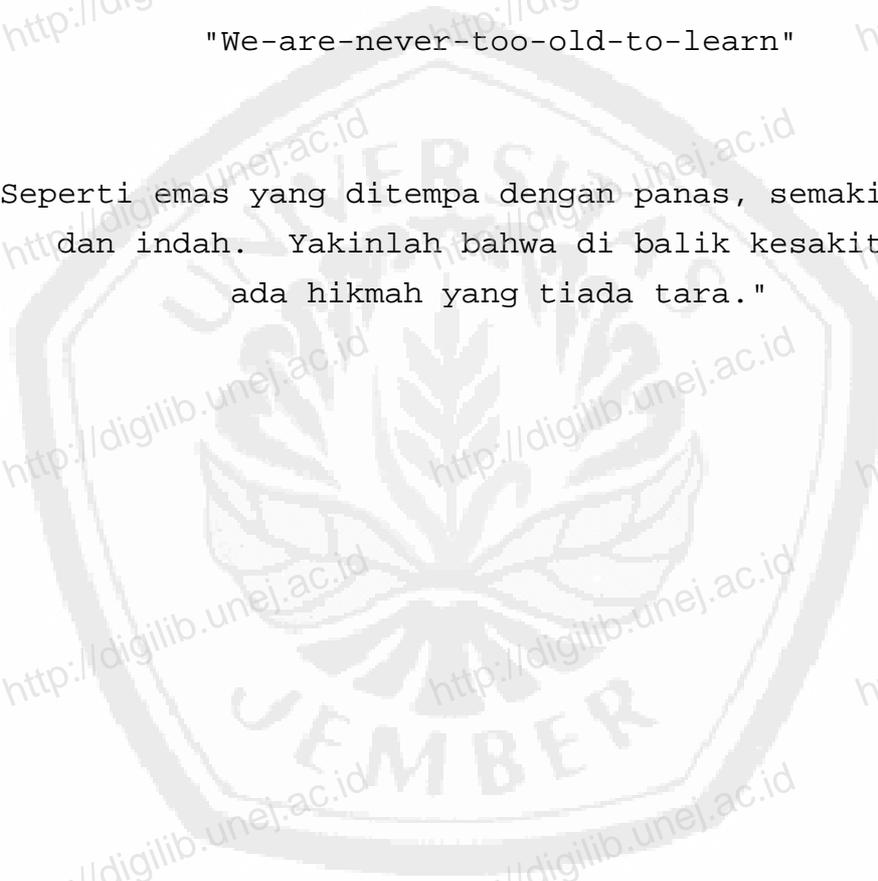
## MOTO

"Pahlawan bukanlah orang yang berani menetakkan pedangnya ke pundak lawan, tetapi pahlawan sebenarnya ialah orang yang sanggup menguasai dirinya dikala ia marah.

(Nabi Muhammad SAW)"

"We-are-never-too-old-to-learn"

"Seperti emas yang ditempa dengan panas, semakin murni dan indah. Yakinlah bahwa di balik kesakitan, ada hikmah yang tiada tara."



## PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Laelatus Sya'diyah

NIM : 070210101096

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: "PELABELAN TOTAL SUPER  $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC PADA GRAF TANGGA PERMATA" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 28 Juni 2011

Yang menyatakan,

Laelatus Sya'diyah

NIM. 070210101096

**PERSETUJUAN**

**PELABELAN TOTAL SUPER  $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC PADA  
GRAF TANGGA PERMATA**

**SKRIPSI**

diajukan guna memenuhi syarat untuk menyelesaikan pendidikan Program Sarjana Strata Satu Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Nama Mahasiswa : Laelatus Sya'diyah  
NIM : 070210101096  
Jurusan : Pendidikan MIPA  
Program Studi : Pendidikan Matematika  
Angkatan Tahun : 2007  
Daerah Asal : Situbondo  
Tempat, Tanggal Lahir : Situbondo, 28 Juni 1990

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D  
NIP. 19680802 199303 1 004

Drs. Antonius C.P., M.App.Sc  
NIP. 19690928 199302 1 001

## PENGESAHAN

Skripsi berjudul "PELABELAN TOTAL SUPER ( $a, d$ )-SISI ANTIMAGIC PADA GRAF TANGGA PERMATA" telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan pada:

hari : Kamis

tanggal : 14 Juli 2011

tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua,

Sekretaris,

Dr. Susanto, M.Pd

NIP. 19630616 198802 1 001

Drs. Antonius C.P., M.App.Sc

NIP. 19690928 199302 1 001

Anggota I,

Anggota II,

Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D.

NIP. 19680802 199303 1 004

Drs. Slamın, M.Comp.Sc., Ph.D

NIP. 19670420 199201 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Jember,

Drs. H. Imam Muchtar, S.H., M.Hum

NIP. 19540712 198003 1 005

## RINGKASAN

**Pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata;** Laelatus Sya'diyah, 070210101096; 2011: 103 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Matematika merupakan alat bantu kehidupan dan pelayan bagi ilmu-ilmu yang lain, seperti fisika, kimia, biologi, astronomi, teknik, ekonomi, farmasi maupun matematika sendiri. Matematika terdiri dari beberapa cabang ilmu, salah satunya terkait dengan sains komputer yang cukup terkenal yaitu Teori Graf. Salah satu jenis tipe pelabelan graf adalah pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic atau super edge antimagic total labeling (SEATL). Pada graf konektif (tunggal) telah banyak ditemukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic sedangkan pada graf diskonektif (gabungan saling lepas suatu graf), hanya sedikit famili graf yang diketahui mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic. Permasalahannya adalah hal ini melibatkan angka pelabelan lebih banyak pada setiap komponen graf konektif terpisahnya dan tidak ada jaminan jika graf  $G$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic kemudian pada gabungan graf diskonektifnya mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic. Dalam penelitian ini akan diinvestigasi pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata baik yang konektif maupun diskonektif.

Graf tangga permata adalah salah satu family dari graf tangga. Graf tangga permata adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan  $Dl_n$  sedangkan gabungan graf tangga permata dinotasikan dengan  $mDl_n$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ . Dalam hal ini,  $m$  merupakan banyaknya graf tangga permata yang digabung yaitu minimal 2 graf tangga permata sedangkan  $n$  merupakan ketentuan dari definisi graf tangga permata. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui apakah graf tangga permata memiliki pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf  $Dl_n$  dan  $mDl_n$ . Hasil penelitian ini berupa lemma dan teorema baru mengenai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata  $Dl_n$  dan  $mDl_n$ . Teorema yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

1. **Lemma 4.5.1** *Ada pelabelan titik  $(3, 1)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .*
2. **Teorema 4.5.1** *Ada pelabelan total super  $(12n, 0)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .*
3. **Teorema 4.5.2** *Ada pelabelan total super  $(4n + 4, 2)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .*
4. **Teorema 4.5.3** *Suatu graf  $Dl_n$  mempunyai pelabelan total super  $(8n + 2, 1)$ -sisi antimagic untuk  $n \geq 2$ .*
5. **Lemma 4.6.1** *Ada pelabelan titik  $(\frac{3m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf tangga permata  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .*
6. **Teorema 4.6.1** *Ada pelabelan total super  $(\frac{(8n-1)3m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada gabungan graf tangga permata  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .*
7. **Teorema 4.6.2** *Ada pelabelan total super  $(\frac{(8n+3)m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf tangga permata  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .*
8. **Teorema 4.6.3** *Ada pelabelan total super  $(8nm+2, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf tangga permata  $mDl_n$  jika  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ .*

Hasil penelitian diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pelabelan graf dan bisa digunakan sebagai acuan oleh peneliti lain untuk meneliti pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf-graf khusus yang lain.

## PRAKATA

Segala puji syukur ke hadirat Allah SWT. atas segala berkah dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Graf Tangga Permata " ini dengan baik.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Dosen Pembimbing I dan Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
5. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
6. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat, amin yaa robbal alamin.

Jember, Juli 2011

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	<b>i</b>
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	<b>ii</b>
<b>HALAMAN MOTO</b>	<b>iv</b>
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b>	<b>v</b>
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	<b>vi</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	<b>vii</b>
<b>RINGKASAN</b>	<b>viii</b>
<b>PRAKATA</b>	<b>x</b>
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xvi</b>
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>xvii</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b>	<b>xviii</b>
<b>DAFTAR LAMBANG</b>	<b>xix</b>
<b>1 PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	4
1.3 Batasan Masalah . . . . .	4
1.4 Tujuan Penelitian . . . . .	5

DAFTAR ISI

xii

1.5	Manfaat Penelitian . . . . .	5
2	<b>TINJAUAN PUSTAKA</b>	<b>6</b>
2.1	Aplikasi Graf . . . . .	6
2.2	Terminologi Dasar Graf . . . . .	14
2.3	Jenis-jenis Graf . . . . .	22
2.4	Graf Khusus . . . . .	25
2.5	Graf tangga permata . . . . .	29
2.6	Pelabelan Graf . . . . .	29
2.6.1	Fungsi Bijektif dan Barisan Aritmatika . . . . .	30
2.6.2	Aksioma, Lemma, Teorema, Corollary, Konjektur dan Open Problem . . . . .	32
2.6.3	Definisi Pelabelan Graf . . . . .	33
2.6.4	Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi antimagic . . . . .	34
2.6.5	Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata . . . . .	36
2.7	Hasil-Hasil Pelabelan Total Super $(a, d)$ -Sisi Antimagic pada Graf Diskonektif . . . . .	38
3	<b>METODE PENELITIAN</b>	<b>41</b>
3.1	Metode Penelitian . . . . .	41
3.2	Definisi Operasional . . . . .	41
3.2.1	Pelabelan Total Super $(a, d)$ -Sisi Antimagic . . . . .	42
3.2.2	Graf Tangga Permata $(Dl_n)$ . . . . .	42
3.2.3	Gabungan Saling Lepas Graf Tangga Permata $(mDl_n)$ . . . . .	42
3.3	Teknik Penelitian . . . . .	43

DAFTAR ISI

xiii

<b>4</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	<b>46</b>
4.1	Jumlah Titik dan Sisi pada Graf Tangga Permata ( $Dl_n$ ) . . . . .	46
4.2	Jumlah Titik dan Sisi pada Gabungan Graf Tangga Permata ( $mDl_n$ ) . . . . .	47
4.3	Batas Atas $d$ Graf Tangga Permata ( $Dl_n$ ) . . . . .	48
4.4	Batas Atas $d$ pada Gabungan Graf Tangga Permata ( $mDl_n$ ) . . .	48
4.5	Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi Antimagic pada Graf Tangga Permata ( $Dl_n$ ) . . . . .	49
4.6	Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi Antimagic pada Gabungan Graf Tangga Permata ( $mDl_n$ ) . . . . .	59
4.7	Hasil dan Pembahasan . . . . .	100
<b>5</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b>	<b>103</b>
5.1	Kesimpulan . . . . .	103
5.2	Saran . . . . .	103
	<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>104</b>



## DAFTAR GAMBAR

2.1	Gambaran Kota Königsberg tahun 1736 . . . . .	6
2.2	Representasi graf pada permasalahan jembatan Königsberg . . .	7
2.3	Representasi graf dalam rantai makanan . . . . .	8
2.4	Contoh pemodelan sistem lalu lintas . . . . .	9
2.5	Topologi Jaringan . . . . .	12
2.6	Contoh representasi graf dalam penyimpanan zat kimia . . . . .	13
2.7	Representasi graf(setelah dilakukan pewarnaan graf) . . . . .	14
2.8	Contoh graf secara umum . . . . .	15
2.9	Graf dengan isolated vertex . . . . .	16
2.10	Graf dan komplementnya . . . . .	17
2.11	Contoh <i>diregular dan non-diregular</i> . . . . .	17
2.12	Contoh sebuah graf dengan 8 titik . . . . .	18
2.13	Contoh graf dan subgrafnya . . . . .	19
2.14	Contoh sebuah graf dan matrik adjacencynya . . . . .	19
2.15	Contoh graf terpotong . . . . .	20
2.16	Keisomorfisan graf . . . . .	21
2.17	Contoh gabungan graf . . . . .	22
2.18	(a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu . . . . .	23
2.19	Graf tak-berhingga . . . . .	24
2.20	Graf komplit $K_4$ dan $K_5$ . . . . .	25

DAFTAR GAMBAR

2.21 Graf kipas  $\hat{K}_5$  . . . . . 26

2.22 Graf bintang . . . . . 26

2.23 Graf bipartit ( $a$ ) dan graf bipartit lengkap  $K_{3,3}$  . . . . . 27

2.24 Graf whell  $W_5$  . . . . . 27

2.25 Graf friendship  $F_4$  . . . . . 28

2.26 Graf petersen . . . . . 28

2.27 Graf ladder  $L_5$  . . . . . 29

2.28 Graf Tangga Permata  $Dl_n$  . . . . . 29

2.29 Graf Tangga Permata  $Dl_4$  . . . . . 30

2.30 (a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif . . . . . 31

2.31 (a) Pelabelan titik (b) pelabelan Sisi (c) Pelabelan total . . . . . 33

2.32 EAV  $Dl_3$  . . . . . 37

2.33 EAV  $Dl_3$  . . . . . 37

3.1 Graf Tangga Permata  $Dl_n$  . . . . . 42

3.2 Graf Tangga Permata  $Dl_4$  . . . . . 43

3.3 Gabungan Graf Tangga Permata  $2D_3$  . . . . . 43

3.4 Rancangan Penelitian . . . . . 45

4.1 Jumlah titik dan jumlah sisi graf pada  $Dl_3$  dan  $Dl_4$  . . . . . 47

4.2 Pelabelan titik (3,1)-sisi antimagic pada  $Dl_4$  . . . . . 52

4.3 SEATL graf  $Dl$  ( $Dl_4$ ) dengan  $d = 0$  . . . . . 54

4.4 SEATL graf  $Dl$  ( $Dl_5$ ) dengan  $d = 2$  . . . . . 58

4.5 Pelabelan total super (34, 1)-sisi antimagic (SEATL) pada  $Dl_4$  . . . . . 58

DAFTAR GAMBAR

4.6 Pelabelan titik (6,1)-sisi antimagic pada  $3Dl_4$  . . . . . 65

4.7 Pelabelan total super(141,0)-sisi antimagic pada  $3Dl_4$  . . . . . 80

4.8 Pelabelan total super(55,2)-sisi antimagic pada  $3Dl_4$  . . . . . 95

4.9 Pelabelan total super(82,1)-sisi antimagic pada  $2Dl_5$  . . . . . 99



**DAFTAR TABEL**

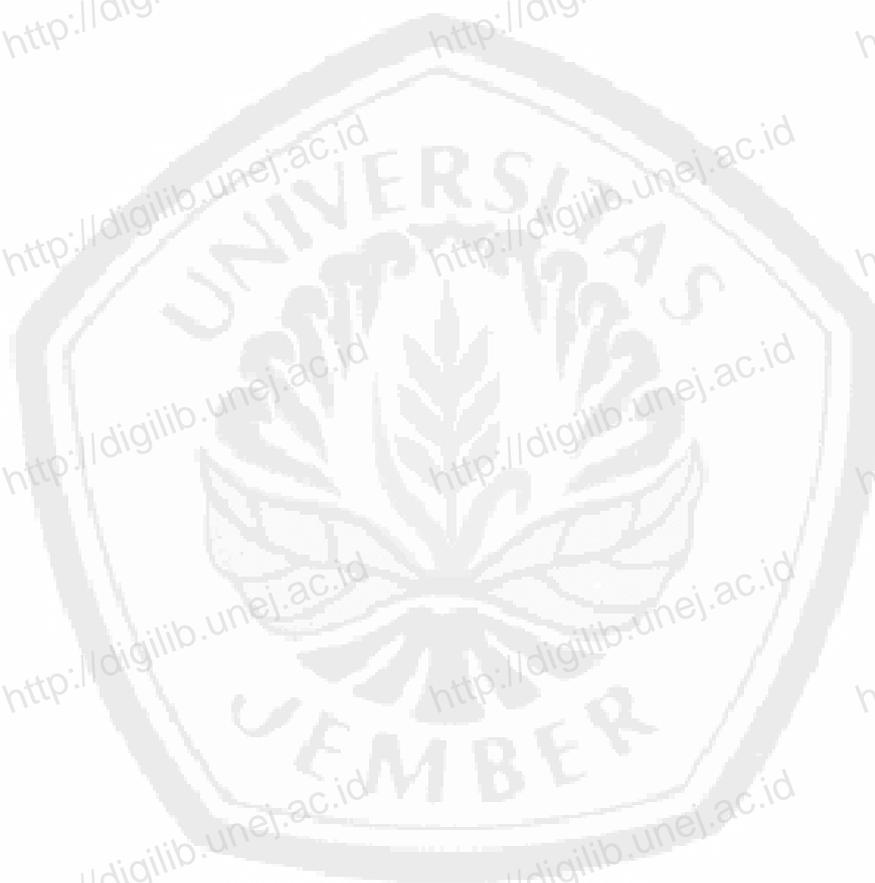
2.1 Hubungan sifat zat kimia . . . . . 13

2.2 Ringkasan dari pelabelan total super  $(a, d)$ -edge antimagic pada graf disconnected. . . . . 38



**DAFTAR LAMPIRAN**

MATRIK PENELITIAN . . . . . 107  
FORMULIR PENGAJUAN JUDUL DAN PEMBIMBINGAN SKRIPSI . . . 108  
LEMBAR KONSULTASI PENYUSUNAN SKRIPSI . . . . . 109



## DAFTAR LAMBANG

$G$	$=$	Graf $G$
$G(V, E)$	$=$	Sebarang graf tak berarah dengan $V$ adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan $E$ adalah himpunan sisi
$v_n$	$=$	Titik ke- $n$ pada suatu graf
$e_n$	$=$	Sisi ke- $n$ dari suatu graf
$V(G)$	$=$	Himpunan titik pada graf $G$ dan disebut sebagai <i>order</i>
$E(G)$	$=$	Himpunan sisi pada graf $G$ dan disebut sebagai <i>size</i>
$U_n$	$=$	Suku ke- $n$ barisan aritmetika
$EAVL$	$=$	<i>Edge antimagic vertex labeling</i> atau pelabelan titik sisi antimagic
$SEATL$	$=$	<i>Super edge antimagic total labeling</i> atau pelabelan total super $(a, d)$ -sisi antimagic
$d$	$=$	Nilai beda barisan bobot sisi pada SEATL
$a$	$=$	Bobot sisi terkecil yang merupakan suku pertama barisan bobot sisi pada SEATL
$Dl_n$	$=$	Lambang untuk graf tangga permata
$mDl_n$	$=$	Lambang untuk gabungan graf tangga permata
$x_i$	$=$	Titik ke- $i$ pada bagian atas graf $Dl_n$
$y_i$	$=$	Titik ke- $i$ pada bagian bawah graf $Dl_n$
$z_j$	$=$	Titik ke- $j$ pada bagian tengah graf $Dl_n$
$x_i^k$	$=$	Titik ke- $i$ dalam komponen ke- $k$ pada bagian atas graf $mDl_n$
$y_i^k$	$=$	Titik ke- $i$ dalam komponen ke- $k$ pada bagian bawah graf $mDl_n$
$z_j^k$	$=$	Titik ke- $j$ dalam komponen ke- $k$ pada bagian tengah graf $mDl_n$
$\alpha_p(x_i)$	$=$	Fungsi bijektif pelabelan titik pada bagian atas graf $Dl_n$
$\alpha_p(y_i)$	$=$	Fungsi bijektif pelabelan titik pada bagian bawah graf $Dl_n$
$\alpha_p(z_j)$	$=$	Fungsi bijektif pelabelan titik pada bagian tengah graf $Dl_n$
$w_{\alpha_p}$	$=$	Fungsi bijektif bobot sisi dari pelabelan titik $\alpha_p$
$\alpha_p(x_i x_{i+1})$	$=$	Fungsi bijektif label sisi pada bagian atas graf $Dl_n$
$\alpha_p(y_i y_{i+1})$	$=$	Fungsi bijektif label sisi pada bagian bawah graf $Dl_n$
$\alpha_p(z_j z_{j+1})$	$=$	Fungsi bijektif label sisi pada bagian tengah graf $Dl_n$
$W_{\alpha_p}$	$=$	Fungsi bijektif bobot total dari pelabelan total $\alpha_p$

## BAB 1

# PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Dewasa ini, matematika memiliki banyak peranan penting dalam kehidupan manusia. Namun, ironisnya masih ada sebagian orang menjadikan matematika sebagai suatu hal yang ditakuti dan dihindari. Rasa takut dan cemas terhadap objek yang berkaitan dengan matematika itu disebut Phobia Matematika (*Mathophobia*). Matematika hanya dipandang sebagai sebuah kumpulan rumus serta deretan angka-angka yang tidak memiliki makna. Padahal dibalik itu semua terdapat hal menarik yang seringkali terlepas dari perhatian.

Tidak disadari setiap orang senantiasa bertemu dengan konsep dan prinsip matematika, baik dalam pembelajaran formal, non formal maupun dalam kehidupan sehari-hari. Matematika merupakan alat bantu kehidupan dan pelayan bagi ilmu-ilmu yang lain, seperti fisika, kimia, biologi, astronomi, teknik, ekonomi, farmasi maupun matematika sendiri. Mungkin terdapat suatu pertanyaan bukankah saat ini sudah ada kalkulator dan komputer sehingga matematika sebagai alat bantu kehidupan menjadi berkurang? Memang benar, dengan kehadiran alat bantu tersebut banyak persoalan kehidupan yang sulit dapat diselesaikan dalam waktu yang relatif singkat. Namun, proses penciptakannya pun juga memerlukan prinsip matematika. Tanpa adanya prinsip-prinsip dan konsep matematika kedua alat tersebut yaitu kalkulator dan komputer tidak mungkin diciptakan. Begitu pentingnya matematika dalam kehidupan maka tidak aneh jika pembelajaran matematika mengalami perkembangan yang pesat dan selalu disesuaikan dengan kebutuhan zaman. Ada pepatah " Siapa yang menguasai matematika dan bahasa maka ia akan menguasai dunia". Artinya matematika sebagai media melatih untuk berpikir kritis, inovatif, kreatif, mandiri, dan mampu menyelesaikan masalah, sedangkan

bahasa sebagai media menyampaikan ide-ide atau gagasan serta yang ada dalam pikiran manusia.

Matematika terdiri dari beberapa cabang ilmu misalnya Aljabar, Geometri, Statistika dan Probabilitas, Matematika Aplikasi, Matematika Komputasi, Matematika Ekonomi, Matematika Diskrit, Sain Komputer dan lain sebagainya. Cabang matematika terkini terkait dengan sains komputer yang cukup terkenal adalah Teori Graf. Teori graf merupakan pokok bahasan yang relatif muda namun memiliki banyak terapan yang sangat luas. Contohnya optimasi jaringan telepon, jaringan komputer, jaringan listrik, model papan sirkuit, model struktur ikatan kimia dan lain-lain. Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan atau titik, sedangkan hubungan antara objek tersebut dinyatakan dengan garis atau sisi.

Salah satu topik yang menarik dan mendapat banyak perhatian pada teori graf adalah masalah pelabelan graf. Pelabelan graf akhir-akhir ini mulai banyak mendapat perhatian terutama terapannya dalam jaringan komputer dan database security. Pelabelan graf  $G$  adalah sebuah pemetaan dari elemen-elemen graf  $G$  terhadap bilangan bulat positif. Jika domainnya adalah himpunan titik  $G$  maka pelabelannya disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), sedangkan jika domainnya adalah himpunan sisi  $G$  maka pelabelannya disebut pelabelan sisi (*edge labeling*). Jika domainnya adalah kedua himpunan tersebut maka pelabelannya disebut pelabelan total (*total labeling*).

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedláček (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan pemancar frekuensi radio. Sedláček telah mempublikasikan karya ilmiah dengan mengenalkan pelabelan graf tipe yang lain yang disebut pelabelan *magic*. Istilah ini dimotivasi dari ide bujur sangkar magic pada teori bilangan. Pelabelan magic adalah pemetaan dari himpunan sisi graf  $G$  pada bi-

langan real non-negatif, sehingga jumlah label sisi di sekitar titik pada graf  $G$  semuanya sama. Pada Definisi Sedláček ini memperbolehkan untuk menggunakan bilangan real tetapi biasanya hanya bilangan bulat saja yang digunakan. Stewart menyebutnya *supermagic* jika himpunan label sisi terdiri dari bilangan bulat yang berurutan. Selengkapnya Gallian(2009) menjelaskan tentang hasil survey dari pelabelan graf, diantaranya untuk pelabelan graceful dan jenisnya, *harmonious labeling*, *magic labeling*, *antimagic labeling* dan jenis-jenisnya.

Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic (SEAT), dimana  $a$  bobot sisi terkecil dan  $d$  nilai beda. Pelabelan ini diperkenalkan oleh Simanjutak, Bertault dan Miller pada tahun 2000 (Dafik, 2007:19). Pada graf konektif telah banyak ditemukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic sedangkan pada graf diskonektif, hanya sedikit famili graf yang diketahui mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic. Permasalahannya adalah hal ini melibatkan angka pelabelan lebih banyak pada setiap komponen graf konektif terpisahnya dan tidak ada jaminan jika graf  $G$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic kemudian pada gabungan graf diskonektifnya mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic. Oleh karena itu masalah ini dianggap cukup sulit sehingga memerlukan penelitian berkelanjutan.

Sampai saat ini, pelabelan graf diskonektif dengan jenis pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic masih sedikit famili yang ditemukan. Baru-baru ini Deviyana, R.(2011: 29) telah mempublikasikan hasil temuannya tentang pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf  $E$ , Anggraeni, Y.(2011: 32) tentang pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada Generalisasi Graf Web Dua Bandul  $W_0(3, j, 2)$ , Rahmad, R.R.(2010: 37) tentang pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Lobster, Fuad(2009: 25) tentang pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Triangular Ladder, Indayani, D.V.(2010: 29) tentang pelabelan total Super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Generalized Petersen  $(n, 2)$ , Abidin, Z.(2010: 35) tentang pelabelan total Super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf Firecracker, dan Biyadi, Khud.(2010: 31) tentang fungsi bijektif pelabelan antimagic pada

gabungan saling lepas graf Banana Tree.

Dalam penelitian ini akan dikembangkan penelitian Fuad tentang graf tangga untuk jenis graf tangga yang lain yaitu tangga permata. Graf tangga permata dinotasikan dengan  $Dl_n$  adalah salah satu graf yang belum ditemukan pelabelannya. Gabungan saling lepas graf tangga permata merupakan gabungan diskonektif pada graf tangga permata. Dalam penelitian ini akan dikaji pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata baik itu yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya sehingga pada penelitian ini penulis memilih judul "**Pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata**".

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. apakah Graf Tangga Permata ( $Dl_n$ ) memiliki pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic?
2. apakah gabungan saling lepas Graf Tangga Permata ( $mDl_n$ ) memiliki pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic?

## 1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi pada:

1. graf berhingga yang sederhana, yaitu graf yang tidak mempunyai loop dan sisi ganda(paralel);
2. pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf Tangga Permata disimbolkan dengan  $Dl_n$  dan  $mDl_n$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ . Dalam hal ini,  $m$  merupakan banyaknya Graf Tangga Permata yang digabung yaitu minimal 2 Graf Tangga Permata sedangkan  $n$  merupakan ketentuan dari definisi Graf Tangga Permata.

#### 1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. untuk mengetahui apakah Graf Tangga Permata ( $Dl_n$ ) memiliki pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic, jika ada, maka dicari cara melabeli Graf Tangga Permata dengan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic;
2. untuk mengetahui apakah gabungan saling lepas Graf Tangga Permata ( $mDl_n$ ) memiliki pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic, jika ada, maka dicari cara melabeli gabungan saling lepas Graf Tangga Permata dengan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic.

#### 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

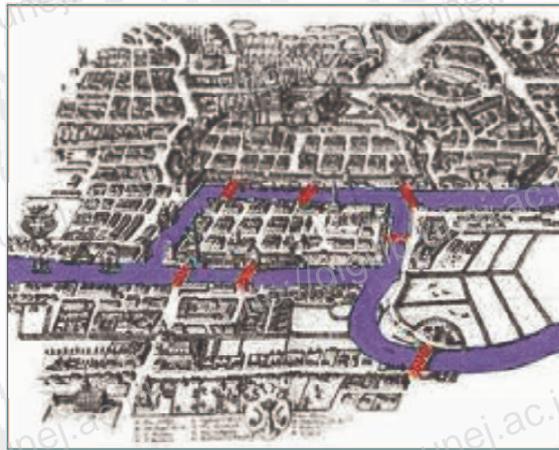
1. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pelabelan graf, yaitu mengetahui apakah ada pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf Tangga Permata;
2. memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf dari jenis yang lain;
3. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic.

## BAB 2

# TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Aplikasi Graf

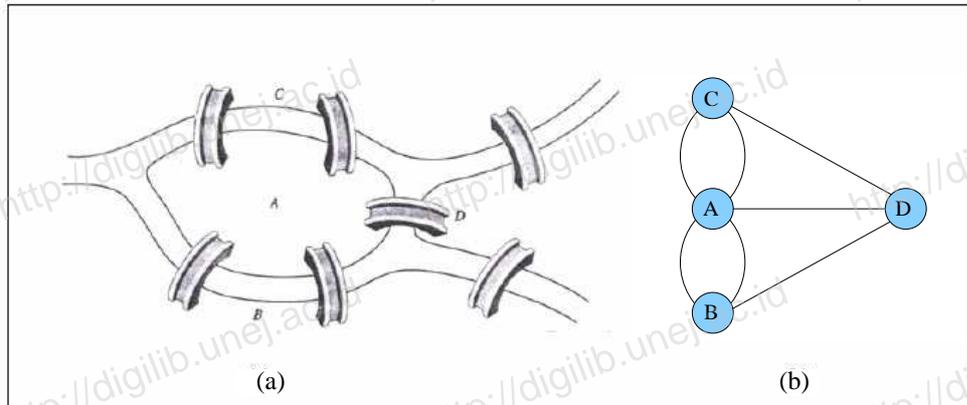
Teori Graf merupakan suatu pokok bahasan yang sudah tua usianya namun mempunyai banyak terapan bagi seluruh masyarakat sampai saat ini. Teori ini muncul pertama kali pada tahun 1736, yakni ketika Euler mencoba untuk mencari solusi dari permasalahan yang sangat terkenal yaitu Jembatan Königsberg. Aplikasi teori graf saat ini sangat luas dan dipakai dalam berbagai disiplin ilmu maupun dalam kehidupan sehari-hari. Berikut disajikan gambar 2.1<sup>1</sup> tentang gambaran kota Königsberg dan gambar 2.2 tentang representasi graf pada permasalahan jembatan Königsberg.



Gambar 2.1: Gambaran Kota Königsberg tahun 1736

Beberapa contoh aplikasi graf ditemukan dalam ilmu kimia yaitu struk-

<sup>1</sup>Sumber gambar: <http://matematika-pendidikanstkip.blogspot.com/2011/04/asal-usul-teori-graf.html>

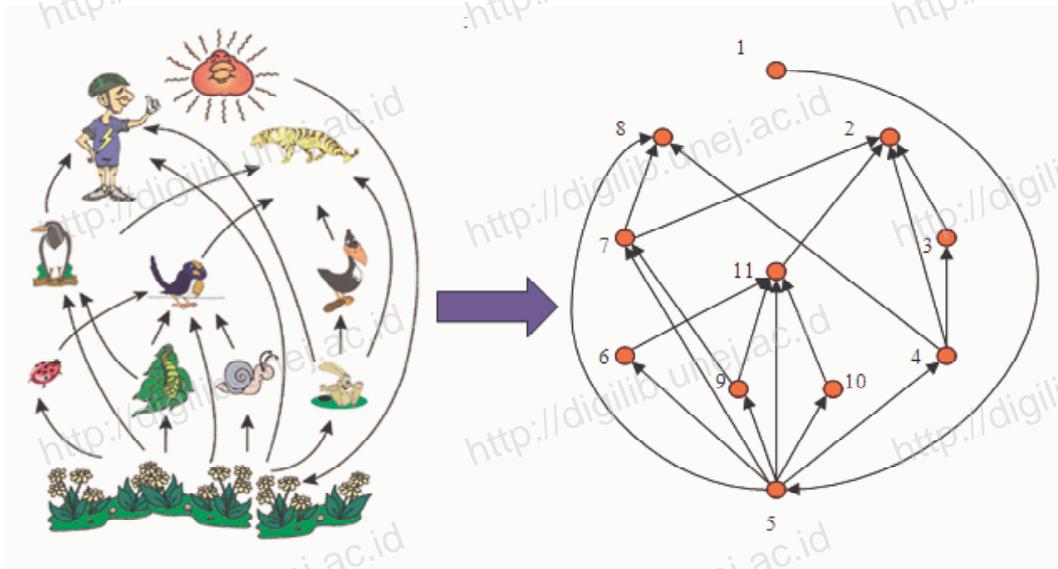


Gambar 2.2: Representasi graf pada permasalahan jembatan Königsberg

tur senyawa karbon, rekonstruksi rantai *Ribonucleic Acid* (RNA) dalam ilmu biologi, struktur hubungan masyarakat dalam ilmu sosiologi, dan pewarnaan graf dalam ilmu pemetaan (*kartografi*) bahkan dalam bidang ilmu informatika dapat ditemukan aplikasinya pada topologi jaringan. Berbagai aplikasi teori graf tersebut memberikan peranan penting terhadap perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, khususnya aplikasi graf dalam informatika yang selalu berhubungan dengan informasi dan teknologi masa kini. Dalam suatu ekologi misalnya, kita dapat menggunakan graf untuk mendeskripsikan kompetisi makanan sebagaimana disajikan dalam Gambar 2.3<sup>2</sup>.

Contoh lain aplikasi graf dalam kehidupan sehari-hari adalah pada pengaturan lampu lalu lintas. Pada saat orang menuju dan pulang dari tempat aktifitas rutinnnya setiap hari, sering terjadi kemacetan lalu lintas. Hal ini disebabkan karena waktu aktifitas yang hampir bersamaan sehingga volume kendaraan yang melintasi jalan-jalan di suatu daerah meningkat pada waktu itu. Padahal belum tentu jalan-jalan pada daerah itu mampu menampung besarnya volume kendaraan yang melewatinya. Untuk dapat mengetahui apakah kapasitas maksimum jalan-jalan pada suatu daerah masih mampu menampung volume kendaraan yang melintasi jalan-jalan pada daerah tersebut, maka

<sup>2</sup>Sumber gambar: <http://suryaafrihan.blogspot.com/2010/10/rantai-makanan.html>

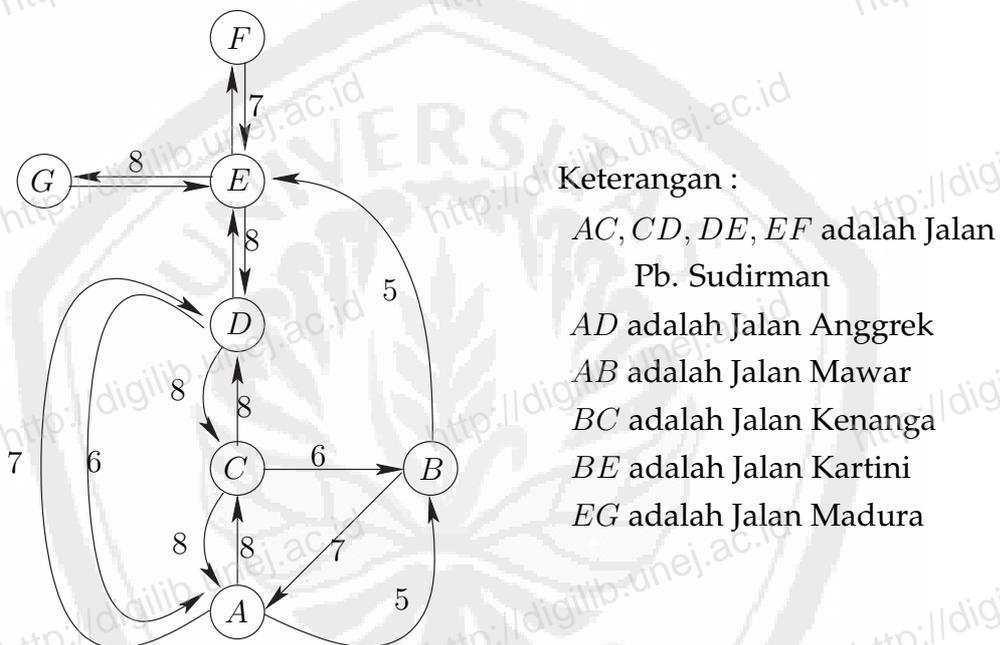


Gambar 2.3: Representasi graf dalam rantai makanan

harus diketahui terlebih dahulu berapa kapasitas maksimum dan volume maksimum kendaraan yang melintasi daerah itu. Permasalahannya adalah mencari sebanyak mungkin arus lalu lintas dari beberapa arah yang dapat berjalan secara bersamaan dengan aman dan konsisten. Juga mengenai pengaturan jalur lampu lintas dalam setiap pertigaan ataupun perempatan. Seberapa banyak penggunaan lampu lalu lintas yang harus di gunakan seminimum mungkin untuk mengatasi masalah kemacetan tersebut.

Pada lalu lintas di perkotaan, daya dukung jalan menjadi faktor penting dalam menentukan lancarnya lalu lintas. Daya dukung jalan ini meliputi lebar jalan, kondisi jalan, rata-rata volume kendaraan yang lewat tiap satuan waktu, dan lain-lain. Pada lalu lintas perkotaan, jarak, menjadi sesuatu yang tidak terlalu penting. Dengan melewati jalan yang memiliki daya dukung yang baik, walaupun jaraknya lebih panjang, akan membuat kita sampai lebih cepat ke tujuan. Lebih cepat, daripada melewati jalan yang berjarak pendek, tapi kondisi jalannya rusak, volume kendaraan yang lewat besar, dan lain-lain. Berikut adalah contoh pemodelan sistem lalu lintas dengan graf ganda berarah berbobot. Pada contoh gambar 2.4, misalkan saja  $A$  adalah Simpang Pb.

Sudirman, *B* adalah persimpangan antara Jalan Mawar dan Jalan Kenanga, *C* adalah persimpangan Jalan Pb. Sudirman dan Jalan Kenanga, *D* adalah persimpangan antara Jalan Anggrek dengan Jalan Pb. Sudirman, *E* adalah Perempatan Jalan Madura, Kartini, dan Pb. Sudirman, *F* dan *G* adalah persimpangan yang tidak masuk dalam pembahasan karena ini hanya potongan dari suatu jalan. Pemanfaatan teori graf dalam sistem lalu lintas ini dapat dilakukan sebagai berikut :



Gambar 2.4: Contoh pemodelan sistem lalu lintas

1. Simpul dalam suatu graf digunakan untuk menghubungkan suatu persimpangan jalan. Pada gambar 2.4 terdapat 7 buah persimpangan yaitu *A, B, C, D, E, F*, dan *G*. Ketujuh persimpangan tersebut diperlakukan sebagai tujuh buah simpul.
2. Sisi dari suatu graf digunakan untuk melambangkan jalan. Pada gambar 2.4 terdapat 7 buah sisi yang melambangkan 7 buah jalan.

3. Arah pada sisi merepresentasikan arah jalan yang dapat dilalui. Jadi bila terdapat jalan *One Way* atau satu arah, arah panah hanya akan menunjuk ke arah tertentu dan tidak sebaliknya.
4. Bobot / label dari sisi graf merepresentasikan daya dukung jalan tersebut.

Dengan pemodelan ini, pengguna jalan dapat mengetahui dan menghindari jalan-jalan yang kemungkinan besar macet, atau jalan yang rusak, sehingga dapat menghindarinya dan memilih jalan lain yang memiliki daya dukung yang baik. Pemberian bobot / nilai pada suatu jalan didasarkan pada lebar jalan, kondisi jalan dan volume kendaraan yang lewat tiap jam.

1. Lebar jalan

Untuk jalan dengan lebar dibawah 1 meter diberi nilai 4, antara 1 meter sampai 2 meter diberi nilai 3, lebih dari 2 meter sampai 3 meter diberi nilai 2 dan untuk lebar jalan lebih dari 3 meter diberi nilai 1.

2. Kondisi Jalan

Jalan rusak parah diberi nilai 4, jalan rusak ringan diberi nilai 3, jalan baik diberi nilai 2 dan jalan sangat baik diberi nilai 1.

3. Volume kendaraan yang lewat tiap jam

Jika volumenya lebih dari 100 kendaraan/jam diberi nilai 5, 81 sampai 100 kendaraan/jam diberi nilai 4, 51 sampai 80 kendaraan/jam diberi nilai 3, 31 sampai 60 kendaraan/jam diberi nilai 2, dan jika volumenya 0 sampai 30 kendaraan/jam diberi nilai 1.

Bobot total yang melambangkan bobot sisi adalah jumlah nilai lebar jalan, kondisi jalan dan volume kendaraan yang lewat tiap jam.

Jalan yang menghubungkan *A* ke *C* dan sebaliknya, jalan yang menghubungkan *C* ke *D* dan sebaliknya, juga jalan yang menghubungkan *D* ke *E* dan sebaliknya, diberi nilai 8. Karena pada jalan ini (dalam hal ini Jalan Pb.

Sudirman) memiliki kondisi yang baik (nilai 1), badan jalan juga lebar (nilai 2), tapi volume kendaraan yang lewat sangat besar (nilai 5). Untuk pemberian bobot pada sisi-sisi yang lain dalam hal ini melambangkan jalan) dapat dicari dengan langkah yang sama. Apabila Kita sekarang berada di Simpang Pb. Sudirman (simpul  $A$ ) dan ingin pergi ke daerah yang terletak pada jalan yang menghubungkan simpul  $E$  dan  $F$ , rute terpendek adalah langsung melewati jalan yang menghubungkan  $A$  dan  $C$ ,  $C$  dan  $D$ ,  $D$  dan  $E$ , lalu  $E$  dan  $F$ . Sayangnya rute itu memiliki bobot yang besar, jadi mungkin saja waktu yang dibutuhkan menjadi lama. Rute alternative yang bisa kita gunakan adalah melewati jalan yang menghubungkan  $A$  dan  $B$ ,  $B$  dan  $E$ , lalu  $E$  dan  $F$ . Jalan ini memang lebih panjang, tapi karena relatif lebih lancar, jadi kemungkinan besar kita bisa sampai tujuan lebih cepat.

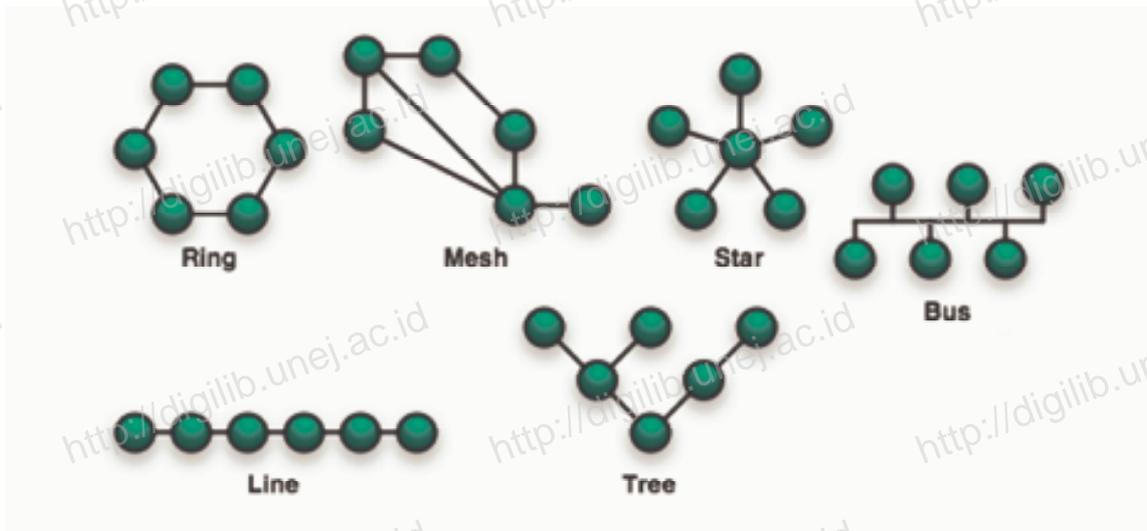
Zainal (2010:7) menjelaskan aplikasi lain teori graf dalam ilmu informatika dapat dilihat pada topologi jaringan komputer. Topologi jaringan (*network topology*) adalah studi mengenai pengaturan atau pemetaan dari elemen-elemen (pranala, simpul, dan sebagainya) sebuah jaringan. Topologi suatu jaringan didasarkan pada cara penghubung sejumlah sentral dalam membentuk suatu sistem jaringan. Topologi jaringan yang umum dipakai adalah: *Mesh*, Bintang (*Star*), *Bus*, *Tree*, dan Cincin (*Ring*). Berbagai jenis topologi jaringan tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.5<sup>3</sup>.

Dalam topologi jaringan komunikasi khususnya komputer, sentral-sentral saling terhubung (interkoneksi) tetapi ada juga yang tak terhubung. Untuk melakukan interkoneksi, diperlukan alamat dan identifikasi sentral yang berbeda satu dengan lainnya untuk kelancaran komunikasi dalam jaringan. Pemberian alamat dan identifikasi ini dalam komputer biasanya dikenal dengan IP address. Pemberian alamat dan identifikasi memerlukan label angka dan tiap sentral harus berbeda labelnya. Dalam hal inilah, pelabelan graf sangat berperan.

Salah satu aplikasi graf dalam bidang kimia yang sering kita temui adalah

---

<sup>3</sup>Sumber gambar: <http://www.11h11.com/hugobox/chaku/NetworkTopologies.png>



Gambar 2.5: Topologi Jaringan

dalam penyimpanan senyawa kimia berbahaya. Teorema yang dipakai disini adalah pewarnaan graf (*graph colour*). Pewarnaan graf sangat bermanfaat dalam penyimpanan senyawa kimia berbahaya. Efektifitas pewarnaan graf tidak diragukan lagi untuk mengetahui berapa banyak minimum ruangan yang diperlukan untuk dapat menyimpan semua zat kimia dengan aman. Misalkan ada 7 jenis zat kimia yang perlu disimpan di dalam gudang. Beberapa pasang dari zat itu tidak dapat disimpan di dalam ruangan yang sama, karena campuran gasnya bersifat eksplosif (mudah meledak).

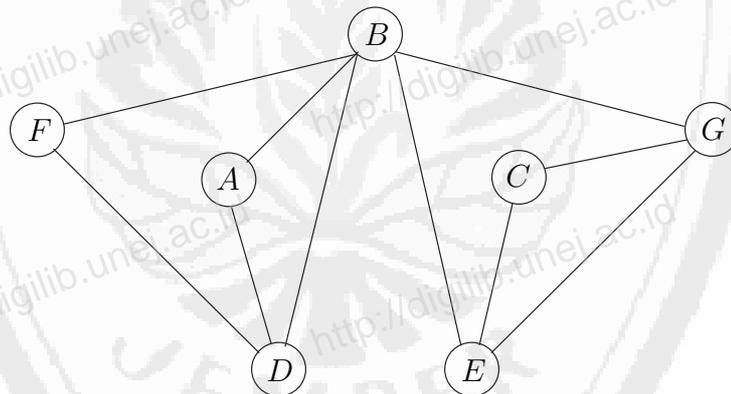
Untuk zat yang semacam itu perlu dibangun ruang-ruang terpisah yang dilengkapi ventilasi dan penyedot udara keluar yang berlainan. Jika lebih banyak ruang yang dibutuhkan, berarti lebih banyak ongkos yang harus dikeluarkan. Karena itu perlu diketahui berapa banyak minimum ruangan yang diperlukan untuk dapat menyimpan semua zat kimia dengan aman. Masalah ini masuk dalam masalah dalam pewarnaan graf.

Simpul melambangkan zat kimia, sisi menyatakan bahwa dua zat kimia yang dihubungkannya tidak boleh disimpan bersama-sama. Pada persoalan ini, terdapat 7 macam senyawa kimia, yaitu  $A, B, C, D, E, F, G$ . Ketujuh macam

Tabel 2.1: Hubungan sifat zat kimia

Zat kimia	Tidak dapat disimpan bersama zat kimia
A	B, D
B	A, D, E, F, G
C	E, G
D	A, F, B
E	B, C, G
F	B, D
G	C, E, B

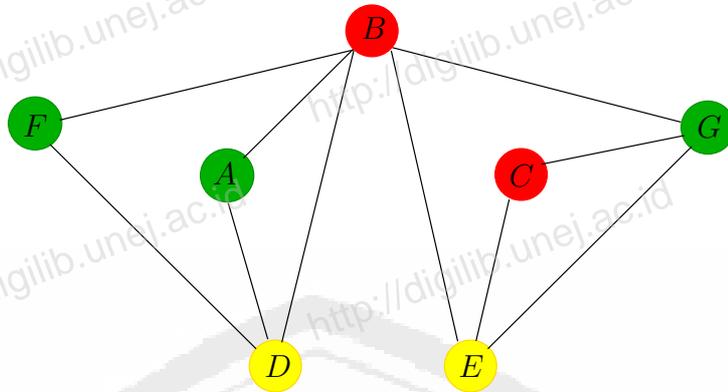
senyawa kimia tersebut diperlakukan sebagai tujuh buah simpul. Dari gambar 2.6, terlihat bahwa untuk persoalan di atas, graf dapat direpresentasikan dalam bentuk sebuah graf planar.



Gambar 2.6: Contoh representasi graf dalam penyimpanan zat kimia

Untuk mewarnai graf, terlebih dahulu idealnya pewarnaan dimulai dari simpul dengan derajat terbanyak kemudian melanjutkannya ke simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul yang telah diwarnai tersebut. Langkah ini diulang hingga semua simpul telah diwarnai. Dengan memperhatikan gambar 2.6, maka metode pewarnaan yang sepatutnya dilakukan adalah berturut-turut mewarnai simpul  $B, G, E, C, A, D, F$  (urutan ini tidak tunggal, masih terdapat

alternatif lain). Salah satu contoh pewarnaan graf untuk persoalan di atas dapat dilihat pada gambar 2.7.



Gambar 2.7: Representasi graf(setelah dilakukan pewarnaan graf)

Perhatikan gambar 2.7, terlihat bahwa cukup diperlukan 3 buah warna (merah, kuning, hijau) untuk mewarnai graf di atas. Dengan demikian, jumlah minimum ruangan yang dibutuhkan untuk menyimpan senyawa-senyawa kimia berbahaya di atas adalah 3 buah ruangan.

- Ruangan 1 berisi zat B dan C,
- Ruangan 2 berisi zat A, F, dan G,
- Ruangan 3 berisi zat D dan E.

## 2.2 Terminologi Dasar Graf

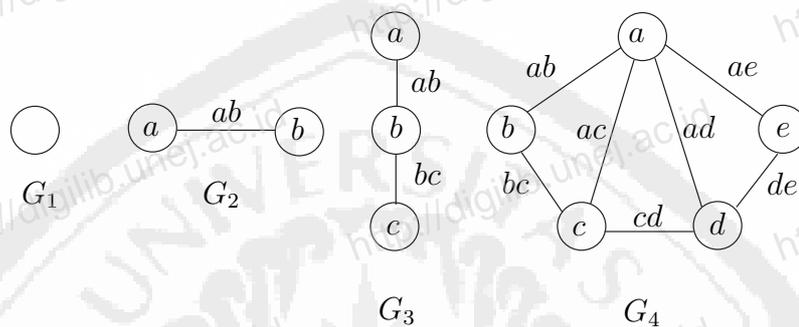
Dalam Kreyszig (1993:481), secara kasar graf tersusun atas titik-titik yang dinamakan *verteks*, dan garis-garis yang menghubungkan titik-titik tersebut dinamakan *sisi*. Namun secara matematis, suatu graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan himpunan  $(V, E)$ , yang dalam hal ini:

$V$  = himpunan tak kosong dari semua titik (*verteks*)= $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan

$E$  = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang titik = $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Definisi di atas menyatakan bahwa  $V$  tidak boleh kosong, sedangkan  $E$  boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah

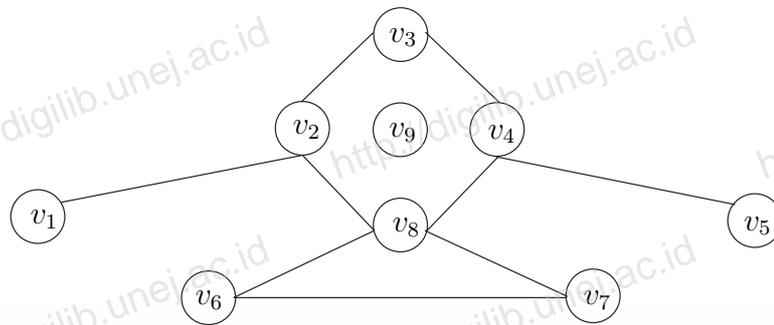
pun, tetapi titiknya harus ada, minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu simpul tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial (Munir, 2003:291). Titik pada graf dapat dinomori dengan huruf, dengan bilangan asli, atau dengan menggunakan huruf dan angka (bilangan asli). Misalkan  $v_i$  dan  $v_j$  adalah titik pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan titik  $v_i$  dan  $v_j$  dinyatakan dengan pasangan  $(v_i, v_j)$  atau dengan lambang  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ . Berikut diberikan contoh graf pada Gambar 2.8 yang menyatakan komponen umum terbentuknya sebuah graf.



Gambar 2.8: Contoh graf secara umum

Misalkan  $e = (v_i, v_j)$  merupakan sebuah sisi pada graf  $G$ , yaitu  $v_i$  dan  $v_j$  adalah titik ujung dari  $e$ , maka verteks  $v_i$  dikatakan *adjacent* (berelasi) terhadap verteks  $v_j$  dan edge  $e$  *incident* (terhubung) pada  $v_i$  dan  $v_j$ . Sedangkan derajat sebuah verteks  $v$  pada sebuah graf  $G$  ditulis dengan  $\deg(v)$ , adalah jumlah edge yang *incident* (terhubung) pada  $v$ , dengan kata lain jumlah edge yang memuat  $v$  sebagai titik ujung (Lipschutz dan Lipson, 2002: 7). Jika semua titik pada graf  $G$  mempunyai derajat/degree yang sama  $n$  maka graf  $G$  disebut graf regular  $n$ . Jika terdapat sebuah titik yang tidak mempunyai sisi yang *incident* dengannya atau dengan kata lain derajat titik tersebut = 0, maka titik tersebut dinamakan (*isolated vertex*)(Khud, 2010: 9). Perhatikan Gambar 2.9, tampak bahwa verteks  $v_1$  *adjacent* dengan  $v_2$ ,  $v_2$  *adjacent* dengan  $v_3$ ,  $v_3$  *adjacent* dengan  $v_4$ ,  $v_4$  *adjacent* dengan  $v_5$ , dst. Selain itu,  $v_8$  *incident* dengan sisi  $v_4v_8$ ,  $v_2v_8$ ,  $v_6v_8$ , dan  $v_7v_8$  sehingga derajat dari  $v_8$  adalah 4, sedangkan  $v_9$  merupakan contoh

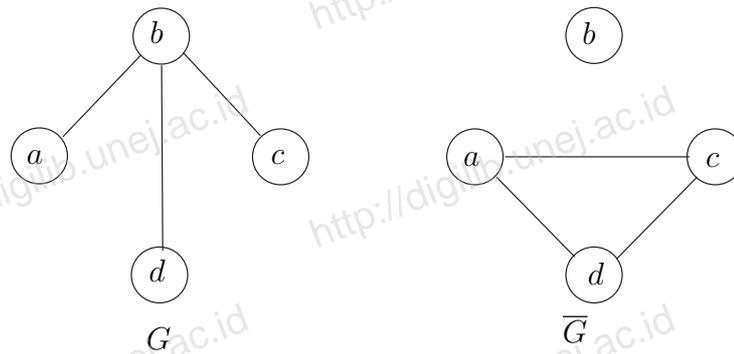
*isolated vertex* karena tidak ada sisi yang terhubung dengan  $v_9$ .



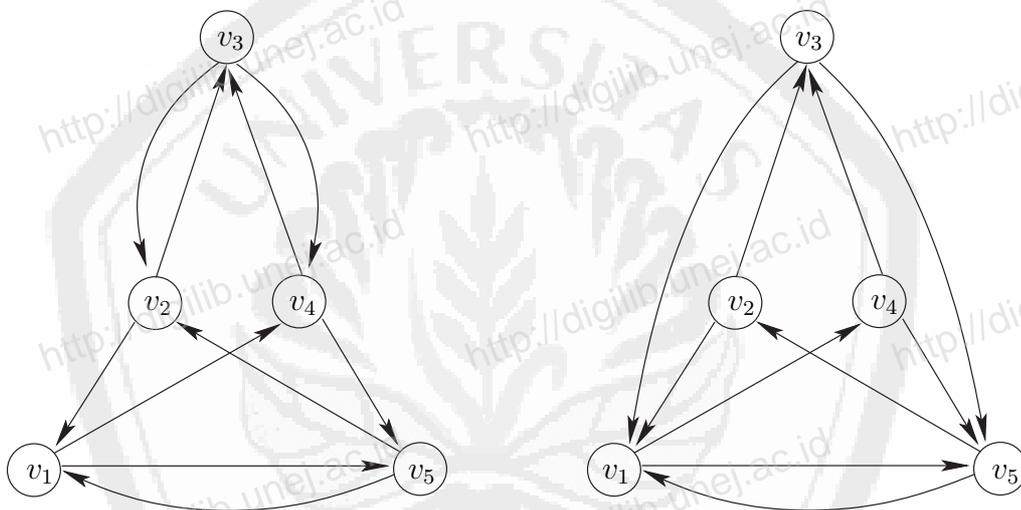
Gambar 2.9: Graf dengan isolated vertex

Dalam thesisnya, Slamain (2001 : 12) mengatakan bahwa suatu titik  $b$  dalam  $G$  dikatakan tetangga masuk (*in-neighbour*) titik  $a$  jika  $(b, a) \in E(G)$ , dan titik  $c$  dikatakan tetangga ke luar (*out-neighbour*) titik  $a$  jika  $(a, c) \in E(G)$ . Himpunan semua *in-neighbour* dari titik  $a$  disebut *in-neighbourhood* dan dinotasikan dengan  $N^-(a)$  sedangkan himpunan semua *out-neighbour* dari titik  $a$  disebut *out-neighbourhood* dan dinotasikan dengan  $N^+(a)$ . Derajat masuk (*in-degree*) dari sebuah titik  $a$  adalah banyaknya *in-neighbour* dari titik itu dan dinotasikan dengan  $d^-(a)$ , demikian halnya dengan derajat ke luar (*out-degree*)nya, yaitu banyaknya *out-neighbour* dari titik tersebut dan dinotasikan dengan  $d^+(a)$  (Holman dan Basby, 1987 : 98). Dafik (2007 : 11) mengatakan bahwa jika setiap titik dalam graf berarah  $G$  memiliki *in-degree* yang sama, maka  $G$  dikatakan teratur masuk (*in-regular*). Demikian juga jika setiap titik dalam graf sedangkan  $G$  memiliki derajat ke luar yang sama, maka  $G$  dikatakan teratur ke luar (*out-regular*). Graf berarah yang sekaligus teratur kedalam dan teratur keluar disebut graf berarah *diregular*. Contoh, graf berarah  $G_1$  pada Gambar 2.11 adalah graf berarah *diregular* dengan derajat dua, tetapi  $G_2$  *non-diregular* karena  $G_2$  hanya teratur ke luar tetapi tidak teratur masuk (Dafik, 2008 : 20).

Komplemen dari graf  $G$  dinotasikan  $\overline{G}$  adalah graf dengan himpunan titik  $V(\overline{G}) = V(G)$  dimana bila titik  $u, v$  bertetangga pada  $G$  jika dan hanya jika titik  $u, v$  tidak tetangga pada  $\overline{G}$ . Contohnya dapat dilihat pada Gambar 2.10.



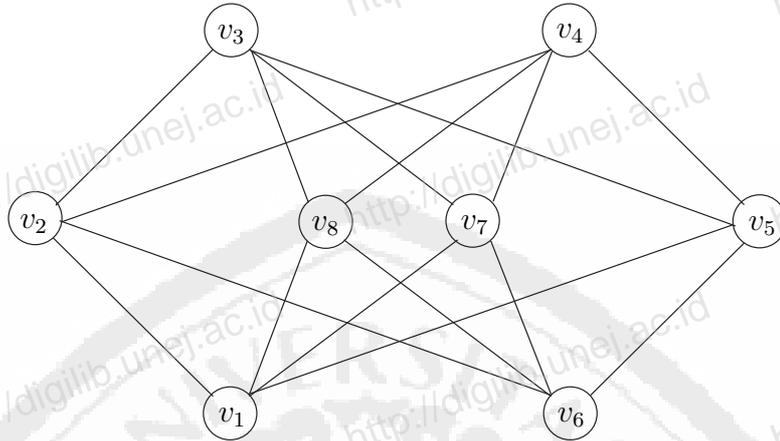
Gambar 2.10: Graf dan komplemennya



Gambar 2.11: Contoh *diregular* dan *non-diregular*

Fuad (2009: 7) menjelaskan bahwa jalan (*walk*) dari suatu graf, dinotasikan dengan  $v_0v_1v_2v_3\dots v_k$  adalah barisan titik dan sisi terhingga dan bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi dalam suatu graf. Jalan pada suatu graf dibentuk dari barisan titik dan sisi terhingga dan bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi dalam suatu graf, dimana titik dan sisinya boleh diulang. Panjang (*length*) dari sebuah jalan adalah banyaknya sisi pada jalan tersebut. Jika semua titik  $v_0 - v_k$  pada jalan tersebut berbeda maka disebut lintasan (*path*). Sebuah lintasan dikatakan

tertutup, jika  $v_0 = v_k$  yang biasa disebut siklus (*cycle*). Pada Gambar 2.12  $v_1v_2v_3v_8v_6v_2v_4v_7v_3$  adalah jalan yang mempunyai panjang 8 yang bukan lintasan,  $v_1v_2v_4v_5v_6v_7v_3v_8$  adalah lintasan yang mempunyai panjang 7, dan  $v_5v_6v_7v_3v_5$  adalah siklus yang mempunyai panjang 4.



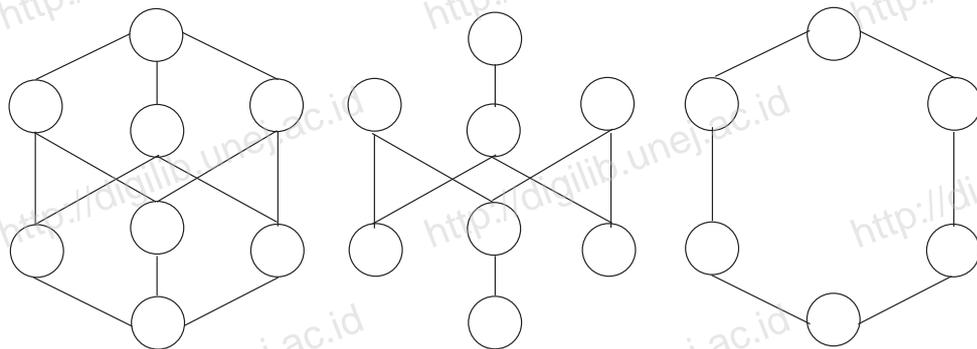
Gambar 2.12: Contoh sebuah graf dengan 8 titik

Jarak (*distance*) dari titik  $a$  ke titik  $b$  adalah panjang dari lintasan terpendek dari  $a$  ke  $b$  yang diukur dengan jumlah sisi yang harus dilewati untuk sampai ke  $b$  dari  $a$ . Sebagai contoh jarak titik  $v_1$  ke titik  $v_6$  pada Gambar 2.12 adalah 2. Diameter dari graf  $G$  adalah jarak maksimum antara sembarang dua titik pada graf  $G$ . *Girth* dari graf  $G$  adalah panjang siklus terpendek graf  $G$ . Sebagai contoh graf pada gambar 2.12 mempunyai diameter 2 dan girth 4.

Graf  $H$  adalah subgraf dari  $G$  jika setiap titik di  $H$  adalah titik di  $G$ , dan setiap sisi di  $H$  adalah sisi di  $G$  ( $V(H) \subseteq V(G)$  dan  $E(H) \subseteq E(G)$ ). Untuk lebih jelasnya contoh graf dan subgrafnya dapat dilihat pada gambar 2.13.

Graf  $G$  dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda  $u$  dan  $v$  di  $G$  ada lintasan dari  $u$  ke  $v$ . Misalkan  $A = (a_{ij})$  adalah matriks  $m \times m$  didefinisikan oleh:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } \{u, v\} \text{ adalah edge, yaitu } v_i \text{ adjacent terhadap } v_j \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

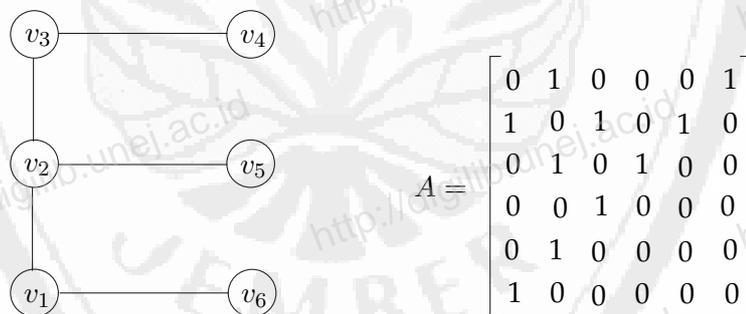


Gambar 2.13: Contoh graf dan subgrafnya

Maka  $A$  disebut matriks *adjacency* dari  $G$ . Dan misalkan  $M = (a_{ij})$  adalah matiks  $m \times m$  didefinisikan oleh:

$$m = \begin{cases} 1 & \text{verteks } v_i \text{ incident pada edge } e_i \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

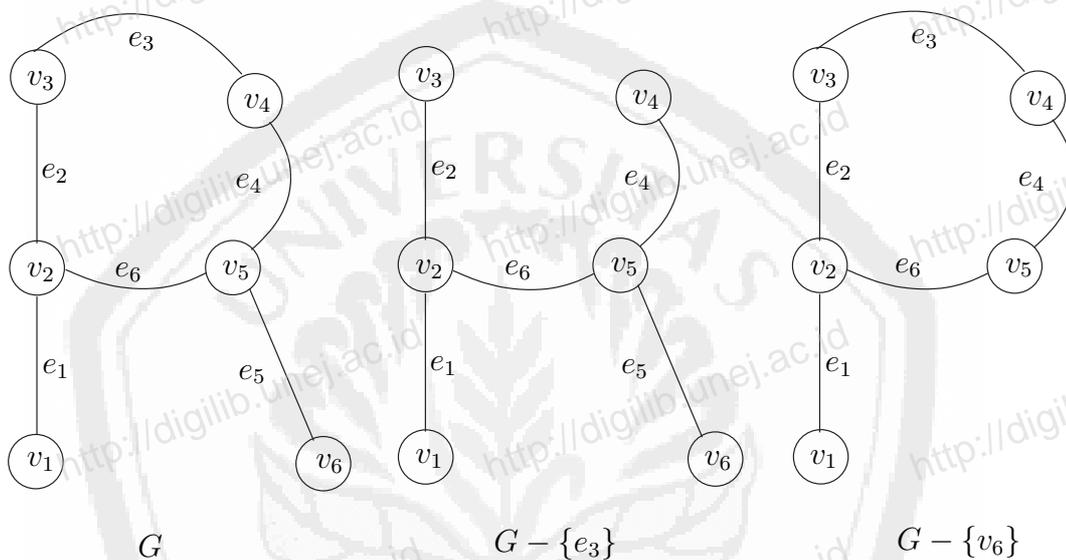
Maka  $M$  disebut matriks *incidence* dari  $G$  (Lipschutz dan Lipson, 2002:35). Berikut diberikan contoh graf dan matrik adjacencynya pada gambar 2.14.



Gambar 2.14: Contoh sebuah graf dan matrik adjacencynya

Misal  $e$  adalah sebuah sisi pada graf  $G$  maka  $G - \{e\}$  adalah sebuah graf yang dihasilkan dari  $G$  dengan menghapus sisi  $e$ . Jika  $G - \{e\}$  tidak terhubung maka  $e$  disebut jembatan (*bridge*). Secara umum, jika  $E_1$  adalah himpunan sisi dalam  $G$  maka  $G - E_1$  adalah graf yang dihasilkan dari  $G$  dengan menghapus semua sisi  $E_1$ .

Misal  $v$  adalah titik pada sebuah graf  $G$ , dengan  $G - \{v\}$  adalah sebuah graf yang dihasilkan dari  $G$  dengan menghapus titik  $v$  dan semua sisi yang *adjacent* pada  $v$ . Jika  $G - \{v\}$  adalah tak terhubung, maka  $v$  disebut titik potong (*cut-vertex*) (Chartrand dan Oellermann, 1993: 22). Dan jika  $V_1$  adalah himpunan titik pada  $G$  maka  $G - V_1$  adalah graf yang dihasilkan dari  $G$  dengan menghapus semua titik pada  $V_1$  dan semua sisi yang *adjacent* pada titik tersebut. Gambar 2.15 menunjukkan contoh graf  $G - \{e_3\}$  adalah hasil penghapusan sisi  $e_3$  dari  $G$  dan graf  $G - \{v_6\}$  adalah hasil penghapusan titik  $v_6$  dari  $G$ .



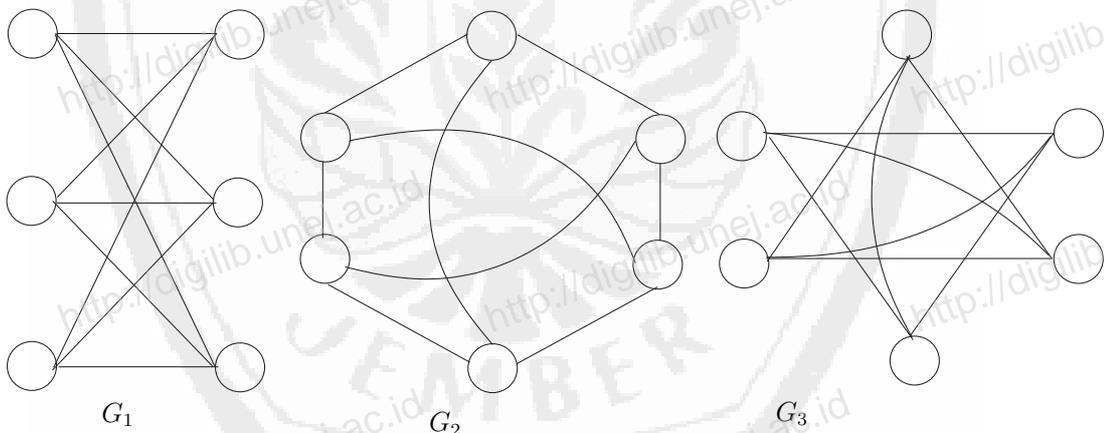
Gambar 2.15: Contoh graf terpotong

Dua buah graf dikatakan isomorfis jika mereka mempunyai struktur yang sama dan kebanyakan, mereka berbeda cara pemberian label titik-titik dan sisi-sisinya, atau cara menggambarannya. Untuk memperjelas maksud kalimat tersebut, kita akan mendefinisikan dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  isomorfis jika ada suatu fungsi  $\phi : V(G) \rightarrow V(G)$  sedemikian hingga  $uv \in (G_i) \iff \phi(u)\phi(v) \in E(G_2)$ . Fungsi  $\phi$  dinamakan sebuah fungsi isomorfis. Jika dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  isomorfis, maka dituliskan  $G_1 \cong G_2$ . Sampai saat ini untuk menentukan apakah dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  isomorfis atau tidak belum ada teori yang dapat dipakai. Tetapi, jika graf  $G_1$  dan  $G_2$  isomorfis, maka kedua graf tersebut selalu

memenuhi 4 syarat sebagai berikut :

1. jumlah titik  $G_1 =$  jumlah titik  $G_2$  (jumlah simpul yang sama).
2. jumlah garis  $G_1 =$  jumlah garis  $G_2$  (jumlah sisi yang sama).
3. jumlah garis yang mempunyai derajat tertentu dalam graf  $G_1$  dan  $G_2$  sama (mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu).
4. Graf  $G_1$  dan  $G_2$  mempunyai *girth*(panjang siklus terpendek) yang sama.

Keempat syarat tersebut belum cukup menjamin bahwa kedua graf isomorfis. Untuk menunjukkan bahwa kedua graf  $G_1$  dan  $G_2$  isomorfis, maka dapat dilihat dari matriks ketetanggaan kedua graf tersebut sama. Keisomorfisan graf dapat dilihat pada Gambar 2.16. Graf  $G_1$  dan  $G_3$  tidak isomorfis karena  $G_3$  mengandung siklus dengan panjang 3 sementara  $G_1$  tidak mengandung siklus dengan panjang 3 dan tidak mungkin mengandung pemetaan satu-satu dari  $G_1$  ke  $G_3$ .

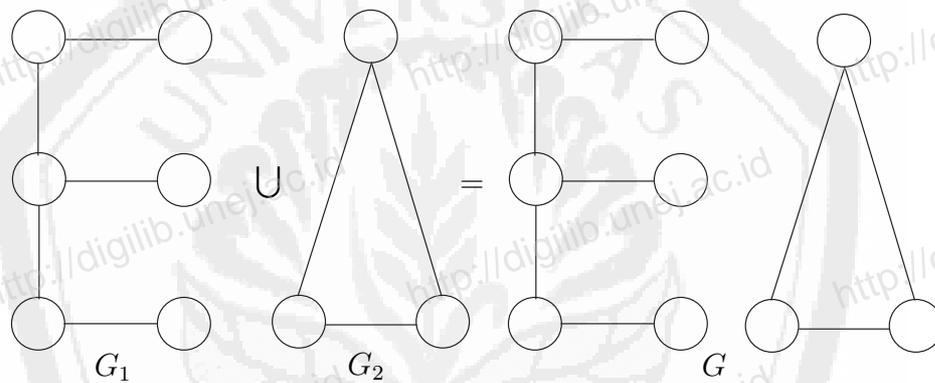


Gambar 2.16: Keisomorfisan graf

Dua buah titik  $v_i$  dan  $v_j$  dikatakan terhubung jika terdapat lintasan dari  $v_i$  ke  $v_j$ . Sedangkan graf tak berarah  $G$  disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang titik  $v_i$  dan  $v_j$  didalam himpunan  $V$  terdapat lintasan dari  $v_i$  ke  $v_j$ . Jika tidak, maka  $G$  disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*).

Graf yang hanya terdiri dari satu titik tetap disebut graf terhubung karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri.

Gabungan dari dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  dinotasikan dengan  $G_1 \cup G_2$ , didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titiknya adalah  $V(G_1) \cup V(G_2)$  dan himpunan sisi  $E(G_1) \cup E(G_2)$ . Pada Gambar 2.17, graf  $G$  merupakan gabungan graf  $G_1$  dan  $G_2$ , yaitu  $G = G_1 \cup G_2$ . Graf gabungan  $mG$  didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari  $m$  buah kopi graf  $G$ , atau dapat juga dikatakan sebagai graf dengan  $m$  komponen, dimana setiap komponennya adalah graf  $G$ . Dengan kata lain  $mG = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_m$ , dengan  $G_1 = G_2 = G_3 = \dots = G_m = G$ . Misal graf  $G$  mempunyai  $p$  titik dan  $q$  sisi, maka graf  $mG$  mempunyai  $mp$  titik dan  $mq$  sisi (Wijaya, 2001:85).



Gambar 2.17: Contoh gabungan graf

### 2.3 Jenis-jenis Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau sisi kalang, berdasarkan jumlah simpul, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

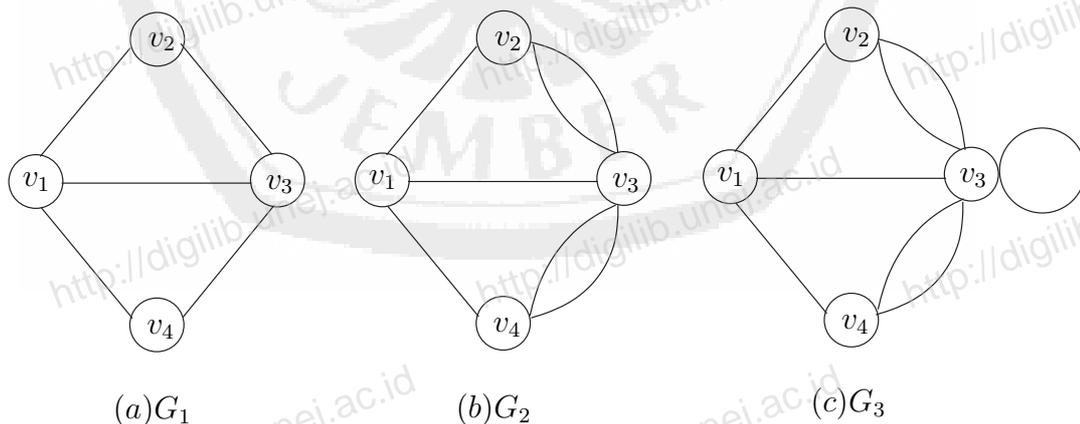
Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf sederhana (*simple – graph*)

Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana.  $G_1$  pada Gambar 2.18(a) adalah contoh graf sederhana yang merepresentasikan jaringan komputer. Simpul menyatakan komputer, sedangkan sisi menyatakan saluran telepon untuk berkomunikasi. Saluran telepon dapat beroperasi pada dua arah.

## 2. Graf tak-sederhana (*unsimple – graph*)

Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple – graph*). Ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Sisi ganda yang menghubungkan sepasang simpul bisa lebih dari dua buah.  $G_2$  pada Gambar 2.18(b) adalah graf-ganda. Sisi ganda pada  $G_2$  dapat diandaikan sebagai saluran telepon tambahan apabila beban komunikasi data antar komputer sangat padat. Graf semu adalah graf yang mengandung gelang.  $G_3$  adalah graf semu (termasuk bila memiliki sisi ganda sekalipun). Sisi gelang pada  $G_3$  dapat dianggap sebagai saluran telepon tambahan yang menghubungkan komputer dengan dirinya sendiri (mungkin untuk tujuan diagnostik). Graf semu lebih umum daripada graf ganda, karena sisi pada graf semu dapat terhubung ke dirinya sendiri.



Gambar 2.18: (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

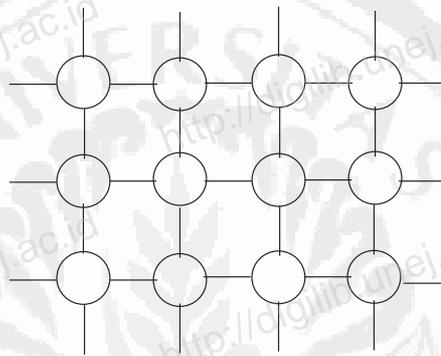
Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf berhingga (*limited graph*)

Graf berhingga adalah graf yang jumlah simpulnya,  $n$ , berhingga. Graf pada Gambar 2.18 adalah contoh graf yang berhingga.

2. Graf tak-berhingga (*unlimited graph*)

Graf yang jumlah simpulnya,  $n$ , tidak berhingga banyaknya disebut graf tak-berhingga. Graf pada Gambar 2.19 adalah contoh graf yang tidak berhingga.



Gambar 2.19: Graf tak-berhingga

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dikelompokkan menjadi dua jenis:

1. Graf tak-berarah (*undirected graph*) adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi  $(v_j, v_k) = (v_k, v_j)$  adalah sisi yang sama.

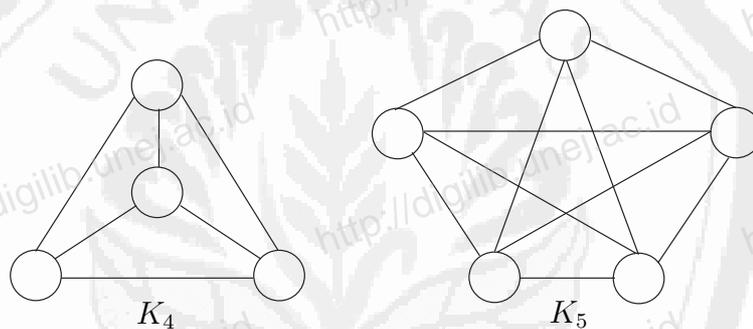
2. Graf berarah (*directed graph*) adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Pada graf berarah  $(v_j, v_k)$  dan  $(v_k, v_j)$  menyatakan dua buah sisi yang berbeda, dengan kata lain  $(v_j, v_k) \neq (v_k, v_j)$ . Untuk sisi  $(v_j, v_k)$  titik  $v_j$  dinamakan titik asal (*initial vertex*) dan titik  $v_k$  dinamakan titik terminal (*terminal vertex*).

Gambar 2.11 adalah contoh graf berarah sedangkan gambar 2.12 adalah contoh graf tak-berarah.

## 2.4 Graf Khusus

Dari pengertian graf secara umum, terdapat beberapa famili graf, diantaranya; graf siklus, graf lengkap, graf dua partisi, graf dua partisi lengkap, generalisasi graf Petersen, graf friendship, graf roda, graf ladder, dan masih banyak lainnya. Berikut akan dijelaskan beberapa graf khusus.

1. Graf komplit, dinotasikan dengan  $K_n$  yang berderajat sama sebanyak  $n$  dimana setiap dua titik berbeda adalah tetangga.  $K_n$  adalah graf reguler dengan derajat  $r = n - 1$ . Gambar 2.20 menunjukkan komplit graf  $K_4$  dan  $K_5$ .



Gambar 2.20: Graf komplit  $K_4$  dan  $K_5$

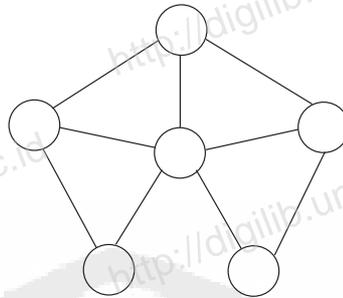
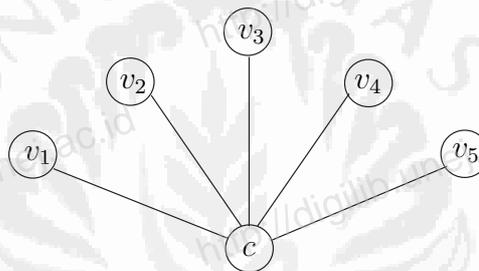
2. Graf Kipas ( $fan$ )

Graf kipas  $\hat{K}_n (n \geq 3)$  adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan  $P_n$  dengan suatu titik yang disebut pusat. Jadi,  $\hat{K}_n$  terdiri dari  $n + 1$  titik dan  $2n - 1$  sisi. Misalkan  $c, v_1, v_2, \dots, v_n$  adalah titik pada graf kipas  $\hat{K}_n$  dengan  $c$  merupakan titik pusat, maka  $cv_1, cv_2, \dots, cv_n, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$  adalah sisi-sisi dari  $\hat{K}_n$ . Untuk contoh, perhatikan  $\hat{K}_n$  pada Gambar 2.21.

3. Graf Bintang

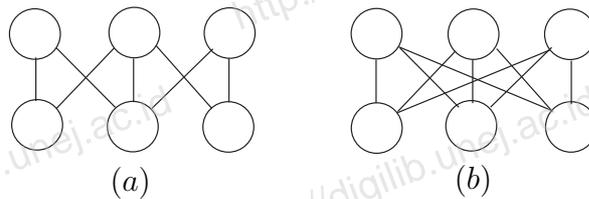
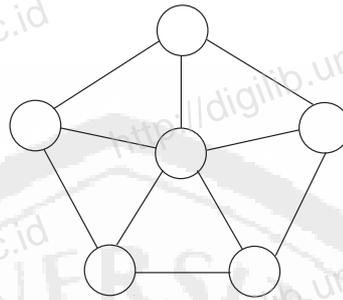
Graf bintang  $S_n, n \geq 3$  adalah graf pohon yang terdiri dari 1 titik yang

berderajat  $n - 1$  dan  $n - 1$  titik yang berderajat 1. Jadi, graf bintang  $S_n$  terdiri dari  $n$  titik dan  $n - 1$  sisi. Sebagai ilustrasi perhatikan graf  $S_6$  pada Gambar 2.22.

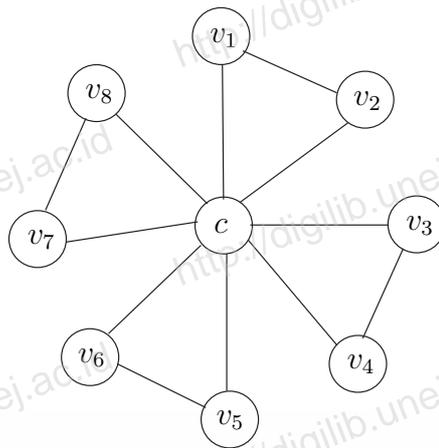
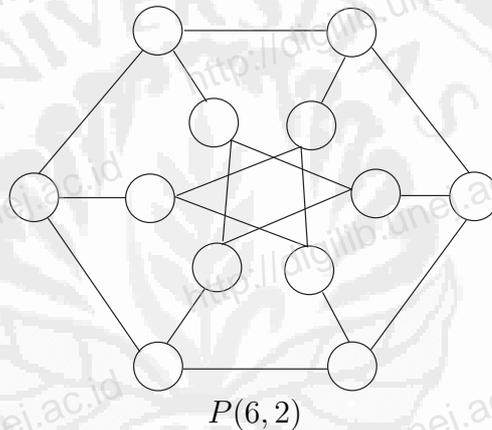
Gambar 2.21: Graf kipas  $\hat{K}_5$ 

Gambar 2.22: Graf bintang

4. Sebuah graf  $G$  dinamakan bipartit jika  $V$  dapat dipartisi pada dua bagian himpunan yang tidak kosong  $V_1$  dan  $V_2$  sedemikian hingga setiap sisi pada  $E$  bergabung dengan titik pada  $V_1$  dengan titik  $V_2$ . Jika masing-masing titik dalam  $V_1$  adalah tetangga untuk semua titik-titik di  $V_2$ , kemudian  $G$  dikatakan graf bipartit komplit, yang disimbolkan dengan  $K_{m,n}$  dimana  $m = |V_1|$  dan  $n = |V_2|$ . Sebagai contoh pada Gambar 2.23.
5. Graf *whell* dinotasikan dengan  $W_n$  dengan jumlah jeruji sebanyak  $n$  adalah graf yang mempunyai titik  $x$  ditengah yang menghubungkan semua titik sebanyak  $n$  pada siklus (*cycle*) ( $C_n$ ) sebagai contoh pada Gambar 2.24.

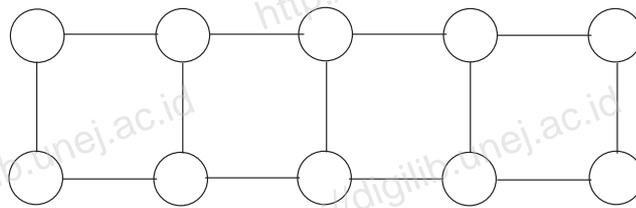
Gambar 2.23: Graf bipartit (a) dan graf bipartit lengkap  $K_{3,3}$ Gambar 2.24: Graf whell  $W_5$ 

6. Graf *friendship*  $F_n$  adalah graf yang terdiri dari  $n$  segitiga dengan tepat 1 titik persekutuan yang disebut dengan titik pusat. Gambar 2.25 adalah contoh graf *friendship*.
7. Generalisasi graf Petersen dinotasikan  $P(n, m)$  dengan  $n \geq 3$  dan  $1 \leq m \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  adalah graf reguler yang terdiri dari  $n$  sisi luar yang berupa siklus, sisi dalam yang menghubungkan titik  $v_i v_{i+m}$  dengan indeks diambil dari modulo  $n$  dan sisi antara yang menghubungkan titik luar dan titik dalam yang mempunyai indeks sama. Catatan bahwa  $\lfloor x \rfloor$  adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari  $x$ . Generalisasi graf Petersen  $P(n, m)$ ,  $n \geq 3$  dan  $1 \leq m \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  mempunyai himpunan titik  $V = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$  dan himpunan sisi  $E = \{u_i u_{i+1}, u_i v_{i+1}, v_i v_{i+m}\}$  dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$  dan semua indeks diambil pada modulo  $n$  (dalam Slamin, 2001: 289), dimana  $u_i$  adalah titik bagian luar dari generalisasi graf Petersen dan  $v_i$  adalah titik bagian dalam dari generalisasi graf Petersen. Gambar 2.26 merupakan graf petersen.

Gambar 2.25: Graf friendship  $F_4$  $P(6, 2)$ 

Gambar 2.26: Graf petersen

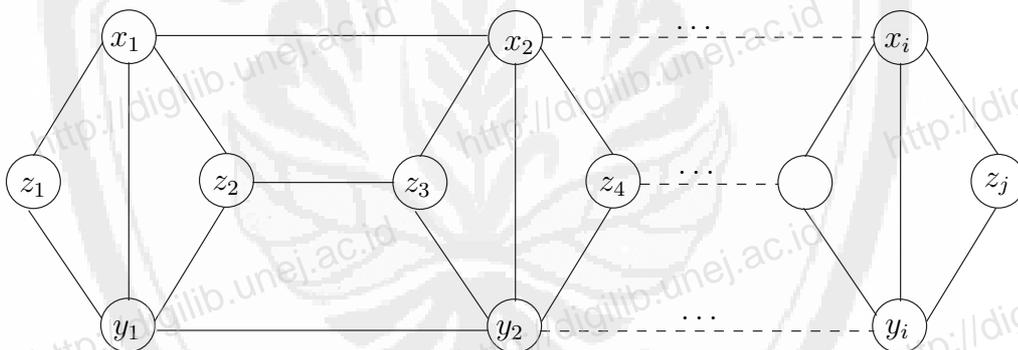
8. Graf Ladder yang dilambangkan dengan  $L_n$  adalah sebuah graf yang berpadanan dengan  $K_2 \times P_n$  dengan titik  $V(L_n) = \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(L_n) = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_i : 1 \leq i \leq n\}$  (Sugeng, 2005:78). Graf ladder mempunyai  $2n$  titik, dan  $3n-2$  sisi. Gambar 2.27 menunjukkan satu contoh graf Ladder dengan  $n=5$ .



Gambar 2.27: Graf ladder  $L_5$

### 2.5 Graf tangga permata

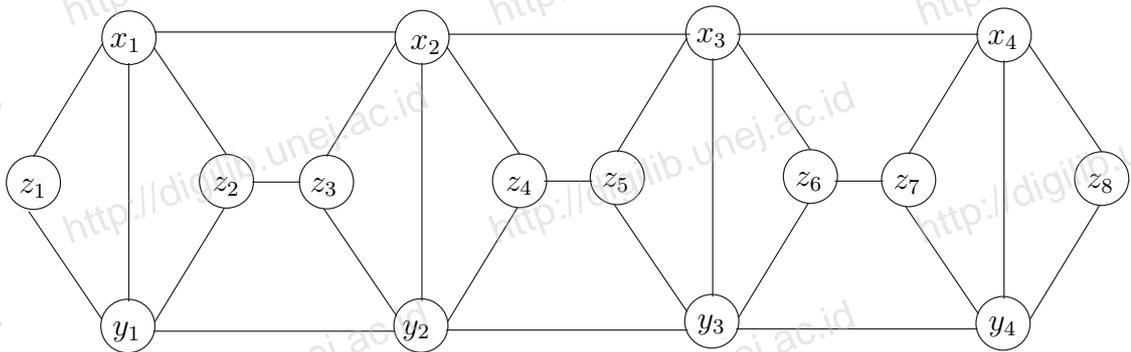
Graf tangga permata adalah salah satu family dari graf ladder. Graf tangga permata adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan  $Dl_n$  dimana  $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n\}$  dan  $E(Dl_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}; 2 \leq j \leq 2n-2 \text{ genap}\} \cup \{x_i z_{2i-1}, x_i z_{2i}, y_i z_{2i-1}, y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ . Gambar 2.28 merupakan graf tangga permata  $Dl_n$  dan pada Gambar 2.29 adalah contoh graf  $Dl_4$ .



Gambar 2.28: Graf Tangga Permata  $Dl_n$

### 2.6 Pelabelan Graf

Salah satu konsep dasar yang berkaitan dengan pelabelan graf adalah fungsi bijektif dan barisan aritmatika.

Gambar 2.29: Graf Tangga Permata  $D_{l_4}$ 

### 2.6.1 Fungsi Bijektif dan Barisan Aritmatika

Secara umum, fungsi dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  didefinisikan sebagai aturan yang memetakan setiap anggota himpunan  $A$  (dinamakan sebagai domain) kepada anggota himpunan  $B$  (dinamakan sebagai kodomain). Istilah "fungsi", "pemetaan", "peta", "transformasi", dan "operator" biasanya dipakai secara sinonim.

Anggota himpunan yang dipetakan dapat berupa apa saja (kata, orang, atau objek lain), namun biasanya yang dibahas adalah besaran matematika seperti bilangan riil. Untuk mendefinisikan fungsi dapat digunakan notasi berikut.

$$f : A \rightarrow B$$

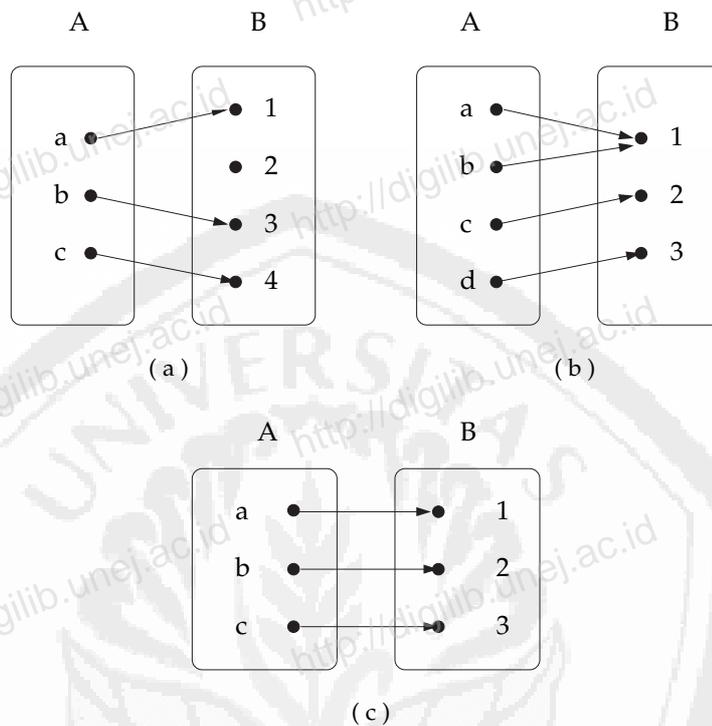
Yang artinya bahwa fungsi  $f$  yang memetakan setiap elemen himpunan  $A$  kepada  $B$ . Jenis-jenis fungsi ada tiga, yaitu fungsi injektif, surjektif dan bijektif.

Fungsi  $f : A \rightarrow B$  disebut fungsi satu-satu atau fungsi injektif jika dan hanya jika untuk sebarang  $a_1$  dan  $a_2 \in A$  dengan  $a_1$  tidak sama dengan  $a_2$  maka berlaku  $f(a_1)$  tidak sama dengan  $f(a_2)$ .

Fungsi  $f : A \rightarrow B$  disebut fungsi kepada atau fungsi surjektif jika dan hanya jika untuk setiap  $b$  dalam kodomain  $B$  terdapat paling tidak satu  $a$  dalam domain  $A$  sehingga berlaku  $f(a) = b$ . Dengan kata lain, suatu kodomain fungsi

surjektif sama dengan kisarannya (range).

Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif. Gambar 2.30 menunjukkan fungsi injektif, surjektif dan bijektif.



Gambar 2.30: (a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif

Barisan yang dibentuk dengan cara menambah atau mengurangi suku sebelumnya dengan suatu bilangan tetap tertentu disebut barisan aritmatika.

$$(a) 2, 6, 10, 14, 18, \dots$$

$$(b) 50, 40, 30, 20, 10, \dots$$

Barisan (a) mempunyai beda,  $b = 4$ . Barisan (a) disebut barisan aritmetika naik karena nilai suku-sukunya makin besar. Barisan (b) mempunyai beda,  $b = -10$ . Barisan (b) disebut barisan aritmetika turun karena nilai suku-sukunya makin kecil. Suatu barisan  $U_1, U_2, U_3, \dots$  disebut barisan aritmetika jika selisih dua suku yang berurutan adalah tetap. Nilai untuk menentukan

suku ke- $n$  dari barisan aritmetika. perhatikan kembali contoh barisan (a). 2, 6, 10, 14, 18, ... Misalkan  $U_1, U_2, U_3, \dots$  adalah barisan aritmetika tersebut maka

$$U_1 = 2 = 2 + 4(0)$$

$$U_2 = 6 = 2 + 4 = 2 + 4(1)$$

$$U_3 = 10 = 2 + 4 + 4 = 2 + 4(2)$$

...

$$U_n = 2 + 4(n - 1)$$

Secara umum, jika suku pertama ( $U_1$ ) =  $a$  dan beda suku yang berurutan adalah  $b$  maka dari rumus  $U_n = 2 + 4(n - 1)$  diperoleh 2 adalah  $a$  dan 4 adalah  $b$ . Oleh sebab itu, suku ke- $n$  dapat dirumuskan

$$U_n = a + b(n - 1)$$

Barisan aritmetika yang mempunyai beda positif disebut barisan aritmetika naik, sedangkan jika bedanya negatif disebut barisan aritmetika turun.  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$  disebut barisan aritmatika, jika  $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1} = \text{konstanta}$ .

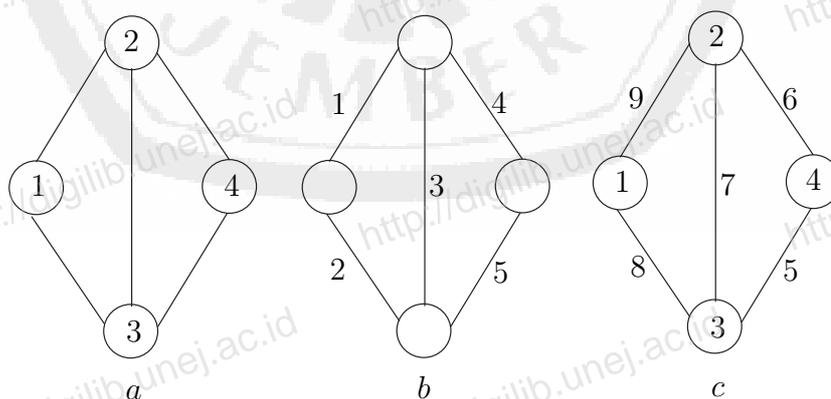
### 2.6.2 Aksioma, Lemma, Teorema, Corollary, Konjektur dan Open Problem

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi. Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar. Bentuk khusus dari teorema adalah lemma dan corollary (akibat). Lemma adalah teorema sederhana yang digunakan dalam pembuktian teorema lain. Lemma biasanya tidak menarik namun berguna pada pembuktian proposisi yang lebih kompleks, yang dalam hal ini pembuktian tersebut dapat lebih mudah dimengerti bila menggunakan sederetan lemma, setiap lemma dibuktikan secara individual. Corollary (akibat) adalah teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan, atau dapat dikatakan corollary adalah teorema yang mengikuti dari teorema lain. Konjektur adalah sebuah proposisi yang dipradugakan sebagai hal yang nyata, be-

nar, atau asli, sebagian besarnya didasarkan pada landasan inkonklusif (tanpa simpulan). Konjektur bertentangan dengan hipotesis (oleh karenanya bertentangan pula dengan teori, aksioma, atau prinsip), yang merupakan pernyataan yang mengandung perjanjian menurut landasan yang dapat diterima. Di dalam matematika, konjektur adalah proposisi yang tidak terbukti atau tidak memerlukan bukti atau juga teorema yang dianggap pasti benar adanya. Open problem (masalah terbuka atau pertanyaan terbuka) adalah beberapa masalah yang dapat secara akurat dinyatakan, dan belum diselesaikan (tidak ada solusi untuk diketahui). Contoh open problem dalam matematika, yang telah diselesaikan dan ditutup oleh peneliti di akhir abad kedua puluh, adalah Teorema Terakhir Fermat dan empat warna teorema peta. Sedangkan open problem yang belum terselesaikan contohnya adalah permasalahan jembatan Königsberg.

### 2.6.3 Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan graf  $G$  adalah sebuah pemetaan dari elemen-elemen graf  $G$  (titik dan sisi) terhadap bilangan bulat positif. Jika domainnya adalah himpunan titik  $G$  maka pelabelannya disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), sedangkan jika domainnya adalah himpunan sisi  $G$  maka pelabelannya disebut pelabelan sisi (*edge labeling*). Jika domainnya adalah kedua himpunan tersebut maka pelabelannya disebut pelabelan total (*total labeling*). Gambar 2.31 mengilustrasikan pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total pada graf.



Gambar 2.31: (a) Pelabelan titik (b) pelabelan Sisi (c) Pelabelan total

Pada pelabelan titik, jumlah label dua titik yang menempel pada suatu sisi disebut *bobot sisi*. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka disebut pelabelan titik sisi ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  maka pelabelan tersebut disebut pelabelan titik sisi anti ajaib (*edge antimagic vertex labelling* (EAVL)).

Sedangkan dalam pelabelan total, bobot sisi diartikan sebagai jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada suatu sisi. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total-sisi-ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmetika dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total sisi anti ajaib (pelabelan total sisi antimagic) (Dartono, 2006).

#### 2.6.4 Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi antimagic

Sebuah pemetaan satu-satu  $f$  dari  $V(G)$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, p\}$  disebut pelabelan titik  $(a, d)$ -sisi antimagic jika himpunan bobot sisinya  $w(uv) = f(u) + f(v)$  pada semua sisi  $G$  adalah  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$  untuk  $a > 0$  dan  $d \geq 0$  keduanya adalah bilangan bulat, sedangkan Pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic adalah sebuah pemetaan satu-satu  $f$  dari  $V(G) \cup E(G)$  ke bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$  sehingga himpunan bobot sisinya  $w(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)$  pada semua sisi  $G$  adalah  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$  untuk  $a > 0$  dan  $d \geq 0$  keduanya bilangan bulat. Sebuah pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic disebut pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic jika  $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$  dan  $f(E) = \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$ .

Dengan kata lain, pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada sebuah graf  $G = (V, E)$  adalah pelabelan titik dengan bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, p\}$  dan pelabelan sisi dengan bilangan bulat  $\{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$  dari sebuah graf  $G$  dimana  $p$  adalah banyaknya titik dan  $q$  adalah banyaknya sisi pada graf  $G$ , sedemikian hingga himpunan bobot dari sisinya adalah  $W = \{w(x, y) | xy \in E(G)\} = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$  untuk  $a > 0$  dan  $d \geq 0$ , dimana  $\alpha(u)$

adalah label dari titik  $u$ ,  $\alpha(v)$  adalah label dari titik  $v$  dan  $\alpha(uv)$  adalah label dari sisi  $uv$ . Untuk mencari batas atas nilai beda  $d$  pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dapat ditentukan dengan lemma berikut ini seperti (dalam Dafik: 2007: 26-27).

◇ **Lemma 2.6.1** *Jika sebuah graf  $(p, q)$  adalah pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic maka  $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$*

**Bukti.**  $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$  dan  $f(E) = \{p+1, p+2, \dots, p+q\}$

Misalkan graf  $(p, q)$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan pemetaan  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p+q\}$ . Nilai minimum yang mungkin dari bobot sisi terkecil adalah dengan menjumlahkan dua label titik terkecil (1 dan 2) dengan satu label sisi terkecil ( $p+1$ ), sehingga diperoleh:

$1 + (p+1) + 2 = p+4$ . Dapat ditulis :

$$p+4 \leq a$$

Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari bobot sisi terbesar adalah dengan menjumlahkan dua label titik terbesar ( $(p-1)$  dan  $p$ ) dengan satu label sisi terbesar ( $p+q$ ), sehingga diperoleh:

$(p-1) + (p+q) + p = 3p+q-1$ . Dari sifat bobot SEATL yang menyatakan bahwa  $a + (q-1)d$  adalah suku terbesar, maka diperoleh:

$$\Leftrightarrow a + (q-1)d \leq 3p+q-1$$

$$\Leftrightarrow (p+4) + (q-1)d \leq 3p+q-1$$

$$\Leftrightarrow d \leq \frac{3p+q-1-(p+4)}{q-1}$$

$$\Leftrightarrow d \leq \frac{2p+q-5}{q-1} \tag{2.1}$$

Dari persamaan (2.1) terbukti bahwa  $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$  sehingga diperoleh  $d$  dari berbagai famili graf. □

K.A. Sugeng, dkk (2005:169) mengatakan bahwa lema berikut digunakan untuk menemukan pelabelan total super  $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf untuk jumlah sisi ganjil.

◇ **Lemma 2.6.2** Misalkan  $\mathfrak{A}$  merupakan sebuah himpunan,  $\mathfrak{A} = \{c, c + 1, c + 2, \dots, c + k\}$ , dengan  $k$  genap. Maka ada sebuah permutasi  $\Pi(\mathfrak{A})$  dari anggota-anggota himpunan  $\mathfrak{A}$  sehingga  $\mathfrak{A} + \Pi(\mathfrak{A}) = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \dots, 2c + \frac{3k}{2} - 1, 2c + \frac{3k}{2}\}$ .

**Bukti.** Misal  $\mathfrak{A}$  adalah suatu himpunan  $\mathfrak{A} = \{a_i | a_i = c + (i - 1), 1 \leq i \leq k + 1\}$  dan  $k$  adalah genap. Definisi dari permutasi adalah  $\Pi(\mathfrak{A}) = \{b_i | 1 \leq i \leq k + 1\}$  dari anggota  $\mathfrak{A}$  berikut:

$$b_i = \begin{cases} c + \frac{k}{2} + \frac{1-i}{2}, & \text{jika } i \text{ adalah ganjil, } 1 \leq k + 1 \\ c + k + \frac{2-i}{2}, & \text{jika } i \text{ adalah genap, } 2 \leq i \leq k \end{cases}$$

dengan pembuktian langsung kita dapatkan:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} + \mathfrak{k}(\mathfrak{A}) &= \{a_i + b_i | 1 \leq i \leq k + 1\} = \\ &= \{2c + \frac{k}{2} + \frac{1-i}{2} | i \text{ ganjil, } 1 \leq k + 1\} \cup \{2c + k + \frac{i}{2} | i \text{ genap, } 1 \leq k\} = \\ &= \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, \dots, 2c + \frac{3k}{2} - 1, 2c + \frac{3k}{2}\} \end{aligned}$$

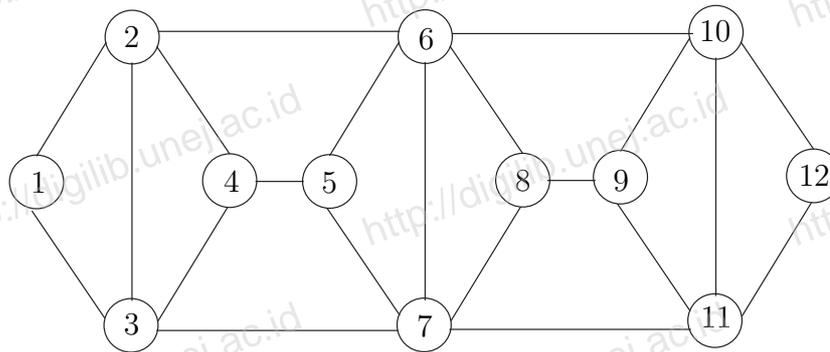
dan kita mendapatkan hasil. □

Secara harfiah, pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic dan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic memuat perluasan gagasan dari total  $(a, d)$ -sisi magic dan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi magic (Baca dan Miller, 2007:37).

### 2.6.5 Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata

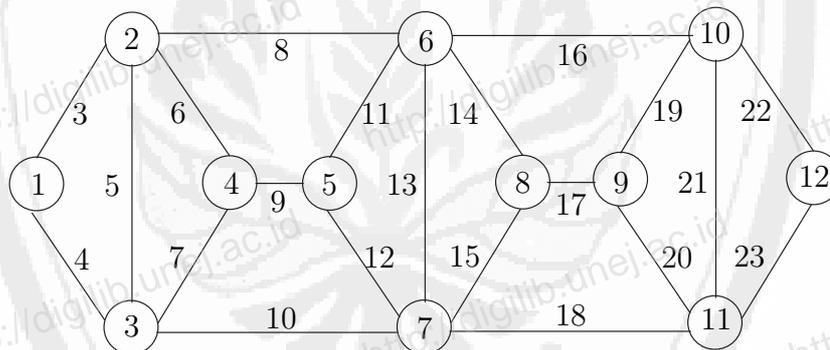
Pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata ini belum ada yang menemukan sebelumnya. Peneliti akan mencoba menemukan pelabelannya dengan menggunakan teknik berikut ini :

1. menentukan EAVL (*Edge Antimagic Vertex Labelling*) pada graf Tangga Permata dengan teknik pattern recognition;
2. dengan melihat pola pelabelan pada gambar 2.32, langkah selanjutnya adalah menentukan fungsi bijektif dengan domain bilangan bulat positif  $1, 2, 3, \dots, p$ ;



Gambar 2.32: EAV  $Dl_3$

- selanjutnya menghitung bobot *edge antimagic vertex labeling* (EAVL). Dari gambar 2.33 tampak bahwa barisan bobot sisinya ( $w$ ) adalah sebagai berikut: 3, 4, 5, ..., 23. Terlihat bahwa bobot EAVL membentuk barisan aritmatika dengan beda 1;



Gambar 2.33: EAV  $Dl_3$

- menentukan label sisi dari *Super Edge Antimagic Total Labeling* (SEATL) untuk  $d = 0$  pada graf Tangga Permata ( $Dl_3$ ). Melengkapi label titik pada Gambar 2.33 dengan melabeli sisi-sisinya sehingga menjadi pelabelan total.

## 2.7 Hasil-Hasil Pelabelan Total Super $(a, d)$ -Sisi Antimagic pada Graf Diskonektif

Tabel 2.2: Ringkasan dari pelabelan total super  $(a, d)$ -edge antimagic pada graf disconnected.

Graf	$d$	Hasil	Open Problem
$P_n \cup P_{n+1}$	$1 \leq d \leq 3$	(i) $d \in \{1, 3\}$ dan $n \geq 2$ (ii) $d = 2$ dan $n \geq 3$ adalah ganjil (Sudarsana, <i>et al</i> , 2005)	$d = 2$ untuk genap $n$
$nP_2 \cup P_n$	$1 \leq d \leq 3$	$d \in \{1, 2\}$ dan $n \geq 2$ (Sudarsana, <i>et al</i> , 2005)	$d = 3$ for $n \geq 2$
$nP_2 \cup P_{n+2}$	$1 \leq d \leq 4$	$d \in \{1, 2\}$ dan $n \geq 1$ (Sudarsana, <i>et al</i> , 2005)	$d \in \{3, 4\}$ untuk $n \geq 1$
$mK_n$	$d \leq 5$	jika dan hanya jika (i) $d \in \{0, 2\}$ dan $n \in \{2, 3\}$ , $m \geq 3$ ganjil, atau (ii) $d = 1$ dan $m, n \geq 2$ , atau (iii) $d \in \{3, 5\}$ dan $n = 2$ , $m \geq 2$ , atau (iv) $d = 4$ dan $n = 2, m \geq 3$ ganjil (M. Bača dan C. Barrientos, Submitted, 2008)	
$mK_{n,n}$	$d \leq 5$	(i) jika $d = 1$ untuk semua $m$ dan $n$ (ii) jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $n = 1$ dan $m \geq 3$ ganjil (iii) jika $d \in \{3, 5\}$ untuk $n = 1$ dan semua $m \geq 2$ (iv) jika $d = 4$ untuk $n = 1$ dan semua $m \geq 3$ ganjil (M. Bača dan C. Barrientos, Submitted)	jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $n = 3$ dan $m \geq 3$ ganjil
$mC_n$	$d \leq 2$	jika setiap (i) $d \in \{0, 2\}$ untuk $m, n \geq 3$ ganjil	

Graph	$d$	Hasil	Open Problem
		(ii) $d = 1$ untuk semua $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ (Dafik, et al, 2009)	
$mP_n$	$d \leq 5$	jika setiap (i) $d \in \{1, 3\}$ untuk semua $m$ dan $n$ (ii) $d \in \{0, 2\}$ untuk semua $m, n$ ganjil (iii) $d \in \{4, 5\}$ untuk semua $m$ dan $n = 2$ (Dafik, et al, 2009)	
$mK_{n,n,n}$	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m$ ganjil dan $n$ sembarang (Dafik, et al, 2009)	
$mK_{n,n,\dots,n}$	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m, n$ ganjil (Dafik, et al, 2006)	
$mC_n \odot \bar{K}_n$	$d \leq 2$	jika setiap (i) $d \in \{0, 2\}$ untuk $m, n \geq 3$ ganjil (ii) untuk semua $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ (M.Bača, et al, in press)	
$mP_n \cup \mu C_n$	$d \leq 2$	jika setiap (i) $d \in \{0, 2\}$ untuk setiap $m + \mu$ dan $n$ ganjil (ii) $d = 1$ untuk $m$ genap (Dafik, et al, in press)	
$mK_{1,m} \cup K_{1,n}$	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $n + 1$ faktor dari $m$ (Dafik, et al, in press)	
$mK_{1,m} \cup S_{k,1}$	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $m, n$ sembarang (Dafik, et al, in press)	
$m$ -caterpillar	$d \leq 5$	$d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ untuk $m, n$ sembarang	

Graph	$d$	Hasil	Open Problem
		(M.Bača, <i>et al</i> , in press)	
$mL_n$	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m, n$ ganjil (M. Fuad, 2009)	jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $m$ genap
$kP_{(n,2)}$	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $k, n$ ganjil (Indayani.D.V , 2010)	jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $k, n$ genap
$mB_{(n,k)}$	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $m \geq 2, n \geq 2,$ dan $k \geq 4$ (K.Biyadi , 2010)	jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $m, n$ genap
$mF_{(n,k)}$	$d < 4$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $m \geq 2, n \geq 2,$ dan $k \geq 3$ (Z.Abidin , 2010)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• jika <math>d \in \{0, 2\}</math> untuk <math>m, n</math> genap dan <math>k \geq 3</math></li> <li>• jika <math>d \in \{1, 3\}</math> untuk <math>m \geq 2, n</math> ganjil dan <math>k \geq 3</math></li> </ul>
$m\mathcal{L}_{(i,j,k)}$	$d < 4$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $m \geq 3,$ $1 \leq i \leq n, j = 2,$ dan $k = 1$ (R.Raty Rahmad , 2010)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• jika <math>d = 3</math> untuk <math>m \geq 3</math> ganjil dan <math>n \geq i \geq 2</math> genap</li> <li>• jika <math>d \in \{1, 3\}</math> untuk <math>m \geq 3</math> ganjil dan <math>n \geq i \geq 2</math> ganjil</li> <li>• jika <math>d \in \{1, 3\}</math> untuk <math>m \geq 3</math> genap dan <math>n \geq i \geq 2</math></li> </ul>
$mE_n$	$d < 4$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil, $n \geq 3$ (Riza Deviyana , 2011)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• jika <math>d = 1</math> untuk <math>m \geq 3</math> dan <math>n \geq 3</math> ganjil</li> <li>• jika <math>d = 3</math> untuk <math>(m \geq 3</math> dan <math>n \geq 3)</math> ganjil</li> <li>• jika <math>d = 3</math> untuk <math>(m \geq 3</math> dan <math>n \geq 3)</math> genap</li> </ul>
$sW_0(3, j, 2)$	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil dan $s$ ganjil (Yeni Anggraeni , 2011)	• jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $1 \leq j \leq m$ genap dan $1 \leq k \leq s$ genap

# METODE PENELITIAN

## 3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan aksioma atau teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata baik yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Dalam penelitian ini, terlebih dahulu akan ditentukan nilai beda  $(d)$  pada graf Tangga Permata, selanjutnya nilai  $d$  tersebut diterapkan dalam pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata. Jika terdapat pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic, maka akan dirumuskan bagaimana pola pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata tersebut dengan menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pola umumnya.

Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai beda  $(d)$  pada gabungan saling lepas graf Tangga Permata, selanjutnya nilai  $d$  tersebut diterapkan dalam pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf Tangga Permata. Jika terdapat pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic, maka akan dirumuskan bagaimana pola pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf Tangga Permata tersebut dengan menggunakan metode yang sama untuk menentukan pola umumnya.

## 3.2 Definisi Operasional

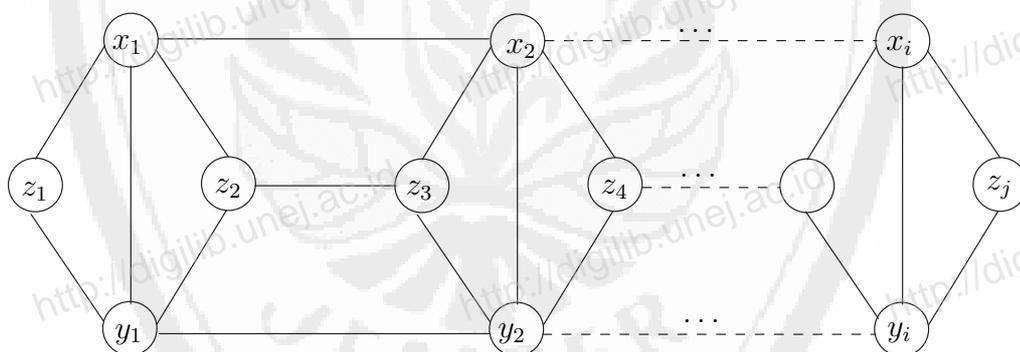
Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi operasional variabel yang dimaksud adalah sebagai berikut:

### 3.2.1 Pelabelan Total Super $(a, d)$ -Sisi Antimagic

Misal  $p = |V|$  dan  $q = |E|$  maka pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic adalah sebuah pemetaan satu-satu  $f$  dari  $V(G) \cup E(G)$  ke bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, p+q\}$  sehingga himpunan bobot sisinya  $w(uv) = f(u) + f(v) + f(w)$  pada semua sisi  $G$  adalah  $\{a, a+d, \dots, a+(q-1)d\}$  untuk  $a > 0$  dan  $d \geq 0$  adalah bilangan bulat. Sebuah pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic disebut pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic jika  $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$  dan  $\{f(E) = p+1, p+2, \dots, p+q\}$ .

### 3.2.2 Graf Tangga Permata $(Dl_n)$

Graf Tangga Permata adalah salah satu family dari graf ladder. Graf Tangga Permata adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan  $Dl_n$  dimana  $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n\}$  dan  $E(Dl_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}; 2 \leq j \leq 2n-2 \text{ genap}\} \cup \{x_i z_{2i-1}, x_i z_{2i}, y_i z_{2i-1}, y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ . Gambar 3.1 merupakan graf Tangga Permata  $Dl_n$  dan pada Gambar 3.2 adalah contoh graf  $Dl_4$ .

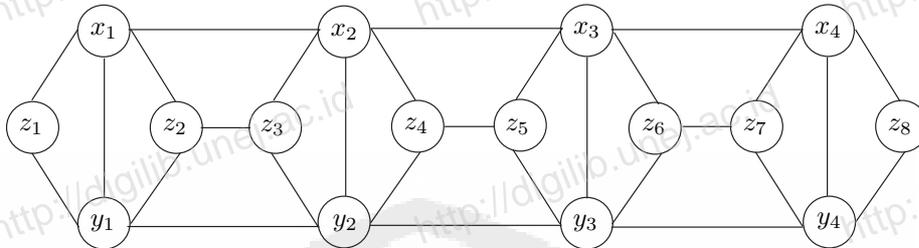


Gambar 3.1: Graf Tangga Permata  $Dl_n$

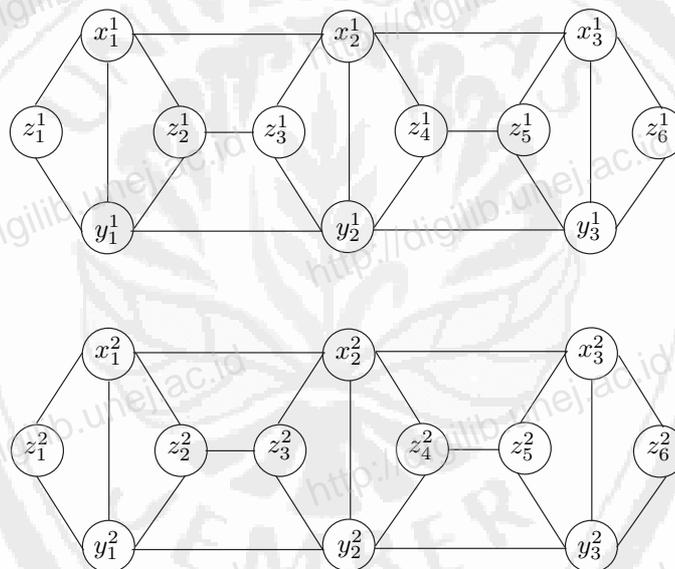
### 3.2.3 Gabungan Saling Lepas Graf Tangga Permata $(mDl_n)$

Gabungan saling lepas graf Tangga Permata  $mDl_n$  didefinisikan sebagai gabungan diskonektif dari sebanyak  $m$  copy graf Tangga Permata yang mempunyai himpunan titik  $V(mDl_n) = \{x_i^k, y_i^k, z_j^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n, 1 \leq k \leq m\}$  dan himpunan sisi  $E(mDl_n) = \{x_i^k x_{i+1}^k, y_i^k y_{i+1}^k; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m\}$ .

$m\} \cup \{x_i^k y_i^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{z_j^k z_{j+1}^k; 2 \leq j \leq 2n - 2 \text{ genap}, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i^k z_{2i-1}^k, x_i^k z_{2i}^k, y_i^k z_{2i-1}^k, y_i^k z_{2i}^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\}$ . Dalam penelitian ini kita akan membatasi pada  $mDl_n$  untuk  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ . Gambar 3.3 adalah gabungan saling lepas graf Tangga Permata dengan  $m = 2$  dan  $1 \leq i \leq 3$ .



Gambar 3.2: Graf Tangga Permata  $Dl_4$



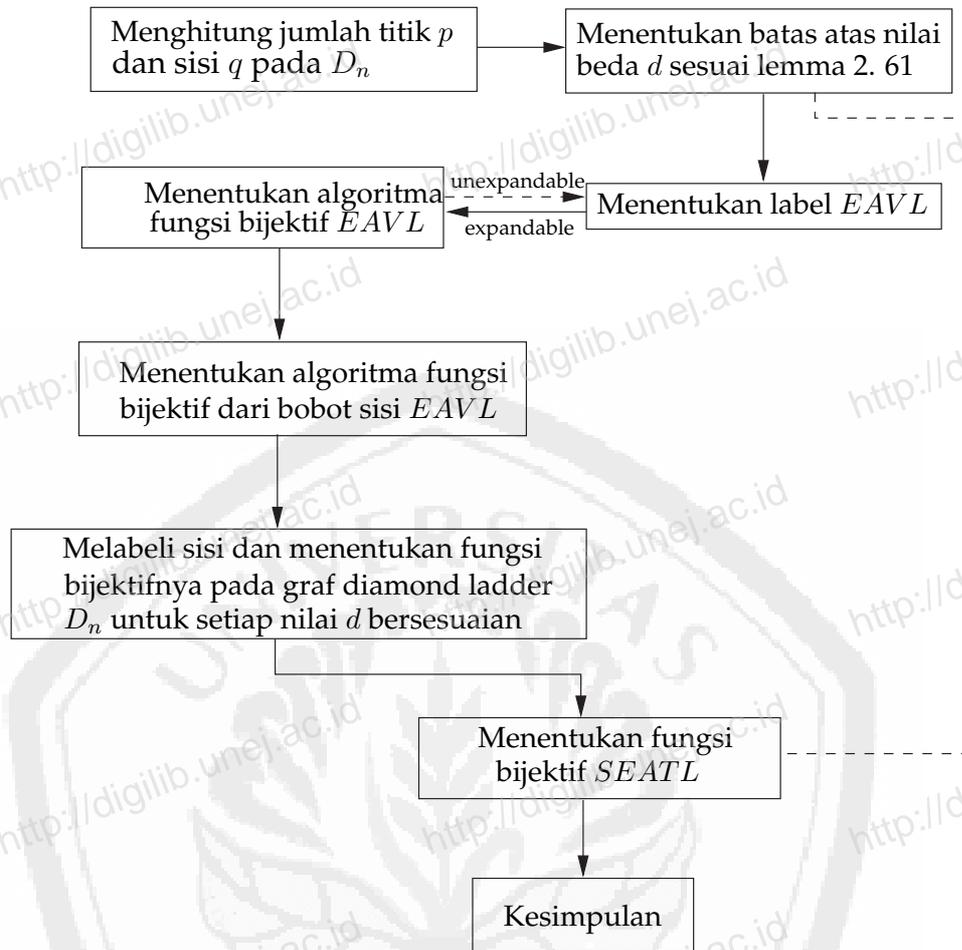
Gambar 3.3: Gabungan Graf Tangga Permata  $2D_3$

### 3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf Tangga Permata baik yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya, jika pada graf tersebut ditemukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola (*pattern recognition*). Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

1. menghitung jumlah titik  $p$  dan sisi  $q$  pada graf diamond ladder  $Dl_n$ ,
2. menentukan batas atas nilai beda  $d$  pada pada graf diamond ladder  $Dl_n$  sesuai dengan Lemma 2.6.1,
3. menentukan label  $EAVL$  (*edge-antimagic vertex labeling*) atau pelabelan titik( $a,d$ )-sisi antimagic pada graf diamond ladder  $Dl_n$ ,
4. apabila label  $EAVL$  berlaku untuk beberapa graf baik secara *heuristik* maupun *deterministik* maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan menentukan algoritma  $EAVL$  pada graf diamond ladder  $Dl_n$ ,
5. menentukan fungsi bijektif  $EAVL$  pada graf diamond ladder  $Dl_n$ ,
6. melabeli graf Tangga Permata  $Dl_n$  dengan  $SEATL$  (*super edge antimagic total labeling*) atau pelabelan total super ( $a, d$ )-sisi antimagic dengan nilai beda  $d$  yang *feasible*,
7. menentukan fungsi bejektif pelabelan total super ( $a, d$ )-sisi antimagic pada graf diamond ladder  $Dl_n$ .

Untuk gabungan saling lepas graf Tangga Permata juga menggunakan teknik penelitian seperti yang telah disebutkan di atas namun diterapkan pada gabungan saling lepas graf Tangga Permata. Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam bagan diagram alir pada gambar 3.4.



Keterangan:

→ : Aliran kegiatan utama

- - - - -> : Aliran pengecekan algoritma

Gambar 3.4: Rancangan Penelitian

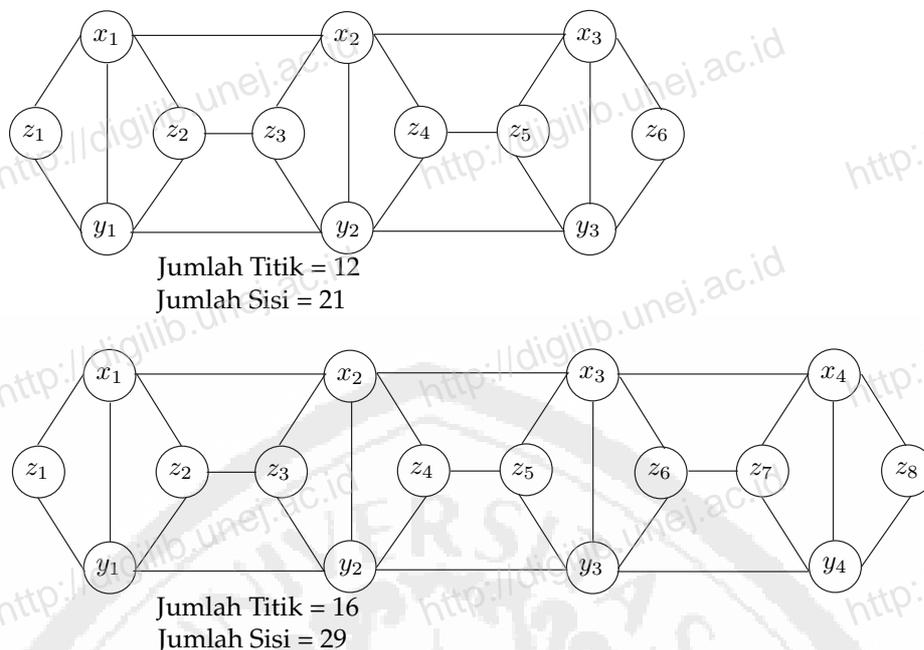
# HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan hasil penelitian tentang pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Diamon Ladder dengan hasil akhirnya berupa algoritma pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Diamon Ladder. Penelitian ini diawali dengan menentukan nilai  $d$ , menentukan  $EAV$  dan bobot sisi  $EAV$  kemudian menentukan  $SEATL$  dan diakhiri dengan bobot sisi total  $SEATL$  untuk membuktikan bahwa gabungan graf ini merupakan  $SEATL$ .

Hasil utama dari penelitian yang akan dibahas terkait dengan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf  $Dl$  adalah lemma dan teorema yang diberi tanda  $\diamond$ . Terdapat 2 (dua) lemma dan 6 (enam) teorema baru yang ditemukan secara eksperimental dalam penelitian ini. Format penyajian temuan penelitian dalam bab ini diawali dengan pernyataan lemma atau teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema. Berikut ini akan dijelaskan tahap-tahap bagaimana lemma dan teorema tersebut ditemukan sekaligus menjawab rumusan masalah yang telah disajikan sebelumnya.

## 4.1 Jumlah Titik dan Sisi pada Graf Tangga Permata ( $Dl_n$ )

Penentuan jumlah titik  $p$  dan jumlah sisi  $q$  merupakan syarat perlu dalam penelitian ini. Dengan mengetahui jumlah titik dan jumlah sisi, maka peneliti dapat mengetahui seberapa banyak graf  $Dl$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic. Untuk menentukan jumlah titik dan jumlah sisi graf tersebut, terlebih dahulu akan dicari jumlah titik dan jumlah sisi graf  $Dl$  ( $Dl_n$ ) dan gabungan graf  $Dl$  ( $mDl_n$ ). Pada Gambar 4.1 berikut disajikan sebuah ilustrasi untuk menentukan jumlah titik dan jumlah sisi pada graf  $Dl$  ( $Dl_n$ ).



Gambar 4.1: Jumlah titik dan jumlah sisi graf pada  $Dl_3$  dan  $Dl_4$

Graf Tangga Permata ( $Dl_n$ ) dimana  $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n\}$ . Sehingga jumlah titik pada graf  $Dl$  ( $Dl_n$ ) adalah  $4n$ .

Sedangkan jumlah sisi pada graf  $Dl$  ( $Dl_n$ ) merupakan jumlah seluruh sisi yang menghubungkan suatu titik dengan titik lainnya pada graf tersebut. Berdasarkan definisi sisi Diamond Ladder ( $Dl_n$ ),  $E(Dl_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}; j \text{ genap}, 2 \leq j \leq 2n - 2\} \cup \{x_i z_{2i-1}, x_i z_{2i}, y_i z_{2i-1}, y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$  terlihat jelas bahwa graf  $Dl_n$  memiliki  $8n - 3$  sisi.

#### 4.2 Jumlah Titik dan Sisi pada Gabungan Graf Tangga Permata ( $mDl_n$ )

Jumlah titik dan jumlah sisi pada  $mDl_n$  dapat ditentukan dengan terlebih dahulu mencermati definisi gabungan pada suatu graf. Gabungan  $m$  graf Tangga Permata  $Dl_n$  yang dinotasikan  $mDl_n$  didefinisikan sebagai gabungan

saling lepas dari  $m$  buah duplikat graf Tangga Permata ( $Dl_n$ ) dengan  $1 \leq j \leq m$ , ditulis:  $Dl_n^1 \cup Dl_n^2 \cup Dl_n^3 \cup \dots \cup Dl_n^m$ . Sehingga jumlah titik graf  $mDl_n$  adalah  $m$  kali jumlah titik graf  $Dl_n$  dan jumlah sisi graf  $mDl_n$  adalah  $m$  kali jumlah sisi graf  $Dl_n$ . Misalkan  $p$  adalah jumlah titik graf  $mDl_n$  dan  $q$  adalah jumlah sisi graf  $mDl_n$ , maka:

$$p = m \cdot (4n) \Leftrightarrow p = 4mn \text{ dan } q = m \cdot (8n - 3) \Leftrightarrow q = 8mn - 3m$$

#### 4.3 Batas Atas $d$ Graf Tangga Permata ( $Dl_n$ )

Batas atas  $d$  graf Tangga Permata ( $Dl_n$ ) dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 2.6.1. Diketahui jumlah titik pada graf  $Dl_n$  adalah  $p = 4n$  dan jumlah sisi  $q = 8n - 3$ . Dengan demikian batas atas nilai beda  $d$  tersebut adalah:

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{2p + q - 5}{q - 1} \\ &= \frac{2(4n) + 8n - 3 - 5}{8n - 3 - 1} \\ &= \frac{8n + 8n - 8}{8n - 4} \\ &= \frac{16n - 8}{8n - 4} \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

Karena pelabelan dalam SEAT menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai  $d \geq 0$  dan  $d$  bilangan bulat. Sehingga dapat disimpulkan  $d \in \{0, 1, 2\}$ . Selanjutnya akan ditentukan fungsi bijektif pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic sesuai dengan nilai  $d$  yang telah ditetapkan.

#### 4.4 Batas Atas $d$ pada Gabungan Graf Tangga Permata ( $mDl_n$ )

Sedangkan batas atas  $d$  gabungan graf Tangga Permata ( $mDl_n$ ) juga dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 2.6.1. Diketahui jumlah titik pada

graf  $mDl_n$  adalah  $p = 4mn$  dan jumlah sisi  $q = 8mn - 3m$ . Dengan demikian batas atas nilai beda  $d$  tersebut adalah:

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{2p + q - 5}{q - 1} \\ &= \frac{2(4mn) + 8mn - 3m - 5}{8mn - 3m - 1} \\ &= \frac{8mn + 8mn - 3m - 5}{8mn - 3m - 1} \\ &= \frac{16mn - 3m - 5}{8mn - 3m - 1} \\ &= 2 - \frac{3m - 3}{8mn - 3m - 1} \end{aligned}$$

Karena  $0 < \frac{3m-3}{8mn-3m-1} < 1$ . Sedemikian hingga berlaku:

$$\begin{aligned} d &\leq 2 - \frac{3m - 3}{8mn - 3m - 1} \\ \Leftrightarrow d &\leq 2 \end{aligned}$$

Karena pelabelan dalam SEAT menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai  $d \geq 0$  dan  $d$  bilangan bulat. Sehingga dapat disimpulkan  $d \in \{0, 1, 2\}$ . Selanjutnya akan ditentukan fungsi bijektif pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic sesuai dengan nilai  $d$  yang telah ditetapkan.

#### 4.5 Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi Antimagic pada Graf Tangga Permata ( $Dl_n$ )

Metode dalam menemukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata terdiri dari beberapa langkah yang diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas  $i$  dan  $j$  yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Setelah fungsi bijektif

diketahui maka harus dibuktikan secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari lemma atau teorema. Perlu diketahui bahwa lemma atau teorema dalam penelitian ini adalah bukan lemma atau teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Dari hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa lemma, teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Setelah mengetahui batas atas nilai  $d$ , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan terlebih dahulu menentukan pelabelan titik  $(a, 1)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_4$  dimana  $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n\}$  sekaligus menentukan fungsi bijektifnya melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika. Lemma 4.5.1 adalah lemma yang berkaitan dengan pelabelan titik  $(a, 1)$ -sisi Antimagic pada Graf Tangga Permata  $Dl_n$ .

◇ **Lemma 4.5.1** *Ada pelabelan titik  $(3, 1)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik graf Tangga Permata  $Dl_n$  dengan fungsi bijektif  $\alpha_1$ , definisikan pelabelan  $\alpha_1 : V(Dl_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 4n\}$  maka pelabelan  $\alpha_1$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha_1(x_i) &= 4i - 2, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_1(y_i) &= 4i - 1, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_1(z_j) &= 2j - \frac{((-1)^{j+1} + 1)}{2}, \text{ jika } 2 \leq j \leq 2n\end{aligned}$$

Dari persamaan di atas, dapat dipahami bahwa  $\alpha_1(x_i)$ ,  $\alpha_1(y_i)$  dan  $\alpha_1(z_j)$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $Dl_n$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, 4n\}$ . Jika  $w_{\alpha_1}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan titik  $\alpha_1$  dimana

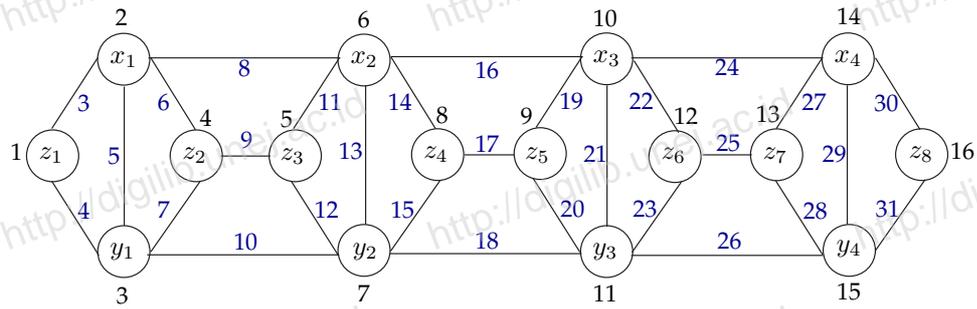
bobot sisi pelabelan titik diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang bersisian, maka fungsi bijektif  $w_{\alpha_1}$  dapat ditentukan melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{\alpha_1}^1(x_i x_{i+1}) &= 8i; & \text{jika } 1 \leq i \leq n-1 \\ w_{\alpha_1}^2(y_i y_{i+1}) &= 8i+2; & \text{jika } 1 \leq i \leq n-1 \\ w_{\alpha_1}^3(x_i y_i) &= 8i-3; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ w_{\alpha_1}^4(z_j z_{j+1}) &= 4j+1; & \text{jika } 2 \leq j \leq 2n-2 \text{ genap} \\ w_{\alpha_1}^5(x_i z_{2i-1}) &= 8i-5; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ w_{\alpha_1}^6(x_i z_{2i}) &= 8i-2; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ w_{\alpha_1}^7(y_i z_{2i-1}) &= 8i-4; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ w_{\alpha_1}^8(y_i z_{2i}) &= 8i-1; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot sisi EAV ini, bobot sisi terkecil terletak pada  $w_{\alpha_1}^5$  yaitu  $8i-5$ . Bobot sisi terbesar terletak pada  $w_{\alpha_1}^8$  yaitu  $8i-1$ . Dengan mensubstitusikan nilai  $i=1$ ,  $k=2$  dan  $i=n$  untuk bobot sisi terbesar, sehingga dapat membentuk himpunan  $\bigcup_{t=1}^8 w_{\alpha_1}^t = \{3, 4, 5, \dots, 8n-1\}$  terdiri dari bilangan bulat berurutan. Dengan demikian  $\alpha_1$  adalah suatu pelabelan titik  $(3, 1)$ .  $\square$

Angka 1, 2, ..., 8 pada  $w_{\alpha_1}^1, w_{\alpha_1}^2, w_{\alpha_1}^3, \dots, w_{\alpha_1}^8$  bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan  $w_{\alpha_1}$  yang mempunyai syarat batas  $i$  dan  $j$  yang berbeda-beda. Gambar 4.2 merupakan contoh pelabelan titik beserta bobot sisi EAVLnya  $(3, 1)$ -sisi antimagic graf Tangga Permata  $(Dl_4)$  dengan  $d=1$ .

Berdasarkan Lemma 4.5.1 maka diperoleh pelabelan titik  $(3, 1)$ -sisi antimagic dan dapat ditentukan pelabelan total super  $(a, 0)$ -sisi antimagic dengan menentukan label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL  $w$  dengan urutan yang berkebalikan. Sehingga sisi dengan  $w$  terkecil dilabeli dengan label sisi terbesar dan sisi dengan  $w$  terbesar dilabeli dengan label sisi terkecil. Melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika, maka dapat diten-



Gambar 4.2: Pelabelan titik (3,1)-sisi antimagic pada  $D_{l_4}$

tukan fungsi bijektifnya. Dari uraian di atas dapat diturunkan teorema 4.5.1:

◇ **Teorema 4.5.1** *Ada pelabelan total super  $(12n, 0)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $D_{l_n}$  jika  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik graf Tangga Permata  $D_{l_n}$  dengan  $\alpha_2(x_i) = \alpha_1(x_i)$ ,  $\alpha_2(y_i) = \alpha_1(y_i)$  dan  $\alpha_2(z_j) = \alpha_1(z_j)$ , definisikan label sisi  $\alpha_2 : E(D_{l_n}) \rightarrow \{4n + 1, 4n + 2, \dots, 12n - 3\}$ , maka label sisi  $\alpha_2$  untuk pelabelan total super  $(a, 0)$ -sisi antimagic pada graf  $D_{l_n}$  dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_2(x_i x_{i+1}) &= 12n - 8i, && \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_2(y_i y_{i+1}) &= 12n - 8i - 2, && \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_2(x_i y_i) &= 12n - 8i + 3, && \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_2(z_j z_{j+1}) &= 12n - 4j - 1, && \text{jika } 2 \leq j \leq 2n - 2 \text{ genap} \\ \alpha_2(x_i z_{2i-1}) &= 12n - 8i + 5, && \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_2(x_i z_{2i}) &= 12n - 8i + 2, && \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_2(y_i z_{2i-1}) &= 12n - 8i + 4, && \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_2(y_i z_{2i}) &= 12n - 8i + 1, && \text{jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Jika  $W_{\alpha_2}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total  $\alpha_2(x_i)$ ,  $\alpha_2(y_i)$ ,  $\alpha_2(z_j)$ ,  $\alpha_2(x_i x_{i+1})$ ,  $\alpha_2(y_i y_{i+1})$ ,  $\alpha_2(x_i y_i)$ ,  $\alpha_2(z_j z_{j+1})$ ,  $\alpha_2(x_i z_{2i-1})$ ,  $\alpha_2(x_i z_{2i})$ ,  $\alpha_2(y_i z_{2i-1})$  dan  $\alpha_2(y_i z_{2i})$  maka  $W_{\alpha_2}$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL  $w_{\alpha_1} = w_{\alpha_2}$  dan rumus label sisi  $\alpha_2$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang

bersesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^1 &= \{w_{\alpha_2}^1 + \alpha_2(x_i x_{i+1}); \text{jika } 1 \leq i \leq n-1\} \\ &= (8i) + (12n - 8i) \\ &= 12n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^2 &= \{w_{\alpha_2}^2 + \alpha_2(y_i y_{i+1}); \text{jika } 1 \leq i \leq n-1\} \\ &= (8i + 2) + (12n - 8i - 2) \\ &= 12n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^3 &= \{w_{\alpha_2}^3 + \alpha_2(x_i y_i); \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\ &= (8i - 3) + (12n - 8i + 3) \\ &= 12n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^4 &= \{w_{\alpha_2}^4 + \alpha_2(z_j z_{j+1}); \text{jika } 2 \leq j \leq 2n-2 \text{ genap}\} \\ &= (4j + 1) + (12n - 4j - 1) \\ &= 12n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^5 &= \{w_{\alpha_2}^5 + \alpha_2(x_i z_{2i-1}); \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\ &= (8i - 5) + (12n - 8i + 5) \\ &= 12n \end{aligned}$$

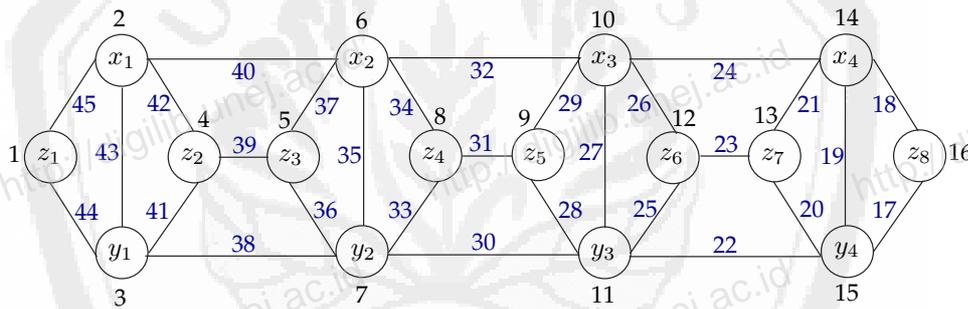
$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^6 &= \{w_{\alpha_2}^6 + \alpha_2(x_i z_{2i}); \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\ &= (8i - 2) + (12n - 8i + 2) \\ &= 12n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^7 &= \{w_{\alpha_2}^7 + \alpha_2(y_i z_{2i-1}); \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\ &= (8i - 4) + (12n - 8i + 4) \\ &= 12n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}^8 &= \{w_{\alpha_2}^8 + \alpha_2(y_i z_{2i}); \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\
 &= (8i - 1) + (12n - 8i + 1) \\
 &= 12n
 \end{aligned}$$

Tampak bahwa  $W_{\alpha_2}^1 = W_{\alpha_2}^2 = \dots = W_{\alpha_2}^8 = 12n$ . Atau dapat dituliskan sebagai berikut:  $\bigcup_{t=1}^8 W_{\alpha_2}^t = \{12n, 12n, \dots, 12n\}$ . Dapat disimpulkan bahwa graf Tangga Permata  $Dl_n$  dengan  $n \geq 2$ , mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan  $a = 12n$  dan  $d = 0$ , atau graf Tangga Permata  $Dl_n$  mempunyai Pelabelan Total Super  $(12n, 0)$ -sisi antimagic jika  $n \geq 2$ .  $\square$

Angka 1, 2, ..., 8 pada  $W_{\alpha_2}^1, W_{\alpha_2}^2, \dots, W_{\alpha_2}^8$  bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan  $W_{\alpha_2}$  yang mempunyai syarat batas  $i$ , dan  $k$  yang berbeda-beda. Gambar 4.3 merupakan contoh pelabelan total super  $(48, 0)$ -sisi antimagic (*SEATL*) pada graf Tangga Permata  $Dl_4$ .



Gambar 4.3: SEATL graf  $Dl$  ( $Dl_4$ ) dengan  $d = 0$

Berdasarkan Lemma 4.5.1 maka diperoleh pelabelan titik  $(3, 1)$ -sisi antimagic dan dapat ditentukan pelabelan total super  $(a, 2)$ -sisi antimagic dengan menentukan label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL  $w$  dengan urutan yang sama. Sehingga sisi dengan  $w$  terkecil dilabeli dengan label sisi terkecil dan sisi dengan  $w$  terbesar dilabeli dengan label sisi terbesar, dimana  $E(Dl_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}; j \text{ genap}, 2 \leq j \leq 2n - 2\} \cup \{x_i z_{2i-1}, x_i z_{2i}, y_i z_{2i-1}, y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ . Melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika, maka dapat ditentukan fungsi bijek-

tifnya. Dari uraian di atas dapat diturunkan teorema 4.5.2:

◇ **Teorema 4.5.2** *Ada pelabelan total super  $(4n+4, 2)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik graf Tangga Permata  $Dl_n$  dengan  $\alpha_3(x_i) = \alpha_1(x_i)$ ,  $\alpha_3(y_i) = \alpha_1(y_i)$  dan  $\alpha_3(z_j) = \alpha_1(z_j)$ , definisikan label sisi  $\alpha_3 : E(Dl_n) \rightarrow \{4n + 1, 4n + 2, \dots, 12n - 3\}$ , maka label sisi  $\alpha_3$  untuk pelabelan total super  $(a, 2)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_3(x_i x_{i+1}) &= 4n + 8i - 2, & \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_3(y_i y_{i+1}) &= 4n + 8i, & \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_3(x_i y_i) &= 4n + 8i - 5, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_3(z_j z_{j+1}) &= 4n + 4j - 1, & \text{jika } 2 \leq j \leq 2n - 2 \text{ genap} \\ \alpha_3(x_i z_{2i-1}) &= 4n + 8i - 7, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_3(x_i z_{2i}) &= 4n + 8i - 4, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_3(y_i z_{2i-1}) &= 4n + 8i - 6, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_3(y_i z_{2i}) &= 4n + 8i - 3, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Jika  $W_{\alpha_3}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total  $\alpha_3(x_i)$ ,  $\alpha_3(y_i)$ ,  $\alpha_3(z_j)$ ,  $\alpha_3(x_i x_{i+1})$ ,  $\alpha_3(y_i y_{i+1})$ ,  $\alpha_3(x_i y_i)$ ,  $\alpha_3(z_j z_{j+1})$ ,  $\alpha_3(x_i z_{2i-1})$ ,  $\alpha_3(x_i z_{2i})$ ,  $\alpha_3(y_i z_{2i-1})$  dan  $\alpha_3(y_i z_{2i})$  maka  $W_{\alpha_3}$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL  $w_{\alpha_1} = w_{\alpha_3}$  dan rumus label sisi  $\alpha_3$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_3}^1 &= \{w_{\alpha_3}^1 + \alpha_3(x_i x_{i+1}); \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1\} \\ &= (8i) + (4n + 8i - 2) \\ &= 4n + 16i - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}^2 &= \{w_{\alpha_3}^2 + \alpha_3(y_i y_{i+1}); \text{jika } 1 \leq i \leq n-1\} \\
 &= (8i + 2) + (4n + 8i) \\
 &= 4n + 16i + 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}^3 &= \{w_{\alpha_3}^3 + \alpha_3(x_i y_i); \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\
 &= (8i - 3) + (4n + 8i - 5) \\
 &= 4n + 16i - 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}^4 &= \{w_{\alpha_3}^4 + \alpha_3(z_j z_{j+1}); \text{jika } 2 \leq j \leq 2n-2 \text{ genap}\} \\
 &= (4j + 1) + (4n + 4j - 1) \\
 &= 4n + 8j
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}^5 &= \{w_{\alpha_3}^5 + \alpha_3(x_i z_{2i-1}); \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\
 &= (8i - 5) + (4n + 8i - 7) \\
 &= 4n + 16i - 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}^6 &= \{w_{\alpha_3}^6 + \alpha_3(x_i z_{2i}); \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\
 &= (8i - 2) + (4n + 8i - 4) \\
 &= 4n + 16i - 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}^7 &= \{w_{\alpha_3}^7 + \alpha_3(y_i z_{2i-1}); \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\
 &= (8i - 4) + (4n + 8i - 6) \\
 &= 4n + 16i - 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}^8 &= \{w_{\alpha_3}^8 + \alpha_3(y_i z_{2i}); \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\
 &= (8i - 1) + (4n + 8i - 3) \\
 &= 4n + 16i - 4
 \end{aligned}$$

Perhatikan Himpunan bobot sisi  $W_{\alpha_3} = \{W_{\alpha_3}^1, W_{\alpha_3}^2, W_{\alpha_3}^3, \dots, W_{\alpha_3}^8\}$ . Tampak bahwa bobot sisi terkecil terletak pada  $W_{\alpha_3}^5$  dan bobot sisi terbesar terletak pada  $W_{\alpha_3}^8$ . Dengan mensubstitusikan nilai  $i = 1$  pada  $W_{\alpha_3}^5$  diperoleh

$W_{\alpha_3} = 4n + 4$ , substitusi  $i = 2$  pada  $W_{\alpha_3}^5$  diperoleh  $W_{\alpha_3} = 4n + 6, \dots$ , substitusi  $i = n$  pada  $W_{\alpha_3}^8$  diperoleh  $W_{\alpha_3} = 20n - 4$ . Dapat dinyatakan bahwa  $W_{\alpha_3}$  membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $4n+4$  dan beda 2 (dua), atau dapat dituliskan  $\bigcup_{t=1}^8 W_{\alpha_3}^t = \{4n + 4, 4n + 6, 4n + 8 \dots, 20n - 4\}$ . Dapat disimpulkan bahwa graf Tangga Permata  $Dl_n$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan  $a = 4n + 4$  dan  $d = 2$  atau graf Tangga Permata  $Dl_n$  mempunyai Super  $(4n + 4, 2)$ -EAT;  $n \geq 2$ . Sehingga terbukti bahwa pelabelan total  $\alpha_3(x_i), \alpha_3(y_i), \alpha_3(z_j), \alpha_3(x_i x_{i+1}), \alpha_3(y_i y_{i+1}), \alpha_3(x_i y_i), \alpha_3(z_j z_{j+1}), \alpha_3(x_i z_{2i-1}), \alpha_3(x_i z_{2i}), \alpha_3(y_i z_{2i-1})$  dan  $\alpha_3(y_i z_{2i})$  adalah pelabelan total super  $(a, 2)$ -sisi antimagic jika  $n \geq 2$ .  $\square$

Angka  $1, 2, \dots, 8$  pada  $W_{\alpha_3}^1, W_{\alpha_3}^2, \dots, W_{\alpha_3}^8$  bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan  $W_{\alpha_3}$  yang mempunyai syarat batas  $i$  dan  $j$  yang berbeda-beda.

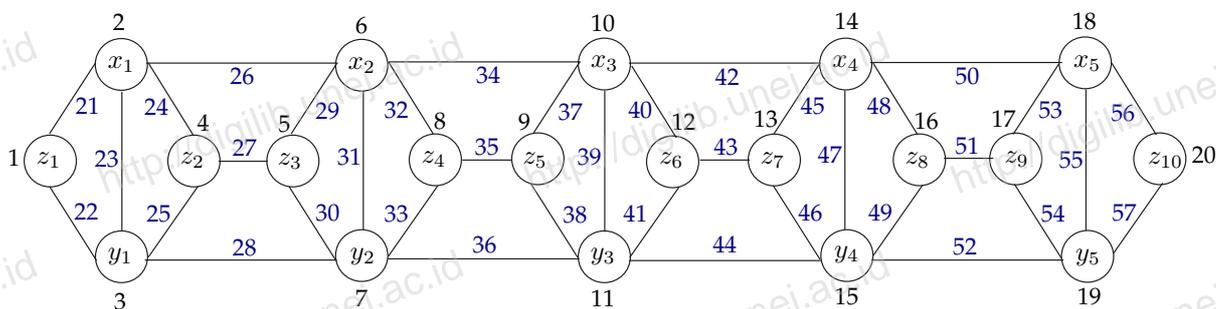
Jika  $\alpha_3(z)$  adalah label sisi  $Dl_n$  untuk  $d = 2$  dan  $\alpha_2(z)$  adalah label sisi  $Dl_n$  untuk  $d = 0$  maka berdasarkan urutan peletakkan label sisi yang ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL  $w$  dapat dirumuskan label sisi  $Dl_n$  untuk  $d = 2$ , yaitu:

$$\begin{aligned} \alpha_3(z) &= 2p + q + 1 - \alpha_2(z) \\ &= 2(4n) + (8n - 3) + 1 - \alpha_2(z) \\ &= 16n - 2 - \alpha_2(z) \end{aligned}$$

Gambar 4.4 merupakan contoh pelabelan total super  $(24, 2)$ -sisi antimagic (*SEATL*) pada graf Tangga Permata  $Dl_5$ .

Untuk pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Diamond Ladder  $Dl_n$  dengan  $d = 1$ , penulis akan membuktikannya melalui sebuah teorema yang dikembangkan dari Lemma 2.6.2 yang telah dibuktikan pada bab 2. Berdasarkan lemma yang telah ditemukan tersebut, maka penulis mengembangkan lemma tersebut menjadi sebuah teorema baru untuk menentukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  dengan

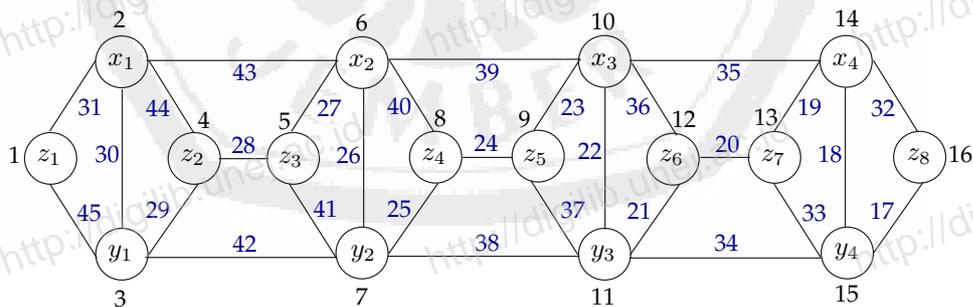
$d = 1.$



Gambar 4.4: SEATL graf  $Dl (Dl_5)$  dengan  $d = 2$

◇ **Teorema 4.5.3** Suatu graf  $Dl_n$  mempunyai pelabelan total super  $(8n + 2, 1)$ -sisi antimagic untuk  $n \geq 2$ .

**Bukti.** Sebagaimana tercantum dalam Lemma 2.6.2, untuk  $n \geq 2$ , pelabelan titik  $\alpha_1$  pada graf  $Dl_n$  dari Lemma 4.5.1 adalah pelabelan  $(3, 1)$ -EAV. Misal barisannya adalah  $\mathfrak{A} = \{c, c + 1, c + 2, \dots, c + k\}$  membentuk himpunan bobot sisi dari pelabelan titik  $\alpha_1$  untuk  $c = 3$  dan  $k = 8n - 4$ . Pada Lemma 2.6.1,  $\Pi(\mathfrak{A})$  dari anggotanya  $\mathfrak{A}$  antara lain  $\mathfrak{A} + [\Pi(\mathfrak{A}) - c + \frac{8n+2}{2}] = \{c + \frac{16n-2}{2}, c + \frac{16n-2}{2} + 1, \dots, c + \frac{32n-10}{2}\}$ . Jika  $[\Pi(\mathfrak{A}) - c + \frac{8n+2}{2}]$  adalah label sisi dari  $Dl_n$ , maka  $\mathfrak{A} + [\Pi(\mathfrak{A}) - c + \frac{8n+2}{2}]$  membentuk himpunan bobot sisi dari  $Dl_n$ , yang mana hasil pelabelan total super  $(8n + 2, 1)$ -EAT. □



Gambar 4.5: Pelabelan total super  $(34, 1)$ -sisi antimagic (SEATL) pada  $Dl_4$

#### 4.6 Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi Antimagic pada Gabungan Graf Tangga Permata $(mDl_n)$

Metode dalam menemukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf  $Dl_n$  terdiri dari beberapa langkah yang diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas  $i, j$  dan  $k$  yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Setelah fungsi bijektif diketahui maka harus dibuktikan secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari lemma atau teorema. Perlu diketahui bahwa lemma dan teorema dalam penelitian ini adalah bukan lemma atau teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Dari hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa lemma, teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Setelah mengetahui batas atas nilai  $d$ , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan terlebih dahulu menentukan pelabelan titik  $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dimana  $V(mD_n) = \{x_i^k, y_i^k, z_j^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n, 1 \leq k \leq m\}$  sekaligus menentukan fungsi bijektifnya melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika. Lemma 4.6.1 adalah lemma yang berkaitan dengan pelabelan titik  $(a, 1)$ -sisi Antimagic Gabungan Graf Tangga Permata  $mDl_n$ .

◇ **Lemma 4.6.1** *Ada pelabelan titik  $(\frac{3m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan Graf Diamond Ladder  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dengan fungsi bijektif  $\alpha_4$ , untuk  $1 \leq k \leq m$ , definisikan pelabelan  $\alpha_4 : V(mDl_n) \rightarrow \{1, 2, -$

$\dots, 4nm\}$  maka pelabelan  $\alpha_4$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\alpha_4(x_i^k) = \begin{cases} \frac{(8i-5)m+k}{2}; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8i-6)m+k}{2}; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8i-4)m-2k+2}{2}; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(8i-6)m+k+1}{2}; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8i-5)m+k+1}{2}; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_4(y_i^k) = \begin{cases} \frac{(8i-2)m-2k+2}{2}; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(8i-4)m+k+1}{2}; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8i-3)m+k+1}{2}; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8i-3)m+k}{2}; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8i-4)m+k}{2}; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_4(z_j^k) = \begin{cases} \frac{(4j-4)m+k+1}{2}; & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(4j-3)m+k+1}{2}; & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4j-2)m+k+1}{2}; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(4j-1)m+k+1}{2}; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4j-3)m+k}{2}; & \text{jika } j \equiv 3(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(4j-4)m+k}{2}; & \text{jika } j \equiv 3(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4j-1)m+k}{2}; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(4j-2)m+k}{2}; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4j-2)m-2k+2}{2}; & \text{jika } j \equiv 5(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{4jm-2k+2}{2}; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{cases}$$

Fungsi bijektif pada  $\alpha_4(x_i^k)$ ,  $\alpha_4(y_i^k)$  dan  $\alpha_4(z_j^k)$  dapat direduksi sebagai berikut:

$$\alpha_4(x_i^k) = \begin{cases} \frac{(8i-5)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(8i-4)m-2k+2}{2}; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(8i-5)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{cases}$$

$$\alpha_4(y_i^k) = \begin{cases} \frac{(8i-2)m-2k+2}{2}; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(8i-3)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(8i-3)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{cases}$$

$$\alpha_4(z_j^k) = \begin{cases} \frac{(4j-3)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m; & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4j-1)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4j-3)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m; & \text{jika } j \equiv 3(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4j-1)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4j-2)m-2k+2}{2}; & \text{jika } j \equiv 5(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{4jm-2k+2}{2}; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{cases}$$

Dari persamaan di atas, dapat dipahami bahwa  $\alpha_4(x_i^k)$ ,  $\alpha_4(y_i^k)$  dan  $\alpha_4(z_j^k)$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $mDl_n$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, 4nm\}$ . Jika  $w_{\alpha_4}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan titik  $\alpha_4$  dimana bobot sisi pelabelan titik diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang bersisian, maka fungsi bijektif  $w_{\alpha_4}$  dapat ditentukan melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika sebagai berikut:

Bobot pada sisi  $x_i^k x_{i+1}^k$

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^1(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{15m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^2(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{14m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^3(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{30m-k+3}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^4(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{31m-k+3}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^5(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{45m+2k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $y_i^k y_{i+1}^k$

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^6(y_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{18m-k+3}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^7(y_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{19m-k+3}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^8(y_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{33m+2k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ w_{\alpha_4}^9(y_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{51m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{10}(y_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{50m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $x_i^k y_i^k$

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{11}(x_i^k y_i^k) &= \frac{9m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{12}(x_i^k y_i^k) &= \frac{8m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^{13}(x_i^k y_i^k) &= \frac{24m-k+3}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{14}(x_i^k y_i^k) &= \frac{25m-k+3}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^{15}(x_i^k y_i^k) &= \frac{39m+2k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $z_j^k z_{j+1}^k$

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{16}(z_j^k z_{j+1}^k) &= \frac{15m+2k+1}{2} + (j-2)4m; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ w_{\alpha_4}^{17}(z_j^k z_{j+1}^k) &= \frac{33m-k+2}{2} + (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{18}(z_j^k z_{j+1}^k) &= \frac{32m-k+2}{2} + (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^{19}(z_j^k z_{j+1}^k) &= \frac{48m-k+3}{2} + (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{20}(z_j^k z_{j+1}^k) &= \frac{49m-k+3}{2} + (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $x_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{21}(x_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{3m+2k+1}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ w_{\alpha_4}^{22}(x_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{21m-k+2}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{23}(x_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{20m-k+2}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^{24}(x_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{36m-k+3}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{25}(x_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{37m-k+3}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $x_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{26}(x_i^k z_{2i}^k) &= \frac{9m+2k+1}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ w_{\alpha_4}^{27}(x_i^k z_{2i}^k) &= \frac{27m-k+2}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{28}(x_i^k z_{2i}^k) &= \frac{26m-k+2}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^{29}(x_i^k z_{2i}^k) &= \frac{42m-k+3}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{30}(x_i^k z_{2i}^k) &= \frac{43m-k+3}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $y_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{31}(y_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{6m-k+3}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{32}(y_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{7m-k+3}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^{33}(y_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{21m+2k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ w_{\alpha_4}^{34}(y_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{39m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{35}(y_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{38m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $y_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{36}(y_i^k z_{2i}^k) &= \frac{12m-k+3}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{37}(y_i^k z_{2i}^k) &= \frac{13m-k+3}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^{38}(y_i^k z_{2i}^k) &= \frac{27m+2k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ w_{\alpha_4}^{39}(y_i^k z_{2i}^k) &= \frac{45m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{40}(y_i^k z_{2i}^k) &= \frac{44m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{aligned}$$

Fungsi bijektif pada  $w_{\alpha_4}$  dapat direduksi sebagai berikut:

Bobot pada sisi  $x_i^k x_{i+1}^k$  untuk  $k$  sembarang

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^1(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{14m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^2(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{30m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^3(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{45m+2k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $y_i^k y_{i+1}^k$  untuk  $k$  sembarang

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^4(y_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{18m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^5(y_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{33m+2k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^6(y_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{50m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $x_i^k y_i^k$  untuk  $k$  sembarang

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^7(x_i^k y_i^k) &= \frac{8m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^8(x_i^k y_i^k) &= \frac{24m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^9(x_i^k y_i^k) &= \frac{39m+2k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $z_j^k z_{j+1}^k$  untuk  $k$  sembarang

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{10}(z_j^k z_{j+1}^k) &= \frac{15m+2k+1}{2} + (j-2)4m; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \\ w_{\alpha_4}^{11}(z_j^k z_{j+1}^k) &= \frac{32m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \\ w_{\alpha_4}^{12}(z_j^k z_{j+1}^k) &= \frac{48m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{4}\right)m + (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $x_i^k z_{2i-1}^k$  untuk  $k$  sembarang

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{13}(x_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{3m+2k+1}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^{14}(x_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{20m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^{15}(x_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{36m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $x_i^k z_{2i}^k$  untuk  $k$  sembarang

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{16}(x_i^k z_{2i}^k) &= \frac{9m+2k+1}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^{17}(x_i^k z_{2i}^k) &= \frac{26m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^{18}(x_i^k z_{2i}^k) &= \frac{42m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $y_i^k z_{2i-1}^k$  untuk  $k$  sembarang

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{19}(y_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{6m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^{20}(y_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{21m+2k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^{21}(y_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{38m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{aligned}$$

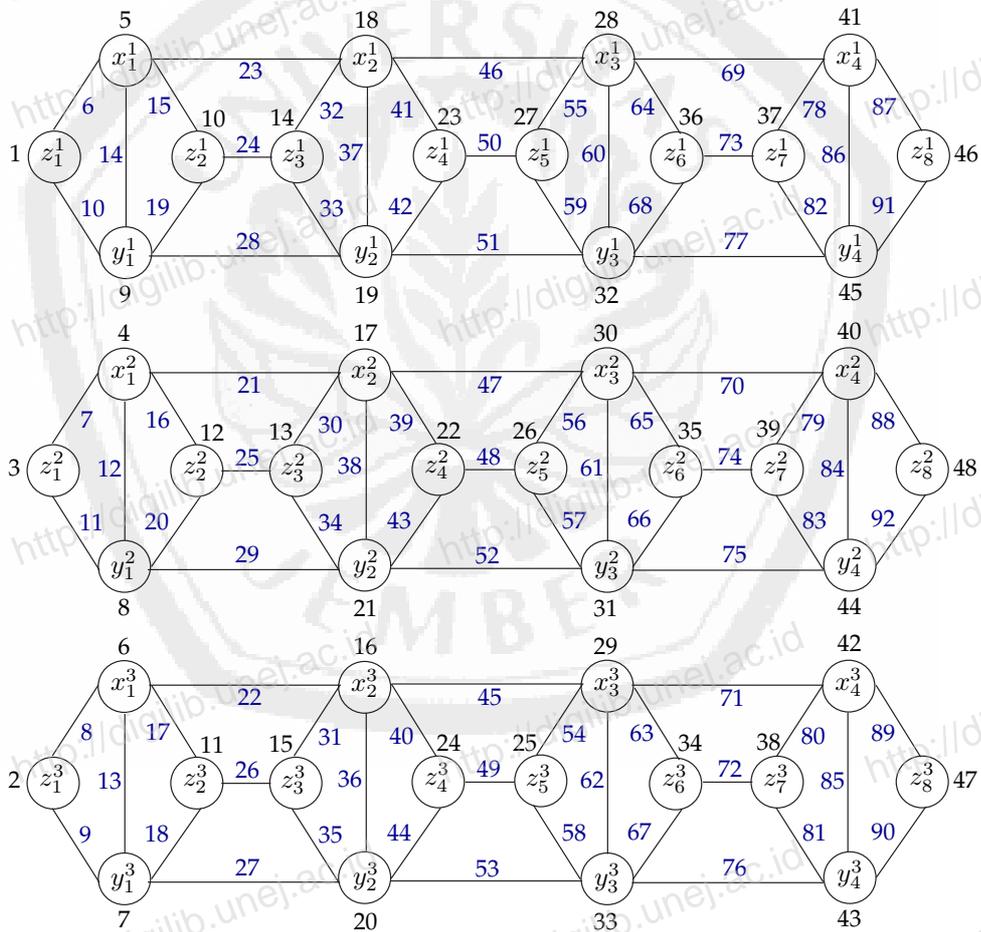
Bobot pada sisi  $y_i^k z_{2i}^k$  untuk  $k$  sembarang

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{22}(y_i^k z_{2i}^k) &= \frac{12m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^{23}(y_i^k z_{2i}^k) &= \frac{27m+2k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^{24}(y_i^k z_{2i}^k) &= \frac{44m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot sisi EAV ini, bobot sisi terkecil pertama, kedua sampai terkecil kelima terletak pada  $w_{\alpha_4}^{21}$  yaitu  $\frac{3m+2k+1}{2} + (i-1)8m$ , selanjutnya terletak pada  $w_{\alpha_4}^{31}$  yaitu  $\frac{6m-k+3}{2} + (i-1)8m$ . Bobot sisi terbesar terletak pada  $w_{\alpha_4}^{39}$  yaitu  $\frac{45m-k+2}{2} + (i-3)8m$ . Dengan mensubstitusikan nilai  $i = 1$  dan  $k = 1$  pada  $w_{\alpha_4}^{21}$  diperoleh  $w_{\alpha_4} = \frac{3m+2(1)+1}{2} + (1-1)8m = \frac{3m+3}{2}$ , substitusi  $i = 1$  dan  $k = 2$  pada  $w_{\alpha_4}^{21}$  diperoleh  $w_{\alpha_4} = \frac{3m+2(2)+1}{2} + (1-1)8m = \frac{3m+5}{2}$ , substitusi  $i = 1$  dan  $k = 3$  pada  $w_{\alpha_4}^{21}$  diperoleh  $w_{\alpha_4} = \frac{3m+2(3)+1}{2} + (1-1)8m =$

$\frac{3m+7}{2}, \dots$ , substitusi  $i = n$  dan  $k = 1$  pada  $w_{\alpha_4}^{39}$  diperoleh  $w_{\alpha_4} = \frac{45m-1+2}{2} + (n-3)8m = \frac{(16n-3)m+1}{2}$ . Dapat dinyatakan bahwa  $w_{\alpha_4}$  membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $\frac{3m+3}{2}$  dan beda 1 (satu), atau dapat dituliskan  $\bigcup_{t=1}^{40} w_{\alpha_4}^t = \{\frac{3m+3}{2}, \frac{3m+5}{2}, \frac{3m+7}{2}, \dots, \frac{(16n-3)m+1}{2}\}$ . Sehingga terbukti bahwa pelabelan titik  $\alpha_4(x_i^k), \alpha_4(y_i^k)$  dan  $\alpha_4(z_j^k)$  adalah pelabelan titik  $(\frac{3m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .  $\square$

Angka 1, 2, ..., 40 pada  $w_{\alpha_4}^1, w_{\alpha_4}^2, w_{\alpha_4}^3, \dots, w_{\alpha_4}^{40}$  bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan  $w_{\alpha_4}$  yang mempunyai syarat batas  $i, j$ , dan  $k$  yang berbeda-beda. Gambar 4.6 merupakan contoh pelabelan titik beserta bobot sisi EAVL  $(\frac{3m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic gabungan graf Tangga Permata  $3Dl_4$  dengan  $d = 1$ .



Gambar 4.6: Pelabelan titik  $(6,1)$ -sisi antimagic pada  $3Dl_4$

Berdasarkan Lemma 4.6.1 maka diperoleh pelabelan titik  $(\frac{3m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic dan dapat ditentukan pelabelan total super  $(a, 0)$ -sisi antimagic dengan menentukan label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL  $w$  dengan urutan yang berkebalikan. Sehingga sisi dengan  $w$  terkecil dilabeli dengan label sisi terbesar dan sisi dengan  $w$  terbesar dilabeli dengan label sisi terkecil, dimana  $E(mDl_n) = \{x_i^k x_{i+1}^k, y_i^k y_{i+1}^k; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i^k y_i^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{z_j^k z_{j+1}^k; 2 \leq j \leq 2n-2 \text{ genap}, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i^k z_{2i-1}^k, x_i^k z_{2i}^k, y_i^k z_{2i-1}^k, y_i^k z_{2i}^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\}$ . Melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika, maka dapat ditentukan fungsi bijektifnya. Dari uraian di atas dapat diturunkan teorema 4.6.1:

◇ **Teorema 4.6.1** *Ada pelabelan total super  $(\frac{(8n-1)3m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Diamond Ladder  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dengan  $\alpha_5(x_i^k) = \alpha_4(x_i^k)$ ,  $\alpha_5(y_i^k) = \alpha_4(y_i^k)$  dan  $\alpha_5(z_j^k) = \alpha_4(z_j^k)$ , untuk  $1 \leq k \leq m$ , definisikan label sisi  $\alpha_5 : E(mDl_n) \rightarrow \{4nm + 1, 4nm + 2, \dots, 12nm - 3m\}$ , maka label sisi  $\alpha_5$  untuk pelabelan total super  $(a, 0)$ -sisi antimagic pada graf  $mDl_n$  dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{(4n-3)6m+k+1}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3} \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(24n-17)m+k+1}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3} \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8n-11)3m+k}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3} \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(12n-17)2m+k}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3} \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(n-2)24m-2k+2}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3 \pmod{3} \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{cases}$$

$$\alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n-7)3m+k}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(12n-11)2m+k}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(2n-3)12m-2k+2}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(12n-27)2m+k+1}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(24n-53)m+k+1}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_5(x_i^k y_i^k) = \begin{cases} \frac{(2n-1)12m+k+1}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(24n-11)m+k+1}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(24n-27)m+k}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(6n-7)4m+k}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4n-7)6m-2k+2}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{cases}$$

$$\alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k) = \begin{cases} \frac{(4n-3)6m-2k+2}{2} - (j-2)4m; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(2n-3)12m+k+1}{2} - (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(24n-35)m+k+1}{2} - (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(24n-51)m+k}{2} - (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(6n-13)4m+k}{2} - (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k) = \begin{cases} \frac{(12n-3)2m-2k+2}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(n-1)24m+k+1}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(24n-23)m+k+1}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8n-13)3m+k}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(3n-5)8m+k}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_5(x_i^k z_{2i}^k) = \begin{cases} \frac{(2n-1)12m-2k+2}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4n-5)6m+k+1}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(24n-29)m+k+1}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(24n-45)m+k}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(12n-23)2m+k}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n-3)3m+k}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(12n-5)2m+k}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(n-1)24m-2k+2}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4n-7)6m+k+1}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(24n-41)m+k+1}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_5(y_i^k z_{2i}^k) = \begin{cases} \frac{(8n-5)3m+k}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(3n-2)8m+k}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4n-5)6m-2k+2}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(n-2)24m+k+1}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(24n-47)m+k+1}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

Fungsi bijektif pada  $\alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k)$ ,  $\alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k)$ ,  $\alpha_5(x_i^k y_i^k)$ ,  $\alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k)$ ,  $\alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k)$ ,  $\alpha_5(x_i^k z_{2i}^k)$ ,  $\alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k)$  dan  $\alpha_5(y_i^k z_{2i}^k)$  dapat direduksi sebagai berikut:(untuk  $k$  sembarang)

$$\alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{(24n-17)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(8n-11)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(n-2)24m-2k+2}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$\alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n-7)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(2n-3)12m-2k+2}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(24n-53)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$\alpha_5(x_i^k y_i^k) = \begin{cases} \frac{(24n-11)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(24n-27)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(4n-7)6m-2k+2}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$\alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k) = \begin{cases} \frac{(4n-3)6m-2k+2}{2} - (j-2)4m; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \\ \frac{(24n-35)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m - (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \\ \frac{(24n-51)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m - (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \end{cases}$$

$$\alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k) = \begin{cases} \frac{(12n-3)2m-2k+2}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(mod 3) \\ \frac{(24n-23)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(mod 3) \\ \frac{(8n-13)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(mod 3) \end{cases}$$

$$\alpha_5(x_i^k z_{2i}^k) = \begin{cases} \frac{(2n-1)12m-2k+2}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(mod 3) \\ \frac{(24n-29)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(mod 3) \\ \frac{(24n-45)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(mod 3) \end{cases}$$

$$\alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n-3)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(mod 3) \\ \frac{(n-1)24m-2k+2}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(mod 3) \\ \frac{(24n-41)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(mod 3) \end{cases}$$

$$\alpha_5(y_i^k z_{2i}^k) = \begin{cases} \frac{(8n-5)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(mod 3) \\ \frac{(4n-5)6m-2k+2}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(mod 3) \\ \frac{(24n-47)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(mod 3) \end{cases}$$

Jika  $W_{\alpha_5}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total  $\alpha_5(x_i^k), \alpha_5(y_i^k), \alpha_5(z_j^k), \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k), \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k), \alpha_5(x_i^k y_i^k), \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k), \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k), \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k), \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k)$  dan  $\alpha_5(y_i^k z_{2i}^k)$  maka  $W_{\alpha_5}$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL  $w_{\alpha_4} = w_{\alpha_5}$  dan rumus label sisi  $\alpha_5$  dengan syarat batas  $i, j$ , dan  $k$  yang bersesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

Untuk sisi  $x_i^k x_{i+1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5}^1 &= \{w_{\alpha_5}^1 + \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(mod 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{15m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(4n-3)6m+k+1}{2} - (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n-1)3m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^2 &= \{w_{\alpha_5}^2 + \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{14m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(24n-17)m+k+1}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^3 &= \{w_{\alpha_5}^3 + \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{30m-k+3}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n-11)3m+k}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^4 &= \{w_{\alpha_5}^4 + \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{31m-k+3}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(12n-17)2m+k}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^5 &= \{w_{\alpha_5}^5 + \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{45m+2k+1}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(n-2)24m-2k+2}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k y_{i+1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^6 &= \{w_{\alpha_5}^6 + \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{18m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n-7)3m+k}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^7 &= \{w_{\alpha_5}^7 + \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{19m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(12n-11)2m+k}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^8 &= \{w_{\alpha_5}^8 + \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{33m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(2n-3)12m-2k+2}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^9 &= \{w_{\alpha_5}^9 + \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{51m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(12n-27)2m+k+1}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{10} &= \{w_{\alpha_5}^{10} + \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{50m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(24n-53)m+k+1}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k y_i^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{11} &= \{w_{\alpha_5}^{11} + \alpha_5(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{9m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(2n-1)12m+k+1}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{12} &= \{w_{\alpha_5}^{12} + \alpha_5(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{8m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(24n-11)m+k+1}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{13} &= \{w_{\alpha_5}^{13} + \alpha_5(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{24m-k+3}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(24n-27)m+k}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{14} &= \{w_{\alpha_5}^{14} + \alpha_5(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{25m-k+3}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(6n-7)4m+k}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{15} &= \{w_{\alpha_5}^{15} + \alpha_5(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{39m+2k+1}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(4n-7)6m-2k+2}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $z_j^k z_{j+1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5}^{16} &= \{w_{\alpha_5}^{16} + \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{15m+2k+1}{2} + (j-2)4m\right) + \left(\frac{(4n-3)6m-2k+2}{2} - (j-2)4m\right) \\ &= \frac{(8n-1)3m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5}^{17} &= \{w_{\alpha_5}^{17} + \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{33m-k+2}{2} + (j-4)4m\right) + \left(\frac{(2n-3)12m+k+1}{2} - (j-4)4m\right) \\ &= \frac{(8n-1)3m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5}^{18} &= \{w_{\alpha_5}^{18} + \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{32m-k+2}{2} + (j-4)4m\right) + \left(\frac{(24n-35)m+k+1}{2} - (j-4)4m\right) \\ &= \frac{(8n-1)3m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5}^{19} &= \{w_{\alpha_5}^{19} + \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{48m-k+3}{2} + (j-6)4m\right) + \left(\frac{(24n-51)m+k}{2} - (j-6)4m\right) \\ &= \frac{(8n-1)3m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5}^{20} &= \{w_{\alpha_5}^{20} + \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{49m-k+3}{2} + (j-6)4m\right) + \left(\frac{(6n-13)4m+k}{2} - (j-6)4m\right) \\ &= \frac{(8n-1)3m+3}{2} \end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5}^{21} &= \{w_{\alpha_5}^{21} + \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{3m+2k+1}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(12n-3)2m-2k+2}{2} - (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n-1)3m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5}^{22} &= \{w_{\alpha_5}^{22} + \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{21m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(n-1)24m+k+1}{2} - (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n-1)3m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{23} &= \{w_{\alpha_5}^{23} + \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{20m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(24n-23)m+k+1}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{24} &= \{w_{\alpha_5}^{24} + \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{36m-k+3}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n-13)3m+k}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{25} &= \{w_{\alpha_5}^{25} + \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{37m-k+3}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(3n-5)8m+k}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{26} &= \{w_{\alpha_5}^{26} + \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{9m+2k+1}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(2n-1)12m-2k+2}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{27} &= \{w_{\alpha_5}^{27} + \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{27m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n-5)6m+k+1}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{28} &= \{w_{\alpha_5}^{28} + \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{26m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(24n-29)m+k+1}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{29} &= \{w_{\alpha_5}^{29} + \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{42m-k+3}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(24n-45)m+k}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{30} &= \{w_{\alpha_5}^{30} + \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{43m-k+3}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(12n-23)2m+k}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{31} &= \{w_{\alpha_5}^{31} + \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{6m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n-3)3m+k}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{32} &= \{w_{\alpha_5}^{32} + \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{7m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(12n-5)2m+k}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{33} &= \{w_{\alpha_5}^{33} + \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{21m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(n-1)24m-2k+2}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{34} &= \{w_{\alpha_5}^{34} + \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{39m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(4n-7)6m+k+1}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{35} &= \{w_{\alpha_5}^{35} + \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{38m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(24n-41)m+k+1}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{36} &= \{w_{\alpha_5}^{36} + \alpha_5(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{12m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n-5)3m+k}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{37} &= \{w_{\alpha_5}^{37} + \alpha_5(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{13m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(3n-2)8m+k}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{38} &= \{w_{\alpha_5}^{38} + \alpha_5(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{27m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n-5)6m-2k+2}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{39} &= \{w_{\alpha_5}^{39} + \alpha_5(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{45m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(n-2)24m+k+1}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{40} &= \{w_{\alpha_5}^{40} + \alpha_5(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{44m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(24n-47)m+k+1}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Fungsi bijektif pada  $W_{\alpha_5}$  dapat direduksi sebagai berikut:

Untuk sisi  $x_i^k x_{i+1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^1 &= \{w_{\alpha_5}^1 + \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{14m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(24n-17)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-1)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^2 &= \{w_{\alpha_5}^2 + \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{30m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n-11)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-2)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^3 &= \{w_{\alpha_5}^3 + \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{45m+2k+1}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(n-2)24m-2k+2}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k y_{i+1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^4 &= \{w_{\alpha_5}^6 + \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{18m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n-7)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-1)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^5 &= \{w_{\alpha_5}^5 + \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{33m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(2n-3)12m-2k+2}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^6 &= \{w_{\alpha_5}^6 + \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{50m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(24n-53)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-3)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k y_i^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^7 &= \{w_{\alpha_5}^7 + \alpha_5(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{8m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(24n-11)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-1)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^8 &= \{w_{\alpha_5}^8 + \alpha_5(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{24m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(24n-27)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-2)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^9 &= \{w_{\alpha_5}^9 + \alpha_5(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{39m+2k+1}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(4n-7)6m-2k+2}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $z_j^k z_{j+1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{10} &= \{w_{\alpha_5}^{10} + \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{15m+2k+1}{2} + (j-2)4m\right) + \left(\frac{(4n-3)6m-2k+2}{2} - (j-2)4m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{11} &= \{w_{\alpha_5}^{11} + \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{32m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (j-4)4m\right) + \left(\frac{(24n-35)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (j-4)4m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{12} &= \{w_{\alpha_5}^{12} + \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{48m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (j-6)4m\right) + \left(\frac{(24n-51)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (j-6)4m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{13} &= \{w_{\alpha_5}^{13} + \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{3m+2k+1}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(12n-3)2m-2k+2}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{14} &= \{w_{\alpha_5}^{14} + \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{20m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(24n-23)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-2)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{15} &= \{w_{\alpha_5}^{15} + \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{36m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n-13)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-3)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{16} &= \{w_{\alpha_5}^{16} + \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{9m+2k+1}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(2n-1)12m-2k+2}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{17} &= \{w_{\alpha_5}^{17} + \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{26m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(24n-29)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-2)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{18} &= \{w_{\alpha_5}^{18} + \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{42m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(24n-45)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-3)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{19} &= \{w_{\alpha_5}^{19} + \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{6m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n-3)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-1)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{20} &= \{w_{\alpha_5}^{20} + \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{21m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(n-1)24m-2k+2}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{21} &= \{w_{\alpha_5}^{21} + \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{38m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(24n-41)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-3)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{22} &= \{w_{\alpha_5}^{22} + \alpha_5(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{12m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n-5)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-1)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{23} &= \{w_{\alpha_5}^{23} + \alpha_5(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{27m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n-5)6m-2k+2}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{24} &= \{w_{\alpha_5}^{24} + \alpha_5(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{44m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(24n-47)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-3)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

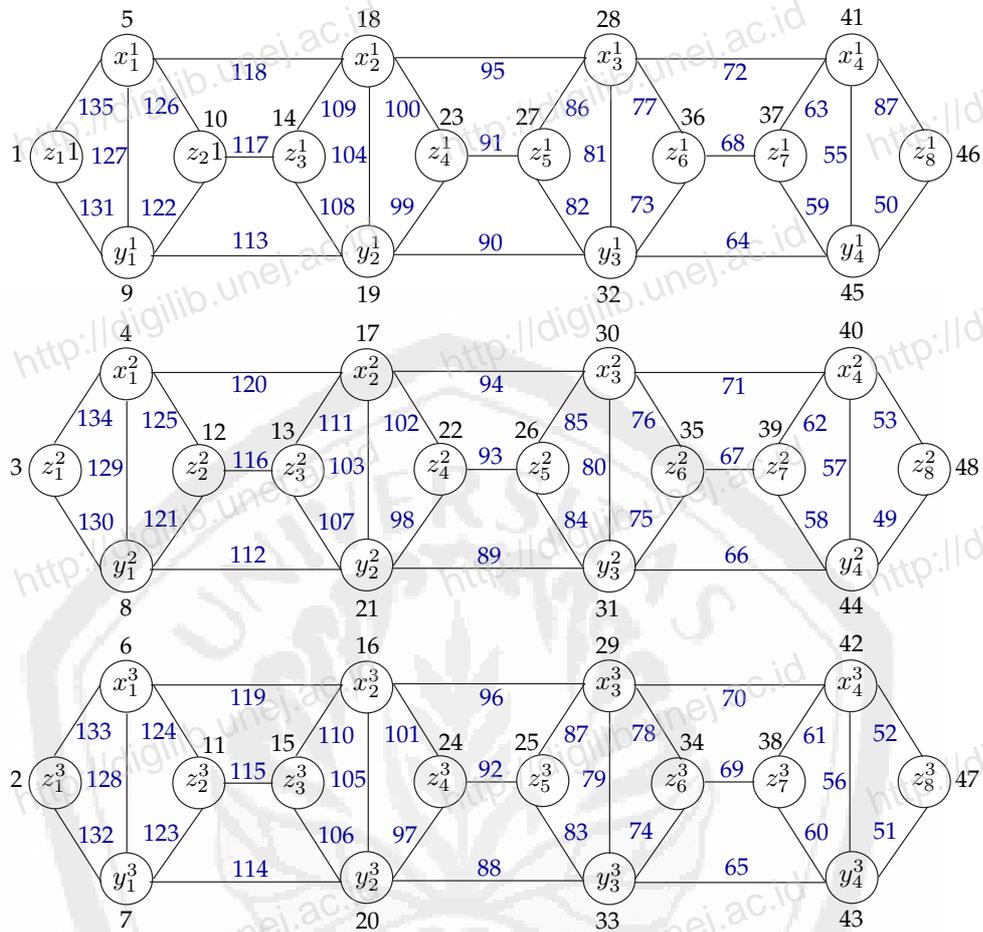
Tampak bahwa  $W_{\alpha_5}^1 = W_{\alpha_5}^2 = \dots = W_{\alpha_5}^{40} = \frac{(8n-1)3m+3}{2}$ . Atau dapat dituliskan sebagai berikut:  $\bigcup_{t=1}^{40} W_{\alpha_5}^t = \left\{ \frac{(8n-1)3m+3}{2}, \frac{(8n-1)3m+3}{2}, \dots, \frac{(8n-1)3m+3}{2} \right\}$ .

Dapat disimpulkan bahwa gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dengan  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan  $a = \frac{(8n-1)3m+3}{2}$  dan  $d = 0$ , atau gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  mempunyai Super  $\left(\frac{(8n-1)3m+3}{2}, 0\right)$ -sisi antimagic jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .

□

Angka 1, 2, ..., 40 pada  $W_{\alpha_5}^1, W_{\alpha_5}^2, \dots, W_{\alpha_5}^{40}$  bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan  $W_{\alpha_5}$  yang mempunyai syarat batas  $i, j$  dan  $k$

yang berbeda-beda. Gambar 4.7 merupakan contoh pelabelan total super  $(a, 0)$ -sisi antimagic ( $SEATL$ ) pada gabungan graf Tangga Permata  $3Dl_4$ .



Gambar 4.7: Pelabelan total super(141,0)-sisi antimagic pada  $3Dl_4$

Berdasarkan Lemma 4.6.1 maka diperoleh pelabelan titik  $(\frac{3m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic dan dapat ditentukan pelabelan total super  $(a, 2)$ -sisi antimagic dengan menentukan label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL  $w$  dengan urutan yang sama. Sehingga sisi dengan  $w$  terkecil dilabeli dengan label sisi terkecil dan sisi dengan  $w$  terbesar dilabeli dengan label sisi terbesar, dimana  $E(mDl_n) = \{x_i^k x_{i+1}^k, y_i^k y_{i+1}^k; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i^k y_i^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{z_j^k z_{j+1}^k; j \text{ genap}, 2 \leq j \leq 2n-2, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i^k z_{2i-1}^k, x_i^k z_{2i}^k, y_i^k z_{2i-1}^k, y_i^k z_{2i}^k; 1 \leq$

$i \leq n, 1 \leq k \leq m$ . Melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika, maka dapat ditentukan fungsi bijektifnya. Dari uraian di atas dapat diturunkan teorema 4.6.2:

◇ **Teorema 4.6.2** *Ada pelabelan total super  $(\frac{(8n+3)m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Diamond Ladder  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dengan  $\alpha_6(x_i^k) = \alpha_4(x_i^k)$ ,  $\alpha_6(y_i^k) = \alpha_4(y_i^k)$  dan  $\alpha_6(z_j^k) = \alpha_4(z_j^k)$ , untuk  $1 \leq k \leq m$ , definisikan label sisi  $\alpha_6 : E(mDl_n) \rightarrow \{4nm + 1, 4nm + 2, \dots, 12nm - 3m\}$ , maka label sisi  $\alpha_6$  untuk pelabelan total super  $(a, 2)$ -sisi antimagic pada graf  $mDl_n$  dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{(2n+3)4m-k+1}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8n+11)m-k+1}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8n+27)m-k+2}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(2n+7)4m-k+2}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4n+21)2m+2k}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{cases}$$

$$\alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n+15)m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(n+2)8m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4n+15)2m+2k}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(n+6)8m-k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8n+47)m-k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_6(x_i^k y_i^k) = \begin{cases} \frac{(4n+3)2m-k+1}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8n+5)m-k+1}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8n+21)m-k+2}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(4n+11)2m-k+2}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8n+36)m+2k}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{cases}$$

$$\alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k) = \begin{cases} \frac{(2n+3)4m+2k}{2} + (j-2)4m; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4n+15)2m-k+1}{2} + (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8n+29)m-k+1}{2} + (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8n+45)m-k+2}{2} + (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(4n+23)2m-k+2}{2} + (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k) = \begin{cases} \frac{8nm+2k}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4n+9)2m-k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8n+17)m-k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8n+33)m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(4n+17)2m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_6(x_i^k z_{2i}^k) = \begin{cases} \frac{(4n+3)2m+2k}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(n+3)8m-k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8n+23)m-k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8n+39)m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(n+5)8m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n+3)m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(2n+1)4m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4n+9)2m+2k}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(8n+36)m-k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8n+35)m-k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_6(y_i^k z_{2i}^k) = \begin{cases} \frac{(8n+9)m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(4n+5)2m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(n+3)8m+2k}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4n+21)2m-k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8n+41)m-k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

Fungsi bijektif pada  $\alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k)$ ,  $\alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k)$ ,  $\alpha_6(x_i^k y_i^k)$ ,  $\alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k)$ ,  $\alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k)$ ,  $\alpha_6(x_i^k z_{2i}^k)$ ,  $\alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k)$  dan  $\alpha_6(y_i^k z_{2i}^k)$  dapat direduksi sebagai berikut:(untuk  $k$  sembarang)

$$\alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n+11)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(8n+27)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(4n+21)2m+2k}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$\alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n+15)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(4n+15)2m+2k}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(8n+47)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$\alpha_6(x_i^k y_i^k) = \begin{cases} \frac{(8n+5)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(8n+21)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(8n+36)m+2k}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$\alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k) = \begin{cases} \frac{(2n+3)4m+2k}{2} + (j-2)4m; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \\ \frac{(8n+29)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \\ \frac{(8n+45)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \end{cases}$$

$$\alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k) = \begin{cases} \frac{(4n+9)2m-k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(8n+17)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(8n+33)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$\alpha_6(x_i^k z_{2i}^k) = \begin{cases} \frac{(4n+3)2m+2k}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(8n+23)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(8n+39)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$\alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n+3)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(4n+9)2m+2k}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(8n+35)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$\alpha_6(y_i^k z_{2i}^k) = \begin{cases} \frac{(8n+9)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(n+3)8m+2k}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(8n+41)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

Jika  $W_{\alpha_6}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total  $\alpha_6(x_i^k)$ ,  $\alpha_6(y_i^k)$ ,  $\alpha_6(z_j^k)$ ,  $\alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k)$ ,  $\alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k)$ ,  $\alpha_6(x_i^k y_i^k)$ ,  $\alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k)$ ,  $\alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k)$ ,  $\alpha_6(x_i^k z_{2i}^k)$ ,  $\alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k)$  dan  $\alpha_6(y_i^k z_{2i}^k)$  maka  $W_{\alpha_6}$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL  $w_{\alpha_4} = w_{\alpha_6}$  dan rumus label sisi  $\alpha_6$  dengan syarat batas  $i, j$ , dan  $k$  yang bersesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

Untuk sisi  $x_i^k x_{i+1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^1 &= \{w_{\alpha_6}^1 + \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{15m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(2n+3)4m-k+1}{2} + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+27)m-2k+3}{2} + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^2 &= \{w_{\alpha_6}^2 + \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{14m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+11)m-k+1}{2} + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+25)m-2k+3}{2} + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^3 &= \{w_{\alpha_6}^3 + \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{30m-k+3}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n+27)m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n+57)m-2k+5}{2} + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^4 &= \{w_{\alpha_6}^4 + \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{31m-k+3}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(2n+7)4m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n+59)m-2k+5}{2} + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^5 &= \{w_{\alpha_6}^5 + \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{45m+2k+1}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(4n+21)2m+2k}{2} + (i-3)8m\right) \\ &= \frac{(8n+87)m+4k+1}{2} + (i-3)16m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k y_{i+1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^6 &= \{w_{\alpha_6}^6 + \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{18m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+15)m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+33)m-2k+5}{2} + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^7 &= \{w_{\alpha_6}^7 + \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{19m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(n+2)8m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+35)m-2k+5}{2} + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^8 &= \{w_{\alpha_6}^8 + \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{33m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n+15)2m+2k}{2} + (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n+63)m+4k+1}{2} + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^9 &= \{w_{\alpha_6}^9 + \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{51m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(9 \cdot \frac{(n+6)8m-k+1}{2} + (i-3)8m\right) \\ &= \frac{(8n+99)m-2k+3}{2} + (i-3)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{10} &= \{w_{\alpha_6}^{10} + \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{50m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+47)m-k+1}{2} + (i-3)8m\right) \\ &= \frac{(8n+97)m-2k+3}{2} + (i-3)16m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k y_i^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{11} &= \{w_{\alpha_6}^{11} + \alpha_6(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{9m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(4n+3)2m-k+1}{2} + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+15)m-2k+3}{2} + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{12} &= \{w_{\alpha_6}^{12} + \alpha_6(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{8m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+5)m-k+1}{2} + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+13)m-2k+3}{2} + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{13} &= \{w_{\alpha_6}^{13} + \alpha_6(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{24m-k+3}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n+21)m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n+45)m-2k+5}{2} + (i-2)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{14} &= \{w_{\alpha_6}^{14} + \alpha_6(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{25m-k+3}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n+11)2m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n+47)m-2k+5}{2} + (i-2)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{15} &= \{w_{\alpha_6}^{15} + \alpha_6(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{39m+2k+1}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+36)m+2k}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+75)m+4k+1}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $z_j^k z_{j+1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{16} &= \{w_{\alpha_6}^{16} + \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{15m+2k+1}{2} + (j-2)4m\right) + \left(\frac{(2n+3)4m+2k}{2} + (j-2)4m\right) \\
&= \frac{(8n+27)m+4k+1}{2} + (j-2)8m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{17} &= \{w_{\alpha_6}^{17} + \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{33m-k+2}{2} + (j-4)4m\right) + \left(\frac{(4n+15)2m-k+1}{2} + (j-4)4m\right) \\
&= \frac{(8n+63)m-2k+3}{2} + (j-4)8m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{18} &= \{w_{\alpha_6}^{18} + \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{32m-k+2}{2} + (j-4)4m\right) + \left(\frac{(8n+29)m-k+1}{2} + (j-4)4m\right) \\
&= \frac{(8n+61)m-2k+3}{2} + (j-4)8m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{19} &= \{w_{\alpha_6}^{19} + \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{48m-k+3}{2} + (j-6)4m\right) + \left(\frac{(8n+45)m-k+2}{2} + (j-6)4m\right) \\
&= \frac{(8n+93)m-2k+5}{2} + (j-6)8m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{20} &= \{w_{\alpha_6}^{20} + \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{49m-k+3}{2} + (j-6)4m\right) + \left(\frac{(4n+23)2m-k+2}{2} + (j-6)4m\right) \\
&= \frac{(8n+95)m-2k+5}{2} + (j-6)8m
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{21} &= \{w_{\alpha_6}^{21} + \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{3m+2k+1}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{8nm+2k}{2} + (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n+3)m+4k+1}{2} + (i-1)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{22} &= \{w_{\alpha_6}^{22} + \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{21m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n+9)2m-k+1}{2} + (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n+39)m-2k+3}{2} + (i-2)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{23} &= \{w_{\alpha_6}^{23} + \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{20m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n+17)m-k+1}{2} + (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n+37)m-2k+3}{2} + (i-2)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{24} &= \{w_{\alpha_6}^{24} + \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{36m-k+3}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+33)m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+69)m-2k+5}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{25} &= \{w_{\alpha_6}^{25} + \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{37m-k+3}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(4n+17)2m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+71)m-2k+5}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{26} &= \{w_{\alpha_6}^{26} + \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{9m+2k+1}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(4n+3)2m+2k}{2} + (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n+15)m+4k+1}{2} + (i-1)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{27} &= \{w_{\alpha_6}^{27} + \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{27m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(n+3)8m-k+1}{2} + (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n+51)m-2k+3}{2} + (i-2)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{28} &= \{w_{\alpha_6}^{28} + \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{26m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n+23)m-k+1}{2} + (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n+49)m-2k+3}{2} + (i-2)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{29} &= \{w_{\alpha_6}^{29} + \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{42m-k+3}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+39)m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+81)m-2k+5}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{30} &= \{w_{\alpha_6}^{30} + \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{43m-k+3}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(n+5)8m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+83)m-2k+5}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{31} &= \{w_{\alpha_6}^{31} + \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{6m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+3)m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n+9)m-2k+5}{2} + (i-1)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{32} &= \{w_{\alpha_6}^{32} + \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{7m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(2n+1)4m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n+11)m-2k+5}{2} + (i-1)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{33} &= \{w_{\alpha_6}^{33} + \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{21m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n+9)2m+2k}{2} + (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n+39)m+4k+1}{2} + (i-2)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{34} &= \{w_{\alpha_6}^{34} + \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{39m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+36)m-k+1}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+75)m-2k+3}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{35} &= \{w_{\alpha_6}^{35} + \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{38m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+35)m-k+1}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+73)m-2k+3}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{36} &= \{w_{\alpha_6}^{36} + \alpha_6(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{12m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+9)m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n+21)m-2k+5}{2} + (i-1)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{37} &= \{w_{\alpha_6}^{37} + \alpha_6(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{13m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(4n+5)2m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n+23)m-2k+5}{2} + (i-1)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{38} &= \{w_{\alpha_6}^{38} + \alpha_6(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{27m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(n+3)8m+2k}{2} + (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n+51)m+4k+1}{2} + (i-2)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{39} &= \{w_{\alpha_6}^{39} + \alpha_6(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{45m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(4n+21)2m-k+1}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+87)m-2k+3}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{40} &= \{w_{\alpha_6}^{40} + \alpha_6(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{44m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+41)m-k+1}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+85)m-2k+3}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

Fungsi bijektif pada  $W_{\alpha_6}$  dapat direduksi sebagai berikut:

Untuk sisi  $x_i^k x_{i+1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^1 &= \{w_{\alpha_6}^1 + \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{14m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+11)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\ &\quad + (i-1)8m \\ &= \frac{(8n+25)m-2k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^2 &= \{w_{\alpha_6}^2 + \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{30m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n+27)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\ &\quad + (i-2)8m \\ &= \frac{(8n+57)m-2k+5}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)m + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^3 &= \{w_{\alpha_6}^3 + \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{45m+2k+1}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(4n+21)2m+2k}{2} + (i-3)8m\right) \\ &= \frac{(8n+87)m+4k+1}{2} + (i-3)16m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k y_{i+1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^4 &= \{w_{\alpha_6}^4 + \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{18m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+15)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\ &\quad + (i-1)8m \\ &= \frac{(8n+33)m-2k+5}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)m + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^5 &= \{w_{\alpha_6}^5 + \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{33m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n+15)2m+2k}{2} + (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n+63)m+4k+1}{2} + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^6 &= \{w_{\alpha_6}^6 + \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{50m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+47)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\ &\quad + (i-3)8m \\ &= \frac{(8n+97)m-2k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (i-3)16m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k y_i^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^7 &= \{w_{\alpha_6}^7 + \alpha_6(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{8m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+5)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+13)m-2k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{j+1}+1}{2}\right)m + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^8 &= \{w_{\alpha_6}^8 + \alpha_6(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{24m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n+21)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n+45)m-2k+5}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)m + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^9 &= \{w_{\alpha_6}^9 + \alpha_6(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{39m+2k+1}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+36)m+2k}{2} + (i-3)8m\right) \\ &= \frac{(8n+75)m+4k+1}{2} + (i-3)16m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $z_j^k z_{j+1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{10} &= \{w_{\alpha_6}^{10} + \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{15m+2k+1}{2} + (j-2)4m\right) + \left(\frac{(2n+3)4m+2k}{2} + (j-2)4m\right) \\ &= \frac{(8n+27)m+4k+1}{2} + (j-2)8m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{11} &= \{w_{\alpha_6}^{11} + \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{32m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (j-4)4m\right) + \left(\frac{(8n+29)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (j-4)4m\right) \\ &= \frac{(8n+61)m-2k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (j-4)8m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{12} &= \{w_{\alpha_6}^{12} + \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{48m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (j-6)4m\right) + \left(\frac{(8n+45)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (j-6)4m\right) \\ &= \frac{(8n+93)m-2k+5}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)m + (j-6)8m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{13} &= \{w_{\alpha_6}^{13} + \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{3m+2k+1}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(4n+9)2m-k+1}{2} + (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n+3)m+4k+1}{2} + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{14} &= \{w_{\alpha_6}^{14} + \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{20m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n+17)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\ &\quad + (i-2)8m \\ &= \frac{(8n+37)m-2k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{15} &= \{w_{\alpha_6}^{15} + \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{36m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+33)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\ &\quad + (i-3)8m \\ &= \frac{(8n+69)m-2k+5}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (i-3)16m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{16} &= \{w_{\alpha_6}^{16} + \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{9m+2k+1}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(4n+3)2m+2k}{2} + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+15)m+4k+1}{2} + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{17} &= \{w_{\alpha_6}^{17} + \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{26m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n+23)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\ &\quad + (i-2)8m \\ &= \frac{(8n+49)m-2k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{18} &= \{w_{\alpha_6}^{18} + \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{42m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+39)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\ &\quad + (i-3)8m \\ &= \frac{(8n+81)m-2k+5}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (i-3)16m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{19} &= \{w_{\alpha_6}^{19} + \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{6m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+3)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+9)m-2k+5}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)m + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{20} &= \{w_{\alpha_6}^{20} + \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{21m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n+9)2m+2k}{2} + (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n+39)m+4k+1}{2} + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{21} &= \{w_{\alpha_6}^{21} + \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{38m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+35)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) \\ &= \frac{(8n+73)m-2k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (i-3)16m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{22} &= \{w_{\alpha_6}^{22} + \alpha_6(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{12m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+9)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+21)m-2k+5}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)m + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{23} &= \{w_{\alpha_6}^{23} + \alpha_6(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{27m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(n+3)8m+2k}{2} + (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n+51)m+4k+1}{2} + (i-2)16m \end{aligned}$$

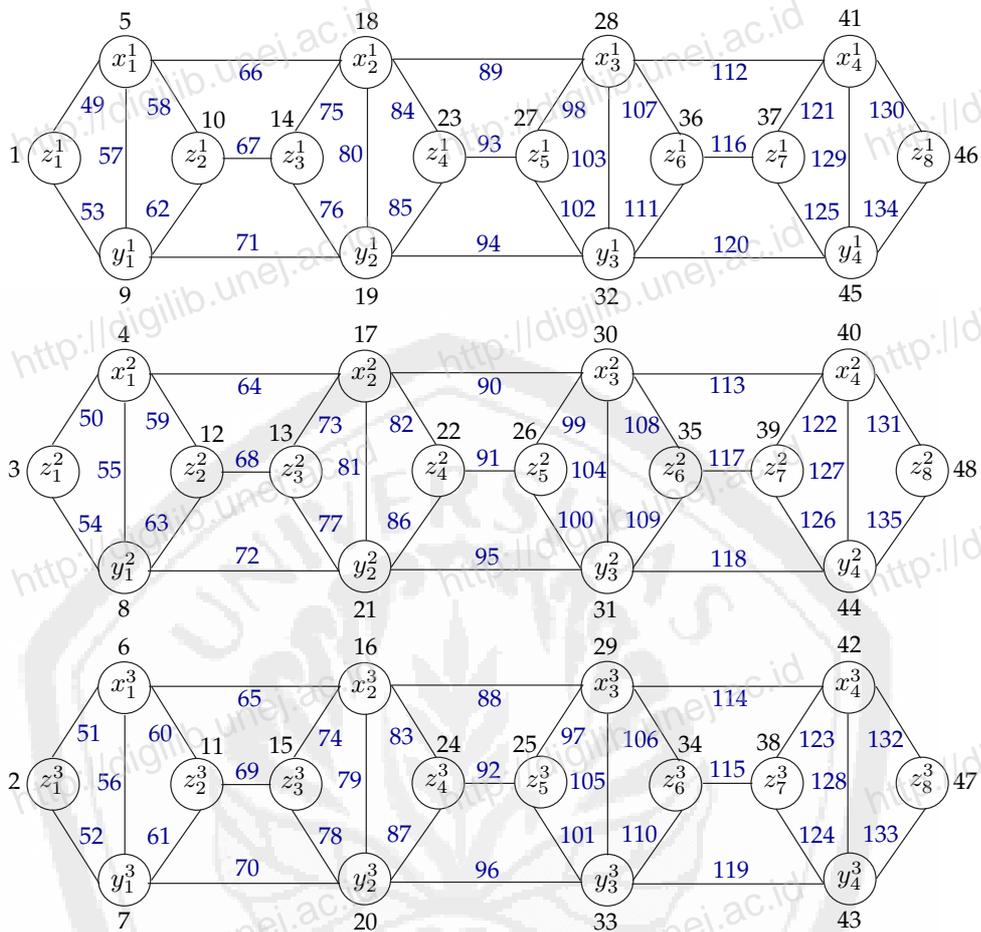
$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{24} &= \{w_{\alpha_6}^{24} + \alpha_6(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{44m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+41)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) \\ &= \frac{(8n+85)m-2k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (i-3)16m \end{aligned}$$

Perhatikan Himpunan bobot sisi  $W_{\alpha_6} = \{W_{\alpha_6}^1, W_{\alpha_6}^2, W_{\alpha_6}^3, \dots, W_{\alpha_6}^{40}\}$ . Tampak bahwa bobot sisi terkecil pertama, kedua sampai kelima terletak pada  $W_{\alpha_6}^{21}$ , selanjutnya terletak pada  $W_{\alpha_6}^{31}$ , sedangkan bobot sisi terbesar terletak pada  $W_{\alpha_6}^{37}$ . Dengan mensubstitusikan nilai  $i = 1$  dan  $k = 1$  pada  $W_{\alpha_6}^{21}$  diperoleh  $W_{\alpha_6} = \frac{(8n+3)m+4(1)+1}{2} + (1-1)16m = \frac{(8n+3)m+5}{2}$ , substitusi  $i = 1$  dan  $k = 2$  pada  $W_{\alpha_6}^{21}$  diperoleh  $W_{\alpha_6} = \frac{(8n+3)m+4(2)+1}{2} + (1-1)16m = \frac{(8n+3)m+9}{2}$ , substitusi  $i = 1$  dan  $k = 3$  pada  $W_{\alpha_6}^{21}$  diperoleh  $W_{\alpha_6} = \frac{(8n+3)m+4(3)+1}{2} + (1-1)16m = \frac{(8n+3)m+13}{2}, \dots$ , substitusi  $i = n$  dan  $k = 2$  pada  $W_{\alpha_6}^{37}$  diperoleh  $W_{\alpha_6} = \frac{(8n+3)m+4(2)+5}{2} + (n-1)16m = \frac{(40n-9)m+1}{2}$ . Dapat dinyatakan bahwa  $W_{\alpha_6}$  membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $\frac{(8n+3)m+5}{2}$  dan beda 2 (dua), atau dapat dituliskan  $\bigcup_{t=1}^{40} W_{\alpha_6}^t = \{\frac{(8n+3)m+5}{2}, \frac{(8n+3)m+9}{2}, \frac{(8n+3)m+13}{2}, \dots, \frac{(40n-9)m+1}{2}\}$ . Dapat disimpulkan bahwa gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan  $a = \frac{(8n+3)m+5}{2}$  dan  $d = 2$  atau gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  mempunyai Super  $(\frac{(8n+3)m+5}{2}, 2)$ -EAT;  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ . Sehingga terbukti bahwa pelabelan total  $\alpha_6(x_i^k), \alpha_6(y_i^k), \alpha_6(z_j^k), \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k), \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k), \alpha_6(x_i^k y_i^k), \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k), \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k), \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k), \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k)$  dan  $\alpha_6(y_i^k z_{2i}^k)$  adalah pelabelan total super  $(a, 2)$ -sisi antimagic jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .  $\square$

Angka  $1, 2, \dots, 40$  pada  $W_{\alpha_6}^1, W_{\alpha_6}^2, \dots, W_{\alpha_6}^{40}$  bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan  $W_{\alpha_6}$  yang mempunyai syarat batas  $i, j$ , dan  $k$  yang berbeda-beda. Gambar 4.8 merupakan contoh pelabelan total super  $(a, 2)$ -sisi antimagic (*SEATL*) pada gabungan graf Tangga Permata  $3Dl_4$ .

Jika  $\alpha_6(z)$  adalah label sisi  $mDl_n$  untuk  $d = 2$  dan  $\alpha_5(z)$  adalah label sisi  $mDl_n$  untuk  $d = 0$  maka berdasarkan urutan peletakkan label sisi yang ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL  $w$  dapat dirumuskan label sisi  $mDl_n$  untuk  $d = 2$ , yaitu:

$$\begin{aligned} \alpha_6(z) &= 2p + q + 1 - \alpha_5(z) \\ &= 2(4nm) + (8nm - 3m) + 1 - \alpha_5(z) \\ &= 16nm - 3m + 1 - \alpha_5(z) \end{aligned}$$



Gambar 4.8: Pelabelan total super(55,2)-sisi antimagic pada  $3Dl_4$

Untuk pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dengan  $d = 1$ , penulis akan membuktikannya melalui sebuah teorema yang dikembangkan dengan tidak mengacu pada pelabelan titik yang sudah ditemukan sebelumnya. Dengan pelabelan titik yang baru maka penulis mengembangkannya menjadi sebuah teorema baru untuk menentukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dengan  $d = 1$ .

◇ **Teorema 4.6.3** *Ada pelabelan total super  $(8nm+2,1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  jika  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dengan fungsi bijektif  $\alpha_7$ , untuk  $1 \leq k \leq m$ , definisikan pelabelan  $\alpha_7 : V(mDl_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 4nm\}$  maka pelabelan  $\alpha_7$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha_7(x_i^k) &= m + k + (i - 1)4m; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \alpha_7(y_i^k) &= 2m + k + (i - 1)4m; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \alpha_7(z_j^k) &= k + \left(\frac{4j-3-(-1)^{j+1}}{2}\right)m; & \text{jika } 2 \leq j \leq 2n \text{ genap dan } k \text{ sembarang}\end{aligned}$$

Dari persamaan di atas, dapat dipahami bahwa  $\alpha_7(x_i^k)$ ,  $\alpha_7(y_i^k)$  dan  $\alpha_7(z_j^k)$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $mDl_n$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, 4nm\}$ . Jika  $w_{\alpha_7}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan titik  $\alpha_7$  dimana bobot sisi pelabelan titik diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang bersisian, maka fungsi bijektif  $w_{\alpha_7}$  dapat ditentukan melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika sebagai berikut:

Untuk  $1 \leq k \leq m$  sembarang

$$\begin{aligned}w_{\alpha_7}^1(x_i^k x_{i+1}^k) &= 2k + (4i - 1)2m; & \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1 \\ w_{\alpha_7}^2(y_i^k y_{i+1}^k) &= 2k + 8im; & \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1 \\ w_{\alpha_7}^3(x_i^k y_i^k) &= 2k + (8i - 5)m; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ w_{\alpha_7}^4(z_j^k z_{j+1}^k) &= 2k + (4j - 1)m; & \text{jika } 2 \leq j \leq 2n - 2 \text{ genap} \\ w_{\alpha_7}^5(x_i^k z_{2i-1}^k) &= 2k + (8i - 7)m; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ w_{\alpha_7}^6(x_i^k z_{2i}^k) &= 2k + (2i - 1)4m; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ w_{\alpha_7}^7(y_i^k z_{2i-1}^k) &= 2k + (4i - 3)2m; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ w_{\alpha_7}^8(y_i^k z_{2i}^k) &= 2k + (8i - 3)m; & \text{jika } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Angka 1, 2, ..., 8 pada  $w_{\alpha_7}^1, w_{\alpha_7}^2, w_{\alpha_7}^3, \dots, w_{\alpha_7}^8$  bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan  $w_{\alpha_7}$  yang mempunyai syarat batas  $i, j$  dan  $k$  yang berbeda-beda.

Definisikan label sisi  $\alpha_7 : E(Dl_n) \rightarrow \{4nm + 1, 4nm + 2, \dots, 12nm - 3\}$ ,

maka label sisi  $\alpha_7$  untuk pelabelan total super  $(a, 1)$ -sisi antimagic pada graf  $mDl_n$  dapat dirumuskan sebagai berikut:

Untuk  $1 \leq k \leq m$  sembarang

$$\begin{aligned} \alpha_7(x_i^k x_{i+1}^k) &= (2n - i)4m - k + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_7(y_i^k y_{i+1}^k) &= (8n - 4i - 1)m - k + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_7(x_i^k y_i^k) &= (3n - i)4m - k + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_7(z_j^k z_{j+1}^k) &= (6n - j - 1)2m - k + 1, & \text{jika } 2 \leq j \leq 2n - 2 \text{ genap} \\ \alpha_7(x_i^k z_{2i-1}^k) &= (12n - 4i + 1)m - k + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_7(x_i^k z_{2i}^k) &= (8n - 4i + 1)m - k + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_7(y_i^k z_{2i-1}^k) &= (4n - 2i + 1)2m - k + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_7(y_i^k z_{2i}^k) &= (12n - 4i - 1)m - k + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Jika  $W_{\alpha_7}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total  $\alpha_7(x_i^k), \alpha_7(y_i^k), \alpha_7(z_j^k), \alpha_7(x_i^k x_{i+1}^k), \alpha_7(y_i^k y_{i+1}^k), \alpha_7(x_i^k y_i^k), \alpha_7(z_j^k z_{j+1}^k), \alpha_7(x_i^k z_{2i-1}^k), \alpha_7(x_i^k z_{2i}^k), \alpha_7(y_i^k z_{2i-1}^k)$  dan  $\alpha_7(y_i^k z_{2i}^k)$  maka  $W_{\alpha_7}$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL  $w_{\alpha_7}$  dan rumus label sisi  $\alpha_7$  dengan syarat batas  $i, j$ , dan  $k$  yang beresesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_7}^1 &= \{w_{\alpha_7}^1 + \alpha_7(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } 1 \leq i \leq n - 1 \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= (2k + (4i - 1)2m) + ((2n - i)4m - k + 1) \\ &= (4n + 2i - 1)2m + k + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_7}^2 &= \{w_{\alpha_7}^2 + \alpha_7(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } 1 \leq i \leq n - 1 \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= (2k + 8im) + ((8n - 4i - 1)m - k + 1) \\ &= (8n + 4i - 1)m + k + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_7}^3 &= \{w_{\alpha_7}^3 + \alpha_7(x_i^k y_i^k); \text{ jika } 1 \leq i \leq n \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= (2k + (8i - 5)m) + ((3n - i)4m - k + 1) \\ &= (12n + 4i - 5)m + k + 1 \end{aligned}$$

$$W_{\alpha_7}^4 = \{w_{\alpha_7}^4 + \alpha_7(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } 2 \leq j \leq 2n - 2 \text{ genap dan } k \text{ sembarang}\}$$

$$= (2k + (4j - 1)m) + ((6n - j - 1)2m - k + 1)$$

$$= (12n + 2j - 3)m + k + 1$$

$$W_{\alpha_7}^5 = \{w_{\alpha_7}^5 + \alpha_7(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } 1 \leq i \leq n \text{ dan } k \text{ sembarang}\}$$

$$= (2k + (8i - 7)m) + ((12n - 4i + 1)m - k + 1)$$

$$= (6n + 2i - 3)2m + k + 1$$

$$W_{\alpha_7}^6 = \{w_{\alpha_7}^6 + \alpha_7(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } 1 \leq i \leq n \text{ dan } k \text{ sembarang}\}$$

$$= (2k + (2i - 1)4m) + (((8n - 4i + 1)m - k + 1)$$

$$= (8n + 4i - 3)m + k + 1$$

$$W_{\alpha_7}^7 = \{w_{\alpha_7}^7 + \alpha_7(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } 1 \leq i \leq n \text{ dan } k \text{ sembarang}\}$$

$$= (2k + (4i - 3)2m) + ((4n - 2i + 1)2m - k + 1)$$

$$= (2n + i - 1)4m + k + 1$$

$$W_{\alpha_7}^8 = \{w_{\alpha_7}^8 + \alpha_7(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } 1 \leq i \leq n \text{ dan } k \text{ sembarang}\}$$

$$= (2k + (8i - 3)m) + (((12n - 4i - 1)m - k + 1)$$

$$= (3n + i - 1)4m + k + 1$$

Perhatikan Himpunan bobot sisi  $W_{\alpha_7} = \{W_{\alpha_7}^1, W_{\alpha_7}^2, W_{\alpha_7}^3, \dots, W_{\alpha_7}^8\}$ . Tampak bahwa bobot sisi terkecil pertama, kedua sampai keempat terletak pada  $W_{\alpha_7}^7$ , selanjutnya terletak pada  $W_{\alpha_7}^6$ , sedangkan bobot sisi terbesar terletak pada  $W_{\alpha_7}^8$ . Dengan mensubstitusikan nilai  $i = 1$  dan  $k = 1$  pada  $W_{\alpha_7}^7$  diperoleh  $W_{\alpha_7} = (2n + 1 - 1)4m + 1 + 1 = 8nm + 2$ , substitusi  $i = 1$  dan  $k = 2$  pada  $W_{\alpha_7}^7$  diperoleh  $W_{\alpha_7} = (2n + 1 - 1)4m + 2 + 1 = 8nm + 3$ , substitusi  $i = 1$  dan  $k = 3$  pada  $W_{\alpha_7}^7$  diperoleh  $W_{\alpha_7} = (2n + 1 - 1)4m + 3 + 1 = 8nm + 4, \dots$ , substitusi  $i = n$  dan  $k = m$  pada  $W_{\alpha_7}^8$  diperoleh  $W_{\alpha_7} = (3n + n - 1)4m + m + 1 = 16nm - 3m + 1$ . Dapat dinyatakan bahwa  $W_{\alpha_7}$  membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $8nm + 2$  dan beda 1 (satu), atau dapat dituliskan  $\bigcup_{t=1}^8 W_{\alpha_7}^t = \{8nm + 2, 8nm + 3,$



#### 4.7 Hasil dan Pembahasan

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui batas atas nilai  $d$  sehingga graf Tangga Permata tunggal  $Dl_n$  maupun gabungannya  $mDl_n$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic, selanjutnya akan dicari pelabelan pada graf tersebut dan menentukan konstruksi fungsi bijektifnya. Dari hasil perhitungan diperoleh bahwa nilai  $d$  yang mungkin untuk pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata tunggal  $Dl_n$  maupun gabungannya  $mDl_n$  adalah  $d \in \{0, 1, 2\}$ . Setelah menentukan nilai  $d$ , peneliti mencari pelabelan sesuai dengan nilai  $d$  yang telah ditentukan tersebut.

Dari hasil penelitian pada beberapa nilai  $d$  tersebut di atas, diperoleh 2 (dua) lemma dan 6 (enam) teorema baru tentang pelabelan graf Tangga Permata tunggal  $Dl_n$  maupun gabungannya  $mDl_n$ , yaitu:

- **Lemma 4.5.1** *Ada pelabelan titik  $(3, 1)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .*
- **Teorema 4.5.1** *Ada pelabelan total super  $(12n, 0)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .*
- **Teorema 4.5.2** *Ada pelabelan total super  $(4n + 4, 2)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .*
- **Teorema 4.5.3** *Suatu graf  $Dl_n$  mempunyai pelabelan total super  $(8n + 2, 1)$ -sisi antimagic untuk  $n \geq 2$ .*
- **Lemma 4.6.1** *Ada pelabelan titik  $(\frac{3m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan Graf Diamond Ladder  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .*
- **Teorema 4.6.1** *Ada pelabelan total super  $(\frac{(8n-1)3m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Diamond Ladder  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .*
- **Teorema 4.6.2** *Ada pelabelan total super  $(\frac{(8n+3)m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Diamond Ladder  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .*

- **Teorema 4.6.3** *Ada pelabelan total super  $(8nm+2,1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  jika  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ .*

Berdasarkan hasil penelitian tersebut, dapat diketahui bahwa untuk setiap batas atas  $d$  yang berlainan maka nilai awal  $a$  juga berlainan. Namun demikian seluruh label titik dan seluruh label bobot sisi adalah sama, baik untuk  $d = 0, d = 1$  maupun untuk  $d = 2$  (kecuali untuk gabungan graf Tangga Permata pada saat  $d=1$ ), yang kemudian dilanjutkan melengkapi pelabelan sisinya sehingga menjadi pelabelan total. Pada graf Tangga Permata tunggal ketiga nilai  $d$  tersebut berlaku pada syarat yang sama yaitu untuk  $n \geq 2$ . Sedangkan pada gabungan graf Tangga Permata tidak berlaku demikian. Pada saat  $d = 0$  dan  $d = 2$  berlaku syarat yang sama yaitu  $m$  ganjil ( $m \geq 3$ ) dan  $n$  sembarang ( $n \geq 2$ ), sedangkan pada saat  $d = 1$  berlaku syarat  $m$  dan  $n$  sembarang ( $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ ). Penelitian SEATL gabungan graf Tangga Permata untuk  $d = 0$  dan  $d = 2$  dengan  $1 \leq k \leq m$  untuk copy  $m$  genap masih belum ditemukan dikarenakan pola pelabelan yang telah ditemukan pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  untuk  $m$  ganjil tidak dapat diterapkan pada jenis graf yang sama dengan nilai  $m$  yang genap. Hal ini berarti harus ditemukan pola pelabelan baru terlebih dahulu untuk menentukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  untuk  $d = 0$  dan  $d = 2$  dengan  $m$  genap dan untuk hal tersebut, peneliti mengalami kesulitan.

Pada uraian hasil di atas, ditunjukkan secara rinci fungsi bijektif pelabelan total super  $(12n, 0)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$ , pelabelan total super  $(4n + 4, 2)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$ , pelabelan total super  $(\frac{(8n-1)3m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Diamond Ladder  $mDl_n$ , pelabelan total super  $(\frac{(8n+3)m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dan pelabelan total super  $(8nm+2,1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Diamond Ladder  $mDl_n$ , namun untuk pelabelan total super  $(8n + 2, 1)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  hanya ditunjukkan melalui sebuah teorema yang lahir dari sebuah lemma. Hal tersebut dilakukan untuk memperingkas jumlah fungsi bijektif agar penggunaannya menjadi lebih efisien. Sedangkan untuk pelabelan total super  $(8nm + 2, 1)$ -sisi

antimagic pada gabungan Graf Tangga Permata  $mDl_n$  dikembangkan dengan pelabelan titik dan bobot sisi yang berbeda dengan pelabelan titik dan bobot sisi pada saat  $d = 0$  dan  $d = 2$  yang telah ditemukan sebelumnya, hal ini dikarenakan pelabelan titik dan bobot sisi baru yang ditemukan berlaku untuk sembarang  $m$  dan  $n$  ( $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ ).

Pada bidang teori graf, penentuan nilai kebenaran suatu rumus bijektif ditentukan melalui pendeteksian pola (*pattern recognition*) yang nantinya akan menghasilkan suatu teorema. Teorema yang ditemukan dimulai dengan pendeteksian pola yang berlaku sampai batas  $m$  dan  $n$  yang ditemukan peneliti kemudian baru menentukan fungsi bijektifnya. Dalam hal ini, penulis tidak mencantumkan cara memperoleh fungsi bijektif tersebut, akan tetapi pembuktian kebenaran teorema tersebut telah dipaparkan yang kemudian diikuti dengan contoh pelabelan sebagai visualisasi dari kebenaran teorema.

Terdapat beberapa pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan Graf Tangga Permata  $mDl_n$  yang belum ditemukan oleh peneliti. Berdasarkan visualisasi contoh-contoh pelabelan dan penerapan fungsi bijektif hasil penelitian yang telah ditemukan, diharapkan dapat membantu peneliti lain yang akan melakukan penelitian sejenis. Beberapa pelabelan yang belum ditemukan oleh penulis disajikan pada open problem berikut:

**Open Problem 4.7.1** Pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada  $mDl_n$ , dengan  $1 \leq i \leq n$ ;  $1 \leq k \leq m$ ;  $m$  genap untuk  $d = 0$  dan  $d = 2$ .

# KESIMPULAN DAN SARAN

## 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. fungsi bijektif pelabelan titik  $(a, 1)$ -sisi antimagic dan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf  $Dl_n$  telah dibahas melalui pembuktian teorema yang diberi tanda  $\diamond$ . Melalui pembuktian teorema tersebut, disimpulkan bahwa terdapat pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Diamond Ladder  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ , dengan  $d \in \{0, 1, 2\}$ .
2. fungsi bijektif pelabelan titik  $(a, 1)$ -sisi antimagic dan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf  $mDl_n$  telah dibahas melalui pembuktian teorema yang diberi tanda  $\diamond$ . Melalui pembuktian teorema tersebut, disimpulkan bahwa terdapat pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf Tangga Permata  $mDl_n$  jika  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ , dengan  $d \in \{0, 1, 2\}$ .

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran pembaca dapat melakukan penelitian tentang:

- Untuk graf  $mDl_n$ ,  $m \geq 2$  genap dan  $n \geq 2$ , apakah terdapat pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan  $d \in \{0, 2\}$ .

## DAFTAR PUSTAKA

Abidin, Z. 2010. *Pelabelan Total Super( $a, d$ )-Sisi Antimagic pada Gabungan Saling Lepas Graf Firecracker*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

Anggraeni. Y. 2011. *Pelabelan Total Super( $a, d$ )-Sisi Antimagic pada Generalisasi-Graf Web Dua Bandul  $W_0(3, j, 2)$* . Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

Biyadi, K. 2010. *Fungsi Bikektif Pelabelan Antimagic Pada Gabungan Saling Lepas Graf Banana Tree*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

Chartrand, G, and Oellermann. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. New York: MacGraw-Hill, inc.

Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graph*. Australia : Tidak dipublikasikan (Tesis).

Dafik. 2008. *Pemodelan Matematika (Buku Diktat Mata Kuliah Pemodelan Matematika)*. Jember : FKIP Universitas jember.

Dafik, Slamun, Fuad and Rahmad. 2009. *Super Edge-antimagic Total Labeling of Disjoint Union of Triangular Ladder and Lobster Graphs*. Yogyakarta: Proceeding of IndoMS International Conference of Mathematics and Applications (IICMA) 2009.

Deviyana, R. 2011. *Pelabelan Total Super( $a, d$ )-Sisi Antimagic pada Graf  $E$* . Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

Fuad, M. 2009. *Pelabelan Total Super ( $a, d$ )-Sisi Antimagic pada Gabungan Graf Triangular Ladder*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas

## Jember.

- Gallian, J.A. 2009. *A Dynamic Survey of Graph Labelling*. [serial on line]. <http://www.combinatorics.org/Surveys/ds6.pdf>. [17 Agustus 2010].
- Husodo, A.Y. 2008. *Aplikasi Pewarnaan Graf dalam Penyimpanan Senyawa Kimia Berbahaya* [serial on line]. <http://webmail.informatika.org/rinaldi/Matdis/2008-2009/Makalah2008/Makalah0809-096.pdf>. [25 Agustus 2010].
- Indayani, D.V. 2010. *Pelabelan Total Super  $(a, d)$ -Sisi Antimagic pada Gabungan Graf Generalized Petersen  $(n, 2)$* . Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Kreyszig, Erwin. 1993. *Matematika Teknik Lanjutan Edisi ke-6 Buku 2*. Terjemahan oleh Bambang Sumantri. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.
- Lipschutz dan Lipson. 2002. *Matematika Diskrit Jilid 2*. Jakarta : Salemba Teknika.
- Munir, R. 2003. *Matematika Diskrit: Buku teks ilmu komputer*. Bandung: Informatika Bandung.
- Rahmad, R. R. 2010. *Pelabelan Total Super  $(a, d)$ -Sisi Antimagic pada Gabungan-Graf Lobster*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Slamin. 2001. *Diregularity of Digraph Close to Moore Bound* . Australia : Tidak dipublikasikan ( Tesis).
- Tando, Marselina. 2008. *Aplikasi Teori Graf dalam Topologi Jaringan* [serial on line]. <http://www.informatika.org/rinaldi/Matdis/2008-2009/Makalah/MakalahIF2153-0708-100.pdf>. [25 Agustus 2010].
- Universitas Jember. 2007. *Pedoman Penulisan Karya Ilmiah*. Jember: Badan

Penerbit Universitas Jember.

Wijaya, K. 2000. *Pelabelan Total Sisi Ajaib*. Tidak dipublikasikan (Tesis). Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Wirawan, T.P. 2007. *Pemodelan Sistem Lalu Lintas dengan Graf Ganda Berarah Berbobot* [serial on line]. <http://www.informatika.org/rinaldi/Matdis/2007-2008/Makalah/MakalahIF2153-0708-018.pdf>. [18 Agustus 2010].

<http://www.11h11.com/hugobox/chaku/NetworkTopologies.png>. [21 September 2010].

<http://matematika-pendidikanstkip.blogspot.com/2011/04/asal-usul-teori-graf.html>. [28 Juni 2011].

<http://suryaafrihan.blogspot.com/2010/10/rantai-makanan.html>. [28 Juni 2011].





**PELABELAN TOTAL SUPER  $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC PADA  
GRAF TANGGA PERMATA**

**SKRIPSI**

Oleh

**Laelatus Sya'diyah**

**NIM 070210101096**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2011**



**PELABELAN TOTAL SUPER  $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC PADA  
GRAF TANGGA PERMATA**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1)  
dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

**Laelatus Sya'diyah**  
**NIM 070210101096**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN**  
**UNIVERSITAS JEMBER**  
**2011**

## PERSEMBAHAN

*Segala puji bagi Allah, Tuhan yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat dan salam semoga terlimpah kepada makhluk ciptaan-Mu yang paling mulia, Nabi Muhammad S.A.W. Kupersembahkan secuil kebahagiaan penggalan syair dalam setiap detik perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:*

- 1. Orang tuaku tercinta dan terkasih : Ayahanda Esbu (Alm.) dan Ibunda tercinta Sittiyani, Ayahanda Abdur Razak dan Ibunda Fatimah, serta kakek dan nenekku tercinta : Mbah Zainal, Mbah Aksan, Mbah Pakmi dan Mbah Sunawar, yang senantiasa mengalirkan rasa kasih sayang, cinta dan do'a yang tiada henti, dalam penulisan skripsi ini;*
- 2. Saudara-saudaraku : Dek Rofiq, Dek Amel, Dek Elen, Dek Bilqis, Dek Dini, Dek Ufi, Kak Nur Fawaid, Kak Ridwan, Mas Andi, MbK Titik, MbK Titin dan MbK Ida, terima kasih atas canda tawa, teguran, dan semangat-semangatnya, serta untuk segala doa-doanya.;*
- 3. Bapak Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D dan Bapak Drs. Antonius C.P, M.App.Sc selaku pembimbing skripsi yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan skripsiku;*
- 4. Para guru dan dosen, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;*
- 5. Bimbimku tersayang, Moh. Agus Susanto, A.Md yang telah memberikan dukungan positif bagiku dalam setiap hal yang akan dan telah aku lakukan dan semangat dalam penulisan skripsi ini;*
- 6. Sahabat-sahabat terkonyolku : Wewek Ira, Cuy Alfin, Cuy Diana, Ratna Wonderland, Ndul Nila, Mbok Dhe Anggi, Pak Dhe Fajar, Berrt Irfan, Mbah Puguh, Mbah Misbah, Biksu Hasan, Beny SEP, dan Om Agunk, terima kasih atas kebersamaan, perjuangan, canda tawa, ide-ide gila, bantuan, semangat dan kebersamaan kita setiap hari adalah kenangan yang termanis;*

7. *Teman seperjuanganku : Alfin, Ira, Yuni, Fitriana E.C., Kunti, Devi, Laras dan pecinta graf lainnya yang telah membagi ilmu dan pengalaman berharga;*
8. *Sobat-sobat tergilaku Warga Negara Bakti : Alpin (Flat), Ira (Bulbul), dan Kiekie (Mocin) yang telah meluangkan waktu selama kurang lebih empat tahun bersama baik dalam suka dan duka masa-masa perkuliahan, khayalan-khayalan kita kadang juga menjadi inspirasi buatku;*
9. *Kakak-kakak terbaikku FKIP Matematika : Mb Riris (Pentol), Mb Ony (Ondel), Mb Yiyin (Mami), Mb Dini Kerisa, Mb Yeni, Mb Riza, Mas Birul dan semuanya, terima kasih untuk semangat, dukungan, bimbingan, dan nasehatnya selama ini;*
10. *Warga Matematika Reguler dan Non Reguler '07 yang berjuang dalam 4 tahun kebersamaan;*
11. *Teman-teman PPL di SMADA Bondowoso : Aprilia, Listiana, Ayu, Riska, Selvi, Mb Diah, Ummi, Farid dan Jadnika, terima kasih untuk kebersamaan, kekompakan, canda tawa, nasehat dan telah membagi pengalaman berharga;*
12. *Murid-muridku tersayang : X.3 (Nightmare), X.6 (Arsenolite.com), XI.IPA 1 (Ksatria Muda) dan XI.IPA 5 (Hotel Palm), terimakasih untuk setiap tingkah konyol kalian, setiap kejutan, perhatian, canda tawa, hangatnya kebersamaan dan kenangan termanis. Terima kasih uda menjadi salah satu inspirasi dan buat Miss Ella tersenyum;*
13. *Teman-temanku di kosan "Ibu Mamik" dan kosan "Pak Rais" yang membuatku mengerti akan asam manis persahabatan, jagalah selalu kekompakan kosan kita;*
14. *Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.*

## MOTO

"Pahlawan bukanlah orang yang berani menetakkan pedangnya ke pundak lawan, tetapi pahlawan sebenarnya ialah orang yang sanggup menguasai dirinya dikala ia marah."

(Sabda Nabi Muhammad SAW)

"Seperti emas yang ditempa dengan panas, semakin murni dan indah. Yakinlah bahwa di balik kesakitan, ada hikmah yang tiada tara."

(Pipiet Senja, Novel 'Jangan Jadi Perempuan Cengeng')

"Bermimpilah, buatlah tujuan dari mimpi Anda, buatlah rencana, lakukan rencana, dan capailah mimpi Anda."

(www.motivasi-islami.com)

## PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Laelatus Sya'diyah

NIM : 070210101096

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: "PELABELAN TOTAL SUPER  $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC PADA GRAF TANGGA PERMATA" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 28 Juni 2011

Yang menyatakan,

Laelatus Sya'diyah

NIM. 070210101096

**PERSETUJUAN**

**PELABELAN TOTAL SUPER  $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC PADA  
GRAF TANGGA PERMATA**

**SKRIPSI**

diajukan guna memenuhi syarat untuk menyelesaikan pendidikan Program Sarjana Strata Satu Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Nama Mahasiswa : Laelatus Sya'diyah  
NIM : 070210101096  
Jurusan : Pendidikan MIPA  
Program Studi : Pendidikan Matematika  
Angkatan Tahun : 2007  
Daerah Asal : Situbondo  
Tempat, Tanggal Lahir : Situbondo, 28 Juni 1990

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D  
NIP. 19680802 199303 1 004

Drs. Antonius C.P., M.App.Sc  
NIP. 19690928 199302 1 001

## PENGESAHAN

Skripsi berjudul "PELABELAN TOTAL SUPER ( $a, d$ )-SISI ANTIMAGIC PADA GRAF TANGGA PERMATA" telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan pada:

hari : Kamis

tanggal : 14 Juli 2011

tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Tim Penguji

Ketua,

Sekretaris,

Dr. Susanto, M.Pd

NIP. 19630616 198802 1 001

Drs. Antonius C.P., M.App.Sc

NIP. 19690928 199302 1 001

Anggota I,

Anggota II,

Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D.

NIP. 19680802 199303 1 004

Drs. Slamın, M.Comp.Sc., Ph.D

NIP. 19670420 199201 1 001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Jember,

Drs. H. Imam Muchtar, S.H., M.Hum

NIP. 19540712 198003 1 005

## RINGKASAN

**Pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata;** Laelatus Sya'diyah, 070210101096; 2011: 103 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Matematika merupakan alat bantu kehidupan dan pelayan bagi ilmu-ilmu yang lain, seperti fisika, kimia, biologi, astronomi, teknik, ekonomi, farmasi maupun matematika sendiri. Matematika terdiri dari beberapa cabang ilmu, salah satunya terkait dengan sains komputer yang cukup terkenal yaitu Teori Graf. Salah satu jenis tipe pelabelan graf adalah pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic atau super edge antimagic total labeling (SEATL). Pada graf konektif (tunggal) telah banyak ditemukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic sedangkan pada graf diskonektif (gabungan saling lepas suatu graf), hanya sedikit famili graf yang diketahui mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic. Permasalahannya adalah hal ini melibatkan angka pelabelan lebih banyak pada setiap komponen graf konektif terpisahnya dan tidak ada jaminan jika graf  $G$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic kemudian pada gabungan graf diskonektifnya mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic. Dalam penelitian ini akan diinvestigasi pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata baik yang konektif maupun diskonektif.

Graf tangga permata adalah salah satu family dari graf tangga. Graf tangga permata adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan  $Dl_n$  sedangkan gabungan graf tangga permata dinotasikan dengan  $mDl_n$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ . Dalam hal ini,  $m$  merupakan banyaknya graf tangga permata yang digabung yaitu minimal 2 graf tangga permata sedangkan  $n$  merupakan ketentuan dari definisi graf tangga permata. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui apakah graf tangga permata memiliki pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf  $Dl_n$  dan  $mDl_n$ . Hasil penelitian ini berupa lemma dan teorema baru mengenai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata  $Dl_n$  dan  $mDl_n$ . Teorema yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

1. **Lemma 4.5.1** Ada pelabelan titik  $(3, 1)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .
2. **Teorema 4.5.1** Ada pelabelan total super  $(12n, 0)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .
3. **Teorema 4.5.2** Ada pelabelan total super  $(4n + 4, 2)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .
4. **Teorema 4.5.3** Suatu graf  $Dl_n$  mempunyai pelabelan total super  $(8n + 2, 1)$ -sisi antimagic untuk  $n \geq 2$ .
5. **Lemma 4.6.1** Ada pelabelan titik  $(\frac{3m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf tangga permata  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .
6. **Teorema 4.6.1** Ada pelabelan total super  $(\frac{(8n-1)3m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada gabungan graf tangga permata  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .
7. **Teorema 4.6.2** Ada pelabelan total super  $(\frac{(8n+3)m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf tangga permata  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .
8. **Teorema 4.6.3** Ada pelabelan total super  $(8nm+2, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf tangga permata  $mDl_n$  jika  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ .

Hasil penelitian diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pelabelan graf dan bisa digunakan sebagai acuan oleh peneliti lain untuk meneliti pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf-graf khusus yang lain.

## PRAKATA

Segala puji syukur ke hadirat Allah SWT. atas segala berkah dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Graf Tangga Permata " ini dengan baik.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Dosen Pembimbing I dan Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
5. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
6. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat, amin yaa robbal alamin.

Jember, Juli 2011

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	<b>i</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	<b>ii</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	<b>iv</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b>	<b>v</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	<b>vi</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	<b>vii</b>	
<b>RINGKASAN</b>	<b>viii</b>	
<b>PRAKATA</b>	<b>x</b>	
<b>DAFTAR ISI</b>	<b>xiii</b>	
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	<b>xvi</b>	
<b>DAFTAR TABEL</b>	<b>xvii</b>	
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b>	<b>xviii</b>	
<b>DAFTAR LAMBANG</b>	<b>xix</b>	
<b>1</b>	<b>PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1	Latar Belakang Masalah	1
1.2	Rumusan Masalah	4
1.3	Batasan Masalah	4
1.4	Tujuan Penelitian	5
1.5	Manfaat Penelitian	5

DAFTAR ISI

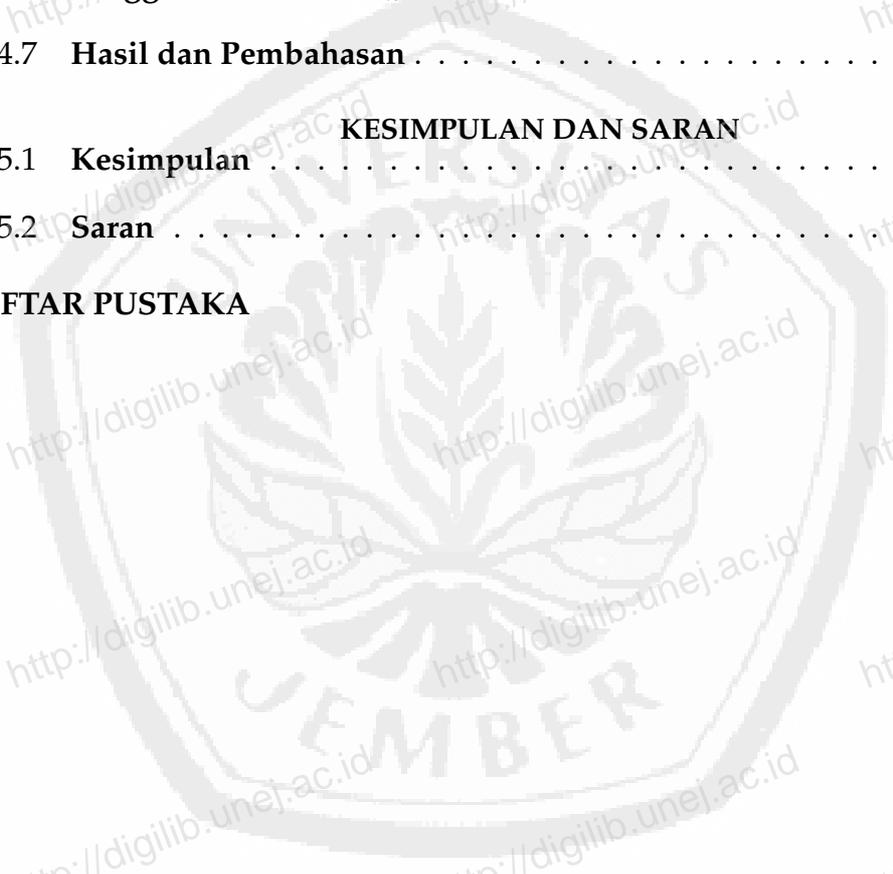
xii

2	<b>TINJAUAN PUSTAKA</b>	<b>6</b>
2.1	<b>Aplikasi Graf</b> . . . . .	6
2.2	<b>Terminologi Dasar Graf</b> . . . . .	14
2.3	<b>Jenis-jenis Graf</b> . . . . .	22
2.4	<b>Graf Khusus</b> . . . . .	25
2.5	<b>Graf tangga permata</b> . . . . .	29
2.6	<b>Pelabelan Graf</b> . . . . .	29
2.6.1	Fungsi Bijektif dan Barisan Aritmatika . . . . .	30
2.6.2	Aksioma, Lemma, Teorema, Corollary, Konjektur dan Open Problem . . . . .	32
2.6.3	Definisi Pelabelan Graf . . . . .	33
2.6.4	Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi antimagic . . . . .	34
2.6.5	Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf Tangga Permata . . . . .	36
2.7	<b>Hasil-Hasil Pelabelan Total Super <math>(a, d)</math>-Sisi Antimagic pada Graf Diskonektif</b> . . . . .	38
3	<b>METODE PENELITIAN</b>	<b>41</b>
3.1	<b>Metode Penelitian</b> . . . . .	41
3.2	<b>Definisi Operasional</b> . . . . .	41
3.2.1	Pelabelan Total Super $(a, d)$ -Sisi Antimagic . . . . .	42
3.2.2	Graf Tangga Permata $(Dl_n)$ . . . . .	42
3.2.3	Gabungan Saling Lepas Graf Tangga Permata $(mDl_n)$ . . . . .	42
3.3	<b>Teknik Penelitian</b> . . . . .	43
4	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	<b>46</b>
4.1	<b>Jumlah Titik dan Sisi pada Graf Tangga Permata <math>(Dl_n)</math></b> . . . . .	46

DAFTAR ISI

xiii

4.2	<b>Jumlah Titik dan Sisi pada Gabungan Graf Tangga Permata (<math>mDl_n</math>)</b> . . . . .	47
4.3	<b>Batas Atas <math>d</math> Graf Tangga Permata (<math>Dl_n</math>)</b> . . . . .	48
4.4	<b>Batas Atas <math>d</math> pada Gabungan Graf Tangga Permata (<math>mDl_n</math>)</b> . . . . .	48
4.5	<b>Pelabelan Total Super <math>(a, d)</math>-sisi Antimagic pada Graf Tangga Permata (<math>Dl_n</math>)</b> . . . . .	49
4.6	<b>Pelabelan Total Super <math>(a, d)</math>-sisi Antimagic pada Gabungan Graf Tangga Permata (<math>mDl_n</math>)</b> . . . . .	59
4.7	<b>Hasil dan Pembahasan</b> . . . . .	100
5	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b>	<b>103</b>
5.1	<b>Kesimpulan</b> . . . . .	103
5.2	<b>Saran</b> . . . . .	103
	<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>104</b>



## DAFTAR GAMBAR

2.1	Gambaran Kota Königsberg tahun 1736 . . . . .	6
2.2	Representasi graf pada permasalahan jembatan Königsberg . . .	7
2.3	Representasi graf dalam rantai makanan . . . . .	8
2.4	Contoh pemodelan sistem lalu lintas . . . . .	9
2.5	Topologi Jaringan . . . . .	12
2.6	Contoh representasi graf dalam penyimpanan zat kimia . . . . .	13
2.7	Representasi graf(setelah dilakukan pewarnaan graf) . . . . .	14
2.8	Contoh graf secara umum . . . . .	15
2.9	Graf dengan isolated vertex . . . . .	16
2.10	Graf dan komplementnya . . . . .	17
2.11	Contoh <i>diregular dan non-diregular</i> . . . . .	17
2.12	Contoh sebuah graf dengan 8 titik . . . . .	18
2.13	Contoh graf dan subgrafnya . . . . .	19
2.14	Contoh sebuah graf dan matrik adjacencynya . . . . .	19
2.15	Contoh graf terpotong . . . . .	20
2.16	Keisomorfisan graf . . . . .	21
2.17	Contoh gabungan graf . . . . .	22
2.18	(a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu . . . . .	23
2.19	Graf tak-berhingga . . . . .	24
2.20	Graf komplit $K_4$ dan $K_5$ . . . . .	25

DAFTAR GAMBAR

2.21 Graf kipas  $\hat{K}_5$  . . . . . 26

2.22 Graf bintang . . . . . 26

2.23 Graf bipartit ( $a$ ) dan graf bipartit lengkap  $K_{3,3}$  . . . . . 27

2.24 Graf whell  $W_5$  . . . . . 27

2.25 Graf friendship  $F_4$  . . . . . 28

2.26 Graf petersen . . . . . 28

2.27 Graf ladder  $L_5$  . . . . . 29

2.28 Graf Tangga Permata  $Dl_n$  . . . . . 29

2.29 Graf Tangga Permata  $Dl_4$  . . . . . 30

2.30 (a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif . . . . . 31

2.31 (a) Pelabelan titik (b) pelabelan Sisi (c) Pelabelan total . . . . . 33

2.32 EAV  $Dl_3$  . . . . . 37

2.33 EAV  $Dl_3$  . . . . . 37

3.1 Graf Tangga Permata  $Dl_n$  . . . . . 42

3.2 Graf Tangga Permata  $Dl_4$  . . . . . 43

3.3 Gabungan Graf Tangga Permata  $2Dl_3$  . . . . . 43

3.4 Rancangan Penelitian . . . . . 45

4.1 Jumlah titik dan jumlah sisi graf pada  $Dl_3$  dan  $Dl_4$  . . . . . 47

4.2 Pelabelan titik (3,1)-sisi antimagic pada  $Dl_4$  . . . . . 51

4.3 SEATL graf  $Dl$  ( $Dl_4$ ) dengan  $d = 0$  . . . . . 54

4.4 SEATL graf  $Dl$  ( $Dl_5$ ) dengan  $d = 2$  . . . . . 58

4.5 Pelabelan total super (34, 1)-sisi antimagic (SEATL) pada  $Dl_4$  . . . . . 58

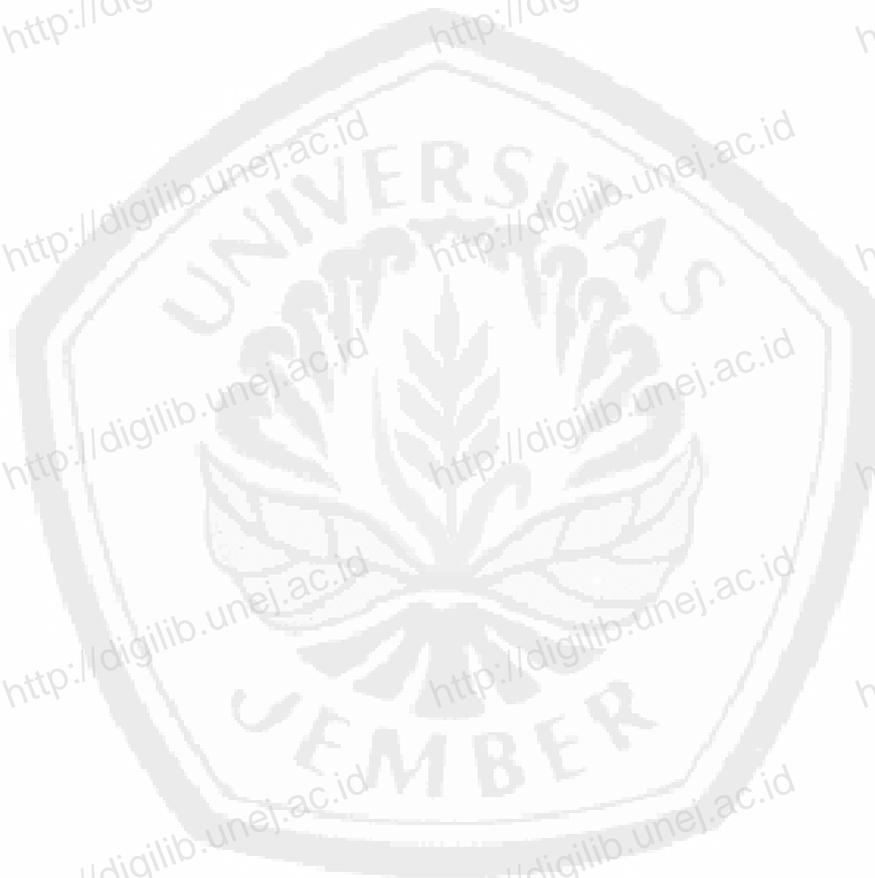
DAFTAR GAMBAR

4.6 Pelabelan titik (6,1)-sisi antimagic pada  $3Dl_4$  . . . . . 65

4.7 Pelabelan total super(141,0)-sisi antimagic pada  $3Dl_4$  . . . . . 80

4.8 Pelabelan total super(55,2)-sisi antimagic pada  $3Dl_4$  . . . . . 95

4.9 Pelabelan total super(82,1)-sisi antimagic pada  $2Dl_5$  . . . . . 99



**DAFTAR TABEL**

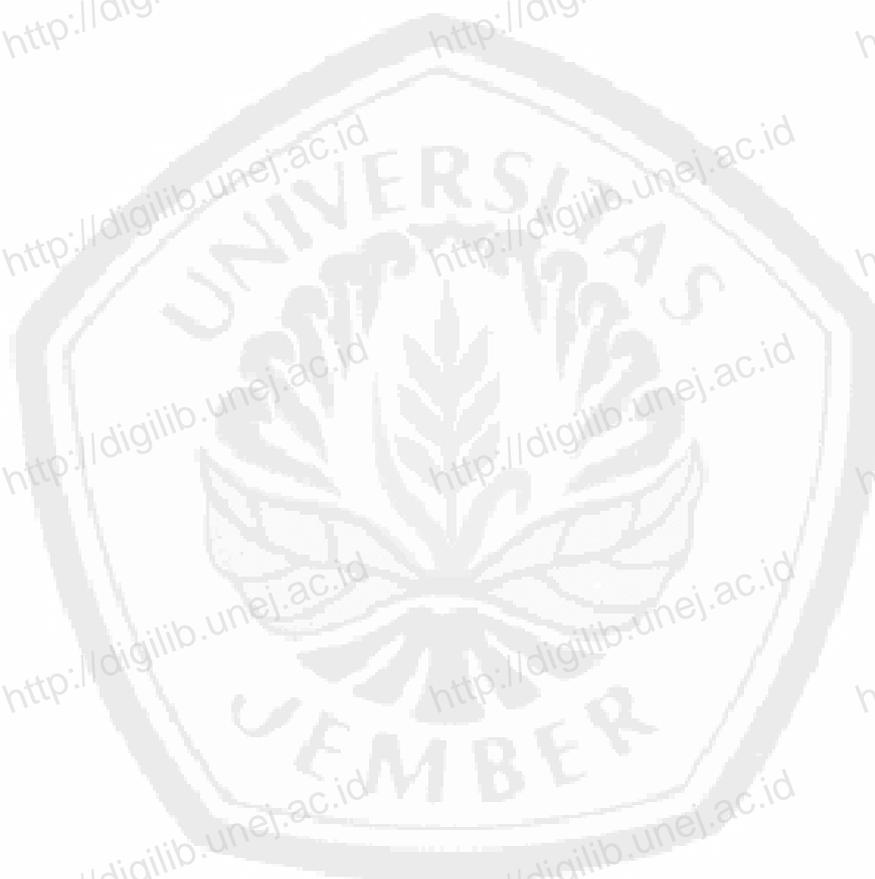
2.1 Hubungan sifat zat kimia . . . . . 13

2.2 Ringkasan dari pelabelan total super  $(a, d)$ -edge antimagic pada graf disconnected. . . . . 38



**DAFTAR LAMPIRAN**

MATRIK PENELITIAN . . . . . 107  
FORMULIR PENGAJUAN JUDUL DAN PEMBIMBINGAN SKRIPSI . . . 108  
LEMBAR KONSULTASI PENYUSUNAN SKRIPSI . . . . . 109



## DAFTAR LAMBANG

$G$	$=$	Graf $G$
$G(V, E)$	$=$	Sebarang graf tak berarah dengan $V$ adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan $E$ adalah himpunan sisi
$v_n$	$=$	Titik ke- $n$ pada suatu graf
$e_n$	$=$	Sisi ke- $n$ dari suatu graf
$V(G)$	$=$	Himpunan titik pada graf $G$ dan disebut sebagai <i>order</i>
$E(G)$	$=$	Himpunan sisi pada graf $G$ dan disebut sebagai <i>size</i>
$U_n$	$=$	Suku ke- $n$ barisan aritmetika
$EAVL$	$=$	<i>Edge antimagic vertex labeling</i> atau pelabelan titik sisi antimagic
$SEATL$	$=$	<i>Super edge antimagic total labeling</i> atau pelabelan total super $(a, d)$ -sisi antimagic
$d$	$=$	Nilai beda barisan bobot sisi pada SEATL
$a$	$=$	Bobot sisi terkecil yang merupakan suku pertama barisan bobot sisi pada SEATL
$Dl_n$	$=$	Lambang untuk graf tangga permata
$mDl_n$	$=$	Lambang untuk gabungan graf tangga permata
$x_i$	$=$	Titik ke- $i$ pada bagian atas graf $Dl_n$
$y_i$	$=$	Titik ke- $i$ pada bagian bawah graf $Dl_n$
$z_j$	$=$	Titik ke- $j$ pada bagian tengah graf $Dl_n$
$x_i^k$	$=$	Titik ke- $i$ dalam komponen ke- $k$ pada bagian atas graf $mDl_n$
$y_i^k$	$=$	Titik ke- $i$ dalam komponen ke- $k$ pada bagian bawah graf $mDl_n$
$z_j^k$	$=$	Titik ke- $j$ dalam komponen ke- $k$ pada bagian tengah graf $mDl_n$
$\alpha_p(x_i)$	$=$	Fungsi bijektif pelabelan titik pada bagian atas graf $Dl_n$
$\alpha_p(y_i)$	$=$	Fungsi bijektif pelabelan titik pada bagian bawah graf $Dl_n$
$\alpha_p(z_j)$	$=$	Fungsi bijektif pelabelan titik pada bagian tengah graf $Dl_n$
$w_{\alpha_p}$	$=$	Fungsi bijektif bobot sisi dari pelabelan titik $\alpha_p$
$\alpha_p(x_i x_{i+1})$	$=$	Fungsi bijektif label sisi pada bagian atas graf $Dl_n$
$\alpha_p(y_i y_{i+1})$	$=$	Fungsi bijektif label sisi pada bagian bawah graf $Dl_n$
$\alpha_p(z_j z_{j+1})$	$=$	Fungsi bijektif label sisi pada bagian tengah graf $Dl_n$
$W_{\alpha_p}$	$=$	Fungsi bijektif bobot total dari pelabelan total $\alpha_p$

## BAB 1

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang Masalah

Dewasa ini, matematika memiliki banyak peranan penting dalam kehidupan manusia. Namun, ironisnya masih ada sebagian orang menjadikan matematika sebagai suatu hal yang ditakuti dan dihindari. Rasa takut dan cemas terhadap objek yang berkaitan dengan matematika itu disebut Phobia Matematika (*Mathophobia*). Matematika hanya dipandang sebagai sebuah kumpulan rumus serta deretan angka-angka yang tidak memiliki makna. Padahal dibalik itu semua terdapat hal menarik yang seringkali terlepas dari perhatian.

Tidak disadari setiap orang senantiasa bertemu dengan konsep dan prinsip matematika, baik dalam pembelajaran formal, non formal maupun dalam kehidupan sehari-hari. Matematika merupakan alat bantu kehidupan dan pelayan bagi ilmu-ilmu yang lain, seperti fisika, kimia, biologi, astronomi, teknik, ekonomi, farmasi maupun matematika sendiri. Mungkin terdapat suatu pertanyaan bukankah saat ini sudah ada kalkulator dan komputer sehingga matematika sebagai alat bantu kehidupan menjadi berkurang? Memang benar, dengan kehadiran alat bantu tersebut banyak persoalan kehidupan yang sulit dapat diselesaikan dalam waktu yang relatif singkat. Namun, proses penciptakannya pun juga memerlukan prinsip matematika. Tanpa adanya prinsip-prinsip dan konsep matematika kedua alat tersebut yaitu kalkulator dan komputer tidak mungkin diciptakan. Begitu pentingnya matematika dalam kehidupan maka tidak aneh jika pembelajaran matematika mengalami perkembangan yang pesat dan selalu disesuaikan dengan kebutuhan zaman. Ada pepatah " Siapa yang menguasai matematika dan bahasa maka ia akan menguasai dunia". Artinya matematika sebagai media melatih untuk berpikir kritis, inovatif, kreatif, mandiri, dan mampu menyelesaikan masalah, sedangkan bahasa sebagai media menyampaikan ide-ide atau gagasan serta yang ada da-

lam pikiran manusia.

Matematika terdiri dari beberapa cabang ilmu misalnya Aljabar, Geometri, Statistika dan Probabilitas, Matematika Aplikasi, Matematika Komputasi, Matematika Ekonomi, Matematika Diskrit, Sain Komputer dan lain sebagainya. Cabang matematika terkini terkait dengan sains komputer yang cukup terkenal adalah Teori Graf. Teori graf merupakan pokok bahasan yang relatif muda namun memiliki banyak terapan yang sangat luas. Contohnya optimasi jaringan telepon, jaringan komputer, jaringan listrik, model papan sirkuit, model struktur ikatan kimia dan lain-lain. Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan atau titik, sedangkan hubungan antara objek tersebut dinyatakan dengan garis atau sisi.

Salah satu topik yang menarik dan mendapat banyak perhatian pada teori graf adalah masalah pelabelan graf. Pelabelan graf akhir-akhir ini mulai banyak mendapat perhatian terutama terapannya dalam jaringan komputer dan database security. Pelabelan graf  $G$  adalah sebuah pemetaan dari elemen-elemen graf  $G$  terhadap bilangan bulat positif. Jika domainnya adalah himpunan titik  $G$  maka pelabelannya disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), sedangkan jika domainnya adalah himpunan sisi  $G$  maka pelabelannya disebut pelabelan sisi (*edge labeling*). Jika domainnya adalah kedua himpunan tersebut maka pelabelannya disebut pelabelan total (*total labeling*).

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedláček (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan pemancar frekuensi radio. Sedláček telah mempublikasikan karya ilmiah dengan mengenalkan pelabelan graf tipe yang lain yang disebut pelabelan *magic*. Istilah ini dimotivasi dari ide bujur sangkar magic pada teori bilangan. Pelabelan magic adalah pemetaan dari himpunan sisi graf  $G$  pada bilangan real non-negatif, sehingga jumlah label sisi di sekitar titik pada graf  $G$

semuanya sama. Pada Definisi Sedláček ini memperbolehkan untuk menggunakan bilangan real tetapi biasanya hanya bilangan bulat saja yang digunakan. Stewart menyebutnya *supermagic* jika himpunan label sisi terdiri dari bilangan bulat yang berurutan. Selengkapnya Gallian(2009) menjelaskan tentang hasil survey dari pelabelan graf, diantaranya untuk pelabelan graceful dan jenisnya, *harmonious labeling*, *magic labeling*, *antimagic labeling* dan jenis-jenisnya.

Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic (SEAT), dimana  $a$  bobot sisi terkecil dan  $d$  nilai beda. Pelabelan ini diperkenalkan oleh Simanjutak, Bertault dan Miller pada tahun 2000 (Dafik, 2007:19). Pada graf konektif telah banyak ditemukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic sedangkan pada graf diskonektif, hanya sedikit famili graf yang diketahui mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic. Permasalahannya adalah hal ini melibatkan angka pelabelan lebih banyak pada setiap komponen graf konektif terpisahnya dan tidak ada jaminan jika graf  $G$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic kemudian pada gabungan graf diskonektifnya mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic. Oleh karena itu masalah ini dianggap cukup sulit sehingga memerlukan penelitian berkelanjutan.

Sampai saat ini, pelabelan graf diskonektif dengan jenis pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic masih sedikit famili yang ditemukan. Baru-baru ini Deviyana, R.(2011: 29) telah mempublikasikan hasil temuannya tentang pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf  $E$ , Anggraeni, Y.(2011: 32) tentang pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada Generalisasi Graf Web Dua Bandul  $W_0(3, j, 2)$ , Rahmad, R.R.(2010: 37) tentang pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Lobster, Fuad(2009: 25) tentang pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Triangular Ladder, Indayani, D.V.(2010: 29) tentang pelabelan total Super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Generalized Petersen  $(n, 2)$ , Abidin, Z.(2010: 35) tentang pelabelan total Super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf Firecracker, dan Biyadi, Khud.(2010: 31) tentang fungsi bijektif pelabelan antimagic pada gabungan saling lepas graf Banana Tree.

Dalam penelitian ini akan dikembangkan penelitian Fuad tentang graf tangga untuk jenis graf tangga yang lain yaitu tangga permata. Graf tangga permata dinotasikan dengan  $Dl_n$  adalah salah satu graf yang belum ditemukan pelabelannya. Gabungan saling lepas graf tangga permata merupakan gabungan diskonektif pada graf tangga permata. Dalam penelitian ini akan dikaji pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata baik itu yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya sehingga pada penelitian ini penulis memilih judul "Pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf tangga permata".

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. apakah Graf Tangga Permata ( $Dl_n$ ) memiliki pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic?
2. apakah gabungan saling lepas Graf Tangga Permata ( $mDl_n$ ) memiliki pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic?

## 1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi pada:

1. graf berhingga yang sederhana, yaitu graf yang tidak mempunyai loop dan sisi ganda(paralel);
2. pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf Tangga Permata disimbolkan dengan  $Dl_n$  dan  $mDl_n$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ . Dalam hal ini,  $m$  merupakan banyaknya Graf Tangga Permata yang digabung yaitu minimal 2 Graf Tangga Permata sedangkan  $n$  merupakan ketentuan dari definisi Graf Tangga Permata.

#### 1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. untuk mengetahui apakah Graf Tangga Permata ( $Dl_n$ ) memiliki pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic, jika ada, maka dicari cara melabeli Graf Tangga Permata dengan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic;
2. untuk mengetahui apakah gabungan saling lepas Graf Tangga Permata ( $mDl_n$ ) memiliki pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic, jika ada, maka dicari cara melabeli gabungan saling lepas Graf Tangga Permata dengan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic.

#### 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

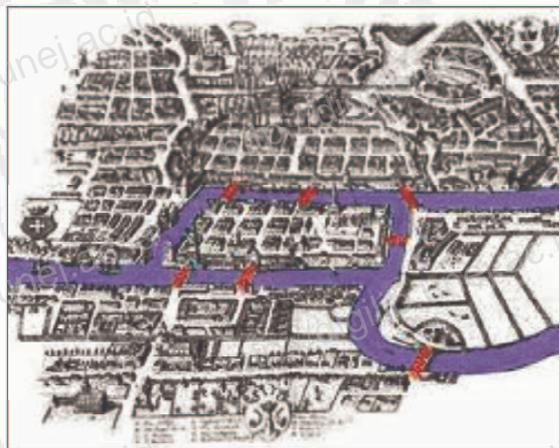
1. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pelabelan graf, yaitu mengetahui apakah ada pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf Tangga Permata;
2. memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf dari jenis yang lain;
3. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic.

## BAB 2

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Aplikasi Graf

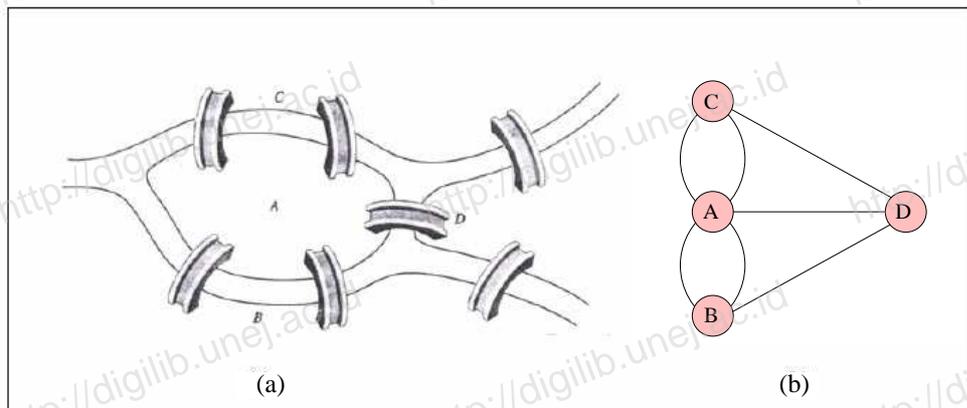
Teori Graf merupakan suatu pokok bahasan yang sudah tua usianya namun mempunyai banyak terapan bagi seluruh masyarakat sampai saat ini. Teori ini muncul pertama kali pada tahun 1736, yakni ketika Euler mencoba untuk mencari solusi dari permasalahan yang sangat terkenal yaitu Jembatan Königsberg. Aplikasi teori graf saat ini sangat luas dan dipakai dalam berbagai disiplin ilmu maupun dalam kehidupan sehari-hari. Berikut disajikan gambar 2.1<sup>1</sup> tentang gambaran kota Königsberg dan gambar 2.2 tentang representasi graf pada permasalahan jembatan Königsberg.



Gambar 2.1: Gambaran Kota Königsberg tahun 1736

Beberapa contoh aplikasi graf ditemukan dalam ilmu kimia yaitu struktur senyawa karbon, rekonstruksi rantai *Ribonucleic Acid* (RNA) dalam ilmu

<sup>1</sup>Sumber gambar: <http://matematika-pendidikanstkip.blogspot.com/2011/04/asal-usul-teori-graf.html>

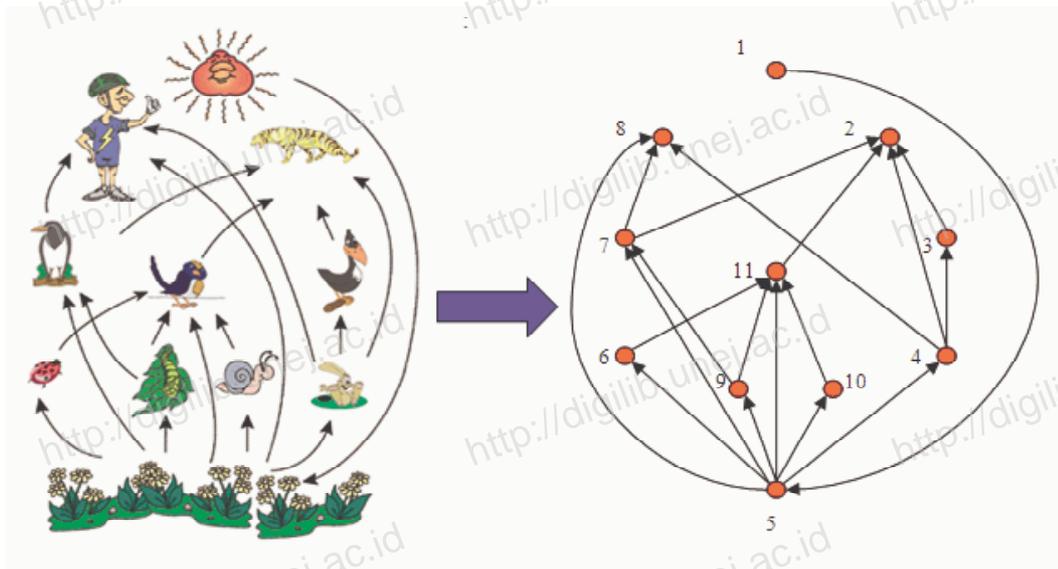


Gambar 2.2: Representasi graf pada permasalahan jembatan Königsberg

biologi, struktur hubungan masyarakat dalam ilmu sosiologi, dan pewarnaan graf dalam ilmu pemetaan (*kartografi*) bahkan dalam bidang ilmu informatika dapat ditemukan aplikasinya pada topologi jaringan. Berbagai aplikasi teori graf tersebut memberikan peranan penting terhadap perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, khususnya aplikasi graf dalam informatika yang selalu berhubungan dengan informasi dan teknologi masa kini. Dalam suatu ekologi misalnya, kita dapat menggunakan graf untuk mendeskripsikan kompetisi makanan sebagaimana disajikan dalam Gambar 2.3<sup>2</sup>.

Contoh lain aplikasi graf dalam kehidupan sehari-hari adalah pada pengaturan lampu lalu lintas. Pada saat orang menuju dan pulang dari tempat aktifitas rutinnnya setiap hari, sering terjadi kemacetan lalu lintas. Hal ini disebabkan karena waktu aktifitas yang hampir bersamaan sehingga volume kendaraan yang melintasi jalan-jalan di suatu daerah meningkat pada waktu itu. Padahal belum tentu jalan-jalan pada daerah itu mampu menampung besarnya volume kendaraan yang melewatinya. Untuk dapat mengetahui apakah kapasitas maksimum jalan-jalan pada suatu daerah masih mampu menampung volume kendaraan yang melintasi jalan-jalan pada daerah tersebut, maka harus diketahui terlebih dahulu berapa kapasitas maksimum dan volume mak-

<sup>2</sup>Sumber gambar: <http://suryaafrikan.blogspot.com/2010/10/rantai-makanan.html>

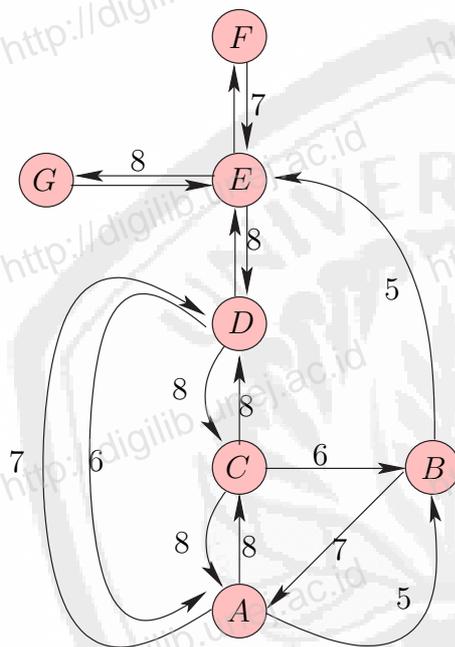


Gambar 2.3: Representasi graf dalam rantai makanan

simum kendaraan yang melintasi daerah itu. Permasalahannya adalah mencari sebanyak mungkin arus lalu lintas dari beberapa arah yang dapat berjalan secara bersamaan dengan aman dan konsisten. Juga mengenai pengaturan jalur lampu lintas dalam setiap pertigaan ataupun perempatan. Seberapa banyak penggunaan lampu lalu lintas yang harus di gunakan seminimum mungkin untuk mengatasi masalah kemacetan tersebut.

Pada lalu lintas di perkotaan, daya dukung jalan menjadi faktor penting dalam menentukan lancarnya lalu lintas. Daya dukung jalan ini meliputi lebar jalan, kondisi jalan, rata-rata volume kendaraan yang lewat tiap satuan waktu, dan lain-lain. Pada lalu lintas perkotaan, jarak, menjadi sesuatu yang tidak terlalu penting. Dengan melewati jalan yang memiliki daya dukung yang baik, walaupun jaraknya lebih panjang, akan membuat kita sampai lebih cepat ke tujuan. Lebih cepat, daripada melewati jalan yang berjarak pendek, tapi kondisi jalannya rusak, volume kendaraan yang lewat besar, dan lain-lain. Berikut adalah contoh pemodelan sisitem lalu lintas dengan graf ganda berarah berbobot. Pada contoh gambar 2.4, misalkan saja *A* adalah Simpang Pb. Sudirman, *B* adalah persimpangan antara Jalan Mawar dan Jalan Kenanga, *C*

adalah persimpangan Jalan Pb. Sudirman dan Jalan Kenanga, *D* adalah persimpangan antara Jalan Anggrek dengan Jalan Pb. Sudirman, *E* adalah Perempatan Jalan Madura, Kartini, dan Pb. Sudirman, *F* dan *G* adalah persimpangan yang tidak masuk dalam pembahasan karena ini hanya potongan dari suatu jalan. Pemanfaatan teori graf dalam sistem lalu lintas ini dapat dilakukan seabagai berikut :



Keterangan :

*AC, CD, DE, EF* adalah Jalan  
Pb. Sudirman

*AD* adalah Jalan Anggrek

*AB* adalah Jalan Mawar

*BC* adalah Jalan Kenanga

*BE* adalah Jalan Kartini

*EG* adalah Jalan Madura

Gambar 2.4: Contoh pemodelan sistem lalu lintas

1. Simpul dalam suatu graf digunakan untuk menghubungkan suatu persimpangan jalan. Pada gambar 2.4 terdapat 7 buah persimpangan yaitu *A, B, C, D, E, F*, dan *G*. Ketujuh persimpangan tersebut diperlakukan sebagai tujuh buah simpul.
2. Sisi dari suatu graf digunakan untuk melambangkan jalan. Pada gambar 2.4 terdapat 7 buah sisi yang melambangkan 7 buah jalan.

3. Arah pada sisi merepresentasikan arah jalan yang dapat dilalui. Jadi bila terdapat jalan *One Way* atau satu arah, arah panah hanya akan menunjuk ke arah tertentu dan tidak sebaliknya.
4. Bobot / label dari sisi graf merepresentasikan daya dukung jalan tersebut.

Dengan pemodelan ini, pengguna jalan dapat mengetahui dan menghindari jalan-jalan yang kemungkinan besar macet, atau jalan yang rusak, sehingga dapat menghindarinya dan memilih jalan lain yang memiliki daya dukung yang baik. Pemberian bobot / nilai pada suatu jalan didasarkan pada lebar jalan, kondisi jalan dan volume kendaraan yang lewat tiap jam.

1. Lebar jalan

Untuk jalan dengan lebar dibawah 1 meter diberi nilai 4, antara 1 meter sampai 2 meter diberi nilai 3, lebih dari 2 meter sampai 3 meter diberi nilai 2 dan untuk lebar jalan lebih dari 3 meter diberi nilai 1.

2. Kondisi Jalan

Jalan rusak parah diberi nilai 4, jalan rusak ringan diberi nilai 3, jalan baik diberi nilai 2 dan jalan sangat baik diberi nilai 1.

3. Volume kendaraan yang lewat tiap jam

Jika volumenya lebih dari 100 kendaraan/jam diberi nilai 5, 81 sampai 100 kendaraan/jam diberi nilai 4, 51 sampai 80 kendaraan/jam diberi nilai 3, 31 sampai 60 kendaraan/jam diberi nilai 2, dan jika volumenya 0 sampai 30 kendaraan/jam diberi nilai 1.

Bobot total yang melambangkan bobot sisi adalah jumlah nilai lebar jalan, kondisi jalan dan volume kendaraan yang lewat tiap jam.

Jalan yang menghubungkan *A* ke *C* dan sebaliknya, jalan yang menghubungkan *C* ke *D* dan sebaliknya, juga jalan yang menghubungkan *D* ke *E* dan sebaliknya, diberi nilai 8. Karena pada jalan ini (dalam hal ini Jalan Pb.

Sudirman) memiliki kondisi yang baik (nilai 1), badan jalan juga lebar (nilai 2), tapi volume kendaraan yang lewat sangat besar (nilai 5). Untuk pemberian bobot pada sisi-sisi yang lain dalam hal ini melambangkan jalan) dapat dicari dengan langkah yang sama. Apabila Kita sekarang berada di Simpang Pb. Sudirman (simpul  $A$ ) dan ingin pergi ke daerah yang terletak pada jalan yang menghubungkan simpul  $E$  dan  $F$ , rute terpendek adalah langsung melewati jalan yang menghubungkan  $A$  dan  $C$ ,  $C$  dan  $D$ ,  $D$  dan  $E$ , lalu  $E$  dan  $F$ . Sayangnya rute itu memiliki bobot yang besar, jadi mungkin saja waktu yang dibutuhkan menjadi lama. Rute alternative yang bisa kita gunakan adalah melewati jalan yang menghubungkan  $A$  dan  $B$ ,  $B$  dan  $E$ , lalu  $E$  dan  $F$ . Jalan ini memang lebih panjang, tapi karena relatif lebih lancar, jadi kemungkinan besar kita bisa sampai tujuan lebih cepat.

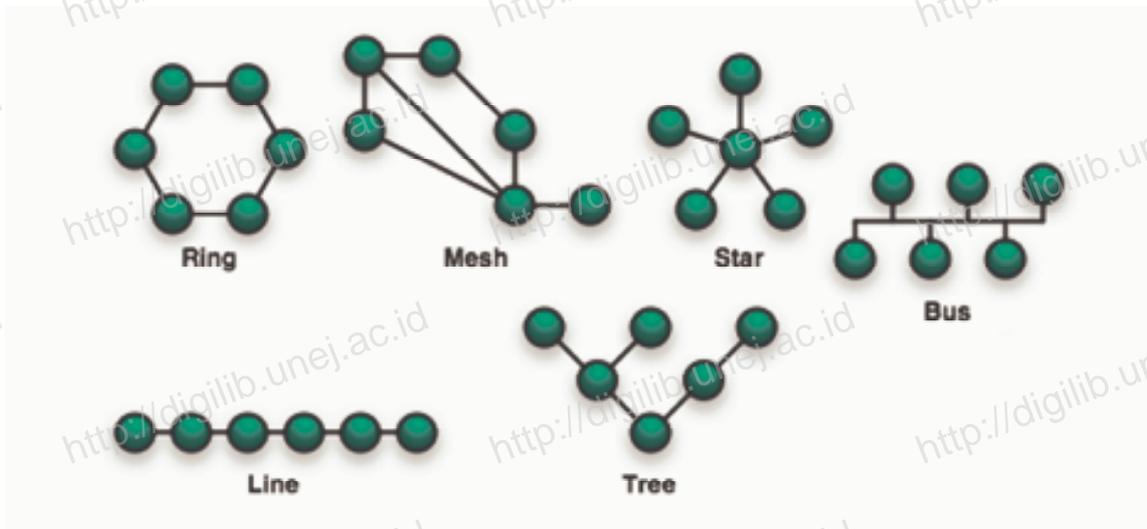
Zainal (2010:7) menjelaskan aplikasi lain teori graf dalam ilmu informatika dapat dilihat pada topologi jaringan komputer. Topologi jaringan (*network topology*) adalah studi mengenai pengaturan atau pemetaan dari elemen-elemen (pranala, simpul, dan sebagainya) sebuah jaringan. Topologi suatu jaringan didasarkan pada cara penghubung sejumlah sentral dalam membentuk suatu sistem jaringan. Topologi jaringan yang umum dipakai adalah: *Mesh*, Bintang (*Star*), *Bus*, *Tree*, dan Cincin (*Ring*). Berbagai jenis topologi jaringan tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.5<sup>3</sup>.

Dalam topologi jaringan komunikasi khususnya komputer, sentral-sentral saling terhubung (interkoneksi) tetapi ada juga yang tak terhubung. Untuk melakukan interkoneksi, diperlukan alamat dan identifikasi sentral yang berbeda satu dengan lainnya untuk kelancaran komunikasi dalam jaringan. Pemberian alamat dan identifikasi ini dalam komputer biasanya dikenal dengan IP address. Pemberian alamat dan identifikasi memerlukan label angka dan tiap sentral harus berbeda labelnya. Dalam hal inilah, pelabelan graf sangat berperan.

Salah satu aplikasi graf dalam bidang kimia yang sering kita temui adalah

---

<sup>3</sup>Sumber gambar: <http://www.11h11.com/hugobox/chaku/NetworkTopologies.png>



Gambar 2.5: Topologi Jaringan

dalam penyimpanan senyawa kimia berbahaya. Teorema yang dipakai disini adalah pewarnaan graf (*graph colour*). Pewarnaan graf sangat bermanfaat dalam penyimpanan senyawa kimia berbahaya. Efektifitas pewarnaan graf tidak diragukan lagi untuk mengetahui berapa banyak minimum ruangan yang diperlukan untuk dapat menyimpan semua zat kimia dengan aman. Misalkan ada 7 jenis zat kimia yang perlu disimpan di dalam gudang. Beberapa pasang dari zat itu tidak dapat disimpan di dalam ruangan yang sama, karena campuran gasnya bersifat eksplosif (mudah meledak).

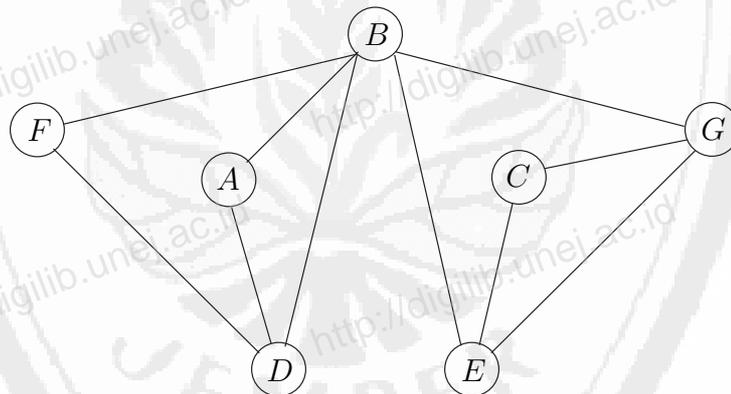
Untuk zat yang semacam itu perlu dibangun ruang-ruang terpisah yang dilengkapi ventilasi dan penyedot udara keluar yang berlainan. Jika lebih banyak ruang yang dibutuhkan, berarti lebih banyak ongkos yang harus dikeluarkan. Karena itu perlu diketahui berapa banyak minimum ruangan yang diperlukan untuk dapat menyimpan semua zat kimia dengan aman. Masalah ini masuk dalam masalah dalam pewarnaan graf.

Simpul melambangkan zat kimia, sisi menyatakan bahwa dua zat kimia yang dihubungkannya tidak boleh disimpan bersama-sama. Pada persoalan ini, terdapat 7 macam senyawa kimia, yaitu  $A, B, C, D, E, F, G$ . Ketujuh macam

Tabel 2.1: Hubungan sifat zat kimia

Zat kimia	Tidak dapat disimpan bersama zat kimia
A	B, D
B	A, D, E, F, G
C	E, G
D	A, F, B
E	B, C, G
F	B, D
G	C, E, B

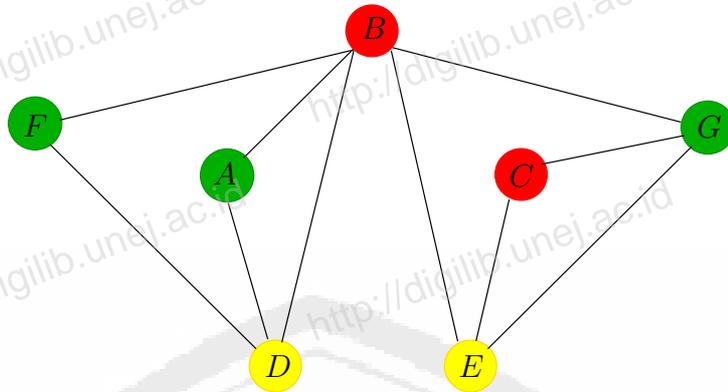
senyawa kimia tersebut diperlakukan sebagai tujuh buah simpul. Dari gambar 2.6, terlihat bahwa untuk persoalan di atas, graf dapat direpresentasikan dalam bentuk sebuah graf planar.



Gambar 2.6: Contoh representasi graf dalam penyimpanan zat kimia

Untuk mewarnai graf, terlebih dahulu idealnya pewarnaan dimulai dari simpul dengan derajat terbanyak kemudian melanjutkannya ke simpul-simpul yang bertetangga dengan simpul yang telah diwarnai tersebut. Langkah ini diulang hingga semua simpul telah diwarnai. Dengan memperhatikan gambar 2.6, maka metode pewarnaan yang sepatutnya dilakukan adalah berturut-turut mewarnai simpul  $B, G, E, C, A, D, F$  (urutan ini tidak tunggal, masih terdapat

alternatif lain). Salah satu contoh pewarnaan graf untuk persoalan di atas dapat dilihat pada gambar 2.7.



Gambar 2.7: Representasi graf (setelah dilakukan pewarnaan graf)

Perhatikan gambar 2.7, terlihat bahwa cukup diperlukan 3 buah warna (merah, kuning, hijau) untuk mewarnai graf di atas. Dengan demikian, jumlah minimum ruangan yang dibutuhkan untuk menyimpan senyawa-senyawa kimia berbahaya di atas adalah 3 buah ruangan.

- Ruangan 1 berisi zat B dan C,
- Ruangan 2 berisi zat A, F, dan G,
- Ruangan 3 berisi zat D dan E.

## 2.2 Terminologi Dasar Graf

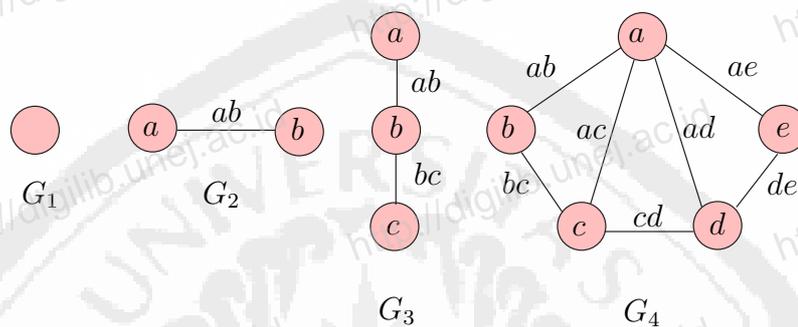
Dalam Kreyszig (1993:481), secara kasar graf tersusun atas titik-titik yang dinamakan *verteks*, dan garis-garis yang menghubungkan titik-titik tersebut dinamakan *sisi*. Namun secara matematis, suatu graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan himpunan  $(V, E)$ , yang dalam hal ini:

$V$  = himpunan tak kosong dari semua titik (*verteks*) =  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan

$E$  = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang titik =  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

Definisi di atas menyatakan bahwa  $V$  tidak boleh kosong, sedangkan  $E$  boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah

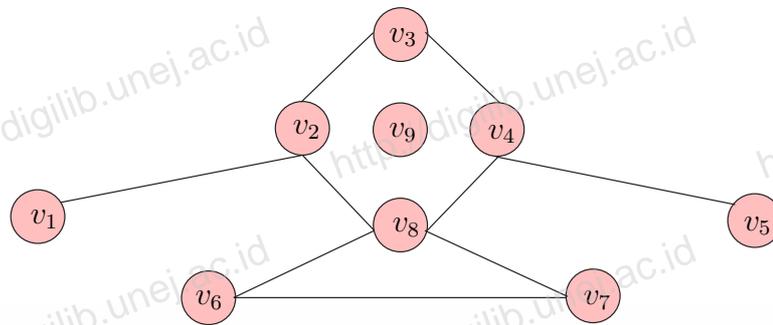
pun, tetapi titiknya harus ada, minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu simpul tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial (Munir, 2003:291). Titik pada graf dapat dinomori dengan huruf, dengan bilangan asli, atau dengan menggunakan huruf dan angka (bilangan asli). Misalkan  $v_i$  dan  $v_j$  adalah titik pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan titik  $v_i$  dan  $v_j$  dinyatakan dengan pasangan  $(v_i, v_j)$  atau dengan lambang  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ . Berikut diberikan contoh graf pada Gambar 2.8 yang menyatakan komponen umum terbentuknya sebuah graf.



Gambar 2.8: Contoh graf secara umum

Misalkan  $e = (v_i, v_j)$  merupakan sebuah sisi pada graf  $G$ , yaitu  $v_i$  dan  $v_j$  adalah titik ujung dari  $e$ , maka verteks  $v_i$  dikatakan *adjacent* (berelasi) terhadap verteks  $v_j$  dan edge  $e$  *incident* (terhubung) pada  $v_i$  dan  $v_j$ . Sedangkan derajat sebuah verteks  $v$  pada sebuah graf  $G$  ditulis dengan  $\deg(v)$ , adalah jumlah edge yang *incident* (terhubung) pada  $v$ , dengan kata lain jumlah edge yang memuat  $v$  sebagai titik ujung (Lipschutz dan Lipson, 2002: 7). Jika semua titik pada graf  $G$  mempunyai derajat/degree yang sama  $n$  maka graf  $G$  disebut graf regular  $n$ . Jika terdapat sebuah titik yang tidak mempunyai sisi yang *incident* dengannya atau dengan kata lain derajat titik tersebut = 0, maka titik tersebut dinamakan (*isolated vertex*) (Khud, 2010: 9). Perhatikan Gambar 2.9, tampak bahwa verteks  $v_1$  *adjacent* dengan  $v_2$ ,  $v_2$  *adjacent* dengan  $v_3$ ,  $v_3$  *adjacent* dengan  $v_4$ ,  $v_4$  *adjacent* dengan  $v_5$ , dst. Selain itu,  $v_8$  *incident* dengan sisi  $v_4v_8$ ,  $v_2v_8$ ,  $v_6v_8$ , dan  $v_7v_8$  sehingga derajat dari  $v_8$  adalah 4, sedangkan  $v_9$  merupakan contoh

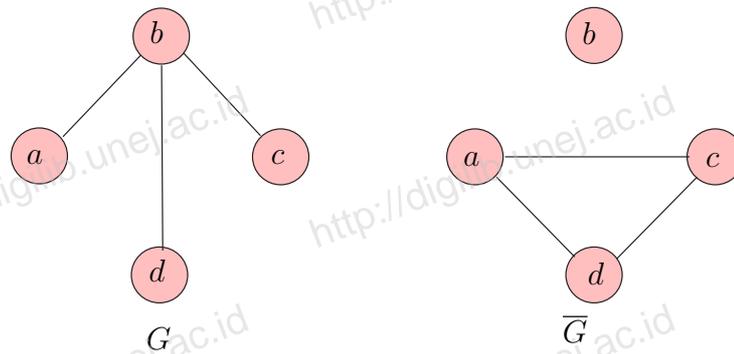
*isolated vertex* karena tidak ada sisi yang terhubung dengan  $v_9$ .



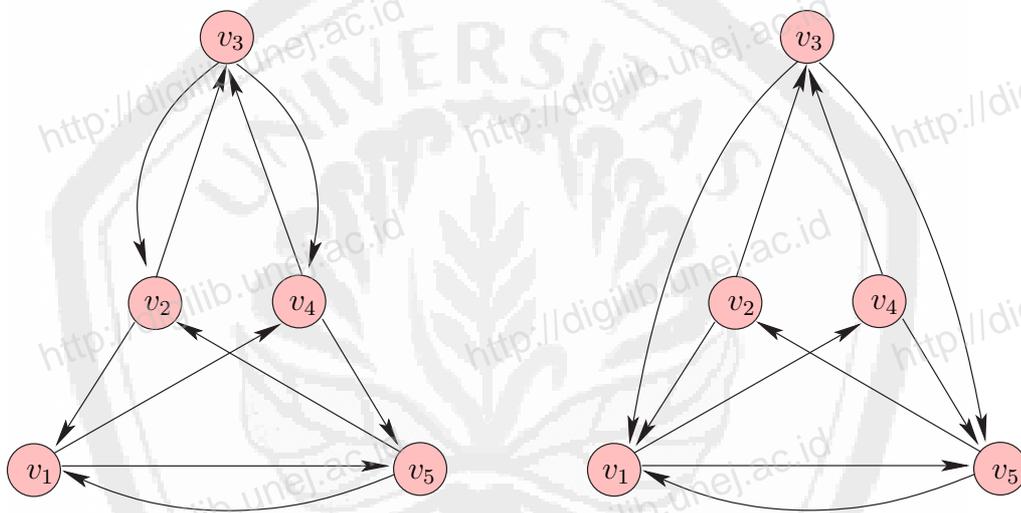
Gambar 2.9: Graf dengan isolated vertex

Dalam thesisnya, Slamini (2001 : 12) mengatakan bahwa suatu titik  $b$  dalam  $G$  dikatakan tetangga masuk (*in-neighbour*) titik  $a$  jika  $(b, a) \in E(G)$ , dan titik  $c$  dikatakan tetangga ke luar (*out-neighbour*) titik  $a$  jika  $(a, c) \in E(G)$ . Himpunan semua *in-neighbour* dari titik  $a$  disebut *in-neighbourhood* dan dinotasikan dengan  $N^-(a)$  sedangkan himpunan semua *out-neighbour* dari titik  $a$  disebut *out-neighbourhood* dan dinotasikan dengan  $N^+(a)$ . Derajat masuk (*in-degree*) dari sebuah titik  $a$  adalah banyaknya *in-neighbour* dari titik itu dan dinotasikan dengan  $d^-(a)$ , demikian halnya dengan derajat ke luar (*out-degree*)nya, yaitu banyaknya *out-neighbour* dari titik tersebut dan dinotasikan dengan  $d^+(a)$  (Holman dan Basby, 1987 : 98). Dafik (2007 : 11) mengatakan bahwa jika setiap titik dalam graf berarah  $G$  memiliki *in-degree* yang sama, maka  $G$  dikatakan teratur masuk (*in-regular*). Demikian juga jika setiap titik dalam graf sedangkan  $G$  memiliki derajat ke luar yang sama, maka  $G$  dikatakan teratur ke luar (*out-regular*). Graf berarah yang sekaligus teratur ke dalam dan teratur ke luar disebut graf berarah *diregular*. Contoh, graf berarah  $G_1$  pada Gambar 2.11 adalah graf berarah *diregular* dengan derajat dua, tetapi  $G_2$  *non-diregular* karena  $G_2$  hanya teratur ke luar tetapi tidak teratur masuk (Dafik, 2008 : 20).

Komplemen dari graf  $G$  dinotasikan  $\bar{G}$  adalah graf dengan himpunan titik  $V(\bar{G}) = V(G)$  dimana bila titik  $u, v$  bertetangga pada  $G$  jika dan hanya jika titik  $u, v$  tidak tetangga pada  $\bar{G}$ . Contohnya dapat dilihat pada Gambar 2.10.



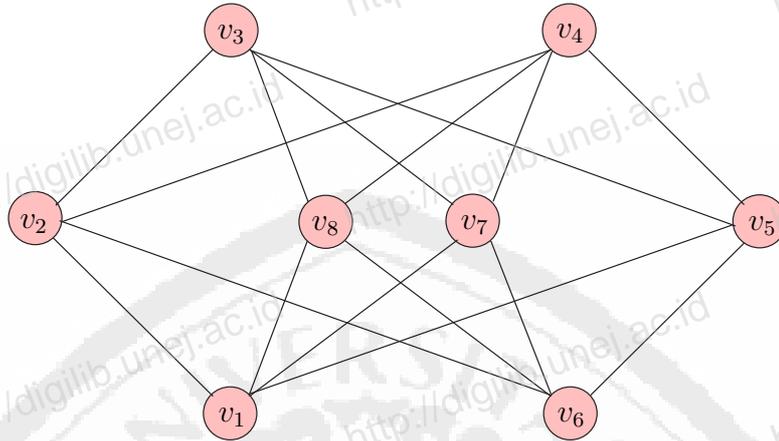
Gambar 2.10: Graf dan komplemennya



Gambar 2.11: Contoh *diregular* dan *non-diregular*

Fuad (2009: 7) menjelaskan bahwa jalan (*walk*) dari suatu graf, dinotasikan dengan  $v_0v_1v_2v_3\dots v_k$  adalah barisan titik dan sisi terhingga dan bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi dalam suatu graf. Jalan pada suatu graf dibentuk dari barisan titik dan sisi terhingga dan bergantian dari titik-titik dan sisi-sisi dalam suatu graf, dimana titik dan sisinya boleh diulang. Panjang (*length*) dari sebuah jalan adalah banyaknya sisi pada jalan tersebut. Jika semua titik  $v_0 - v_k$  pada jalan tersebut berbeda maka disebut lintasan (*path*). Sebuah lintasan dikatakan

tertutup, jika  $v_0 = v_k$  yang biasa disebut siklus (*cycle*). Pada Gambar 2.12  $v_1v_2v_3v_8v_6v_2v_4v_7v_3$  adalah jalan yang mempunyai panjang 8 yang bukan lintasan,  $v_1v_2v_4v_5v_6v_7v_3v_8$  adalah lintasan yang mempunyai panjang 7, dan  $v_5v_6v_7v_3v_5$  adalah siklus yang mempunyai panjang 4.



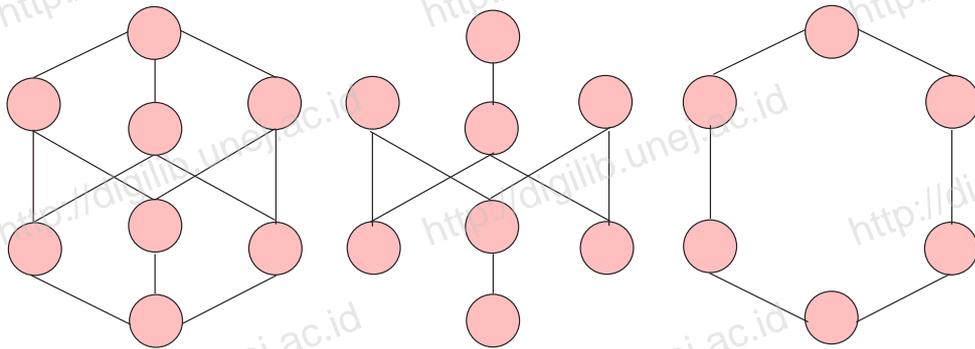
Gambar 2.12: Contoh sebuah graf dengan 8 titik

Jarak (*distance*) dari titik  $a$  ke titik  $b$  adalah panjang dari lintasan terpendek dari  $a$  ke  $b$  yang diukur dengan jumlah sisi yang harus dilewati untuk sampai ke  $b$  dari  $a$ . Sebagai contoh jarak titik  $v_1$  ke titik  $v_6$  pada Gambar 2.12 adalah 2. Diameter dari graf  $G$  adalah jarak maksimum antara sembarang dua titik pada graf  $G$ . *Girth* dari graf  $G$  adalah panjang siklus terpendek graf  $G$ . Sebagai contoh graf pada gambar 2.12 mempunyai diameter 2 dan girth 4.

Graf  $H$  adalah subgraf dari  $G$  jika setiap titik di  $H$  adalah titik di  $G$ , dan setiap sisi di  $H$  adalah sisi di  $G$  ( $V(H) \subseteq V(G)$  dan  $E(H) \subseteq E(G)$ ). Untuk lebih jelasnya contoh graf dan subgrafnya dapat dilihat pada gambar 2.13.

Graf  $G$  dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda  $u$  dan  $v$  di  $G$  ada lintasan dari  $u$  ke  $v$ . Misalkan  $A = (a_{ij})$  adalah matriks  $m \times m$  didefinisikan oleh:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } \{u, v\} \text{ adalah edge, yaitu } v_i \text{ adjacent terhadap } v_j \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

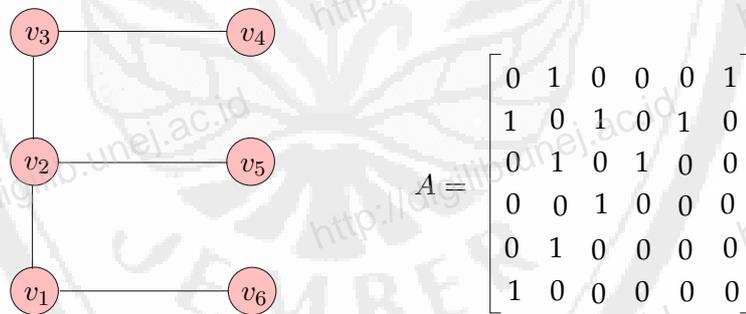


Gambar 2.13: Contoh graf dan subgrafnya

Maka  $A$  disebut matriks *adjacency* dari  $G$ . Dan misalkan  $M = (a_{ij})$  adalah matiks  $m \times m$  didefinisikan oleh:

$$m = \begin{cases} 1 & \text{verteks } v_i \text{ incident pada edge } e_i \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

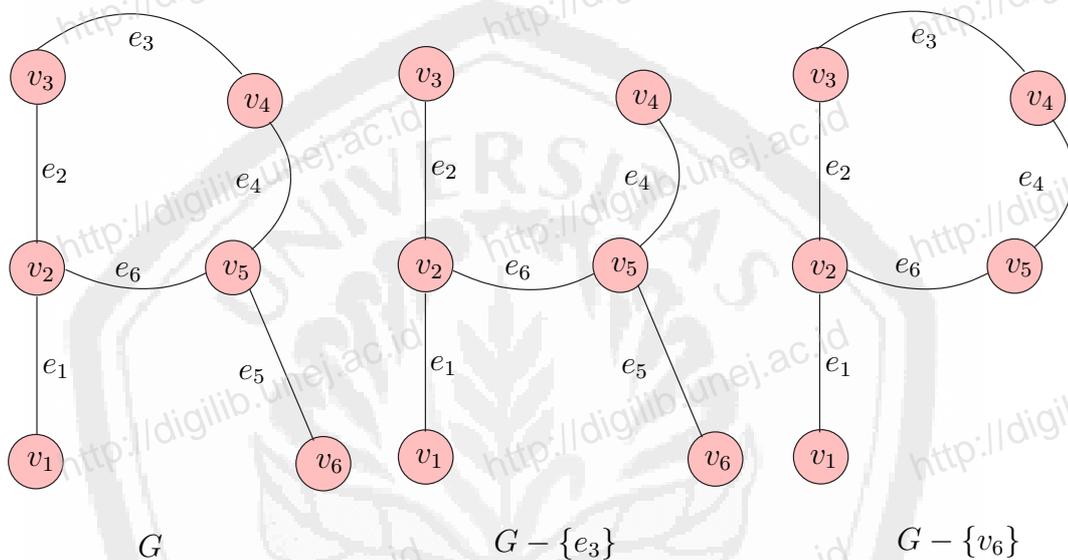
Maka  $M$  disebut matriks *incidence* dari  $G$  (Lipschutz dan Lipson, 2002:35). Berikut diberikan contoh graf dan matrik adjacencynya pada gambar 2.14.



Gambar 2.14: Contoh sebuah graf dan matrik adjacencynya

Misal  $e$  adalah sebuah sisi pada graf  $G$  maka  $G - \{e\}$  adalah sebuah graf yang dihasilkan dari  $G$  dengan menghapus sisi  $e$ . Jika  $G - \{e\}$  tidak terhubung maka  $e$  disebut jembatan (*bridge*). Secara umum, jika  $E_1$  adalah himpunan sisi dalam  $G$  maka  $G - E_1$  adalah graf yang dihasilkan dari  $G$  dengan menghapus semua sisi  $E_1$ .

Misal  $v$  adalah titik pada sebuah graf  $G$ , dengan  $G - \{v\}$  adalah sebuah graf yang dihasilkan dari  $G$  dengan menghapus titik  $v$  dan semua sisi yang *adjacent* pada  $v$ . Jika  $G - \{v\}$  adalah tak terhubung, maka  $v$  disebut titik potong (*cut-vertex*) (Chartrand dan Oellermann, 1993: 22). Dan jika  $V_1$  adalah himpunan titik pada  $G$  maka  $G - V_1$  adalah graf yang dihasilkan dari  $G$  dengan menghapus semua titik pada  $V_1$  dan semua sisi yang *adjacent* pada titik tersebut. Gambar 2.15 menunjukkan contoh graf  $G - \{e_3\}$  adalah hasil penghapusan sisi  $e_3$  dari  $G$  dan graf  $G - \{v_6\}$  adalah hasil penghapusan titik  $v_6$  dari  $G$ .



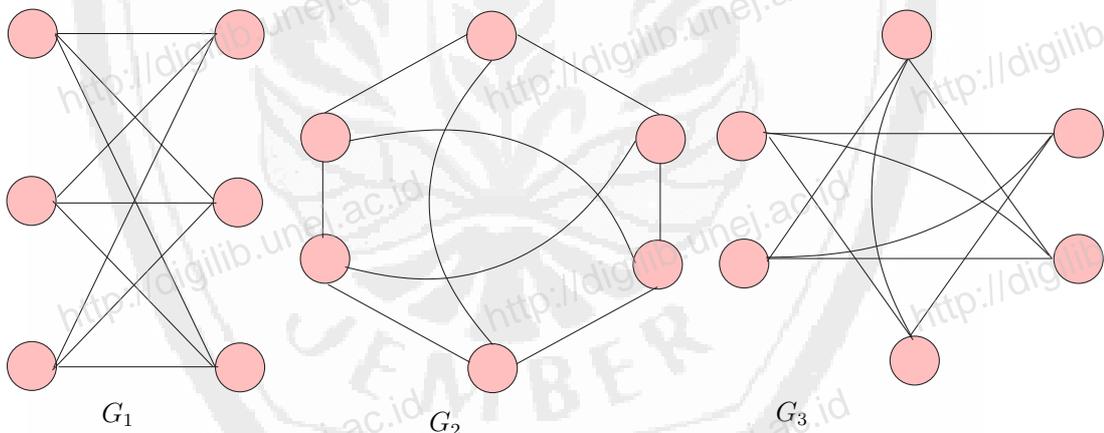
Gambar 2.15: Contoh graf terpotong

Dua buah graf dikatakan isomorfis jika mereka mempunyai struktur yang sama dan kebanyakan, mereka berbeda cara pemberian label titik-titik dan sisi-sisinya, atau cara menggambarannya. Untuk memperjelas maksud kalimat tersebut, kita akan mendefinisikan dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  isomorfis jika ada suatu fungsi  $\phi : V(G) \rightarrow V(G)$  sedemikian hingga  $uv \in (G_i) \iff \phi(u)\phi(v) \in E(G_2)$ . Fungsi  $\phi$  dinamakan sebuah fungsi isomorfis. Jika dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  isomorfis, maka dituliskan  $G_1 \cong G_2$ . Sampai saat ini untuk menentukan apakah dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  isomorfis atau tidak belum ada teori yang dapat dipakai. Tetapi, jika graf  $G_1$  dan  $G_2$  isomorfis, maka kedua graf tersebut selalu

memenuhi 4 syarat sebagai berikut :

1. jumlah titik  $G_1 =$  jumlah titik  $G_2$  (jumlah simpul yang sama).
2. jumlah garis  $G_1 =$  jumlah garis  $G_2$  (jumlah sisi yang sama).
3. jumlah garis yang mempunyai derajat tertentu dalam graf  $G_1$  dan  $G_2$  sama (mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu).
4. Graf  $G_1$  dan  $G_2$  mempunyai *girth*(panjang siklus terpendek) yang sama.

Keempat syarat tersebut belum cukup menjamin bahwa kedua graf isomorfis. Untuk menunjukkan bahwa kedua graf  $G_1$  dan  $G_2$  isomorfis, maka dapat dilihat dari matriks ketetanggaan kedua graf tersebut sama. Keisomorfisan graf dapat dilihat pada Gambar 2.16. Graf  $G_1$  dan  $G_3$  tidak isomorfis karena  $G_3$  mengandung siklus dengan panjang 3 sementara  $G_1$  tidak mengandung siklus dengan panjang 3 dan tidak mungkin mengandung pemetaan satu-satu dari  $G_1$  ke  $G_3$ .

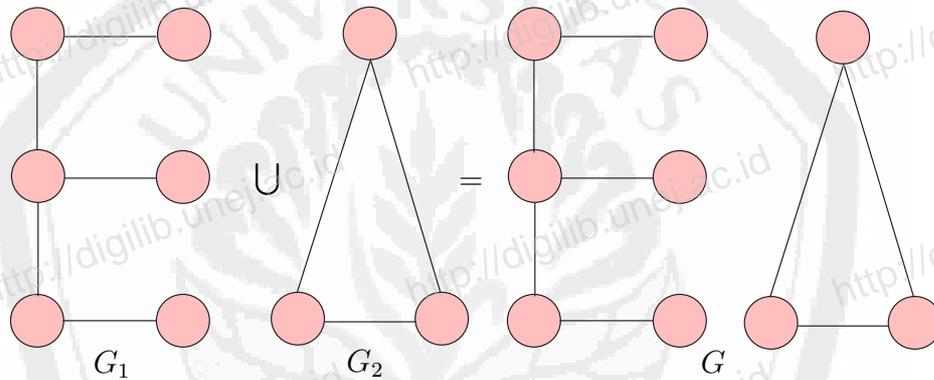


Gambar 2.16: Keisomorfisan graf

Dua buah titik  $v_i$  dan  $v_j$  dikatakan terhubung jika terdapat lintasan dari  $v_i$  ke  $v_j$ . Sedangkan graf tak berarah  $G$  disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang titik  $v_i$  dan  $v_j$  didalam himpunan  $V$  terdapat lintasan dari  $v_i$  ke  $v_j$ . Jika tidak, maka  $G$  disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*).

Graf yang hanya terdiri dari satu titik tetap disebut graf terhubung karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri.

Gabungan dari dua graf  $G_1$  dan  $G_2$  dinotasikan dengan  $G_1 \cup G_2$ , didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titiknya adalah  $V(G_1) \cup V(G_2)$  dan himpunan sisi  $E(G_1) \cup E(G_2)$ . Pada Gambar 2.17, graf  $G$  merupakan gabungan graf  $G_1$  dan  $G_2$ , yaitu  $G = G_1 \cup G_2$ . Graf gabungan  $mG$  didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari  $m$  buah kopi graf  $G$ , atau dapat juga dikatakan sebagai graf dengan  $m$  komponen, dimana setiap komponennya adalah graf  $G$ . Dengan kata lain  $mG = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_m$ , dengan  $G_1 = G_2 = G_3 = \dots = G_m = G$ . Misal graf  $G$  mempunyai  $p$  titik dan  $q$  sisi, maka graf  $mG$  mempunyai  $mp$  titik dan  $mq$  sisi (Wijaya, 2001:85).



Gambar 2.17: Contoh gabungan graf

### 2.3 Jenis-jenis Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau sisi kalang, berdasarkan jumlah simpul, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

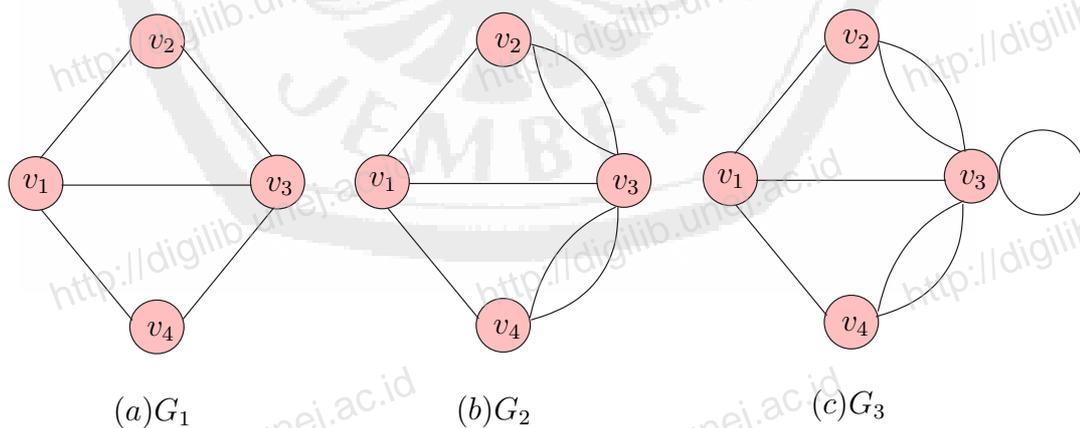
Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf sederhana (*simple – graph*)

Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana.  $G_1$  pada Gambar 2.18(a) adalah contoh graf sederhana yang merepresentasikan jaringan komputer. Simpul menyatakan komputer, sedangkan sisi menyatakan saluran telepon untuk berkomunikasi. Saluran telepon dapat beroperasi pada dua arah.

## 2. Graf tak-sederhana (*unsimple – graph*)

Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang dinamakan graf tak-sederhana (*unsimple – graph*). Ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Sisi ganda yang menghubungkan sepasang simpul bisa lebih dari dua buah.  $G_2$  pada Gambar 2.18(b) adalah graf-ganda. Sisi ganda pada  $G_2$  dapat diandaikan sebagai saluran telepon tambahan apabila beban komunikasi data antar komputer sangat padat. Graf semu adalah graf yang mengandung gelang.  $G_3$  adalah graf semu (termasuk bila memiliki sisi ganda sekalipun). Sisi gelang pada  $G_3$  dapat dianggap sebagai saluran telepon tambahan yang menghubungkan komputer dengan dirinya sendiri (mungkin untuk tujuan diagnostik). Graf semu lebih umum daripada graf ganda, karena sisi pada graf semu dapat terhubung ke dirinya sendiri.



Gambar 2.18: (a) graf sederhana, (b) graf ganda, dan (c) graf semu

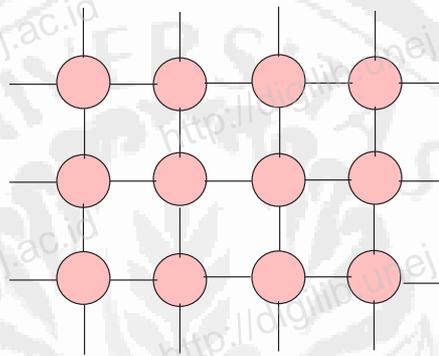
Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf berhingga (*limited graph*)

Graf berhingga adalah graf yang jumlah simpulnya,  $n$ , berhingga. Graf pada Gambar 2.18 adalah contoh graf yang berhingga.

2. Graf tak-berhingga (*unlimited graph*)

Graf yang jumlah simpulnya,  $n$ , tidak berhingga banyaknya disebut graf tak-berhingga. Graf pada Gambar 2.19 adalah contoh graf yang tidak berhingga.



Gambar 2.19: Graf tak-berhingga

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dikelompokkan menjadi dua jenis:

1. Graf tak-berarah (*undirected graph*) adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi  $(v_j, v_k) = (v_k, v_j)$  adalah sisi yang sama.

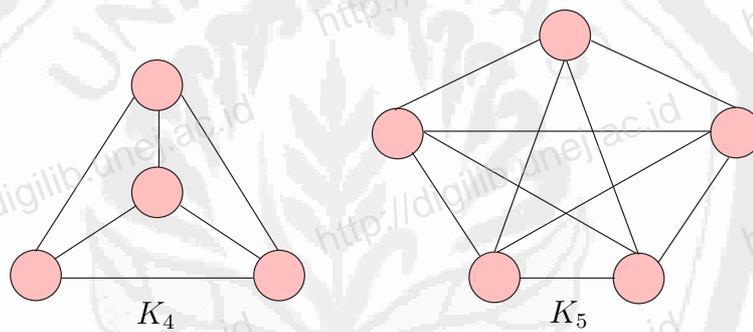
2. Graf berarah (*directed graph*) adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Pada graf berarah  $(v_j, v_k)$  dan  $(v_k, v_j)$  menyatakan dua buah sisi yang berbeda, dengan kata lain  $(v_j, v_k) \neq (v_k, v_j)$ . Untuk sisi  $(v_j, v_k)$  titik  $v_j$  dinamakan titik asal (*initial vertex*) dan titik  $v_k$  dinamakan titik terminal (*terminal vertex*).

Gambar 2.11 adalah contoh graf berarah sedangkan gambar 2.12 adalah contoh graf tak-berarah.

## 2.4 Graf Khusus

Dari pengertian graf secara umum, terdapat beberapa famili graf, diantaranya; graf siklus, graf lengkap, graf dua partisi, graf dua partisi lengkap, generalisasi graf Petersen, graf friendship, graf roda, graf ladder, dan masih banyak lainnya. Berikut akan dijelaskan beberapa graf khusus.

1. Graf komplit, dinotasikan dengan  $K_n$  yang berderajat sama sebanyak  $n$  dimana setiap dua titik berbeda adalah tetangga.  $K_n$  adalah graf reguler dengan derajat  $r = n - 1$ . Gambar 2.20 menunjukkan komplit graf  $K_4$  dan  $K_5$ .



Gambar 2.20: Graf komplit  $K_4$  dan  $K_5$

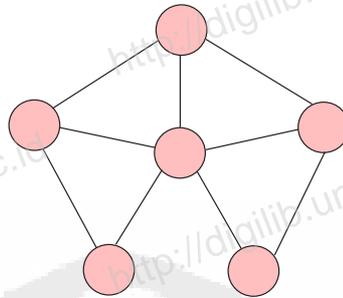
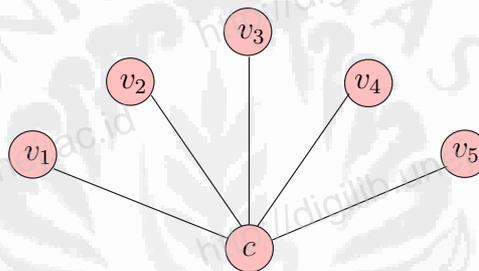
2. Graf Kipas ( $fan$ )

Graf kipas  $\hat{K}_n (n \geq 3)$  adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan  $P_n$  dengan suatu titik yang disebut pusat. Jadi,  $\hat{K}_n$  terdiri dari  $n + 1$  titik dan  $2n - 1$  sisi. Misalkan  $c, v_1, v_2, \dots, v_n$  adalah titik pada graf kipas  $\hat{K}_n$  dengan  $c$  merupakan titik pusat, maka  $cv_1, cv_2, \dots, cv_n, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$  adalah sisi-sisi dari  $\hat{K}_n$ . Untuk contoh, perhatikan  $\hat{K}_n$  pada Gambar 2.21.

3. Graf Bintang

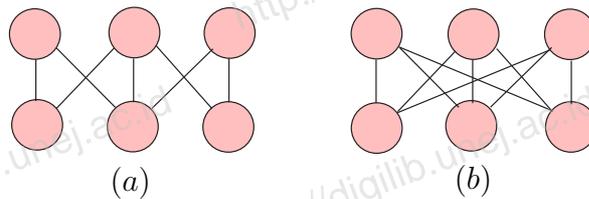
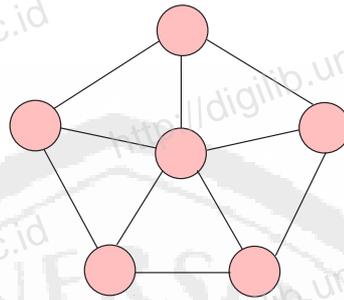
Graf bintang  $S_n, n \geq 3$  adalah graf pohon yang terdiri dari 1 titik yang

berderajat  $n - 1$  dan  $n - 1$  titik yang berderajat 1. Jadi, graf bintang  $S_n$  terdiri dari  $n$  titik dan  $n - 1$  sisi. Sebagai ilustrasi perhatikan graf  $S_6$  pada Gambar 2.22.

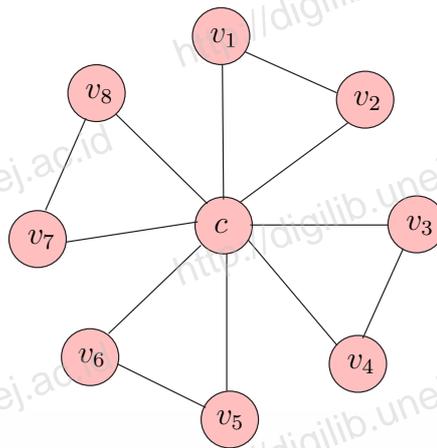
Gambar 2.21: Graf kipas  $\hat{K}_5$ 

Gambar 2.22: Graf bintang

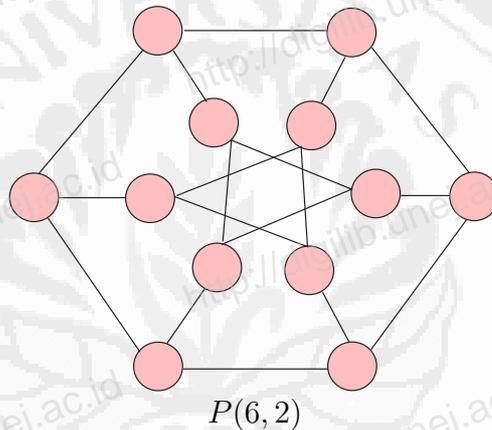
4. Sebuah graf  $G$  dinamakan bipartit jika  $V$  dapat dipartisi pada dua bagian himpunan yang tidak kosong  $V_1$  dan  $V_2$  sedemikian hingga setiap sisi pada  $E$  bergabung dengan titik pada  $V_1$  dengan titik  $V_2$ . Jika masing-masing titik dalam  $V_1$  adalah tetangga untuk semua titik-titik di  $V_2$ , kemudian  $G$  dikatakan graf bipartit komplit, yang disimbolkan dengan  $K_{m,n}$  dimana  $m = |V_1|$  dan  $n = |V_2|$ . Sebagai contoh pada Gambar 2.23.
5. Graf *whell* dinotasikan dengan  $W_n$  dengan jumlah jeruji sebanyak  $n$  adalah graf yang mempunyai titik  $x$  ditengah yang menghubungkan semua titik sebanyak  $n$  pada siklus (*cycle*) ( $C_n$ ) sebagai contoh pada Gambar 2.24.

Gambar 2.23: Graf bipartit (a) dan graf bipartit lengkap  $K_{3,3}$ Gambar 2.24: Graf whell  $W_5$ 

6. Graf *friendship*  $F_n$  adalah graf yang terdiri dari  $n$  segitiga dengan tepat 1 titik persekutuan yang disebut dengan titik pusat. Gambar 2.25 adalah contoh graf *friendship*.
7. Generalisasi graf Petersen dinotasikan  $P(n, m)$  dengan  $n \geq 3$  dan  $1 \leq m \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  adalah graf reguler yang terdiri dari  $n$  sisi luar yang berupa siklus, sisi dalam yang menghubungkan titik  $v_i v_{i+m}$  dengan indeks diambil dari modulo  $n$  dan sisi antara yang menghubungkan titik luar dan titik dalam yang mempunyai indeks sama. Catatan bahwa  $\lfloor x \rfloor$  adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari  $x$ . Generalisasi graf Petersen  $P(n, m)$ ,  $n \geq 3$  dan  $1 \leq m \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  mempunyai himpunan titik  $V = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$  dan himpunan sisi  $E = \{u_i u_{i+1}, u_i v_{i+1}, v_i v_{i+m}\}$  dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$  dan semua indeks diambil pada modulo  $n$  (dalam Slamin, 2001: 289), dimana  $u_i$  adalah titik bagian luar dari generalisasi graf Petersen dan  $v_i$  adalah titik bagian dalam dari generalisasi graf Petersen. Gambar 2.26 merupakan graf petersen.

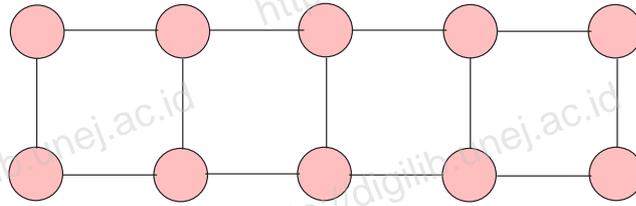


Gambar 2.25: Graf friendship  $F_4$



Gambar 2.26: Graf petersen

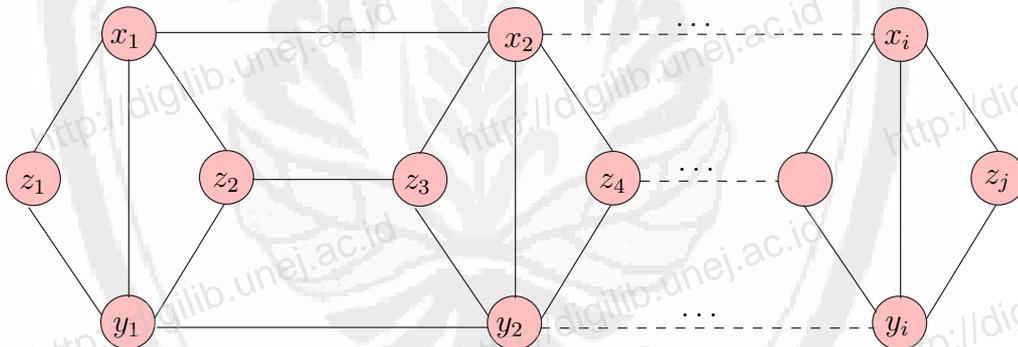
8. Graf Ladder (graf tangga) yang dilambangkan dengan  $L_n$  adalah sebuah graf yang berpadanan dengan  $K_2 \times P_n$  dengan titik  $V(L_n) = \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(L_n) = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{u_i v_i : 1 \leq i \leq n\}$  (Sugeng, 2005:78). Graf ladder mempunyai  $2n$  titik, dan  $3n - 2$  sisi. Gambar 2.27 menunjukkan satu contoh graf Ladder dengan  $n = 5$ .



Gambar 2.27: Graf ladder  $L_5$

### 2.5 Graf tangga permata

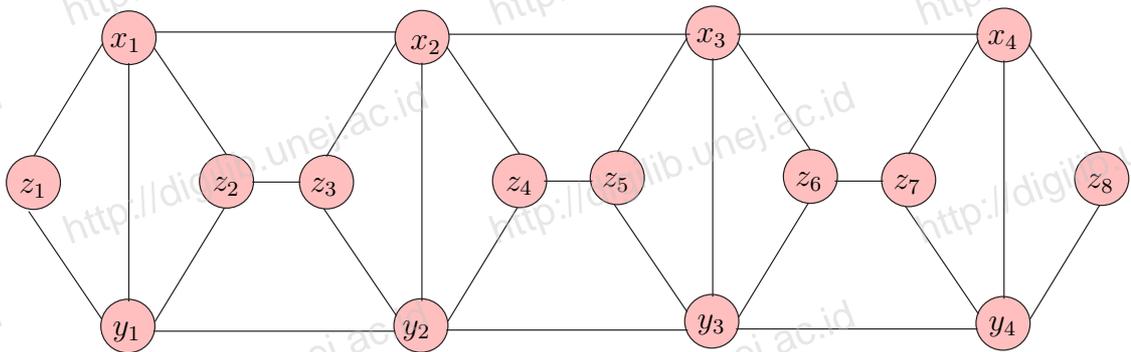
Graf tangga permata adalah salah satu family dari graf tangga. Graf tangga permata adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan  $Dl_n$  dimana  $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n\}$  dan  $E(Dl_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}; 2 \leq j \leq 2n-2 \text{ genap}\} \cup \{x_i z_{2i-1}, x_i z_{2i}, y_i z_{2i-1}, y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ . Gambar 2.28 merupakan graf tangga permata  $Dl_n$  dan pada Gambar 2.29 adalah contoh graf  $Dl_4$ .



Gambar 2.28: Graf Tangga Permata  $Dl_n$

### 2.6 Pelabelan Graf

Salah satu konsep dasar yang berkaitan dengan pelabelan graf adalah fungsi bijektif dan barisan aritmatika.

Gambar 2.29: Graf Tangga Permata  $DI_4$ 

### 2.6.1 Fungsi Bijektif dan Barisan Aritmatika

Secara umum, fungsi dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$  didefinisikan sebagai aturan yang memetakan setiap anggota himpunan  $A$  (dinamakan sebagai domain) kepada anggota himpunan  $B$  (dinamakan sebagai kodomain). Istilah "fungsi", "pemetaan", "peta", "transformasi", dan "operator" biasanya dipakai secara sinonim.

Anggota himpunan yang dipetakan dapat berupa apa saja (kata, orang, atau objek lain), namun biasanya yang dibahas adalah besaran matematika seperti bilangan riil. Untuk mendefinisikan fungsi dapat digunakan notasi berikut.

$$f: A \rightarrow B$$

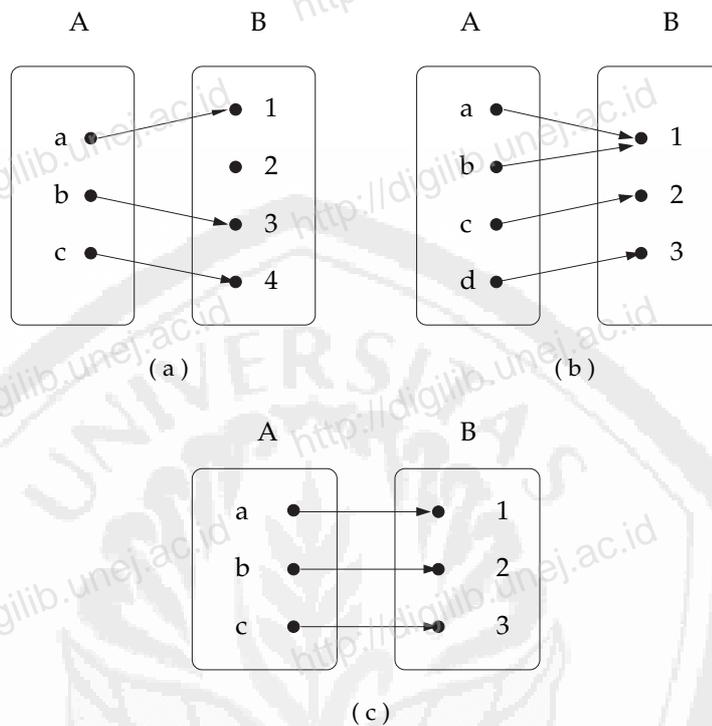
Yang artinya bahwa fungsi  $f$  yang memetakan setiap elemen himpunan  $A$  kepada  $B$ . Jenis-jenis fungsi ada tiga, yaitu fungsi injektif, surjektif dan bijektif.

Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut fungsi satu-satu atau fungsi injektif jika dan hanya jika untuk sebarang  $a_1$  dan  $a_2 \in A$  dengan  $a_1$  tidak sama dengan  $a_2$  maka berlaku  $f(a_1)$  tidak sama dengan  $f(a_2)$ .

Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut fungsi kepada atau fungsi surjektif jika dan hanya jika untuk setiap  $b$  dalam kodomain  $B$  terdapat paling tidak satu  $a$  dalam domain  $A$  sehingga berlaku  $f(a) = b$ . Dengan kata lain, suatu kodomain fungsi

surjektif sama dengan kisarannya (range).

Fungsi  $f: A \rightarrow B$  disebut disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif. Gambar 2.30 menunjukkan fungsi injektif, surjektif dan bijektif.



Gambar 2.30: (a) fungsi injektif, (b) fungsi surjektif dan (c) fungsi bijektif

Barisan yang dibentuk dengan cara menambah atau mengurangi suku sebelumnya dengan suatu bilangan tetap tertentu disebut barisan aritmatika.

(a)  $2, 6, 10, 14, 18, \dots$

(b)  $50, 40, 30, 20, 10, \dots$

Barisan (a) mempunyai beda,  $b = 4$ . Barisan (a) disebut barisan aritmetika naik karena nilai suku-sukunya makin besar. Barisan (b) mempunyai beda,  $b = -10$ . Barisan (b) disebut barisan aritmetika turun karena nilai suku-sukunya makin kecil. Suatu barisan  $U_1, U_2, U_3, \dots$  disebut barisan aritmetika jika selisih dua suku yang berurutan adalah tetap. Nilai untuk menentukan

suku ke- $n$  dari barisan aritmetika. perhatikan kembali contoh barisan (a). 2, 6, 10, 14, 18, ... Misalkan  $U_1, U_2, U_3, \dots$  adalah barisan aritmetika tersebut maka

$$U_1 = 2 = 2 + 4(0)$$

$$U_2 = 6 = 2 + 4 = 2 + 4(1)$$

$$U_3 = 10 = 2 + 4 + 4 = 2 + 4(2)$$

...

$$U_n = 2 + 4(n - 1)$$

Secara umum, jika suku pertama ( $U_1$ ) =  $a$  dan beda suku yang berurutan adalah  $b$  maka dari rumus  $U_n = 2 + 4(n - 1)$  diperoleh 2 adalah  $a$  dan 4 adalah  $b$ . Oleh sebab itu, suku ke- $n$  dapat dirumuskan

$$U_n = a + b(n - 1)$$

Barisan aritmetika yang mempunyai beda positif disebut barisan aritmetika naik, sedangkan jika bedanya negatif disebut barisan aritmetika turun.  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$  disebut barisan aritmatika, jika  $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1} = \text{konstanta}$ .

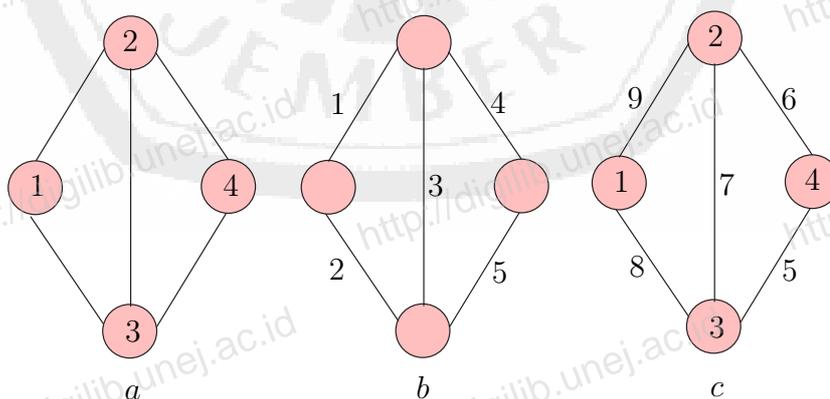
### 2.6.2 Aksioma, Lemma, Teorema, Corollary, Konjektur dan Open Problem

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi. Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar. Bentuk khusus dari teorema adalah lemma dan corollary (akibat). Lemma adalah teorema sederhana yang digunakan dalam pembuktian teorema lain. Lemma biasanya tidak menarik namun berguna pada pembuktian proposisi yang lebih kompleks, yang dalam hal ini pembuktian tersebut dapat lebih mudah dimengerti bila menggunakan sederetan lemma, setiap lemma dibuktikan secara individual. Corollary (akibat) adalah teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan, atau dapat dikatakan corollary adalah teorema yang mengikuti dari teorema lain. Konjektur adalah sebuah proposisi yang dipradugakan sebagai hal yang nyata, be-

nar, atau asli, sebagian besarnya didasarkan pada landasan inkonklusif (tanpa simpulan). Konjektur bertentangan dengan hipotesis (oleh karenanya bertentangan pula dengan teori, aksioma, atau prinsip), yang merupakan pernyataan yang mengandung perjanjian menurut landasan yang dapat diterima. Di dalam matematika, konjektur adalah proposisi yang tidak terbukti atau tidak memerlukan bukti atau juga teorema yang dianggap pasti benar adanya. Open problem (masalah terbuka atau pertanyaan terbuka) adalah beberapa masalah yang dapat secara akurat dinyatakan, dan belum diselesaikan (tidak ada solusi untuk diketahui). Contoh open problem dalam matematika, yang telah diselesaikan dan ditutup oleh peneliti di akhir abad kedua puluh, adalah Teorema Terakhir Fermat dan empat warna teorema peta. Sedangkan open problem yang belum terselesaikan contohnya adalah permasalahan jembatan Königsberg.

### 2.6.3 Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan graf  $G$  adalah sebuah pemetaan dari himpunan elemen-elemen graf  $G$  (titik dan/atau sisi) terhadap himpunan bilangan bulat positif. Jika domainnya adalah himpunan titik  $G$  maka pelabelannya disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), sedangkan jika domainnya adalah himpunan sisi  $G$  maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*). Jika domainnya adalah kedua himpunan tersebut maka pelabelannya disebut pelabelan total (*total labeling*). Gambar 2.31 mengilustrasikan pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total pada graf.



Gambar 2.31: (a) Pelabelan titik (b) pelabelan Sisi (c) Pelabelan total

Pada pelabelan titik, jumlah label dua titik yang menempel pada suatu sisi disebut *bobot sisi*. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka disebut pelabelan titik sisi ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  maka pelabelan tersebut disebut pelabelan titik sisi anti ajaib (*edge antimagic vertex labelling* (EAVL)).

Sedangkan dalam pelabelan total, bobot sisi diartikan sebagai jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada suatu sisi. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total-sisi-ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmetika dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total sisi anti ajaib (pelabelan total sisi antimagic) (Dartono, 2006).

#### 2.6.4 Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi antimagic

Sebuah pemetaan satu-satu  $f$  dari  $V(G)$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, p\}$  disebut pelabelan titik  $(a, d)$ -sisi antimagic jika himpunan bobot sisinya  $w(uv) = f(u) + f(v)$  pada semua sisi  $G$  adalah  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$  untuk  $a > 0$  dan  $d \geq 0$  keduanya adalah bilangan bulat, sedangkan Pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic adalah sebuah pemetaan satu-satu  $f$  dari  $V(G) \cup E(G)$  ke bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$  sehingga himpunan bobot sisinya  $w(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)$  pada semua sisi  $G$  adalah  $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$  untuk  $a > 0$  dan  $d \geq 0$  keduanya bilangan bulat. Sebuah pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic disebut pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic jika  $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$  dan  $f(E) = \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$ .

Dengan kata lain, pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada sebuah graf  $G = (V, E)$  adalah pelabelan titik dengan bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, p\}$  dan pelabelan sisi dengan bilangan bulat  $\{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$  dari sebuah graf  $G$  dimana  $p$  adalah banyaknya titik dan  $q$  adalah banyaknya sisi pada graf  $G$ , sedemikian hingga himpunan bobot dari sisinya adalah  $W = \{w(x, y) | xy \in E(G)\} = \{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (q - 1)d\}$  untuk  $a > 0$  dan  $d \geq 0$ , dimana  $\alpha(u)$

adalah label dari titik  $u$ ,  $\alpha(v)$  adalah label dari titik  $v$  dan  $\alpha(uv)$  adalah label dari sisi  $uv$ . Untuk mencari batas atas nilai beda  $d$  pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dapat ditentukan dengan lemma berikut ini seperti (dalam Dafik: 2007: 26-27).

◇ **Lemma 2.6.1** *Jika sebuah graf  $(p, q)$  adalah pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic maka  $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$*

**Bukti.**  $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$  dan  $f(E) = \{p+1, p+2, \dots, p+q\}$

Misalkan graf  $(p, q)$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan pemetaan  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p+q\}$ . Nilai minimum yang mungkin dari bobot sisi terkecil adalah dengan menjumlahkan dua label titik terkecil (1 dan 2) dengan satu label sisi terkecil ( $p+1$ ), sehingga diperoleh:

$1 + (p+1) + 2 = p+4$ . Dapat ditulis :

$$p+4 \leq a$$

Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari bobot sisi terbesar adalah dengan menjumlahkan dua label titik terbesar ( $(p-1)$  dan  $p$ ) dengan satu label sisi terbesar ( $p+q$ ), sehingga diperoleh:

$(p-1) + (p+q) + p = 3p+q-1$ . Dari sifat bobot SEATL yang menyatakan bahwa  $a + (q-1)d$  adalah suku terbesar, maka diperoleh:

$$\Leftrightarrow a + (q-1)d \leq 3p+q-1$$

$$\Leftrightarrow (p+4) + (q-1)d \leq 3p+q-1$$

$$\Leftrightarrow d \leq \frac{3p+q-1-(p+4)}{q-1}$$

$$\Leftrightarrow d \leq \frac{2p+q-5}{q-1} \quad (2.1)$$

Dari persamaan (2.1) terbukti bahwa  $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$  sehingga diperoleh  $d$  dari berbagai famili graf.  $\square$

K.A. Sugeng, dkk (2005:169) mengatakan bahwa lema berikut digunakan untuk menemukan pelabelan total super  $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf untuk jumlah sisi ganjil.

◇ **Lemma 2.6.2** Misalkan  $\mathfrak{A}$  merupakan sebuah himpunan,  $\mathfrak{A} = \{c, c+1, c+2, \dots, c+k\}$ , dengan  $k$  genap. Maka ada sebuah permutasi  $\Pi(\mathfrak{A})$  dari anggota-anggota himpunan  $\mathfrak{A}$  sehingga  $\mathfrak{A} + \Pi(\mathfrak{A}) = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \dots, 2c + \frac{3k}{2} - 1, 2c + \frac{3k}{2}\}$ .

**Bukti.** Misal  $\mathfrak{A}$  adalah suatu himpunan  $\mathfrak{A} = \{a_i | a_i = c + (i-1), 1 \leq i \leq k+1\}$  dan  $k$  adalah genap. Definisi dari permutasi adalah  $\Pi(\mathfrak{A}) = \{b_i | 1 \leq i \leq k+1\}$  dari anggota  $\mathfrak{A}$  berikut:

$$b_i = \begin{cases} c + \frac{k}{2} + \frac{1-i}{2}, & \text{jika } i \text{ adalah ganjil, } 1 \leq k+1 \\ c + k + \frac{2-i}{2}, & \text{jika } i \text{ adalah genap, } 2 \leq i \leq k \end{cases}$$

dengan pembuktian langsung kita dapatkan:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} + \mathfrak{k}(\mathfrak{A}) &= \{a_i + b_i | 1 \leq i \leq k+1\} = \\ &= \{2c + \frac{k}{2} + \frac{1-i}{2} | i \text{ ganjil, } 1 \leq k+1\} \cup \{2c + k + \frac{i}{2} | i \text{ genap, } 1 \leq k\} = \\ &= \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, \dots, 2c + \frac{3k}{2} - 1, 2c + \frac{3k}{2}\} \end{aligned}$$

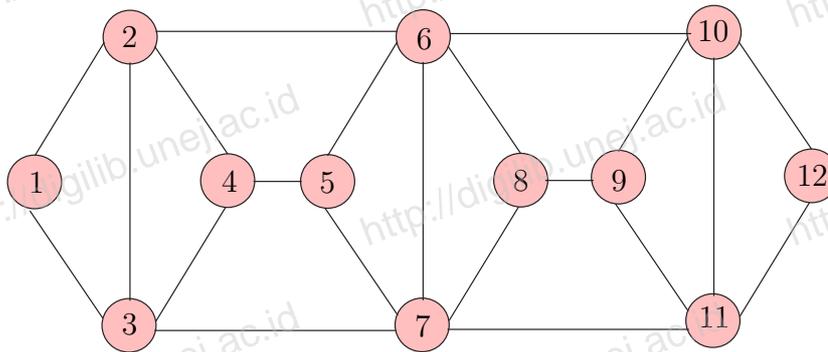
dan kita mendapatkan hasil. □

Secara harfiah, pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic dan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic memuat perluasan gagasan dari total  $(a, d)$ -sisi magic dan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi magic (Baca dan Miller, 2007:37).

### 2.6.5 Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf Tangga Permata

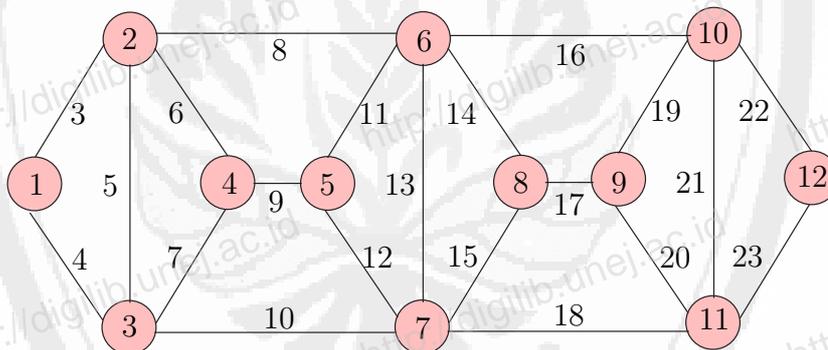
Pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf Tangga Permata ini belum ada yang menemukan sebelumnya. Peneliti akan mencoba menemukan pelabelannya dengan menggunakan teknik berikut ini :

1. menentukan EAVL (*Edge Antimagic Vertex Labelling*) pada Graf Tangga Permata dengan teknik pattern recognition;
2. dengan melihat pola pelabelan pada gambar 2.32, langkah selanjutnya adalah menentukan fungsi bijektif dengan domain bilangan bulat positif  $1, 2, 3, \dots, p$ ;



Gambar 2.32: EAV  $Dl_3$

- selanjutnya menghitung bobot *edge antimagic vertex labeling* (EAVL). Dari gambar 2.33 tampak bahwa barisan bobot sisinya ( $w$ ) adalah sebagai berikut: 3, 4, 5, ..., 23. Terlihat bahwa bobot EAVL membentuk barisan aritmatika dengan beda 1;



Gambar 2.33: EAV  $Dl_3$

- menentukan label sisi dari *Super Edge Antimagic Total Labeling* (SEATL) untuk  $d = 0$  pada Graf Tangga Permata ( $Dl_3$ ). Melengkapi label titik pada Gambar 2.33 dengan melabeli sisi-sisinya sehingga menjadi pelabelan total.

## 2.7 Hasil-Hasil Pelabelan Total Super $(a, d)$ -Sisi Antimagic pada Graf Diskonektif

Tabel 2.2: Ringkasan dari pelabelan total super  $(a, d)$ -edge antimagic pada graf disconnected.

Graf	$d$	Hasil	Open Problem
$P_n \cup P_{n+1}$	$1 \leq d \leq 3$	(i) $d \in \{1, 3\}$ dan $n \geq 2$ (ii) $d = 2$ dan $n \geq 3$ adalah ganjil (Sudarsana, <i>et al</i> , 2005)	$d = 2$ untuk genap $n$
$nP_2 \cup P_n$	$1 \leq d \leq 3$	$d \in \{1, 2\}$ dan $n \geq 2$ (Sudarsana, <i>et al</i> , 2005)	$d = 3$ for $n \geq 2$
$nP_2 \cup P_{n+2}$	$1 \leq d \leq 4$	$d \in \{1, 2\}$ dan $n \geq 1$ (Sudarsana, <i>et al</i> , 2005)	$d \in \{3, 4\}$ untuk $n \geq 1$
$mK_n$	$d \leq 5$	jika dan hanya jika (i) $d \in \{0, 2\}$ dan $n \in \{2, 3\}$ , $m \geq 3$ ganjil, atau (ii) $d = 1$ dan $m, n \geq 2$ , atau (iii) $d \in \{3, 5\}$ dan $n = 2$ , $m \geq 2$ , atau (iv) $d = 4$ dan $n = 2, m \geq 3$ ganjil (M. Bača dan C. Barrientos, Submitted, 2008)	
$mK_{n,n}$	$d \leq 5$	(i) jika $d = 1$ untuk semua $m$ dan $n$ (ii) jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $n = 1$ dan $m \geq 3$ ganjil (iii) jika $d \in \{3, 5\}$ untuk $n = 1$ dan semua $m \geq 2$ (iv) jika $d = 4$ untuk $n = 1$ dan semua $m \geq 3$ ganjil (M. Bača dan C. Barrientos, Submitted)	jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $n = 3$ dan $m \geq 3$ ganjil
$mC_n$	$d \leq 2$	jika setiap (i) $d \in \{0, 2\}$ untuk $m, n \geq 3$ ganjil	

Graph	$d$	Hasil	Open Problem
		(ii) $d = 1$ untuk semua $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ (Dafik, et al, 2009)	
$mP_n$	$d \leq 5$	jika setiap (i) $d \in \{1, 3\}$ untuk semua $m$ dan $n$ (ii) $d \in \{0, 2\}$ untuk semua $m, n$ ganjil (iii) $d \in \{4, 5\}$ untuk semua $m$ dan $n = 2$ (Dafik, et al, 2009)	
$mK_{n,n,n}$	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m$ ganjil dan $n$ sembarang (Dafik, et al, 2009)	
$mK_{n,n,\dots,n}$	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m, n$ ganjil (Dafik, et al, 2006)	
$mC_n \odot \bar{K}_n$	$d \leq 2$	jika setiap (i) $d \in \{0, 2\}$ untuk $m, n \geq 3$ ganjil (ii) untuk semua $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ (M.Bača, et al, in press)	
$mP_n \cup \mu C_n$	$d \leq 2$	jika setiap (i) $d \in \{0, 2\}$ untuk setiap $m + \mu$ dan $n$ ganjil (ii) $d = 1$ untuk $m$ genap (Dafik, et al, in press)	
$mK_{1,m} \cup K_{1,n}$	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $n + 1$ faktor dari $m$ (Dafik, et al, in press)	
$mK_{1,m} \cup S_{k,1}$	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $m, n$ sembarang (Dafik, et al, in press)	
$m$ -caterpillar	$d \leq 5$	$d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ untuk $m, n$ sembarang	

Graph	$d$	Hasil	Open Problem
		(M.Bača, <i>et al</i> , in press)	
$mL_n$	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m, n$ ganjil (M. Fuad, 2009)	jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $m$ genap
$kP_{(n,2)}$	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $k, n$ ganjil (Indayani.D.V , 2010)	jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $k, n$ genap
$mB_{(n,k)}$	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $m \geq 2, n \geq 2,$ dan $k \geq 4$ (K.Biyadi , 2010)	jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $m, n$ genap
$mF_{(n,k)}$	$d < 4$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $m \geq 2, n \geq 2,$ dan $k \geq 3$ (Z.Abidin , 2010)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• jika <math>d \in \{0, 2\}</math> untuk <math>m, n</math> genap dan <math>k \geq 3</math></li> <li>• jika <math>d \in \{1, 3\}</math> untuk <math>m \geq 2, n</math> ganjil dan <math>k \geq 3</math></li> </ul>
$m\mathcal{L}_{(i,j,k)}$	$d < 4$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $m \geq 3,$ $1 \leq i \leq n, j = 2,$ dan $k = 1$ (R.Raty Rahmad , 2010)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• jika <math>d = 3</math> untuk <math>m \geq 3</math> ganjil dan <math>n \geq i \geq 2</math> genap</li> <li>• jika <math>d \in \{1, 3\}</math> untuk <math>m \geq 3</math> ganjil dan <math>n \geq i \geq 2</math> ganjil</li> <li>• jika <math>d \in \{1, 3\}</math> untuk <math>m \geq 3</math> genap dan <math>n \geq i \geq 2</math></li> </ul>
$mE_n$	$d < 4$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil, $n \geq 3$ (Riza Deviyana , 2011)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• jika <math>d = 1</math> untuk <math>m \geq 3</math> dan <math>n \geq 3</math> ganjil</li> <li>• jika <math>d = 3</math> untuk <math>(m \geq 3</math> dan <math>n \geq 3)</math> ganjil</li> <li>• jika <math>d = 3</math> untuk <math>(m \geq 3</math> dan <math>n \geq 3)</math> genap</li> </ul>
$sW_0(3, j, 2)$	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil dan $s$ ganjil (Yeni Anggraeni , 2011)	• jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $1 \leq j \leq m$ genap dan $1 \leq k \leq s$ genap

## BAB 3

### METODE PENELITIAN

#### 3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan aksioma atau teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf Tangga Permata baik yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Dalam penelitian ini, terlebih dahulu akan ditentukan nilai beda  $(d)$  pada Graf Tangga Permata, selanjutnya nilai  $d$  tersebut diterapkan dalam pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf Tangga Permata. Jika terdapat pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic, maka akan dirumuskan bagaimana pola pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf Tangga Permata tersebut dengan menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pola umumnya.

Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai beda  $(d)$  pada gabungan saling lepas Graf Tangga Permata, selanjutnya nilai  $d$  tersebut diterapkan dalam pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas Graf Tangga Permata. Jika terdapat pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic, maka akan dirumuskan bagaimana pola pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas Graf Tangga Permata tersebut dengan menggunakan metode yang sama untuk menentukan pola umumnya.

#### 3.2 Definisi Operasional

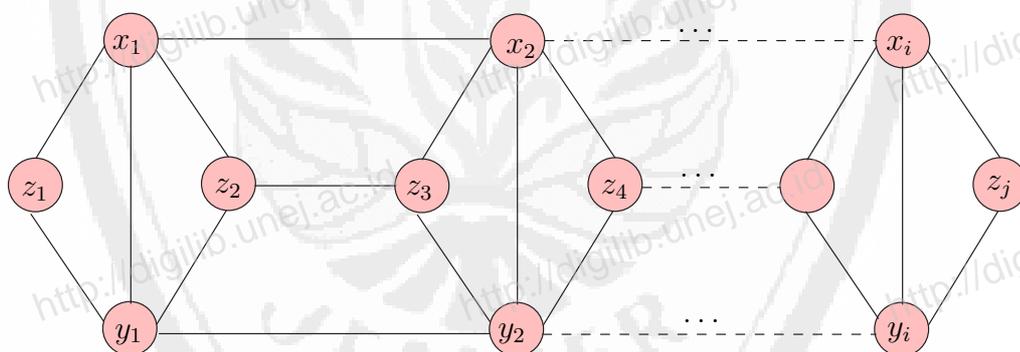
Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi operasional variabel yang dimaksud adalah sebagai berikut:

### 3.2.1 Pelabelan Total Super $(a, d)$ -Sisi Antimagic

Misal  $p = |V|$  dan  $q = |E|$  maka pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic adalah sebuah pemetaan satu-satu  $f$  dari  $V(G) \cup E(G)$  ke bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, p+q\}$  sehingga himpunan bobot sisinya  $w(uv) = f(u) + f(v) + f(w)$  pada semua sisi  $G$  adalah  $\{a, a+d, \dots, a+(q-1)d\}$  untuk  $a > 0$  dan  $d \geq 0$  adalah bilangan bulat. Sebuah pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic disebut pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic jika  $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$  dan  $\{f(E) = p+1, p+2, \dots, p+q\}$ .

### 3.2.2 Graf Tangga Permata $(Dl_n)$

Graf Tangga Permata adalah salah satu family dari graf tangga. Graf Tangga Permata adalah graf yang dinotasikan dengan  $Dl_n$  dimana  $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n\}$  dan  $E(Dl_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}; 2 \leq j \leq 2n-2 \text{ genap}\} \cup \{x_i z_{2i-1}, x_i z_{2i}, y_i z_{2i-1}, y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ . Gambar 3.1 merupakan Graf Tangga Permata  $Dl_n$  dan pada Gambar 3.2 adalah contoh graf  $Dl_4$ .

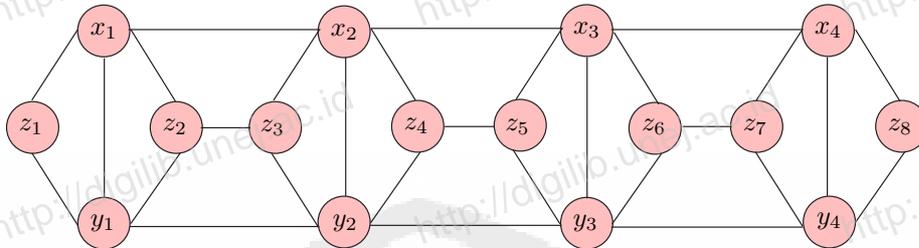


Gambar 3.1: Graf Tangga Permata  $Dl_n$

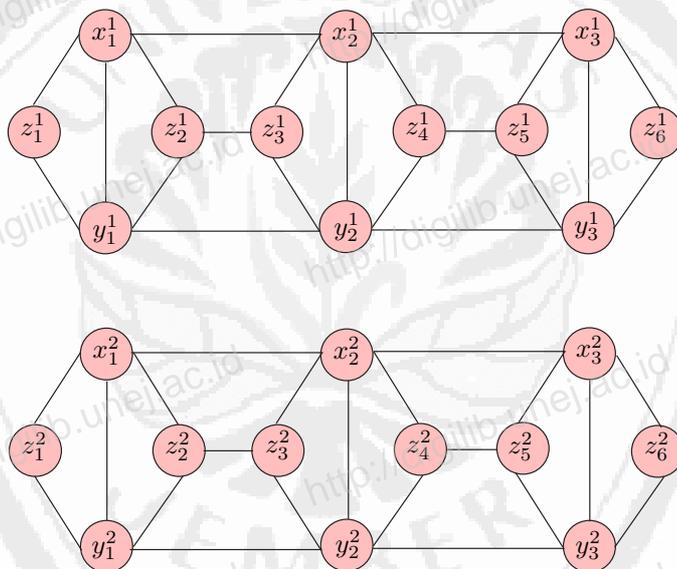
### 3.2.3 Gabungan Saling Lepas Graf Tangga Permata $(mDl_n)$

Gabungan saling lepas Graf Tangga Permata  $mDl_n$  didefinisikan sebagai gabungan diskonektif dari sebanyak  $m$  copy Graf Tangga Permata yang mempunyai himpunan titik  $V(mDl_n) = \{x_i^k, y_i^k, z_j^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n, 1 \leq k \leq m\}$  dan himpunan sisi  $E(mDl_n) = \{x_i^k x_{i+1}^k, y_i^k y_{i+1}^k; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m\}$ .

$m\} \cup \{x_i^k y_i^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{z_j^k z_{j+1}^k; 2 \leq j \leq 2n - 2 \text{ genap}, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i^k z_{2i-1}^k, x_i^k z_{2i}^k, y_i^k z_{2i-1}^k, y_i^k z_{2i}^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\}$ . Dalam penelitian ini kita akan membatasi pada  $mDl_n$  untuk  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ . Gambar 3.3 adalah gabungan saling lepas Graf Tangga Permata dengan  $m = 2$  dan  $1 \leq i \leq 3$ .



Gambar 3.2: Graf Tangga Permata  $Dl_4$



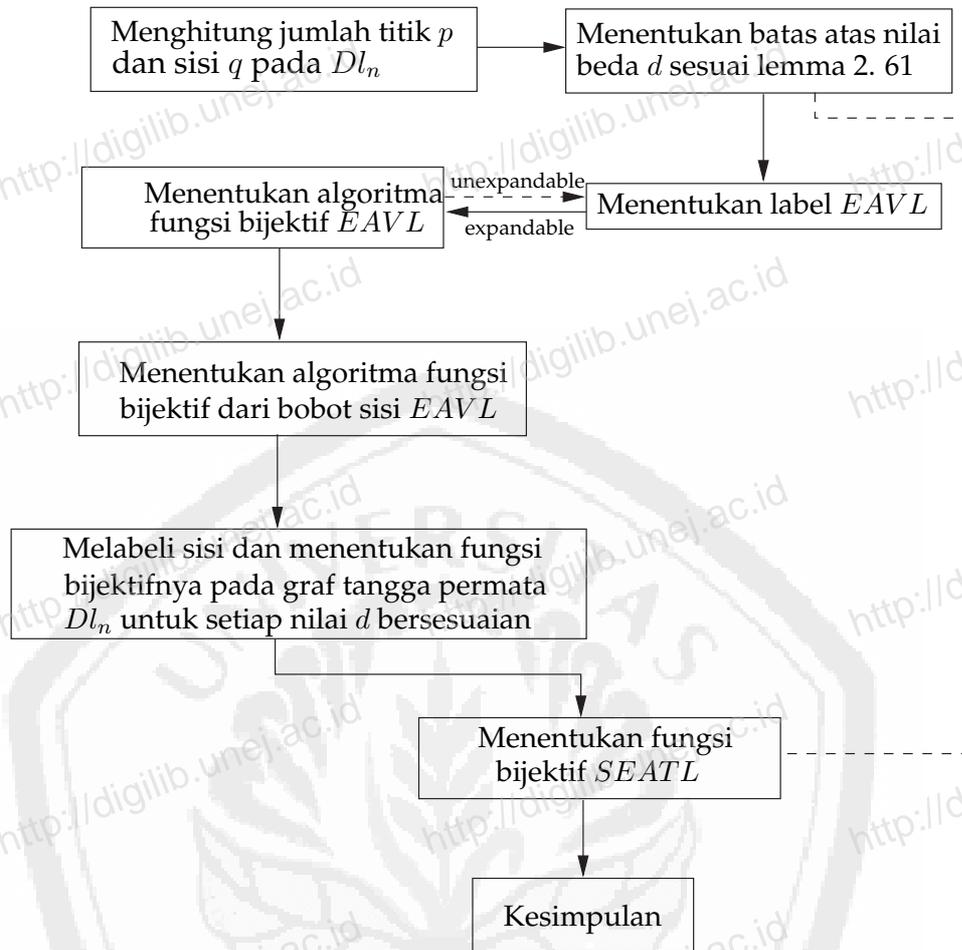
Gambar 3.3: Gabungan Graf Tangga Permata  $2Dl_3$

### 3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada Graf Tangga Permata baik yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya, jika pada graf tersebut ditemukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola (*pattern recognition*). Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

1. menghitung jumlah titik  $p$  dan sisi  $q$  pada Graf Tangga Permata  $Dl_n$ ,
2. menentukan batas atas nilai beda  $d$  pada pada Graf Tangga Permata  $Dl_n$  sesuai dengan Lemma 2.6.1,
3. menentukan label  $EAVL$  (*edge-antimagic vertex labeling*) atau pelabelan titik( $a,d$ )-sisi antimagic pada Graf Tangga Permata  $Dl_n$ ,
4. apabila label  $EAVL$  berlaku untuk beberapa graf baik secara *heuristic* maupun *determinatik* maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan menentukan algoritma  $EAVL$  pada Graf Tangga Permata  $Dl_n$ ,
5. menentukan fungsi bijektif  $EAVL$  pada Graf Tangga Permata  $Dl_n$ ,
6. melabeli Graf Tangga Permata  $Dl_n$  dengan  $SEATL$  (*super edge antimagic total labeling*) atau pelabelan total super ( $a, d$ )-sisi antimagic dengan nilai beda  $d$  yang *feasible*,
7. menentukan fungsi bejektif pelabelan total super ( $a, d$ )-sisi antimagic pada Graf Tangga Permata  $Dl_n$ .

Untuk gabungan saling lepas Graf Tangga Permata juga menggunakan teknik penelitian seperti yang telah disebutkan di atas namun diterapkan pada gabungan saling lepas Graf Tangga Permata. Secara umum, langkah-langkah penelitian di atas dapat juga disajikan dalam bagan diagram alir pada gambar 3.4.



Keterangan:

→ : Aliran kegiatan utama

- - - → : Aliran pengecekan algoritma

Gambar 3.4: Rancangan Penelitian

## BAB 4

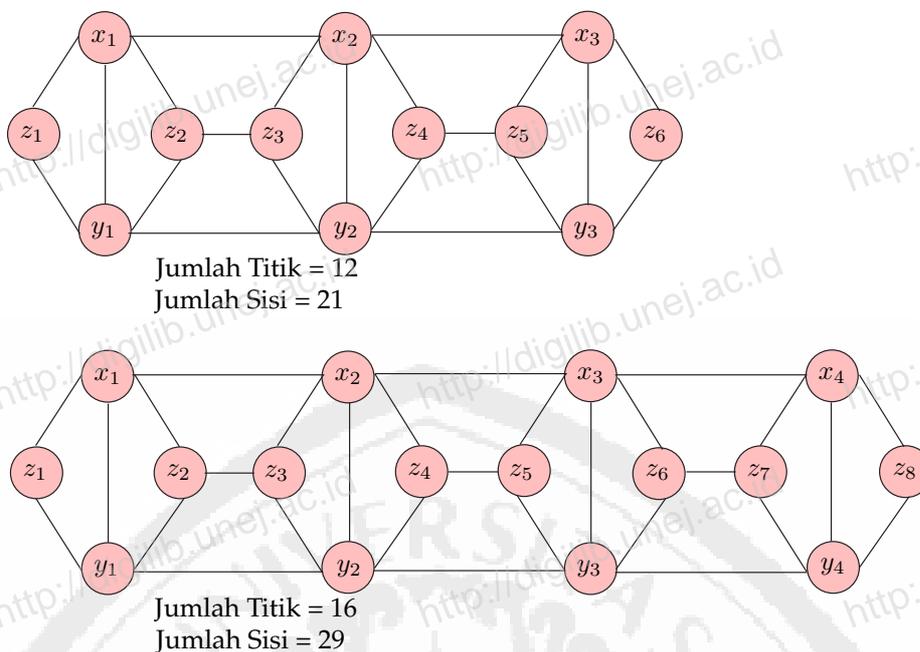
### HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan hasil penelitian tentang pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf Tangga Permata dengan hasil akhirnya berupa fungsi bijektif pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf Tangga Permata. Penelitian ini diawali dengan menentukan nilai  $d$ , menentukan  $EAV$  dan bobot sisi  $EAV$  kemudian menentukan  $SEATL$  dan diakhiri dengan bobot sisi total  $SEATL$  untuk membuktikan bahwa gabungan graf ini merupakan  $SEATL$ .

Hasil utama dari penelitian yang akan dibahas terkait dengan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf  $Dl$  adalah lemma dan teorema yang diberi tanda  $\diamond$ . Terdapat 2 (dua) lemma dan 6 (enam) teorema baru yang ditemukan secara eksperimental dalam penelitian ini. Format penyajian temuan penelitian dalam bab ini diawali dengan pernyataan lemma atau teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema. Berikut ini akan dijelaskan tahap-tahap bagaimana lemma dan teorema tersebut ditemukan sekaligus menjawab rumusan masalah yang telah disajikan sebelumnya.

#### 4.1 Jumlah Titik dan Sisi pada Graf Tangga Permata ( $Dl_n$ )

Penentuan jumlah titik  $p$  dan jumlah sisi  $q$  merupakan syarat perlu dalam penelitian ini. Dengan mengetahui jumlah titik dan jumlah sisi, maka peneliti dapat mengetahui seberapa banyak graf  $Dl$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic. Untuk menentukan jumlah titik dan jumlah sisi graf tersebut, terlebih dahulu akan dicari jumlah titik dan jumlah sisi graf  $Dl$  ( $Dl_n$ ) dan gabungan graf  $Dl$  ( $mDl_n$ ). Pada Gambar 4.1 berikut disajikan sebuah ilustrasi untuk menentukan jumlah titik dan jumlah sisi pada graf  $Dl$  ( $Dl_n$ ).



Gambar 4.1: Jumlah titik dan jumlah sisi graf pada  $Dl_3$  dan  $Dl_4$

Graf Tangga Permata ( $Dl_n$ ) dimana  $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n\}$ . Sehingga jumlah titik pada graf  $Dl$  ( $Dl_n$ ) adalah  $4n$ .

Sedangkan jumlah sisi pada graf  $Dl_n$  merupakan jumlah seluruh sisi yang menghubungkan suatu titik dengan titik lainnya pada graf tersebut. Berdasarkan definisi sisi Graf Tangga Permata,  $E(Dl_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}; j \text{ genap}, 2 \leq j \leq 2n-2\} \cup \{x_i z_{2i-1}, x_i z_{2i}, y_i z_{2i-1}, y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$  terlihat jelas bahwa graf  $Dl_n$  memiliki  $8n - 3$  sisi.

#### 4.2 Jumlah Titik dan Sisi pada Gabungan Graf Tangga Permata ( $mDl_n$ )

Jumlah titik dan jumlah sisi pada  $mDl_n$  dapat ditentukan dengan terlebih dahulu mencermati definisi gabungan pada suatu graf. Gabungan  $m$  graf Tangga Permata  $Dl_n$  yang dinotasikan  $mDl_n$  didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari  $m$  buah duplikat graf Tangga Permata ( $Dl_n$ ) dengan  $1 \leq j \leq m$

, ditulis:  $Dl_n^1 \cup Dl_n^2 \cup Dl_n^3 \cup \dots \cup Dl_n^m$ . Sehingga jumlah titik graf  $mDl_n$  adalah  $m$  kali jumlah titik graf  $Dl_n$  dan jumlah sisi graf  $mDl_n$  adalah  $m$  kali jumlah sisi graf  $Dl_n$ . Misalkan  $p$  adalah jumlah titik graf  $mDl_n$  dan  $q$  adalah jumlah sisi graf  $mDl_n$ , maka:

$$p = m \cdot (4n) \Leftrightarrow p = 4mn \text{ dan } q = m \cdot (8n - 3) \Leftrightarrow q = 8mn - 3m$$

#### 4.3 Batas Atas $d$ Graf Tangga Permata ( $Dl_n$ )

Batas atas  $d$  graf Tangga Permata ( $Dl_n$ ) dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 2.6.1. Diketahui jumlah titik pada graf  $Dl_n$  adalah  $p = 4n$  dan jumlah sisi  $q = 8n - 3$ . Dengan demikian batas atas nilai beda  $d$  tersebut adalah:

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{2p + q - 5}{q - 1} \\ &= \frac{2(4n) + 8n - 3 - 5}{8n - 3 - 1} \\ &= \frac{8n + 8n - 8}{8n - 4} \\ &= \frac{16n - 8}{8n - 4} \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

Karena pelabelan dalam SEAT menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai  $d \geq 0$  dan  $d$  bilangan bulat. Sehingga dapat disimpulkan  $d \in \{0, 1, 2\}$ . Selanjutnya akan ditentukan fungsi bijektif pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic sesuai dengan nilai  $d$  yang telah ditetapkan.

#### 4.4 Batas Atas $d$ pada Gabungan Graf Tangga Permata ( $mDl_n$ )

Sedangkan batas atas  $d$  gabungan graf Tangga Permata ( $mDl_n$ ) juga dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 2.6.1. Diketahui jumlah titik pada graf  $mDl_n$  adalah  $p = 4mn$  dan jumlah sisi  $q = 8mn - 3m$ . Dengan demikian

batas atas nilai beda  $d$  tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{2p + q - 5}{q - 1} \\
 &= \frac{2(4mn) + 8mn - 3m - 5}{8mn - 3m - 1} \\
 &= \frac{8mn + 8mn - 3m - 5}{8mn - 3m - 1} \\
 &= \frac{16mn - 3m - 5}{8mn - 3m - 1} \\
 &= 2 - \frac{3m - 3}{8mn - 3m - 1}
 \end{aligned}$$

Karena  $0 < \frac{3m-3}{8mn-3m-1} < 1$ . Sedemikian hingga berlaku:

$$\begin{aligned}
 d &\leq 2 - \frac{3m - 3}{8mn - 3m - 1} \\
 \Leftrightarrow d &\leq 2
 \end{aligned}$$

Karena pelabelan dalam SEAT menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai  $d \geq 0$  dan  $d$  bilangan bulat. Sehingga dapat disimpulkan  $d \in \{0, 1, 2\}$ . Selanjutnya akan ditentukan fungsi bijektif pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic sesuai dengan nilai  $d$  yang telah ditetapkan.

#### 4.5 Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi Antimagic pada Graf Tangga Permata $(Dl_n)$

Metode dalam menemukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata terdiri dari beberapa langkah yang diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas  $i$  dan  $j$  yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Setelah fungsi bijektif diketahui maka harus dibuktikan secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari lemma atau teorema. Perlu diketahui bahwa lemma atau

teorema dalam penelitian ini adalah bukan lemma atau teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Dari hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa lemma, teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Setelah mengetahui batas atas nilai  $d$ , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan terlebih dahulu menentukan pelabelan titik  $(a, 1)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  dimana  $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n\}$  sekaligus menentukan fungsi bijektifnya melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika. Lemma 4.5.1 adalah lemma yang berkaitan dengan pelabelan titik  $(a, 1)$ -sisi Antimagic pada Graf Tangga Permata  $Dl_n$ .

◇ **Lemma 4.5.1** *Ada pelabelan titik  $(3, 1)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik graf Tangga Permata  $Dl_n$  dengan fungsi bijektif  $\alpha_1$ , definisikan pelabelan  $\alpha_1 : V(Dl_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 4n\}$  maka pelabelan  $\alpha_1$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha_1(x_i) &= 4i - 2, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_1(y_i) &= 4i - 1, \text{ jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_1(z_j) &= 2j - \frac{((-1)^{j+1} + 1)}{2}, \text{ jika } 1 \leq j \leq 2n\end{aligned}$$

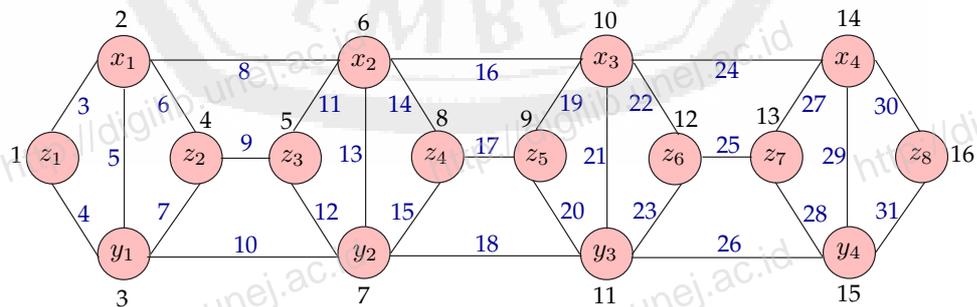
Dari persamaan di atas, dapat dipahami bahwa  $\alpha_1(x_i)$ ,  $\alpha_1(y_i)$  dan  $\alpha_1(z_j)$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $Dl_n$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, 4n\}$ . Jika  $w_{\alpha_1}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan titik  $\alpha_1$  dimana bobot sisi pelabelan titik diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang

bersisian, maka fungsi bijektif  $w_{\alpha_1}$  dapat ditentukan melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 w_{\alpha_1}^1(x_i x_{i+1}) &= 8i; && \text{jika } 1 \leq i \leq n-1 \\
 w_{\alpha_1}^2(y_i y_{i+1}) &= 8i+2; && \text{jika } 1 \leq i \leq n-1 \\
 w_{\alpha_1}^3(x_i y_i) &= 8i-3; && \text{jika } 1 \leq i \leq n \\
 w_{\alpha_1}^4(z_j z_{j+1}) &= 4j+1; && \text{jika } 2 \leq j \leq 2n-2 \text{ genap} \\
 w_{\alpha_1}^5(x_i z_{2i-1}) &= 8i-5; && \text{jika } 1 \leq i \leq n \\
 w_{\alpha_1}^6(x_i z_{2i}) &= 8i-2; && \text{jika } 1 \leq i \leq n \\
 w_{\alpha_1}^7(y_i z_{2i-1}) &= 8i-4; && \text{jika } 1 \leq i \leq n \\
 w_{\alpha_1}^8(y_i z_{2i}) &= 8i-1; && \text{jika } 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot sisi EAV ini, bobot sisi terkecil terletak pada  $w_{\alpha_1}^5$  yaitu  $8i-5$ . Bobot sisi terbesar terletak pada  $w_{\alpha_1}^8$  yaitu  $8i-1$ . Dengan mensubstitusikan nilai  $i=1, k=2$  dan  $i=n$  untuk bobot sisi terbesar, sehingga dapat membentuk himpunan  $\bigcup_{t=1}^8 w_{\alpha_1}^t = \{3, 4, 5, \dots, 8n-1\}$  terdiri dari bilangan bulat berurutan. Dengan demikian  $\alpha_1$  adalah suatu pelabelan titik  $(3, 1)$ .  $\square$

Angka 1, 2, ..., 8 pada  $w_{\alpha_1}^1, w_{\alpha_1}^2, w_{\alpha_1}^3, \dots, w_{\alpha_1}^8$  bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan  $w_{\alpha_1}$  yang mempunyai syarat batas  $i$  dan  $j$  yang berbeda-beda. Gambar 4.2 merupakan contoh pelabelan titik beserta bobot sisi EAVLnya  $(3, 1)$ -sisi antimagic graf Tangga Permata ( $Dl_4$ ) dengan  $d=1$ .



Gambar 4.2: Pelabelan titik  $(3,1)$ -sisi antimagic pada  $Dl_4$

Berdasarkan Lemma 4.5.1 maka diperoleh pelabelan titik  $(3, 1)$ -sisi antimagic dan dapat ditentukan pelabelan total super  $(a, 0)$ -sisi antimagic dengan menentukan label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL  $w$  dengan urutan yang berkebalikan. Sehingga sisi dengan  $w$  terkecil dilabeli dengan label sisi terbesar dan sisi dengan  $w$  terbesar dilabeli dengan label sisi terkecil. Melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika, maka dapat ditentukan fungsi bijektifnya. Dari uraian di atas dapat diturunkan teorema 4.5.1:

◇ **Teorema 4.5.1** *Ada pelabelan total super  $(12n, 0)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik graf Tangga Permata  $Dl_n$  dengan  $\alpha_2(x_i) = \alpha_1(x_i)$ ,  $\alpha_2(y_i) = \alpha_1(y_i)$  dan  $\alpha_2(z_j) = \alpha_1(z_j)$ , definisikan label sisi  $\alpha_2 : E(Dl_n) \rightarrow \{4n + 1, 4n + 2, \dots, 12n - 3\}$ , maka label sisi  $\alpha_2$  untuk pelabelan total super  $(a, 0)$ -sisi antimagic pada graf  $Dl_n$  dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_2(x_i x_{i+1}) &= 12n - 8i, & \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_2(y_i y_{i+1}) &= 12n - 8i - 2, & \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_2(x_i y_i) &= 12n - 8i + 3, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_2(z_j z_{j+1}) &= 12n - 4j - 1, & \text{jika } 2 \leq j \leq 2n - 2 \text{ genap} \\ \alpha_2(x_i z_{2i-1}) &= 12n - 8i + 5, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_2(x_i z_{2i}) &= 12n - 8i + 2, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_2(y_i z_{2i-1}) &= 12n - 8i + 4, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_2(y_i z_{2i}) &= 12n - 8i + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Jika  $W_{\alpha_2}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total  $\alpha_2(x_i)$ ,  $\alpha_2(y_i)$ ,  $\alpha_2(z_j)$ ,  $\alpha_2(x_i x_{i+1})$ ,  $\alpha_2(y_i y_{i+1})$ ,  $\alpha_2(x_i y_i)$ ,  $\alpha_2(z_j z_{j+1})$ ,  $\alpha_2(x_i z_{2i-1})$ ,  $\alpha_2(x_i z_{2i})$ ,  $\alpha_2(y_i z_{2i-1})$  dan  $\alpha_2(y_i z_{2i})$  maka  $W_{\alpha_2}$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL  $w_{\alpha_1} = w_{\alpha_2}$  dan rumus label sisi  $\alpha_2$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang

bersesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^1 &= \{w_{\alpha_2}^1 + \alpha_2(x_i x_{i+1}); \text{jika } 1 \leq i \leq n-1\} \\ &= (8i) + (12n - 8i) \\ &= 12n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^2 &= \{w_{\alpha_2}^2 + \alpha_2(y_i y_{i+1}); \text{jika } 1 \leq i \leq n-1\} \\ &= (8i + 2) + (12n - 8i - 2) \\ &= 12n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^3 &= \{w_{\alpha_2}^3 + \alpha_2(x_i y_i); \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\ &= (8i - 3) + (12n - 8i + 3) \\ &= 12n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^4 &= \{w_{\alpha_2}^4 + \alpha_2(z_j z_{j+1}); \text{jika } 2 \leq j \leq 2n-2 \text{ genap}\} \\ &= (4j + 1) + (12n - 4j - 1) \\ &= 12n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^5 &= \{w_{\alpha_2}^5 + \alpha_2(x_i z_{2i-1}); \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\ &= (8i - 5) + (12n - 8i + 5) \\ &= 12n \end{aligned}$$

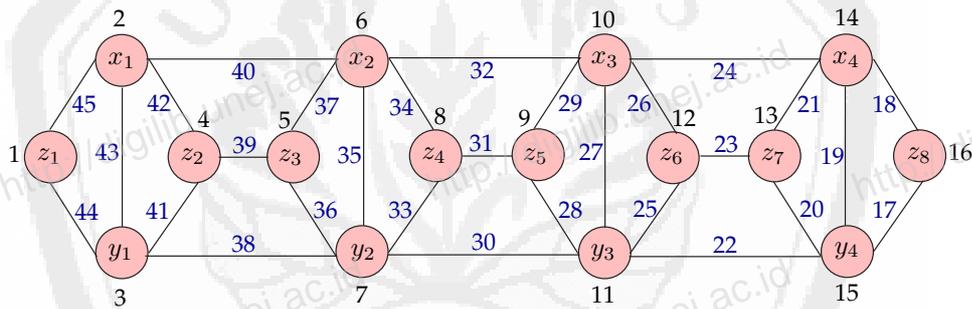
$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^6 &= \{w_{\alpha_2}^6 + \alpha_2(x_i z_{2i}); \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\ &= (8i - 2) + (12n - 8i + 2) \\ &= 12n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^7 &= \{w_{\alpha_2}^7 + \alpha_2(y_i z_{2i-1}); \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\ &= (8i - 4) + (12n - 8i + 4) \\ &= 12n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_2}^8 &= \{w_{\alpha_2}^8 + \alpha_2(y_i z_{2i}); \text{jika } 1 \leq i \leq n\} \\
 &= (8i - 1) + (12n - 8i + 1) \\
 &= 12n
 \end{aligned}$$

Tampak bahwa  $W_{\alpha_2}^1 = W_{\alpha_2}^2 = \dots = W_{\alpha_2}^8 = 12n$ . Atau dapat dituliskan sebagai berikut:  $\bigcup_{t=1}^8 W_{\alpha_2}^t = \{12n, 12n, \dots, 12n\}$ . Dapat disimpulkan bahwa graf Tangga Permata  $Dl_n$  dengan  $n \geq 2$ , mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan  $a = 12n$  dan  $d = 0$ , atau graf Tangga Permata  $Dl_n$  mempunyai Pelabelan Total Super  $(12n, 0)$ -sisi antimagic jika  $n \geq 2$ .  $\square$

Angka 1, 2, ..., 8 pada  $W_{\alpha_2}^1, W_{\alpha_2}^2, \dots, W_{\alpha_2}^8$  bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan  $W_{\alpha_2}$  yang mempunyai syarat batas  $i$ , dan  $k$  yang berbeda-beda. Gambar 4.3 merupakan contoh pelabelan total super  $(48, 0)$ -sisi antimagic (*SEATL*) pada graf Tangga Permata  $Dl_4$ .



Gambar 4.3: SEATL graf  $Dl (Dl_4)$  dengan  $d = 0$

Berdasarkan Lemma 4.5.1 maka diperoleh pelabelan titik  $(3, 1)$ -sisi antimagic dan dapat ditentukan pelabelan total super  $(a, 2)$ -sisi antimagic dengan menentukan label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL  $w$  dengan urutan yang sama. Sehingga sisi dengan  $w$  terkecil dilabeli dengan label sisi terkecil dan sisi dengan  $w$  terbesar dilabeli dengan label sisi terbesar, dimana  $E(Dl_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}; j \text{ genap}, 2 \leq j \leq 2n - 2\} \cup \{x_i z_{2i-1}, x_i z_{2i}, y_i z_{2i-1}, y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ . Melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika, maka dapat ditentukan fungsi bijek-

tifnya. Dari uraian di atas dapat diturunkan teorema 4.5.2:

◇ **Teorema 4.5.2** *Ada pelabelan total super  $(4n+4, 2)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik graf Tangga Permata  $Dl_n$  dengan  $\alpha_3(x_i) = \alpha_1(x_i)$ ,  $\alpha_3(y_i) = \alpha_1(y_i)$  dan  $\alpha_3(z_j) = \alpha_1(z_j)$ , definisikan label sisi  $\alpha_3 : E(Dl_n) \rightarrow \{4n + 1, 4n + 2, \dots, 12n - 3\}$ , maka label sisi  $\alpha_3$  untuk pelabelan total super  $(a, 2)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha_3(x_i x_{i+1}) &= 4n + 8i - 2, & \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_3(y_i y_{i+1}) &= 4n + 8i, & \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_3(x_i y_i) &= 4n + 8i - 5, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_3(z_j z_{j+1}) &= 4n + 4j - 1, & \text{jika } 2 \leq j \leq 2n - 2 \text{ genap} \\ \alpha_3(x_i z_{2i-1}) &= 4n + 8i - 7, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_3(x_i z_{2i}) &= 4n + 8i - 4, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_3(y_i z_{2i-1}) &= 4n + 8i - 6, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_3(y_i z_{2i}) &= 4n + 8i - 3, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Jika  $W_{\alpha_3}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total  $\alpha_3(x_i)$ ,  $\alpha_3(y_i)$ ,  $\alpha_3(z_j)$ ,  $\alpha_3(x_i x_{i+1})$ ,  $\alpha_3(y_i y_{i+1})$ ,  $\alpha_3(x_i y_i)$ ,  $\alpha_3(z_j z_{j+1})$ ,  $\alpha_3(x_i z_{2i-1})$ ,  $\alpha_3(x_i z_{2i})$ ,  $\alpha_3(y_i z_{2i-1})$  dan  $\alpha_3(y_i z_{2i})$  maka  $W_{\alpha_3}$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL  $w_{\alpha_1} = w_{\alpha_3}$  dan rumus label sisi  $\alpha_3$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_3}^1 &= \{w_{\alpha_3}^1 + \alpha_3(x_i x_{i+1}); \text{ jika } 1 \leq i \leq n - 1\} \\ &= (8i) + (4n + 8i - 2) \\ &= 4n + 16i - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}^2 &= \{w_{\alpha_3}^2 + \alpha_3(y_i y_{i+1}); \text{ jika } 1 \leq i \leq n-1\} \\
 &= (8i+2) + (4n+8i) \\
 &= 4n+16i+2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}^3 &= \{w_{\alpha_3}^3 + \alpha_3(x_i y_i); \text{ jika } 1 \leq i \leq n\} \\
 &= (8i-3) + (4n+8i-5) \\
 &= 4n+16i-8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}^4 &= \{w_{\alpha_3}^4 + \alpha_3(z_j z_{j+1}); \text{ jika } 2 \leq j \leq 2n-2 \text{ genap}\} \\
 &= (4j+1) + (4n+4j-1) \\
 &= 4n+8j
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}^5 &= \{w_{\alpha_3}^5 + \alpha_3(x_i z_{2i-1}); \text{ jika } 1 \leq i \leq n\} \\
 &= (8i-5) + (4n+8i-7) \\
 &= 4n+16i-12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}^6 &= \{w_{\alpha_3}^6 + \alpha_3(x_i z_{2i}); \text{ jika } 1 \leq i \leq n\} \\
 &= (8i-2) + (4n+8i-4) \\
 &= 4n+16i-6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}^7 &= \{w_{\alpha_3}^7 + \alpha_3(y_i z_{2i-1}); \text{ jika } 1 \leq i \leq n\} \\
 &= (8i-4) + (4n+8i-6) \\
 &= 4n+16i-10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_3}^8 &= \{w_{\alpha_3}^8 + \alpha_3(y_i z_{2i}); \text{ jika } 1 \leq i \leq n\} \\
 &= (8i-1) + (4n+8i-3) \\
 &= 4n+16i-4
 \end{aligned}$$

Perhatikan Himpunan bobot sisi  $W_{\alpha_3} = \{W_{\alpha_3}^1, W_{\alpha_3}^2, W_{\alpha_3}^3, \dots, W_{\alpha_3}^8\}$ . Tampak bahwa bobot sisi terkecil terletak pada  $W_{\alpha_3}^5$  dan bobot sisi terbesar terletak pada  $W_{\alpha_3}^8$ . Dengan mensubstitusikan nilai  $i = 1$  pada  $W_{\alpha_3}^5$  diperoleh

$W_{\alpha_3} = 4n + 4$ , substitusi  $i = 2$  pada  $W_{\alpha_3}^5$  diperoleh  $W_{\alpha_3} = 4n + 6, \dots$ , substitusi  $i = n$  pada  $W_{\alpha_3}^8$  diperoleh  $W_{\alpha_3} = 20n - 4$ . Dapat dinyatakan bahwa  $W_{\alpha_3}$  membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $4n+4$  dan beda 2 (dua), atau dapat dituliskan  $\bigcup_{t=1}^8 W_{\alpha_3}^t = \{4n + 4, 4n + 6, 4n + 8 \dots, 20n - 4\}$ . Dapat disimpulkan bahwa graf Tangga Permata  $Dl_n$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan  $a = 4n + 4$  dan  $d = 2$  atau graf Tangga Permata  $Dl_n$  mempunyai Super  $(4n + 4, 2)$ -EAT;  $n \geq 2$ . Sehingga terbukti bahwa pelabelan total  $\alpha_3(x_i), \alpha_3(y_i), \alpha_3(z_j), \alpha_3(x_i x_{i+1}), \alpha_3(y_i y_{i+1}), \alpha_3(x_i y_i), \alpha_3(z_j z_{j+1}), \alpha_3(x_i z_{2i-1}), \alpha_3(x_i z_{2i}), \alpha_3(y_i z_{2i-1})$  dan  $\alpha_3(y_i z_{2i})$  adalah pelabelan total super  $(a, 2)$ -sisi antimagic jika  $n \geq 2$ .  $\square$

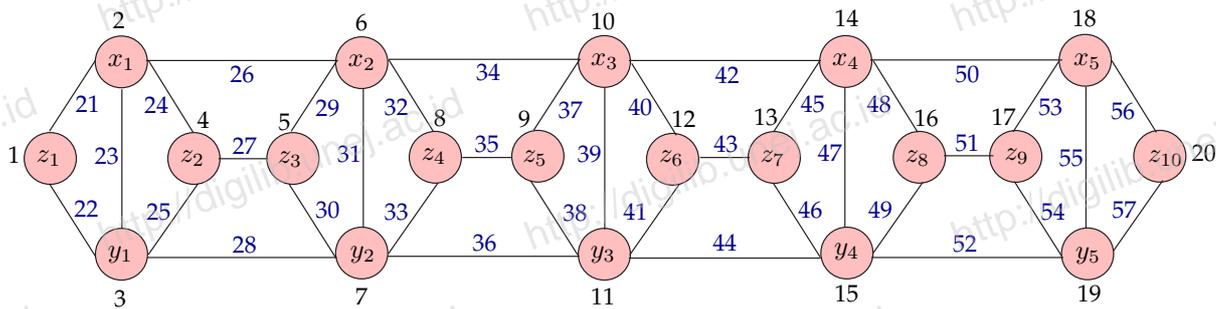
Angka  $1, 2, \dots, 8$  pada  $W_{\alpha_3}^1, W_{\alpha_3}^2, \dots, W_{\alpha_3}^8$  bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan  $W_{\alpha_3}$  yang mempunyai syarat batas  $i$  dan  $j$  yang berbeda-beda.

Jika  $\alpha_3(z)$  adalah label sisi  $Dl_n$  untuk  $d = 2$  dan  $\alpha_2(z)$  adalah label sisi  $Dl_n$  untuk  $d = 0$  maka berdasarkan urutan peletakkan label sisi yang ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL  $w$  dapat dirumuskan label sisi  $Dl_n$  untuk  $d = 2$ , yaitu:

$$\begin{aligned} \alpha_3(z) &= 2p + q + 1 - \alpha_2(z) \\ &= 2(4n) + (8n - 3) + 1 - \alpha_2(z) \\ &= 16n - 2 - \alpha_2(z) \end{aligned}$$

Gambar 4.4 merupakan contoh pelabelan total super  $(24, 2)$ -sisi antimagic (*SEATL*) pada graf Tangga Permata  $Dl_5$ .

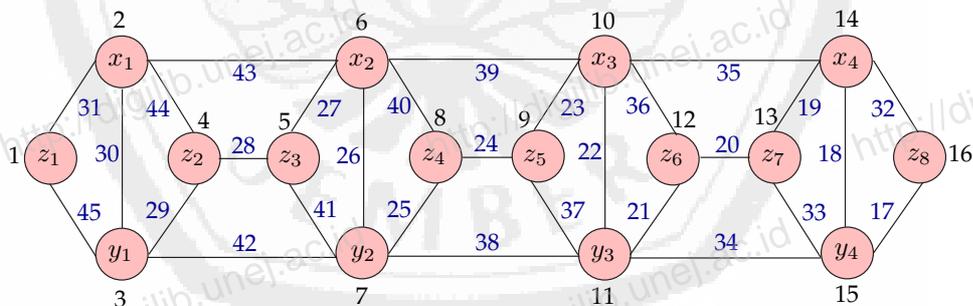
Untuk pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  dengan  $d = 1$ , penulis akan membuktikannya melalui sebuah teorema yang dikembangkan dari Lemma 2.6.2 yang telah dibuktikan pada bab 2. Berdasarkan lemma yang telah ditemukan tersebut, maka penulis mengembangkan lemma tersebut menjadi sebuah teorema baru untuk menentukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf  $Dl_n$  dengan  $d = 1$ .



Gambar 4.4: SEATL graf  $D_l (D_{l_5})$  dengan  $d = 2$

◇ **Teorema 4.5.3** Suatu graf  $D_l$  mempunyai pelabelan total super  $(8n + 2, 1)$ -sisi antimagic untuk  $n \geq 2$ .

**Bukti.** Sebagaimana tercantum dalam Lemma 2.6.2, untuk  $n \geq 2$ , pelabelan titik  $\alpha_1$  pada graf  $D_l$  dari Lemma 4.5.1 adalah pelabelan  $(3, 1)$ -EAV. Misal barisannya adalah  $\mathfrak{A} = \{c, c + 1, c + 2, \dots, c + k\}$  membentuk himpunan bobot sisi dari pelabelan titik  $\alpha_1$  untuk  $c = 3$  dan  $k = 8n - 4$ . Pada Lemma 2.6.1,  $\Pi(\mathfrak{A})$  dari anggotanya  $\mathfrak{A}$  antara lain  $\mathfrak{A} + [\Pi(\mathfrak{A}) - c + \frac{8n+2}{2}] = \{c + \frac{16n-2}{2}, c + \frac{16n-2}{2} + 1, \dots, c + \frac{32n-10}{2}\}$ . Jika  $[\Pi(\mathfrak{A}) - c + \frac{8n+2}{2}]$  adalah label sisi dari  $D_l$  maka  $\mathfrak{A} + [\Pi(\mathfrak{A}) - c + \frac{8n+2}{2}]$  membentuk himpunan bobot sisi dari  $D_l$ , yang mana hasil pelabelan total super  $(8n + 2, 1)$ -EAT. □



Gambar 4.5: Pelabelan total super  $(34, 1)$ -sisi antimagic (SEATL) pada  $D_4$

#### 4.6 Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi Antimagic pada Gabungan Graf Tangga Permata $(mDl_n)$

Metode dalam menemukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf  $Dl_n$  terdiri dari beberapa langkah yang diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas  $i, j$  dan  $k$  yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Setelah fungsi bijektif diketahui maka harus dibuktikan secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari lemma atau teorema. Perlu diketahui bahwa lemma dan teorema dalam penelitian ini adalah bukan lemma atau teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Dari hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa lemma, teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Setelah mengetahui batas atas nilai  $d$ , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan terlebih dahulu menentukan pelabelan titik  $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dimana  $V(mD_n) = \{x_i^k, y_i^k, z_j^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n, 1 \leq k \leq m\}$  sekaligus menentukan fungsi bijektifnya melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika. Lemma 4.6.1 adalah lemma yang berkaitan dengan pelabelan titik  $(a, 1)$ -sisi Antimagic Gabungan Graf Tangga Permata  $mDl_n$ .

◇ **Lemma 4.6.1** *Ada pelabelan titik  $(\frac{3m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan Graf Tangga Permata  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dengan fungsi bijektif  $\alpha_4$ , untuk  $1 \leq k \leq m$ , definisikan pelabelan  $\alpha_4 : V(mDl_n) \rightarrow \{1, 2, -$

$\dots, 4nm\}$  maka pelabelan  $\alpha_4$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\alpha_4(x_i^k) = \begin{cases} \frac{(8i-5)m+k}{2}; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8i-6)m+k}{2}; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8i-4)m-2k+2}{2}; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(8i-6)m+k+1}{2}; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8i-5)m+k+1}{2}; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_4(y_i^k) = \begin{cases} \frac{(8i-2)m-2k+2}{2}; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(8i-4)m+k+1}{2}; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8i-3)m+k+1}{2}; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8i-3)m+k}{2}; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8i-4)m+k}{2}; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_4(z_j^k) = \begin{cases} \frac{(4j-4)m+k+1}{2}; & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(4j-3)m+k+1}{2}; & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4j-2)m+k+1}{2}; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(4j-1)m+k+1}{2}; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4j-3)m+k}{2}; & \text{jika } j \equiv 3(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(4j-4)m+k}{2}; & \text{jika } j \equiv 3(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4j-1)m+k}{2}; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(4j-2)m+k}{2}; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4j-2)m-2k+2}{2}; & \text{jika } j \equiv 5(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{4jm-2k+2}{2}; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{cases}$$

Fungsi bijektif pada  $\alpha_4(x_i^k)$ ,  $\alpha_4(y_i^k)$  dan  $\alpha_4(z_j^k)$  dapat direduksi sebagai berikut:

$$\alpha_4(x_i^k) = \begin{cases} \frac{(8i-5)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(8i-4)m-2k+2}{2}; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(8i-5)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{cases}$$

$$\alpha_4(y_i^k) = \begin{cases} \frac{(8i-2)m-2k+2}{2}; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(8i-3)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(8i-3)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{cases}$$

$$\alpha_4(z_j^k) = \begin{cases} \frac{(4j-3)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m; & \text{jika } j \equiv 1(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4j-1)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4j-3)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m; & \text{jika } j \equiv 3(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4j-1)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4j-2)m-2k+2}{2}; & \text{jika } j \equiv 5(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{4jm-2k+2}{2}; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{cases}$$

Dari persamaan di atas, dapat dipahami bahwa  $\alpha_4(x_i^k)$ ,  $\alpha_4(y_i^k)$  dan  $\alpha_4(z_j^k)$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $mDl_n$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, 4nm\}$ . Jika  $w_{\alpha_4}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan titik  $\alpha_4$  dimana bobot sisi pelabelan titik diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang bersisian, maka fungsi bijektif  $w_{\alpha_4}$  dapat ditentukan melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika sebagai berikut:

Bobot pada sisi  $x_i^k x_{i+1}^k$

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^1(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{15m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^2(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{14m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^3(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{30m-k+3}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^4(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{31m-k+3}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^5(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{45m+2k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $y_i^k y_{i+1}^k$

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^6(y_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{18m-k+3}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^7(y_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{19m-k+3}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^8(y_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{33m+2k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ w_{\alpha_4}^9(y_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{51m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{10}(y_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{50m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $x_i^k y_i^k$

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{11}(x_i^k y_i^k) &= \frac{9m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{12}(x_i^k y_i^k) &= \frac{8m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^{13}(x_i^k y_i^k) &= \frac{24m-k+3}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{14}(x_i^k y_i^k) &= \frac{25m-k+3}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^{15}(x_i^k y_i^k) &= \frac{39m+2k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $z_j^k z_{j+1}^k$

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{16}(z_j^k z_{j+1}^k) &= \frac{15m+2k+1}{2} + (j-2)4m; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ w_{\alpha_4}^{17}(z_j^k z_{j+1}^k) &= \frac{33m-k+2}{2} + (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{18}(z_j^k z_{j+1}^k) &= \frac{32m-k+2}{2} + (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^{19}(z_j^k z_{j+1}^k) &= \frac{48m-k+3}{2} + (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{20}(z_j^k z_{j+1}^k) &= \frac{49m-k+3}{2} + (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $x_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{21}(x_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{3m+2k+1}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ w_{\alpha_4}^{22}(x_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{21m-k+2}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{23}(x_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{20m-k+2}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^{24}(x_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{36m-k+3}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{25}(x_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{37m-k+3}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $x_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{26}(x_i^k z_{2i}^k) &= \frac{9m+2k+1}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ w_{\alpha_4}^{27}(x_i^k z_{2i}^k) &= \frac{27m-k+2}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{28}(x_i^k z_{2i}^k) &= \frac{26m-k+2}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^{29}(x_i^k z_{2i}^k) &= \frac{42m-k+3}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{30}(x_i^k z_{2i}^k) &= \frac{43m-k+3}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $y_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{31}(y_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{6m-k+3}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{32}(y_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{7m-k+3}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^{33}(y_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{21m+2k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ w_{\alpha_4}^{34}(y_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{39m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{35}(y_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{38m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $y_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{36}(y_i^k z_{2i}^k) &= \frac{12m-k+3}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{37}(y_i^k z_{2i}^k) &= \frac{13m-k+3}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ w_{\alpha_4}^{38}(y_i^k z_{2i}^k) &= \frac{27m+2k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ w_{\alpha_4}^{39}(y_i^k z_{2i}^k) &= \frac{45m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_4}^{40}(y_i^k z_{2i}^k) &= \frac{44m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{aligned}$$

Fungsi bijektif pada  $w_{\alpha_4}$  dapat direduksi sebagai berikut:

Bobot pada sisi  $x_i^k x_{i+1}^k$  untuk  $k$  sembarang

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^1(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{14m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^2(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{30m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^3(x_i^k x_{i+1}^k) &= \frac{45m+2k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $y_i^k y_{i+1}^k$  untuk  $k$  sembarang

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^4(y_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{18m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^5(y_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{33m+2k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^6(y_i^k y_{i+1}^k) &= \frac{50m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $x_i^k y_i^k$  untuk  $k$  sembarang

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^7(x_i^k y_i^k) &= \frac{8m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^8(x_i^k y_i^k) &= \frac{24m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^9(x_i^k y_i^k) &= \frac{39m+2k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $z_j^k z_{j+1}^k$  untuk  $k$  sembarang

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{10}(z_j^k z_{j+1}^k) &= \frac{15m+2k+1}{2} + (j-2)4m; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \\ w_{\alpha_4}^{11}(z_j^k z_{j+1}^k) &= \frac{32m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \\ w_{\alpha_4}^{12}(z_j^k z_{j+1}^k) &= \frac{48m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{4}\right)m + (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $x_i^k z_{2i-1}^k$  untuk  $k$  sembarang

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{13}(x_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{3m+2k+1}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^{14}(x_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{20m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^{15}(x_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{36m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $x_i^k z_{2i}^k$  untuk  $k$  sembarang

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{16}(x_i^k z_{2i}^k) &= \frac{9m+2k+1}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^{17}(x_i^k z_{2i}^k) &= \frac{26m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^{18}(x_i^k z_{2i}^k) &= \frac{42m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $y_i^k z_{2i-1}^k$  untuk  $k$  sembarang

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{19}(y_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{6m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^{20}(y_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{21m+2k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^{21}(y_i^k z_{2i-1}^k) &= \frac{38m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{aligned}$$

Bobot pada sisi  $y_i^k z_{2i}^k$  untuk  $k$  sembarang

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^{22}(y_i^k z_{2i}^k) &= \frac{12m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^{23}(y_i^k z_{2i}^k) &= \frac{27m+2k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ w_{\alpha_4}^{24}(y_i^k z_{2i}^k) &= \frac{44m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot sisi EAV ini, bobot sisi terkecil pertama, kedua sampai terkecil kelima terletak pada  $w_{\alpha_4}^{21}$  yaitu  $\frac{3m+2k+1}{2} + (i-1)8m$ , selanjutnya terletak pada  $w_{\alpha_4}^{31}$  yaitu  $\frac{6m-k+3}{2} + (i-1)8m$ . Bobot sisi terbesar terletak pada  $w_{\alpha_4}^{39}$  yaitu  $\frac{45m-k+2}{2} + (i-3)8m$ . Dengan mensubstitusikan nilai  $i = 1$  dan  $k = 1$  pada  $w_{\alpha_4}^{21}$  diperoleh  $w_{\alpha_4} = \frac{3m+2(1)+1}{2} + (1-1)8m = \frac{3m+3}{2}$ , substitusi  $i = 1$  dan  $k = 2$  pada  $w_{\alpha_4}^{21}$  diperoleh  $w_{\alpha_4} = \frac{3m+2(2)+1}{2} + (1-1)8m = \frac{3m+5}{2}$ , substitusi  $i = 1$  dan  $k = 3$  pada  $w_{\alpha_4}^{21}$  diperoleh  $w_{\alpha_4} = \frac{3m+2(3)+1}{2} + (1-1)8m =$



Berdasarkan Lemma 4.6.1 maka diperoleh pelabelan titik  $(\frac{3m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic dan dapat ditentukan pelabelan total super  $(a, 0)$ -sisi antimagic dengan menentukan label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL  $w$  dengan urutan yang berkebalikan. Sehingga sisi dengan  $w$  terkecil dilabeli dengan label sisi terbesar dan sisi dengan  $w$  terbesar dilabeli dengan label sisi terkecil, dimana  $E(mDl_n) = \{x_i^k x_{i+1}^k, y_i^k y_{i+1}^k; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i^k y_i^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{z_j^k z_{j+1}^k; 2 \leq j \leq 2n-2 \text{ genap}, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i^k z_{2i-1}^k, x_i^k z_{2i}^k, y_i^k z_{2i-1}^k, y_i^k z_{2i}^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\}$ . Melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika, maka dapat ditentukan fungsi bijektifnya. Dari uraian di atas dapat diturunkan teorema 4.6.1:

◇ **Teorema 4.6.1** *Ada pelabelan total super  $(\frac{(8n-1)3m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dengan  $\alpha_5(x_i^k) = \alpha_4(x_i^k)$ ,  $\alpha_5(y_i^k) = \alpha_4(y_i^k)$  dan  $\alpha_5(z_j^k) = \alpha_4(z_j^k)$ , untuk  $1 \leq k \leq m$ , definisikan label sisi  $\alpha_5 : E(mDl_n) \rightarrow \{4nm + 1, 4nm + 2, \dots, 12nm - 3m\}$ , maka label sisi  $\alpha_5$  untuk pelabelan total super  $(a, 0)$ -sisi antimagic pada graf  $mDl_n$  dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{(4n-3)6m+k+1}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3} \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(24n-17)m+k+1}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3} \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8n-11)3m+k}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3} \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(12n-17)2m+k}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3} \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(n-2)24m-2k+2}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3 \pmod{3} \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{cases}$$

$$\alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n-7)3m+k}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(12n-11)2m+k}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(2n-3)12m-2k+2}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(12n-27)2m+k+1}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(24n-53)m+k+1}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_5(x_i^k y_i^k) = \begin{cases} \frac{(2n-1)12m+k+1}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(24n-11)m+k+1}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(24n-27)m+k}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(6n-7)4m+k}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4n-7)6m-2k+2}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{cases}$$

$$\alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k) = \begin{cases} \frac{(4n-3)6m-2k+2}{2} - (j-2)4m; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(2n-3)12m+k+1}{2} - (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(24n-35)m+k+1}{2} - (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(24n-51)m+k}{2} - (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(6n-13)4m+k}{2} - (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k) = \begin{cases} \frac{(12n-3)2m-2k+2}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(n-1)24m+k+1}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(24n-23)m+k+1}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8n-13)3m+k}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(3n-5)8m+k}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_5(x_i^k z_{2i}^k) = \begin{cases} \frac{(2n-1)12m-2k+2}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4n-5)6m+k+1}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(24n-29)m+k+1}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(24n-45)m+k}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(12n-23)2m+k}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n-3)3m+k}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(12n-5)2m+k}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(n-1)24m-2k+2}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4n-7)6m+k+1}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(24n-41)m+k+1}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_5(y_i^k z_{2i}^k) = \begin{cases} \frac{(8n-5)3m+k}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(3n-2)8m+k}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4n-5)6m-2k+2}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(n-2)24m+k+1}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(24n-47)m+k+1}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

Fungsi bijektif pada  $\alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k)$ ,  $\alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k)$ ,  $\alpha_5(x_i^k y_i^k)$ ,  $\alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k)$ ,  $\alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k)$ ,  $\alpha_5(x_i^k z_{2i}^k)$ ,  $\alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k)$  dan  $\alpha_5(y_i^k z_{2i}^k)$  dapat direduksi sebagai berikut:(untuk  $k$  sembarang)

$$\alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{(24n-17)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(8n-11)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(n-2)24m-2k+2}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$\alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n-7)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(2n-3)12m-2k+2}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(24n-53)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$\alpha_5(x_i^k y_i^k) = \begin{cases} \frac{(24n-11)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(24n-27)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(4n-7)6m-2k+2}{2} - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$\alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k) = \begin{cases} \frac{(4n-3)6m-2k+2}{2} - (j-2)4m; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \\ \frac{(24n-35)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m - (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \\ \frac{(24n-51)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m - (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \end{cases}$$

$$\alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k) = \begin{cases} \frac{(12n-3)2m-2k+2}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(24n-23)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(8n-13)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$\alpha_5(x_i^k z_{2i}^k) = \begin{cases} \frac{(2n-1)12m-2k+2}{2} - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(24n-29)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(24n-45)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$\alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n-3)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(n-1)24m-2k+2}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(24n-41)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$\alpha_5(y_i^k z_{2i}^k) = \begin{cases} \frac{(8n-5)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m - (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(4n-5)6m-2k+2}{2} - (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(24n-47)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m - (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

Jika  $W_{\alpha_5}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total  $\alpha_5(x_i^k), \alpha_5(y_i^k), \alpha_5(z_j^k), \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k), \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k), \alpha_5(x_i^k y_i^k), \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k), \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k), \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k), \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k)$  dan  $\alpha_5(y_i^k z_{2i}^k)$  maka  $W_{\alpha_5}$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL  $w_{\alpha_4} = w_{\alpha_5}$  dan rumus label sisi  $\alpha_5$  dengan syarat batas  $i, j$ , dan  $k$  yang bersesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

Untuk sisi  $x_i^k x_{i+1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5}^1 &= \{w_{\alpha_5}^1 + \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{15m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(4n-3)6m+k+1}{2} - (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n-1)3m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_5}^2 &= \{w_{\alpha_5}^2 + \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{14m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(24n-17)m+k+1}{2} - (i-1)8m\right) \\
 &= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_5}^3 &= \{w_{\alpha_5}^3 + \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{30m-k+3}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n-11)3m+k}{2} - (i-2)8m\right) \\
 &= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_5}^4 &= \{w_{\alpha_5}^4 + \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{31m-k+3}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(12n-17)2m+k}{2} - (i-2)8m\right) \\
 &= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_5}^5 &= \{w_{\alpha_5}^5 + \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
 &= \left(\frac{45m+2k+1}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(n-2)24m-2k+2}{2} - (i-3)8m\right) \\
 &= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
 \end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k y_{i+1}^k$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_5}^6 &= \{w_{\alpha_5}^6 + \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
 &= \left(\frac{18m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n-7)3m+k}{2} - (i-1)8m\right) \\
 &= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_5}^7 &= \{w_{\alpha_5}^7 + \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
 &= \left(\frac{19m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(12n-11)2m+k}{2} - (i-1)8m\right) \\
 &= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\alpha_5}^8 &= \{w_{\alpha_5}^8 + \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
 &= \left(\frac{33m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(2n-3)12m-2k+2}{2} - (i-2)8m\right) \\
 &= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^9 &= \{w_{\alpha_5}^9 + \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{51m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(12n-27)2m+k+1}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{10} &= \{w_{\alpha_5}^{10} + \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{50m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(24n-53)m+k+1}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k y_i^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{11} &= \{w_{\alpha_5}^{11} + \alpha_5(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{9m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(2n-1)12m+k+1}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{12} &= \{w_{\alpha_5}^{12} + \alpha_5(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{8m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(24n-11)m+k+1}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{13} &= \{w_{\alpha_5}^{13} + \alpha_5(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{24m-k+3}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(24n-27)m+k}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{14} &= \{w_{\alpha_5}^{14} + \alpha_5(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{25m-k+3}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(6n-7)4m+k}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{15} &= \{w_{\alpha_5}^{15} + \alpha_5(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{39m+2k+1}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(4n-7)6m-2k+2}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $z_j^k z_{j+1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5}^{16} &= \{w_{\alpha_5}^{16} + \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{15m+2k+1}{2} + (j-2)4m\right) + \left(\frac{(4n-3)6m-2k+2}{2} - (j-2)4m\right) \\ &= \frac{(8n-1)3m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5}^{17} &= \{w_{\alpha_5}^{17} + \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{33m-k+2}{2} + (j-4)4m\right) + \left(\frac{(2n-3)12m+k+1}{2} - (j-4)4m\right) \\ &= \frac{(8n-1)3m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5}^{18} &= \{w_{\alpha_5}^{18} + \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{32m-k+2}{2} + (j-4)4m\right) + \left(\frac{(24n-35)m+k+1}{2} - (j-4)4m\right) \\ &= \frac{(8n-1)3m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5}^{19} &= \{w_{\alpha_5}^{19} + \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{48m-k+3}{2} + (j-6)4m\right) + \left(\frac{(24n-51)m+k}{2} - (j-6)4m\right) \\ &= \frac{(8n-1)3m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5}^{20} &= \{w_{\alpha_5}^{20} + \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{49m-k+3}{2} + (j-6)4m\right) + \left(\frac{(6n-13)4m+k}{2} - (j-6)4m\right) \\ &= \frac{(8n-1)3m+3}{2} \end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5}^{21} &= \{w_{\alpha_5}^{21} + \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{3m+2k+1}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(12n-3)2m-2k+2}{2} - (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n-1)3m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_5}^{22} &= \{w_{\alpha_5}^{22} + \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{21m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(n-1)24m+k+1}{2} - (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n-1)3m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{23} &= \{w_{\alpha_5}^{23} + \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{20m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(24n-23)m+k+1}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{24} &= \{w_{\alpha_5}^{24} + \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{36m-k+3}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n-13)3m+k}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{25} &= \{w_{\alpha_5}^{25} + \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{37m-k+3}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(3n-5)8m+k}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{26} &= \{w_{\alpha_5}^{26} + \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{9m+2k+1}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(2n-1)12m-2k+2}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{27} &= \{w_{\alpha_5}^{27} + \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{27m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n-5)6m+k+1}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{28} &= \{w_{\alpha_5}^{28} + \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{26m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(24n-29)m+k+1}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{29} &= \{w_{\alpha_5}^{29} + \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{42m-k+3}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(24n-45)m+k}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{30} &= \{w_{\alpha_5}^{30} + \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{43m-k+3}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(12n-23)2m+k}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{31} &= \{w_{\alpha_5}^{31} + \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{6m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n-3)3m+k}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{32} &= \{w_{\alpha_5}^{32} + \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{7m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(12n-5)2m+k}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{33} &= \{w_{\alpha_5}^{33} + \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{21m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(n-1)24m-2k+2}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{34} &= \{w_{\alpha_5}^{34} + \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{39m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(4n-7)6m+k+1}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{35} &= \{w_{\alpha_5}^{35} + \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{38m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(24n-41)m+k+1}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{36} &= \{w_{\alpha_5}^{36} + \alpha_5(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{12m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n-5)3m+k}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{37} &= \{w_{\alpha_5}^{37} + \alpha_5(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{13m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(3n-2)8m+k}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{38} &= \{w_{\alpha_5}^{38} + \alpha_5(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{27m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n-5)6m-2k+2}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{39} &= \{w_{\alpha_5}^{39} + \alpha_5(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{45m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(n-2)24m+k+1}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{40} &= \{w_{\alpha_5}^{40} + \alpha_5(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{44m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(24n-47)m+k+1}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Fungsi bijektif pada  $W_{\alpha_5}$  dapat direduksi sebagai berikut:

Untuk sisi  $x_i^k x_{i+1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^1 &= \{w_{\alpha_5}^1 + \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{14m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(24n-17)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-1)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^2 &= \{w_{\alpha_5}^2 + \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{30m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n-11)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-2)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^3 &= \{w_{\alpha_5}^3 + \alpha_5(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{45m+2k+1}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(n-2)24m-2k+2}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k y_{i+1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^4 &= \{w_{\alpha_5}^6 + \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{18m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n-7)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-1)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^5 &= \{w_{\alpha_5}^5 + \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{33m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(2n-3)12m-2k+2}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^6 &= \{w_{\alpha_5}^6 + \alpha_5(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{50m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(24n-53)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-3)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k y_i^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^7 &= \{w_{\alpha_5}^7 + \alpha_5(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{8m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(24n-11)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-1)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^8 &= \{w_{\alpha_5}^8 + \alpha_5(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{24m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(24n-27)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-2)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^9 &= \{w_{\alpha_5}^9 + \alpha_5(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{39m+2k+1}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(4n-7)6m-2k+2}{2} - (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $z_j^k z_{j+1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{10} &= \{w_{\alpha_5}^{10} + \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{15m+2k+1}{2} + (j-2)4m\right) + \left(\frac{(4n-3)6m-2k+2}{2} - (j-2)4m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{11} &= \{w_{\alpha_5}^{11} + \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{32m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (j-4)4m\right) + \left(\frac{(24n-35)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (j-4)4m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{12} &= \{w_{\alpha_5}^{12} + \alpha_5(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{48m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (j-6)4m\right) + \left(\frac{(24n-51)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (j-6)4m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{13} &= \{w_{\alpha_5}^{13} + \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{3m+2k+1}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(12n-3)2m-2k+2}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{14} &= \{w_{\alpha_5}^{14} + \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{20m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(24n-23)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-2)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{15} &= \{w_{\alpha_5}^{15} + \alpha_5(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{36m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n-13)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-3)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{16} &= \{w_{\alpha_5}^{16} + \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{9m+2k+1}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(2n-1)12m-2k+2}{2} - (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{17} &= \{w_{\alpha_5}^{17} + \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{26m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(24n-29)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-2)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{18} &= \{w_{\alpha_5}^{18} + \alpha_5(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{42m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(24n-45)m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-3)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{19} &= \{w_{\alpha_5}^{19} + \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{6m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n-3)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-1)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{20} &= \{w_{\alpha_5}^{20} + \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{21m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(n-1)24m-2k+2}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{21} &= \{w_{\alpha_5}^{21} + \alpha_5(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{38m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(24n-41)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-3)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{22} &= \{w_{\alpha_5}^{22} + \alpha_5(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{12m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n-5)3m+k}{2} - \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-1)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{23} &= \{w_{\alpha_5}^{23} + \alpha_5(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{27m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n-5)6m-2k+2}{2} - (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_5}^{24} &= \{w_{\alpha_5}^{24} + \alpha_5(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{44m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(24n-47)m+k+1}{2} - \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\
&\quad - (i-3)8m \\
&= \frac{(8n-1)3m+3}{2}
\end{aligned}$$

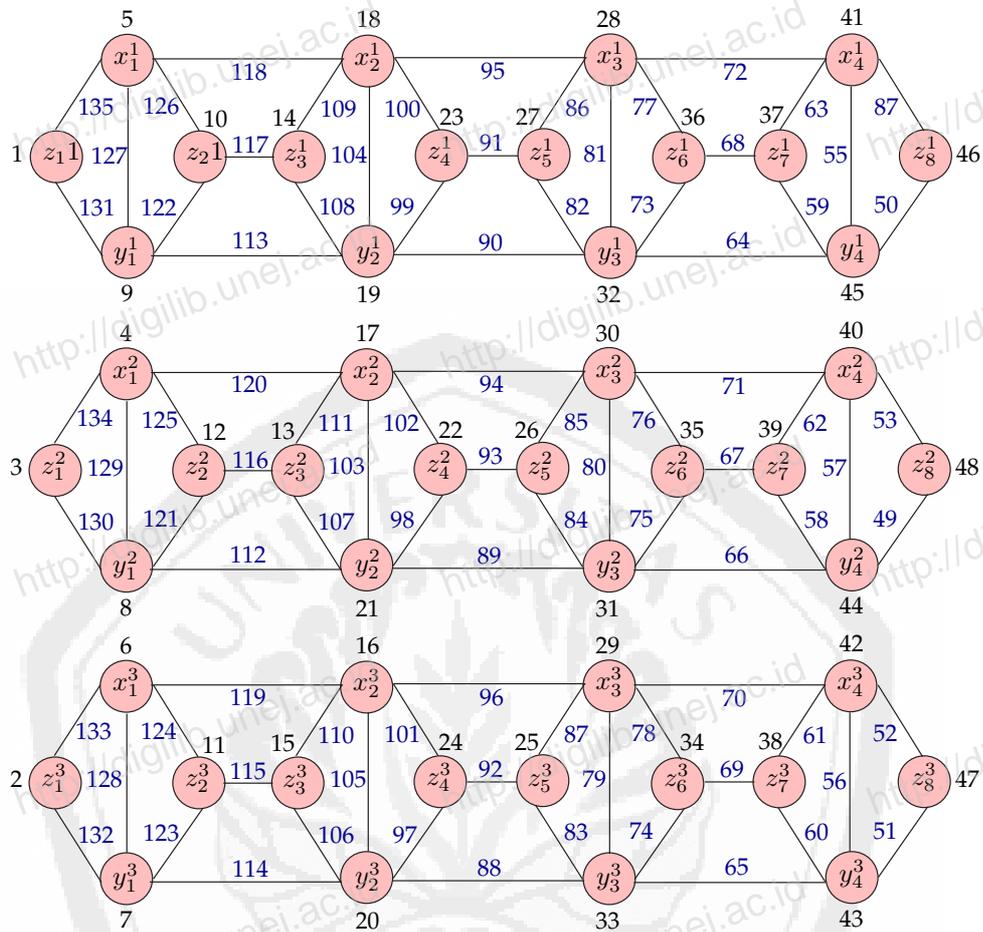
Tampak bahwa  $W_{\alpha_5}^1 = W_{\alpha_5}^2 = \dots = W_{\alpha_5}^{40} = \frac{(8n-1)3m+3}{2}$ . Atau dapat dituliskan sebagai berikut:  $\bigcup_{t=1}^{40} W_{\alpha_5}^t = \left\{\frac{(8n-1)3m+3}{2}, \frac{(8n-1)3m+3}{2}, \dots, \frac{(8n-1)3m+3}{2}\right\}$ .

Dapat disimpulkan bahwa gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dengan  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan  $a = \frac{(8n-1)3m+3}{2}$  dan  $d = 0$ , atau gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  mempunyai Super  $(\frac{(8n-1)3m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .

□

Angka 1, 2, ..., 40 pada  $W_{\alpha_5}^1, W_{\alpha_5}^2, \dots, W_{\alpha_5}^{40}$  bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan  $W_{\alpha_5}$  yang mempunyai syarat batas  $i, j$  dan  $k$

yang berbeda-beda. Gambar 4.7 merupakan contoh pelabelan total super  $(a, 0)$ -sisi antimagic ( $SEATL$ ) pada gabungan graf Tangga Permata  $3Dl_4$ .



Gambar 4.7: Pelabelan total super(141,0)-sisi antimagic pada  $3Dl_4$

Berdasarkan Lemma 4.6.1 maka diperoleh pelabelan titik  $(\frac{3m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic dan dapat ditentukan pelabelan total super  $(a, 2)$ -sisi antimagic dengan menentukan label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL  $w$  dengan urutan yang sama. Sehingga sisi dengan  $w$  terkecil dilabeli dengan label sisi terkecil dan sisi dengan  $w$  terbesar dilabeli dengan label sisi terbesar, dimana  $E(mDl_n) = \{x_i^k x_{i+1}^k, y_i^k y_{i+1}^k; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i^k y_i^k; 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m\} \cup \{z_j^k z_{j+1}^k; j \text{ genap}, 2 \leq j \leq 2n-2, 1 \leq k \leq m\} \cup \{x_i^k z_{2i-1}^k, x_i^k z_{2i}^k, y_i^k z_{2i-1}^k, y_i^k z_{2i}^k; 1 \leq$

$i \leq n, 1 \leq k \leq m$ . Melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika, maka dapat ditentukan fungsi bijektifnya. Dari uraian di atas dapat diturunkan teorema 4.6.2:

◇ **Teorema 4.6.2** *Ada pelabelan total super  $(\frac{(8n+3)m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dengan  $\alpha_6(x_i^k) = \alpha_4(x_i^k)$ ,  $\alpha_6(y_i^k) = \alpha_4(y_i^k)$  dan  $\alpha_6(z_j^k) = \alpha_4(z_j^k)$ , untuk  $1 \leq k \leq m$ , definisikan label sisi  $\alpha_6 : E(mDl_n) \rightarrow \{4nm + 1, 4nm + 2, \dots, 12nm - 3m\}$ , maka label sisi  $\alpha_6$  untuk pelabelan total super  $(a, 2)$ -sisi antimagic pada graf  $mDl_n$  dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{(2n+3)4m-k+1}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8n+11)m-k+1}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8n+27)m-k+2}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(2n+7)4m-k+2}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4n+21)2m+2k}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{cases}$$

$$\alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n+15)m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(n+2)8m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4n+15)2m+2k}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(n+6)8m-k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8n+47)m-k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_6(x_i^k y_i^k) = \begin{cases} \frac{(4n+3)2m-k+1}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8n+5)m-k+1}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8n+21)m-k+2}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(4n+11)2m-k+2}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8n+36)m+2k}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \end{cases}$$

$$\alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k) = \begin{cases} \frac{(2n+3)4m+2k}{2} + (j-2)4m; & \text{jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4n+15)2m-k+1}{2} + (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8n+29)m-k+1}{2} + (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8n+45)m-k+2}{2} + (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(4n+23)2m-k+2}{2} + (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k) = \begin{cases} \frac{8nm+2k}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4n+9)2m-k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8n+17)m-k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8n+33)m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(4n+17)2m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_6(x_i^k z_{2i}^k) = \begin{cases} \frac{(4n+3)2m+2k}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(n+3)8m-k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8n+23)m-k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(8n+39)m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(n+5)8m-k+2}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n+3)m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(2n+1)4m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(4n+9)2m+2k}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(8n+36)m-k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8n+35)m-k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

$$\alpha_6(y_i^k z_{2i}^k) = \begin{cases} \frac{(8n+9)m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(4n+5)2m-k+2}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \\ \frac{(n+3)8m+2k}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \frac{(4n+21)2m-k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil} \\ \frac{(8n+41)m-k+1}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap} \end{cases}$$

Fungsi bijektif pada  $\alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k)$ ,  $\alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k)$ ,  $\alpha_6(x_i^k y_i^k)$ ,  $\alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k)$ ,  $\alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k)$ ,  $\alpha_6(x_i^k z_{2i}^k)$ ,  $\alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k)$  dan  $\alpha_6(y_i^k z_{2i}^k)$  dapat direduksi sebagai berikut: (untuk  $k$  sembarang)

$$\alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n+11)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{(8n+27)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3} \\ \frac{(4n+21)2m+2k}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n+15)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{(4n+15)2m+2k}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3} \\ \frac{(8n+47)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\alpha_6(x_i^k y_i^k) = \begin{cases} \frac{(8n+5)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{(8n+21)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3} \\ \frac{(8n+36)m+2k}{2} + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k) = \begin{cases} \frac{(2n+3)4m+2k}{2} + (j-2)4m; & \text{jika } j \equiv 2 \pmod{6} \\ \frac{(8n+29)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (j-4)4m; & \text{jika } j \equiv 4 \pmod{6} \\ \frac{(8n+45)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (j-6)4m; & \text{jika } j \equiv 6 \pmod{6} \end{cases}$$

$$\alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k) = \begin{cases} \frac{(4n+9)2m-k+1}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3} \\ \frac{(8n+17)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3} \\ \frac{(8n+33)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\alpha_6(x_i^k z_{2i}^k) = \begin{cases} \frac{(4n+3)2m+2k}{2} + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{(8n+23)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3} \\ \frac{(8n+39)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k) = \begin{cases} \frac{(8n+3)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{(4n+9)2m+2k}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3} \\ \frac{(8n+35)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3 \pmod{3} \end{cases}$$

$$\alpha_6(y_i^k z_{2i}^k) = \begin{cases} \frac{(8n+9)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}}{4}\right)m + (i-1)8m; & \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ \frac{(n+3)8m+2k}{2} + (i-2)8m; & \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ \frac{(8n+41)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m; & \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \end{cases}$$

Jika  $W_{\alpha_6}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total  $\alpha_6(x_i^k)$ ,  $\alpha_6(y_i^k)$ ,  $\alpha_6(z_j^k)$ ,  $\alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k)$ ,  $\alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k)$ ,  $\alpha_6(x_i^k y_i^k)$ ,  $\alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k)$ ,  $\alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k)$ ,  $\alpha_6(x_i^k z_{2i}^k)$ ,  $\alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k)$  dan  $\alpha_6(y_i^k z_{2i}^k)$  maka  $W_{\alpha_6}$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL  $w_{\alpha_4} = w_{\alpha_6}$  dan rumus label sisi  $\alpha_6$  dengan syarat batas  $i, j$ , dan  $k$  yang bersesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

Untuk sisi  $x_i^k x_{i+1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^1 &= \{w_{\alpha_6}^1 + \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{15m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(2n+3)4m-k+1}{2} + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+27)m-2k+3}{2} + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^2 &= \{w_{\alpha_6}^2 + \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{14m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+11)m-k+1}{2} + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+25)m-2k+3}{2} + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^3 &= \{w_{\alpha_6}^3 + \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{30m-k+3}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n+27)m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n+57)m-2k+5}{2} + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^4 &= \{w_{\alpha_6}^4 + \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{31m-k+3}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(2n+7)4m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n+59)m-2k+5}{2} + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^5 &= \{w_{\alpha_6}^5 + \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{45m+2k+1}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(4n+21)2m+2k}{2} + (i-3)8m\right) \\ &= \frac{(8n+87)m+4k+1}{2} + (i-3)16m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k y_{i+1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^6 &= \{w_{\alpha_6}^6 + \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{18m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+15)m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+33)m-2k+5}{2} + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^7 &= \{w_{\alpha_6}^7 + \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{19m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(n+2)8m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+35)m-2k+5}{2} + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^8 &= \{w_{\alpha_6}^8 + \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{33m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n+15)2m+2k}{2} + (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n+63)m+4k+1}{2} + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^9 &= \{w_{\alpha_6}^9 + \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{51m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(9 \cdot \frac{(n+6)8m-k+1}{2} + (i-3)8m\right) \\ &= \frac{(8n+99)m-2k+3}{2} + (i-3)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{10} &= \{w_{\alpha_6}^{10} + \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{50m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+47)m-k+1}{2} + (i-3)8m\right) \\ &= \frac{(8n+97)m-2k+3}{2} + (i-3)16m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k y_i^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{11} &= \{w_{\alpha_6}^{11} + \alpha_6(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{9m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(4n+3)2m-k+1}{2} + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+15)m-2k+3}{2} + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{12} &= \{w_{\alpha_6}^{12} + \alpha_6(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\ &= \left(\frac{8m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+5)m-k+1}{2} + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+13)m-2k+3}{2} + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{13} &= \{w_{\alpha_6}^{13} + \alpha_6(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{24m-k+3}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n+21)m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n+45)m-2k+5}{2} + (i-2)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{14} &= \{w_{\alpha_6}^{14} + \alpha_6(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{25m-k+3}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n+11)2m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n+47)m-2k+5}{2} + (i-2)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{15} &= \{w_{\alpha_6}^{15} + \alpha_6(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{39m+2k+1}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+36)m+2k}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+75)m+4k+1}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $z_j^k z_{j+1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{16} &= \{w_{\alpha_6}^{16} + \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{15m+2k+1}{2} + (j-2)4m\right) + \left(\frac{(2n+3)4m+2k}{2} + (j-2)4m\right) \\
&= \frac{(8n+27)m+4k+1}{2} + (j-2)8m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{17} &= \{w_{\alpha_6}^{17} + \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{33m-k+2}{2} + (j-4)4m\right) + \left(\frac{(4n+15)2m-k+1}{2} + (j-4)4m\right) \\
&= \frac{(8n+63)m-2k+3}{2} + (j-4)8m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{18} &= \{w_{\alpha_6}^{18} + \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{32m-k+2}{2} + (j-4)4m\right) + \left(\frac{(8n+29)m-k+1}{2} + (j-4)4m\right) \\
&= \frac{(8n+61)m-2k+3}{2} + (j-4)8m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{19} &= \{w_{\alpha_6}^{19} + \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{48m-k+3}{2} + (j-6)4m\right) + \left(\frac{(8n+45)m-k+2}{2} + (j-6)4m\right) \\
&= \frac{(8n+93)m-2k+5}{2} + (j-6)8m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{20} &= \{w_{\alpha_6}^{20} + \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{49m-k+3}{2} + (j-6)4m\right) + \left(\frac{(4n+23)2m-k+2}{2} + (j-6)4m\right) \\
&= \frac{(8n+95)m-2k+5}{2} + (j-6)8m
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{21} &= \{w_{\alpha_6}^{21} + \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{3m+2k+1}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{8nm+2k}{2} + (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n+3)m+4k+1}{2} + (i-1)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{22} &= \{w_{\alpha_6}^{22} + \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{21m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n+9)2m-k+1}{2} + (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n+39)m-2k+3}{2} + (i-2)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{23} &= \{w_{\alpha_6}^{23} + \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{20m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n+17)m-k+1}{2} + (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n+37)m-2k+3}{2} + (i-2)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{24} &= \{w_{\alpha_6}^{24} + \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{36m-k+3}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+33)m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+69)m-2k+5}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{25} &= \{w_{\alpha_6}^{25} + \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{37m-k+3}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(4n+17)2m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+71)m-2k+5}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{26} &= \{w_{\alpha_6}^{26} + \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{9m+2k+1}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(4n+3)2m+2k}{2} + (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n+15)m+4k+1}{2} + (i-1)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{27} &= \{w_{\alpha_6}^{27} + \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{27m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(n+3)8m-k+1}{2} + (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n+51)m-2k+3}{2} + (i-2)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{28} &= \{w_{\alpha_6}^{28} + \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{26m-k+2}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n+23)m-k+1}{2} + (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n+49)m-2k+3}{2} + (i-2)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{29} &= \{w_{\alpha_6}^{29} + \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{42m-k+3}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+39)m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+81)m-2k+5}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{30} &= \{w_{\alpha_6}^{30} + \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{43m-k+3}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(n+5)8m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+83)m-2k+5}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{31} &= \{w_{\alpha_6}^{31} + \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{6m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+3)m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n+9)m-2k+5}{2} + (i-1)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{32} &= \{w_{\alpha_6}^{32} + \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{7m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(2n+1)4m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n+11)m-2k+5}{2} + (i-1)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{33} &= \{w_{\alpha_6}^{33} + \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{21m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n+9)2m+2k}{2} + (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n+39)m+4k+1}{2} + (i-2)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{34} &= \{w_{\alpha_6}^{34} + \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{39m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+36)m-k+1}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+75)m-2k+3}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{35} &= \{w_{\alpha_6}^{35} + \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{38m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+35)m-k+1}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+73)m-2k+3}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{36} &= \{w_{\alpha_6}^{36} + \alpha_6(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{12m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+9)m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n+21)m-2k+5}{2} + (i-1)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{37} &= \{w_{\alpha_6}^{37} + \alpha_6(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{13m-k+3}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(4n+5)2m-k+2}{2} + (i-1)8m\right) \\
&= \frac{(8n+23)m-2k+5}{2} + (i-1)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{38} &= \{w_{\alpha_6}^{38} + \alpha_6(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\
&= \left(\frac{27m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(n+3)8m+2k}{2} + (i-2)8m\right) \\
&= \frac{(8n+51)m+4k+1}{2} + (i-2)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{39} &= \{w_{\alpha_6}^{39} + \alpha_6(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\
&= \left(\frac{45m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(4n+21)2m-k+1}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+87)m-2k+3}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{\alpha_6}^{40} &= \{w_{\alpha_6}^{40} + \alpha_6(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ genap}\} \\
&= \left(\frac{44m-k+2}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+41)m-k+1}{2} + (i-3)8m\right) \\
&= \frac{(8n+85)m-2k+3}{2} + (i-3)16m
\end{aligned}$$

Fungsi bijektif pada  $W_{\alpha_6}$  dapat direduksi sebagai berikut:

Untuk sisi  $x_i^k x_{i+1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^1 &= \{w_{\alpha_6}^1 + \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{14m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+11)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\ &\quad + (i-1)8m \\ &= \frac{(8n+25)m-2k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^2 &= \{w_{\alpha_6}^2 + \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{30m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n+27)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\ &\quad + (i-2)8m \\ &= \frac{(8n+57)m-2k+5}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)m + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^3 &= \{w_{\alpha_6}^3 + \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{45m+2k+1}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(4n+21)2m+2k}{2} + (i-3)8m\right) \\ &= \frac{(8n+87)m+4k+1}{2} + (i-3)16m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k y_{i+1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^4 &= \{w_{\alpha_6}^4 + \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{18m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+15)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m\right) \\ &\quad + (i-1)8m \\ &= \frac{(8n+33)m-2k+5}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)m + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^5 &= \{w_{\alpha_6}^5 + \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{33m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n+15)2m+2k}{2} + (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n+63)m+4k+1}{2} + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^6 &= \{w_{\alpha_6}^6 + \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{50m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+47)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\ &\quad + (i-3)8m \\ &= \frac{(8n+97)m-2k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (i-3)16m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k y_i^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^7 &= \{w_{\alpha_6}^7 + \alpha_6(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{8m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+5)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+13)m-2k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{j+1}+1}{2}\right)m + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^8 &= \{w_{\alpha_6}^8 + \alpha_6(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{24m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n+21)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n+45)m-2k+5}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)m + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^9 &= \{w_{\alpha_6}^9 + \alpha_6(x_i^k y_i^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{39m+2k+1}{2} + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+36)m+2k}{2} + (i-3)8m\right) \\ &= \frac{(8n+75)m+4k+1}{2} + (i-3)16m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $z_j^k z_{j+1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{10} &= \{w_{\alpha_6}^{10} + \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 2(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{15m+2k+1}{2} + (j-2)4m\right) + \left(\frac{(2n+3)4m+2k}{2} + (j-2)4m\right) \\ &= \frac{(8n+27)m+4k+1}{2} + (j-2)8m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{11} &= \{w_{\alpha_6}^{11} + \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 4(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{32m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (j-4)4m\right) + \left(\frac{(8n+29)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (j-4)4m\right) \\ &= \frac{(8n+61)m-2k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (j-4)8m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{12} &= \{w_{\alpha_6}^{12} + \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } j \equiv 6(\text{mod } 6) \text{ dan } k \text{ ganjil}\} \\ &= \left(\frac{48m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (j-6)4m\right) + \left(\frac{(8n+45)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (j-6)4m\right) \\ &= \frac{(8n+93)m-2k+5}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)m + (j-6)8m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{13} &= \{w_{\alpha_6}^{13} + \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{3m+2k+1}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(4n+9)2m-k+1}{2} + (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n+3)m+4k+1}{2} + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{14} &= \{w_{\alpha_6}^{14} + \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{20m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n+17)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\ &\quad + (i-2)8m \\ &= \frac{(8n+37)m-2k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{15} &= \{w_{\alpha_6}^{15} + \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{36m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+33)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\ &\quad + (i-3)8m \\ &= \frac{(8n+69)m-2k+5}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (i-3)16m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $x_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{16} &= \{w_{\alpha_6}^{16} + \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{9m+2k+1}{2} + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(4n+3)2m+2k}{2} + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+15)m+4k+1}{2} + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{17} &= \{w_{\alpha_6}^{17} + \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{26m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(8n+23)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\ &\quad + (i-2)8m \\ &= \frac{(8n+49)m-2k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{18} &= \{w_{\alpha_6}^{18} + \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{42m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+39)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m\right) \\ &\quad + (i-3)8m \\ &= \frac{(8n+81)m-2k+5}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (i-3)16m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k z_{2i-1}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{19} &= \{w_{\alpha_6}^{19} + \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{6m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+3)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+9)m-2k+5}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)m + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{20} &= \{w_{\alpha_6}^{20} + \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{21m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(4n+9)2m+2k}{2} + (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n+39)m+4k+1}{2} + (i-2)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{21} &= \{w_{\alpha_6}^{21} + \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{38m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+35)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) \\ &= \frac{(8n+73)m-2k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (i-3)16m \end{aligned}$$

Untuk sisi  $y_i^k z_{2i}^k$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{22} &= \{w_{\alpha_6}^{22} + \alpha_6(y_i^k z_{2i}^k); \text{jika } i \equiv 1(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{12m-k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) + \left(\frac{(8n+9)m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{4}\right)m + (i-1)8m\right) \\ &= \frac{(8n+21)m-2k+5}{2} + \left(\frac{(-1)^k+1}{2}\right)m + (i-1)16m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{23} &= \{w_{\alpha_6}^{23} + \alpha_6(y_i^k z_{2i}^k); \text{jika } i \equiv 2(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{27m+2k+1}{2} + (i-2)8m\right) + \left(\frac{(n+3)8m+2k}{2} + (i-2)8m\right) \\ &= \frac{(8n+51)m+4k+1}{2} + (i-2)16m \end{aligned}$$

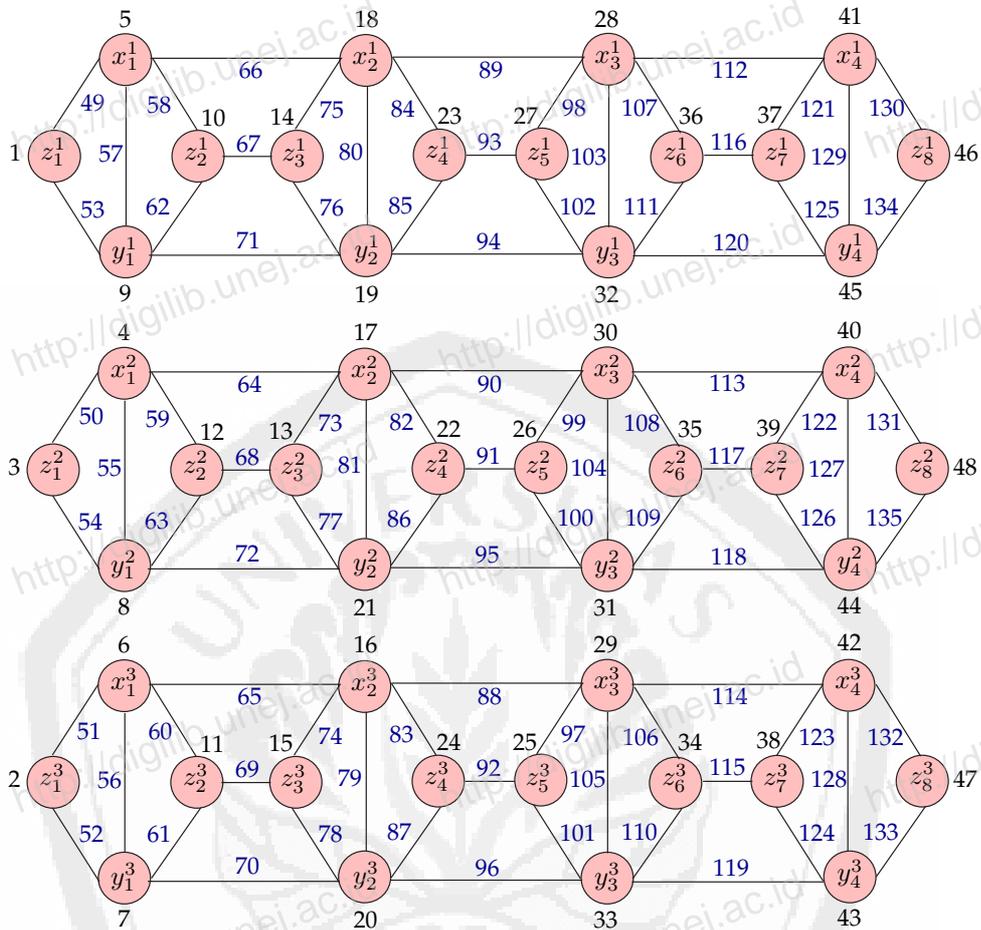
$$\begin{aligned} W_{\alpha_6}^{24} &= \{w_{\alpha_6}^{24} + \alpha_6(y_i^k z_{2i}^k); \text{jika } i \equiv 3(\text{mod } 3) \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= \left(\frac{44m-k+2}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) + \left(\frac{(8n+41)m-k+1}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{4}\right)m + (i-3)8m\right) \\ &= \frac{(8n+85)m-2k+3}{2} + \left(\frac{(-1)^{k+1}+1}{2}\right)m + (i-3)16m \end{aligned}$$

Perhatikan Himpunan bobot sisi  $W_{\alpha_6} = \{W_{\alpha_6}^1, W_{\alpha_6}^2, W_{\alpha_6}^3, \dots, W_{\alpha_6}^{40}\}$ . Tampak bahwa bobot sisi terkecil pertama, kedua sampai kelima terletak pada  $W_{\alpha_6}^{21}$ , selanjutnya terletak pada  $W_{\alpha_6}^{31}$ , sedangkan bobot sisi terbesar terletak pada  $W_{\alpha_6}^{37}$ . Dengan mensubstitusikan nilai  $i = 1$  dan  $k = 1$  pada  $W_{\alpha_6}^{21}$  diperoleh  $W_{\alpha_6} = \frac{(8n+3)m+4(1)+1}{2} + (1-1)16m = \frac{(8n+3)m+5}{2}$ , substitusi  $i = 1$  dan  $k = 2$  pada  $W_{\alpha_6}^{21}$  diperoleh  $W_{\alpha_6} = \frac{(8n+3)m+4(2)+1}{2} + (1-1)16m = \frac{(8n+3)m+9}{2}$ , substitusi  $i = 1$  dan  $k = 3$  pada  $W_{\alpha_6}^{21}$  diperoleh  $W_{\alpha_6} = \frac{(8n+3)m+4(3)+1}{2} + (1-1)16m = \frac{(8n+3)m+13}{2}, \dots$ , substitusi  $i = n$  dan  $k = 2$  pada  $W_{\alpha_6}^{37}$  diperoleh  $W_{\alpha_6} = \frac{(8n+3)m+4(2)+5}{2} + (n-1)16m = \frac{(40n-9)m+1}{2}$ . Dapat dinyatakan bahwa  $W_{\alpha_6}$  membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $\frac{(8n+3)m+5}{2}$  dan beda 2 (dua), atau dapat dituliskan  $\bigcup_{t=1}^{40} W_{\alpha_6}^t = \left\{ \frac{(8n+3)m+5}{2}, \frac{(8n+3)m+9}{2}, \frac{(8n+3)m+13}{2}, \dots, \frac{(40n-9)m+1}{2} \right\}$ . Dapat disimpulkan bahwa gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan  $a = \frac{(8n+3)m+5}{2}$  dan  $d = 2$  atau gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  mempunyai Super  $\left(\frac{(8n+3)m+5}{2}, 2\right)$ -EAT;  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ . Sehingga terbukti bahwa pelabelan total  $\alpha_6(x_i^k), \alpha_6(y_i^k), \alpha_6(z_j^k), \alpha_6(x_i^k x_{i+1}^k), \alpha_6(y_i^k y_{i+1}^k), \alpha_6(x_i^k y_i^k), \alpha_6(z_j^k z_{j+1}^k), \alpha_6(x_i^k z_{2i-1}^k), \alpha_6(x_i^k z_{2i}^k), \alpha_6(y_i^k z_{2i-1}^k)$  dan  $\alpha_6(y_i^k z_{2i}^k)$  adalah pelabelan total super  $(a, 2)$ -sisi antimagic jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .  $\square$

Angka  $1, 2, \dots, 40$  pada  $W_{\alpha_6}^1, W_{\alpha_6}^2, \dots, W_{\alpha_6}^{40}$  bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan  $W_{\alpha_6}$  yang mempunyai syarat batas  $i, j$ , dan  $k$  yang berbeda-beda. Gambar 4.8 merupakan contoh pelabelan total super  $(a, 2)$ -sisi antimagic (*SEATL*) pada gabungan graf Tangga Permata  $3Dl_4$ .

Jika  $\alpha_6(z)$  adalah label sisi  $mDl_n$  untuk  $d = 2$  dan  $\alpha_5(z)$  adalah label sisi  $mDl_n$  untuk  $d = 0$  maka berdasarkan urutan peletakkan label sisi yang ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL  $w$  dapat dirumuskan label sisi  $mDl_n$  untuk  $d = 2$ , yaitu:

$$\begin{aligned} \alpha_6(z) &= 2p + q + 1 - \alpha_5(z) \\ &= 2(4nm) + (8nm - 3m) + 1 - \alpha_5(z) \\ &= 16nm - 3m + 1 - \alpha_5(z) \end{aligned}$$



Gambar 4.8: Pelabelan total super(55,2)-sisi antimagic pada  $3Dl_4$

Untuk pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dengan  $d = 1$ , penulis akan membuktikannya melalui sebuah teorema yang dikembangkan dengan tidak mengacu pada pelabelan titik yang sudah ditemukan sebelumnya. Dengan pelabelan titik yang baru maka penulis mengembangkannya menjadi sebuah teorema baru untuk menentukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dengan  $d = 1$ .

◇ **Teorema 4.6.3** *Ada pelabelan total super  $(8nm+2,1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  jika  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ .*

**Bukti.** Labeli titik gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dengan fungsi bijektif  $\alpha_7$ , untuk  $1 \leq k \leq m$ , definisikan pelabelan  $\alpha_7 : V(mDl_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 4nm\}$  maka pelabelan  $\alpha_7$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\alpha_7(x_i^k) &= m + k + (i - 1)4m; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \alpha_7(y_i^k) &= 2m + k + (i - 1)4m; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \text{ dan } k \text{ sembarang} \\ \alpha_7(z_j^k) &= k + \left(\frac{4j-3-(-1)^{j+1}}{2}\right)m; & \text{jika } 1 \leq j \leq 2n \text{ dan } k \text{ sembarang}\end{aligned}$$

Dari persamaan di atas, dapat dipahami bahwa  $\alpha_7(x_i^k)$ ,  $\alpha_7(y_i^k)$  dan  $\alpha_7(z_j^k)$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $mDl_n$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, 4nm\}$ . Jika  $w_{\alpha_7}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan titik  $\alpha_7$  dimana bobot sisi pelabelan titik diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang bersisian, maka fungsi bijektif  $w_{\alpha_7}$  dapat ditentukan melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika sebagai berikut:

Untuk  $1 \leq k \leq m$  sembarang

$$\begin{aligned}w_{\alpha_7}^1(x_i^k x_{i+1}^k) &= 2k + (4i - 1)2m; & \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1 \\ w_{\alpha_7}^2(y_i^k y_{i+1}^k) &= 2k + 8im; & \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1 \\ w_{\alpha_7}^3(x_i^k y_i^k) &= 2k + (8i - 5)m; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ w_{\alpha_7}^4(z_j^k z_{j+1}^k) &= 2k + (4j - 1)m; & \text{jika } 2 \leq j \leq 2n - 2 \text{ genap} \\ w_{\alpha_7}^5(x_i^k z_{2i-1}^k) &= 2k + (8i - 7)m; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ w_{\alpha_7}^6(x_i^k z_{2i}^k) &= 2k + (2i - 1)4m; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ w_{\alpha_7}^7(y_i^k z_{2i-1}^k) &= 2k + (4i - 3)2m; & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ w_{\alpha_7}^8(y_i^k z_{2i}^k) &= 2k + (8i - 3)m; & \text{jika } 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

Angka 1, 2, ..., 8 pada  $w_{\alpha_7}^1, w_{\alpha_7}^2, w_{\alpha_7}^3, \dots, w_{\alpha_7}^8$  bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan  $w_{\alpha_7}$  yang mempunyai syarat batas  $i, j$  dan  $k$  yang berbeda-beda.

Definisikan label sisi  $\alpha_7 : E(Dl_n) \rightarrow \{4nm + 1, 4nm + 2, \dots, 12nm - 3\}$ ,

maka label sisi  $\alpha_7$  untuk pelabelan total super  $(a, 1)$ -sisi antimagic pada graf  $mDl_n$  dapat dirumuskan sebagai berikut:

Untuk  $1 \leq k \leq m$  sembarang

$$\begin{aligned} \alpha_7(x_i^k x_{i+1}^k) &= (2n - i)4m - k + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_7(y_i^k y_{i+1}^k) &= (8n - 4i - 1)m - k + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n - 1 \\ \alpha_7(x_i^k y_i^k) &= (3n - i)4m - k + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_7(z_j^k z_{j+1}^k) &= (6n - j - 1)2m - k + 1, & \text{jika } 2 \leq j \leq 2n - 2 \text{ genap} \\ \alpha_7(x_i^k z_{2i-1}^k) &= (12n - 4i + 1)m - k + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_7(x_i^k z_{2i}^k) &= (8n - 4i + 1)m - k + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_7(y_i^k z_{2i-1}^k) &= (4n - 2i + 1)2m - k + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \\ \alpha_7(y_i^k z_{2i}^k) &= (12n - 4i - 1)m - k + 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Jika  $W_{\alpha_7}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total  $\alpha_7(x_i^k), \alpha_7(y_i^k), \alpha_7(z_j^k), \alpha_7(x_i^k x_{i+1}^k), \alpha_7(y_i^k y_{i+1}^k), \alpha_7(x_i^k y_i^k), \alpha_7(z_j^k z_{j+1}^k), \alpha_7(x_i^k z_{2i-1}^k), \alpha_7(x_i^k z_{2i}^k), \alpha_7(y_i^k z_{2i-1}^k)$  dan  $\alpha_7(y_i^k z_{2i}^k)$  maka  $W_{\alpha_7}$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL  $w_{\alpha_7}$  dan rumus label sisi  $\alpha_7$  dengan syarat batas  $i, j$ , dan  $k$  yang beresesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_7}^1 &= \{w_{\alpha_7}^1 + \alpha_7(x_i^k x_{i+1}^k); \text{ jika } 1 \leq i \leq n - 1 \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= (2k + (4i - 1)2m) + ((2n - i)4m - k + 1) \\ &= (4n + 2i - 1)2m + k + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_7}^2 &= \{w_{\alpha_7}^2 + \alpha_7(y_i^k y_{i+1}^k); \text{ jika } 1 \leq i \leq n - 1 \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= (2k + 8im) + ((8n - 4i - 1)m - k + 1) \\ &= (8n + 4i - 1)m + k + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_7}^3 &= \{w_{\alpha_7}^3 + \alpha_7(x_i^k y_i^k); \text{ jika } 1 \leq i \leq n \text{ dan } k \text{ sembarang}\} \\ &= (2k + (8i - 5)m) + ((3n - i)4m - k + 1) \\ &= (12n + 4i - 5)m + k + 1 \end{aligned}$$

$$W_{\alpha_7}^4 = \{w_{\alpha_7}^4 + \alpha_7(z_j^k z_{j+1}^k); \text{ jika } 2 \leq j \leq 2n - 2 \text{ genap dan } k \text{ sembarang}\}$$

$$= (2k + (4j - 1)m) + ((6n - j - 1)2m - k + 1)$$

$$= (12n + 2j - 3)m + k + 1$$

$$W_{\alpha_7}^5 = \{w_{\alpha_7}^5 + \alpha_7(x_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } 1 \leq i \leq n \text{ dan } k \text{ sembarang}\}$$

$$= (2k + (8i - 7)m) + ((12n - 4i + 1)m - k + 1)$$

$$= (6n + 2i - 3)2m + k + 1$$

$$W_{\alpha_7}^6 = \{w_{\alpha_7}^6 + \alpha_7(x_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } 1 \leq i \leq n \text{ dan } k \text{ sembarang}\}$$

$$= (2k + (2i - 1)4m) + (((8n - 4i + 1)m - k + 1)$$

$$= (8n + 4i - 3)m + k + 1$$

$$W_{\alpha_7}^7 = \{w_{\alpha_7}^7 + \alpha_7(y_i^k z_{2i-1}^k); \text{ jika } 1 \leq i \leq n \text{ dan } k \text{ sembarang}\}$$

$$= (2k + (4i - 3)2m) + ((4n - 2i + 1)2m - k + 1)$$

$$= (2n + i - 1)4m + k + 1$$

$$W_{\alpha_7}^8 = \{w_{\alpha_7}^8 + \alpha_7(y_i^k z_{2i}^k); \text{ jika } 1 \leq i \leq n \text{ dan } k \text{ sembarang}\}$$

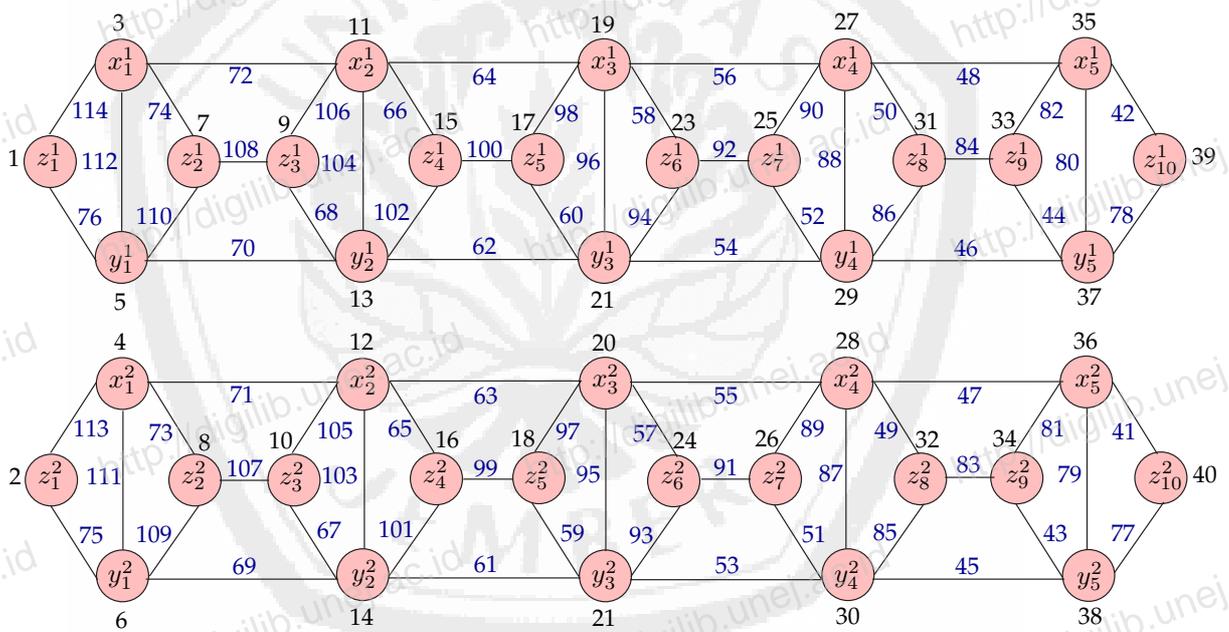
$$= (2k + (8i - 3)m) + (((12n - 4i - 1)m - k + 1)$$

$$= (3n + i - 1)4m + k + 1$$

Perhatikan Himpunan bobot sisi  $W_{\alpha_7} = \{W_{\alpha_7}^1, W_{\alpha_7}^2, W_{\alpha_7}^3, \dots, W_{\alpha_7}^8\}$ . Tampak bahwa bobot sisi terkecil pertama, kedua sampai keempat terletak pada  $W_{\alpha_7}^7$ , selanjutnya terletak pada  $W_{\alpha_7}^6$ , sedangkan bobot sisi terbesar terletak pada  $W_{\alpha_7}^8$ . Dengan mensubstitusikan nilai  $i = 1$  dan  $k = 1$  pada  $W_{\alpha_7}^7$  diperoleh  $W_{\alpha_7} = (2n + 1 - 1)4m + 1 + 1 = 8nm + 2$ , substitusi  $i = 1$  dan  $k = 2$  pada  $W_{\alpha_7}^7$  diperoleh  $W_{\alpha_7} = (2n + 1 - 1)4m + 2 + 1 = 8nm + 3$ , substitusi  $i = 1$  dan  $k = 3$  pada  $W_{\alpha_7}^7$  diperoleh  $W_{\alpha_7} = (2n + 1 - 1)4m + 3 + 1 = 8nm + 4, \dots$ , substitusi  $i = n$  dan  $k = m$  pada  $W_{\alpha_7}^8$  diperoleh  $W_{\alpha_7} = (3n + n - 1)4m + m + 1 = 16nm - 3m + 1$ . Dapat dinyatakan bahwa  $W_{\alpha_7}$  membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $8nm + 2$  dan beda 1 (satu), atau dapat dituliskan  $\bigcup_{t=1}^8 W_{\alpha_7}^t = \{8nm + 2, 8nm + 3,$

$8nm + 4, \dots, 16nm - 3m + 1$ }. Dapat disimpulkan bahwa gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan  $a = 8nm + 2$  dan  $d = 1$  atau gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  mempunyai Super  $(8nm + 2, 1)$ -EAT;  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ . Sehingga terbukti bahwa pelabelan total  $\alpha_7(x_i^k), \alpha_7(y_i^k), \alpha_7(z_j^k), \alpha_7(x_i^k x_{i+1}^k), \alpha_7(y_i^k y_{i+1}^k), \alpha_7(x_i^k y_i^k), \alpha_7(z_j^k z_{j+1}^k), \alpha_7(x_i^k z_{2i-1}^k), \alpha_7(x_i^k z_{2i}^k), \alpha_7(y_i^k z_{2i-1}^k)$  dan  $\alpha_7(y_i^k z_{2i}^k)$  adalah pelabelan total super  $(a, 1)$ -sisi antimagic jika  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ .  $\square$

Angka  $1, 2, \dots, 8$  pada  $W_{\alpha_7}^1, W_{\alpha_7}^2, \dots, W_{\alpha_7}^8$  bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan  $W_{\alpha_7}$  yang mempunyai syarat batas  $i, j$ , dan  $k$  yang berbeda-beda. Gambar 4.9 merupakan contoh pelabelan total super  $(a, 1)$ -sisi antimagic (SEATL) pada gabungan graf Tangga Permata  $2Dl_5$ .



Gambar 4.9: Pelabelan total super  $(82,1)$ -sisi antimagic pada  $2Dl_5$

#### 4.7 Hasil dan Pembahasan

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui batas atas nilai  $d$  sehingga graf Tangga Permata tunggal  $Dl_n$  maupun gabungannya  $mDl_n$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic, selanjutnya akan dicari pelabelan pada graf tersebut dan menentukan konstruksi fungsi bijektifnya. Dari hasil perhitungan diperoleh bahwa nilai  $d$  yang mungkin untuk pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata tunggal  $Dl_n$  maupun gabungannya  $mDl_n$  adalah  $d \in \{0, 1, 2\}$ . Setelah menentukan nilai  $d$ , peneliti mencari pelabelan sesuai dengan nilai  $d$  yang telah ditentukan tersebut.

Dari hasil penelitian pada beberapa nilai  $d$  tersebut di atas, diperoleh 2 (dua) lemma dan 6 (enam) teorema baru tentang pelabelan graf Tangga Permata tunggal  $Dl_n$  maupun gabungannya  $mDl_n$ , yaitu:

- **Lemma 4.5.1** *Ada pelabelan titik  $(3, 1)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .*
- **Teorema 4.5.1** *Ada pelabelan total super  $(12n, 0)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .*
- **Teorema 4.5.2** *Ada pelabelan total super  $(4n + 4, 2)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ .*
- **Teorema 4.5.3** *Suatu graf  $Dl_n$  mempunyai pelabelan total super  $(8n + 2, 1)$ -sisi antimagic untuk  $n \geq 2$ .*
- **Lemma 4.6.1** *Ada pelabelan titik  $(\frac{3m+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan Graf Tangga Permata  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .*
- **Teorema 4.6.1** *Ada pelabelan total super  $(\frac{(8n-1)3m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .*
- **Teorema 4.6.2** *Ada pelabelan total super  $(\frac{(8n+3)m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$  dan  $n \geq 2$ .*

- **Teorema 4.6.3** *Ada pelabelan total super  $(8nm+2,1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  jika  $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ .*

Berdasarkan hasil penelitian tersebut, dapat diketahui bahwa untuk setiap batas atas  $d$  yang berlainan maka nilai awal  $a$  juga berlainan. Namun demikian seluruh label titik dan seluruh label bobot sisi adalah sama, baik untuk  $d = 0, d = 1$  maupun untuk  $d = 2$  (kecuali untuk gabungan graf Tangga Permata pada saat  $d=1$ ), yang kemudian dilanjutkan melengkapi pelabelan sisinya sehingga menjadi pelabelan total. Pada graf Tangga Permata tunggal ketiga nilai  $d$  tersebut berlaku pada syarat yang sama yaitu untuk  $n \geq 2$ . Sedangkan pada gabungan graf Tangga Permata tidak berlaku demikian. Pada saat  $d = 0$  dan  $d = 2$  berlaku syarat yang sama yaitu  $m$  ganjil ( $m \geq 3$ ) dan  $n$  sembarang ( $n \geq 2$ ), sedangkan pada saat  $d = 1$  berlaku syarat  $m$  dan  $n$  sembarang ( $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ ). Penelitian SEATL gabungan graf Tangga Permata untuk  $d = 0$  dan  $d = 2$  dengan  $1 \leq k \leq m$  untuk copy  $m$  genap masih belum ditemukan dikarenakan pola pelabelan yang telah ditemukan pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  untuk  $m$  ganjil tidak dapat diterapkan pada jenis graf yang sama dengan nilai  $m$  yang genap. Hal ini berarti harus ditemukan pola pelabelan baru terlebih dahulu untuk menentukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  untuk  $d = 0$  dan  $d = 2$  dengan  $m$  genap dan untuk hal tersebut, peneliti mengalami kesulitan.

Pada uraian hasil di atas, ditunjukkan secara rinci fungsi bijektif pelabelan total super  $(12n, 0)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$ , pelabelan total super  $(4n + 4, 2)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$ , pelabelan total super  $(\frac{(8n-1)3m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$ , pelabelan total super  $(\frac{(8n+3)m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$  dan pelabelan total super  $(8nm+2,1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Tangga Permata  $mDl_n$ , namun untuk pelabelan total super  $(8n + 2, 1)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  hanya ditunjukkan melalui sebuah teorema yang lahir dari sebuah lemma. Hal tersebut dilakukan untuk memperingkas jumlah fungsi bijektif agar penggunaannya menjadi lebih efisien. Sedangkan untuk pelabelan total super  $(8nm + 2, 1)$ -sisi antimagic pada

gabungan Graf Tangga Permata  $mDl_n$  dikembangkan dengan pelabelan titik dan bobot sisi yang berbeda dengan pelabelan titik dan bobot sisi pada saat  $d = 0$  dan  $d = 2$  yang telah ditemukan sebelumnya, hal ini dikarenakan pelabelan titik dan bobot sisi baru yang ditemukan berlaku untuk sembarang  $m$  dan  $n$  ( $m \geq 2$  dan  $n \geq 2$ ).

Pada bidang teori graf, penentuan nilai kebenaran suatu rumus bijektif ditentukan melalui pendeteksian pola (*pattern recognition*) yang nantinya akan menghasilkan suatu teorema. Teorema yang ditemukan dimulai dengan pendeteksian pola yang berlaku sampai batas  $m$  dan  $n$  yang ditemukan peneliti kemudian baru menentukan fungsi bijektifnya. Dalam hal ini, penulis tidak mencantumkan cara memperoleh fungsi bijektif tersebut, akan tetapi pembuktian kebenaran teorema tersebut telah dipaparkan yang kemudian diikuti dengan contoh pelabelan sebagai visualisasi dari kebenaran teorema.

Terdapat beberapa pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan Graf Tangga Permata  $mDl_n$  yang belum ditemukan oleh peneliti. Berdasarkan visualisasi contoh-contoh pelabelan dan penerapan fungsi bijektif hasil penelitian yang telah ditemukan, diharapkan dapat membantu peneliti lain yang akan melakukan penelitian sejenis. Beberapa pelabelan yang belum ditemukan oleh penulis disajikan pada open problem berikut:

**Open Problem 4.7.1** Pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada  $mDl_n$ , dengan  $1 \leq i \leq n$ ;  $1 \leq k \leq m$ ;  $m$  genap untuk  $d = 0$  dan  $d = 2$ .

## BAB 5

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. fungsi bijektif pelabelan titik  $(a, 1)$ -sisi antimagic dan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf  $Dl_n$  telah dibahas melalui pembuktian teorema yang diberi tanda  $\diamond$ . Melalui pembuktian teorema tersebut, disimpulkan bahwa terdapat pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata  $Dl_n$  jika  $n \geq 2$ , dengan  $d \in \{0, 1, 2\}$ .
2. fungsi bijektif pelabelan titik  $(a, 1)$ -sisi antimagic dan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf  $mDl_n$  telah dibahas melalui pembuktian teorema yang diberi tanda  $\diamond$ . Melalui pembuktian teorema tersebut, disimpulkan bahwa terdapat pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf Tangga Permata  $mDl_n$  jika  $n \geq 2$  dan  $m \geq 2$ , dengan  $d \in \{0, 1, 2\}$ .

#### 5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Tangga Permata serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran pembaca dapat melakukan penelitian tentang:

- Untuk graf  $mDl_n$ ,  $m \geq 2$  genap dan  $n \geq 2$ , apakah terdapat pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan  $d \in \{0, 2\}$ .

## DAFTAR PUSTAKA

Abidin, Z. 2010. *Pelabelan Total Super( $a, d$ )-Sisi Antimagic pada Gabungan Saling Lepas Graf Firecracker*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

Anggraeni. Y. 2011. *Pelabelan Total Super( $a, d$ )-Sisi Antimagic pada Generalisasi-Graf Web Dua Bandul  $W_0(3, j, 2)$* . Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

Biyadi, K. 2010. *Fungsi Bikektif Pelabelan Antimagic Pada Gabungan Saling Lepas Graf Banana Tree*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

Chartrand, G, and Oellermann. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. New York: MacGraw-Hill, inc.

Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graph*. Australia : Tidak dipublikasikan (Tesis).

Dafik. 2008. *Pemodelan Matematika (Buku Diktat Mata Kuliah Pemodelan Matematika)*. Jember : FKIP Universitas jember.

Dafik, Slamun, Fuad and Rahmad. 2009. *Super Edge-antimagic Total Labeling of Disjoint Union of Triangular Ladder and Lobster Graphs*. Yogyakarta: Proceeding of IndoMS International Conference of Mathematics and Applications (IICMA) 2009.

Deviyana, R. 2011. *Pelabelan Total Super( $a, d$ )-Sisi Antimagic pada Graf  $E$* . Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

Fuad, M. 2009. *Pelabelan Total Super ( $a, d$ )-Sisi Antimagic pada Gabungan Graf Triangular Ladder*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas

## Jember.

- Gallian, J.A. 2009. *A Dynamic Survey of Graph Labelling*. [serial on line]. <http://www.combinatorics.org/Surveys/ds6.pdf>. [17 Agustus 2010].
- Husodo, A.Y. 2008. *Aplikasi Pewarnaan Graf dalam Penyimpanan Senyawa Kimia Berbahaya* [serial on line]. <http://webmail.informatika.org/rinaldi/Matdis/2008-2009/Makalah2008/Makalah0809-096.pdf>. [25 Agustus 2010].
- Indayani, D.V. 2010. *Pelabelan Total Super  $(a, d)$ -Sisi Antimagic pada Gabungan Graf Generalized Petersen  $(n, 2)$* . Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Kreyszig, Erwin. 1993. *Matematika Teknik Lanjutan Edisi ke-6 Buku 2*. Terjemahan oleh Bambang Sumantri. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.
- Lipschutz dan Lipson. 2002. *Matematika Diskrit Jilid 2*. Jakarta : Salemba Teknika.
- Munir, R. 2003. *Matematika Diskrit: Buku teks ilmu komputer*. Bandung: Informatika Bandung.
- Rahmad, R. R. 2010. *Pelabelan Total Super  $(a, d)$ -Sisi Antimagic pada Gabungan-Graf Lobster*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Slamin. 2001. *Diregularity of Digraph Close to Moore Bound* . Australia : Tidak dipublikasikan ( Tesis).
- Tando, Marselina. 2008. *Aplikasi Teori Graf dalam Topologi Jaringan* [serial on line]. <http://www.informatika.org/rinaldi/Matdis/2008-2009/Makalah/MakalahIF2153-0708-100.pdf>. [25 Agustus 2010].
- Universitas Jember. 2007. *Pedoman Penulisan Karya Ilmiah*. Jember: Badan

Penerbit Universitas Jember.

Wijaya, K. 2000. *Pelabelan Total Sisi Ajaib*. Tidak dipublikasikan (Tesis). Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Wirawan, T.P. 2007. *Pemodelan Sistem Lalu Lintas dengan Graf Ganda Berarah Berbobot* [serial on line]. <http://www.informatika.org/rinaldi/Matdis-/2007-2008/Makalah/MakalahIF2153-0708-018.pdf>. [18 Agustus 2010].

<http://www.11h11.com/hugobox/chaku/NetworkTopologies.png>. [21 September 2010].

<http://matematika-pendidikanstkip.blogspot.com/2011/04/asal-usul-teori-graf.html>. [28 Juni 2011].

<http://suryaafrihan.blogspot.com/2010/10/rantai-makanan.html>. [28 Juni-2011].

