



**FUNGSI BIJEKTIF PELABELAN ANTIMAGIC
PADA GABUNGAN SALING LEPAS GRAF
BANANA TREE**

Asal : SKRIPSI	Hadiah Pembelian	Klass 571.8 B14 F
Tanggal Tgl : 26 MAR 2010		
Unitah Eks		
Oleh: Khud Biyadi		

Khud Biyadi
NIM: 050210101333

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2010



FUNGSI BIJEKTIF PELABELAN ANTIMAGIC PADA GABUNGAN SALING LEPAS GRAF *BANANA TREE*

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh:

Khud Biyadi

NIM: 050210101333

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER**

2010

HALAMAN PERSEMBAHAN

Puji syukur kehadiran Allah, Tuhan yang Maha dari segala kebaikan serta sholawat dan salam semoga selalu terlimpah kepada manusia paling sempurna, Nabi Muhammad S.A.W. Kupersembahkan secuil kebahagiaan penggalan syair dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasih kepada:

- 1. Ayahanda Muhammad Qosim dan Ibunda tercinta Siti Aminah yang senantiasa mengalirkan rasa cinta, dukungan dan do'a yang tiada henti, dalam penulisan skripsi ini;*
- 2. Bapak Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D dan Bapak Drs. Antonius C.P., M.App.Sc., selaku pembimbing skripsi yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan dalam menyelesaikan skripsiku;*
- 3. Para guru dan dosen, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;*
- 4. Saudaraku Zainal Abidin dan Debbi Viroisa Indayani, yang telah memberiku dukungan dan do'a dalam setiap langkahku selama ini;*
- 5. Teman-teman terbaikku suwondo club (Beni, Andi, Anton, dan Arif), yang senantiasa membantuku dan kebersamaan kita adalah kenangan yang tak terlupakan;*
- 6. Teman-teman FKIP Matematika angkatan 2005 (Wyse, Iim, Endah, Gembong, Ikhsan dan semuanya), terima kasih atas dorongan, semangat dan bantuannya selama masa proses penyelesaian skripsiku;*
- 7. Teman - temanku FKIP Matematika (Riris, Birul, Fikri, Rara, dan semuanya), terima kasih atas bantuan dan kenangan indahnya;*
- 8. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.*

MOTO

"Ketika Wajah Ini Penat Memikirkan Dunia,
Maka Berwudlulah"

"Ketika Tangan Ini Letih Menggapai Cita-cita,
Maka Bertakbirlah"

"Ketika Pundak Tak Kuasa Memikul Amanah,
Maka Bersujudlah"

"Ikhlasikan Semua Dan Mendekatlah Kepada-NYA"

"Agar Tunduk Disaat Yang Lain Angkuh"

"Agar Teguh Disaat Yang Lain Runtuh"

"Agar Tegar Disaat Yang Lain Terlempar"

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Khud Biyadi

NIM : 050210101333

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Fungsi Bijektif Pelabelan Antimagic pada Gabungan Graf *Banana Tree* adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2010

Yang menyatakan,



Khud Biyadi

NIM. 050210101333

SKRIPSI

**FUNGSI BIJEKTIF PELABELAN ANTIMAGIC PADA GABUNGAN GRAF
BANANA TREE**



Oleh:

Khud Biyadi

NIM. 050210101333

Dosen Pembimbing I

: Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D

Dosen Pembimbing II

: Drs. Antonius C.P, M.App.Sc

PENGESAHAN

Skripsi berjudul *Fungsi Bijektif Pelabelan Antimagic pada Gabungan Graf Banana Tree* telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan pada:

hari : Jum'at

tanggal : 15 Januari 2010

tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Tim Penguji

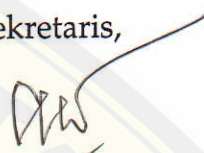
Ketua,



Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D

NIP. 19670420 199201 1 001

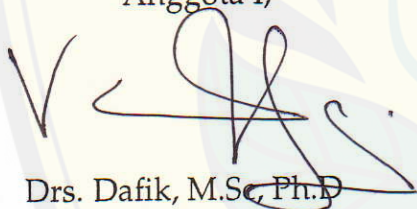
Sekretaris,



Drs. Antonius C.P, M.App.Sc

NIP. 19690928 199302 1 001

Anggota I,



Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D

NIP. 19680802 199303 1 004

Anggota II,



Drs. Toto Bara Setiawan, M.Si

NIP. 19581209 198603 1 003

Mengesahkan

Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Jember,



Drs. H. Imam Muchtar, S.H, M.Hum

NIP. 19540712 198003 1 005

RINGKASAN

Fungsi Bijektif Pelabelan Antimagic pada Gabungan Graf *Banana Tree*; Khud Biyadi, 050210101333; 2010: 62 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Salah satu model matematika yang sudah cukup dikenal dan bisa mencakup berbagai permasalahan adalah teori graf. Misalkan $G(V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E . Sebuah pemetaan satu-satu α dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ disebut pelabelan total (a, d) -sisi antimagic jika himpunan bobot sisinya $W(uv) = \alpha(u) + \alpha(v) + \alpha(uv)$ pada semua sisi G adalah $\{a, a + d, \dots, a + (e - 1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$ keduanya adalah bilangan bulat. Sebuah pelabelan total (a, d) -sisi antimagic disebut pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic jika $\alpha(V) = \{1, 2, 3, \dots, v\}$ dan $\alpha(E) = \{v + 1, v + 2, \dots, v + e\}$. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui batas atas d sehingga gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dan bagaimana fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dari pelabelan tersebut. Metode dalam menemukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ terdiri dari beberapa langkah yang diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas m, n , dan k yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Hasil penelitian ini berupa lemma dan teorema baru mengenai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ yang ditemukan dalam penelitian secara eksperimental dan pembuktiannya dilakukan secara deduktif matematik.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D selaku Dosen Pembimbing I dan Drs. Antonius C.P., M.App.Sc. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
5. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
6. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2010

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PEMBIMBINGAN	v
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
PRAKATA	viii
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
DAFTAR LAMBANG	xvi
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Batasan Masalah	5
1.4 Tujuan Penelitian	5
1.5 Manfaat Penelitian	6

DAFTAR ISI	x
2 TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Terminologi Dasar Graf	7
2.1.1 Definisi Graf	7
2.1.2 Jenis-jenis Graf	8
2.1.3 Konsep Dasar Graf	9
2.2 Graf-graf Khusus	11
2.3 Pelabelan Graf	15
2.3.1 Pelabelan total Super (a, d) -sisi antimagic	16
2.3.2 Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf <i>banana tree</i> $mB_{n,k}$	18
2.3.3 Hasil-Hasil Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Diskonektif	23
3 METODE PENELITIAN	26
3.1 Metode Penelitian	26
3.2 Definisi Operasional	26
3.3 Prosedur Penelitian	28
4 HASIL DAN PEMBAHASAN	31
4.1 Batas Atas d Gabungan Graf <i>Banana Tree</i>	31
4.1.1 Jumlah Titik dan Sisi pada Gabungan Graf <i>Banana Tree</i>	32
4.1.2 Batas Atas d Gabungan Graf <i>Banana Tree</i>	33
4.2 Fungsi Bijektif Pelabelan Total Super (a, d) -sisi Antimagic pada Gabungan Graf <i>Banana Tree</i> $mB_{n,k}$	34
4.2.1 Pelabelan Titik $(a, 1)$ -sisi Antimagic Gabungan Graf <i>Banana Tree</i> $mB_{n,k}$	34

4.2.2	Pelabelan Total Super $(a, 0)$ -Sisi Antimagic Gabungan Graf <i>Banana Tree</i> $mB_{n,k}$	38
4.2.3	Pelabelan Total Super $(a, 2)$ -Sisi Antimagic Gabungan Graf <i>Banana Tree</i> $mB_{n,k}$	42
4.2.4	Pelabelan Total Super $(a, 1)$ -Sisi Antimagic Gabungan Graf <i>Banana Tree</i> $mB_{n,k}$	44
4.2.5	Pelabelan Titik $(a, 2)$ -sisi Antimagic Gabungan Graf <i>Ba-</i> <i>nana Tree</i> $mB_{n,k}$	49
4.2.6	Pelabelan Total Super $(a, 3)$ -sisi Antimagic Gabungan Graf <i>Banana Tree</i> $mB_{n,k}$	51
4.3	Hasil dan Pembahasan	57
5	KESIMPULAN DAN SARAN	59
5.1	Kesimpulan	59
5.2	Saran	60
	DAFTAR PUSTAKA	61
	LAMPIRAN	63

DAFTAR GAMBAR

1.1	Pohon biner dari kode awalan 000, 001, 01, 10, 11	2
1.2	Contoh gabungan Graf Banana Tree	4
2.1	Contoh graf	8
2.2	Graf dengan isolated verteks	10
2.3	Contoh gabungan graf	11
2.4	Graf roda W_8	12
2.5	Graf friendship F_4	12
2.6	Graf kipas $\hat{K}_7$	13
2.7	Graf bintang S_6	14
2.8	Graf katerpillar $\hat{C}_{12}$	14
2.9	Graf <i>banana tree</i> $B_{5,6}$	15
2.10	(i) Pelabelan titik, (ii) Pelabelan sisi, (iii) Pelabelan total	16
2.11	EAVL graf <i>banana tree</i> $B_{5,7}$	19
2.12	Bobot sisi EAVL graf <i>banana tree</i> $B_{5,7}$	20
2.13	SEATL graf <i>banana tree</i> $B_{5,7}$ untuk $d = 2$	21
3.1	Gabungan graf <i>banana tree</i> $3B_{5,8}$	29
3.2	Diagram alir penelitian	30
4.1	Graf <i>banana tree</i> $B_{3,6}$	32
4.2	EAVL $5B_{7,6}$ dengan $d = 1$	36

4.3 Bobot sisi EAVL $5B_{7,6}$ dengan $d = 1$ 37

4.4 SEATL graf banana tree $5B_{7,6}$ dengan $d = 0$ 41

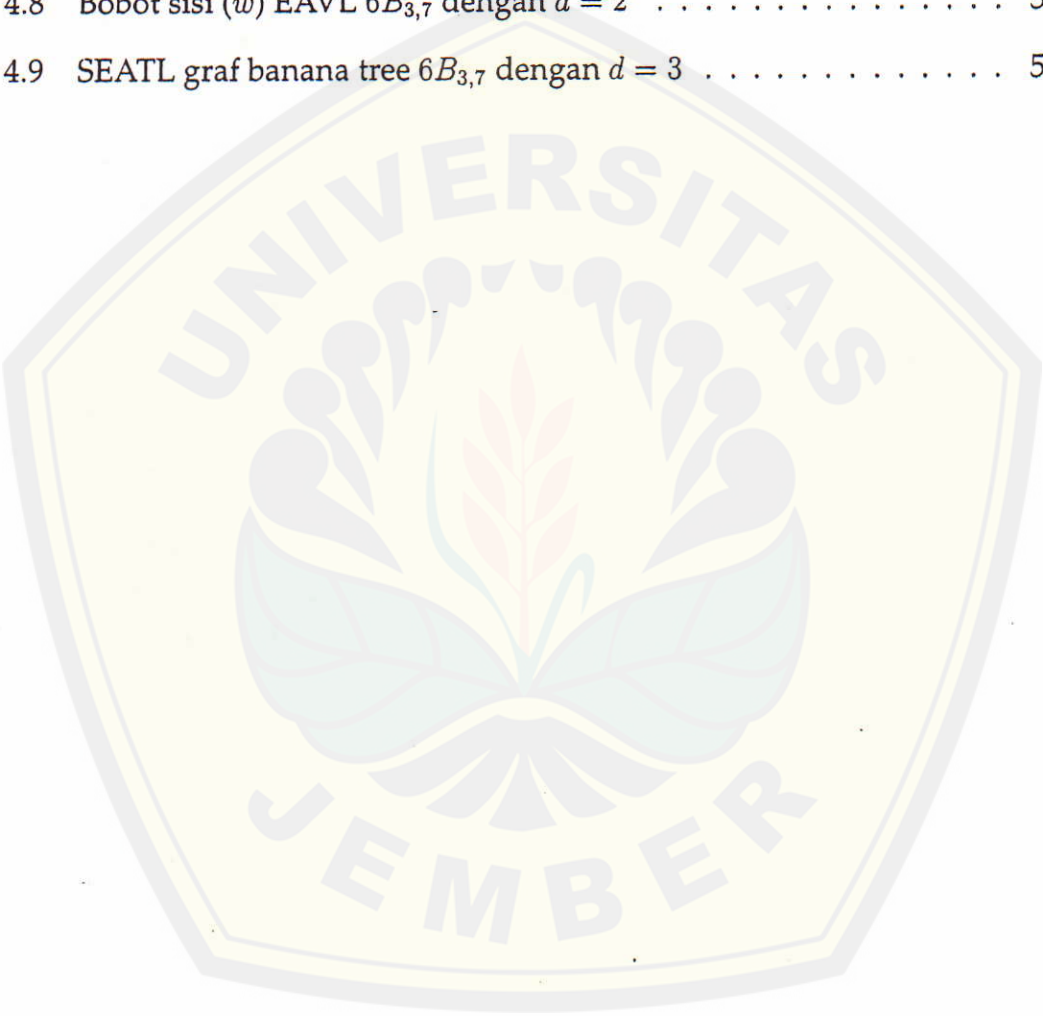
4.5 SEATL graf banana tree $5B_{7,6}$ dengan $d = 2$ 45

4.6 SEATL gabungan graf banana tree $5B_{7,9}$ dengan $d = 1$ 48

4.7 EAVL $6B_{3,7}$ dengan $d = 2$ 54

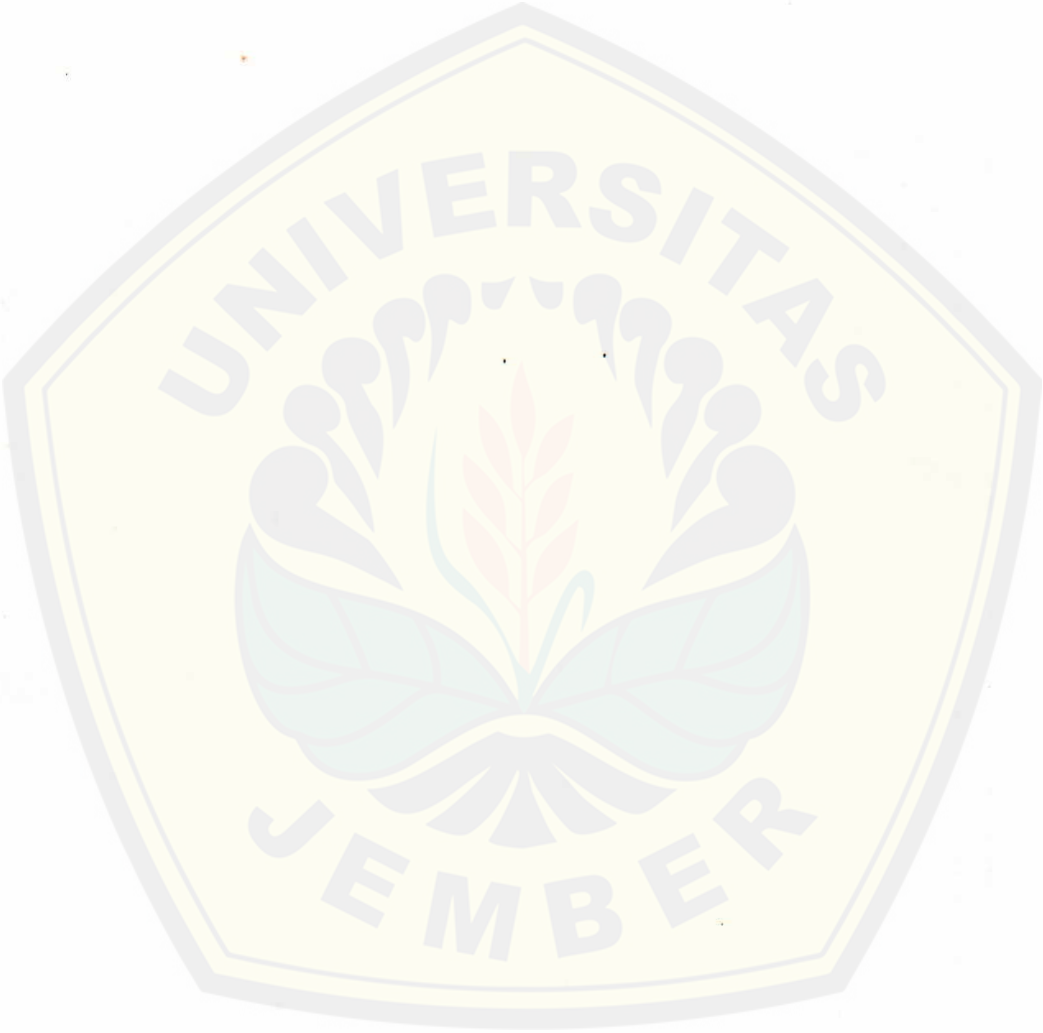
4.8 Bobot sisi (w) EAVL $6B_{3,7}$ dengan $d = 2$ 55

4.9 SEATL graf banana tree $6B_{3,7}$ dengan $d = 3$ 56



DAFTAR TABEL

2.1 Ringkasan hasil-hasil pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic
pada graf diskonektif. 23



DAFTAR LAMPIRAN

MATRIK PENELITIAN	63
FORMULIR PENGAJUAN JUDUL DAN PEMBIMBINGAN SKRIPSI . . .	64
LEMBAR KONSULTASI PENYUSUNAN SKRIPSI	65
Gambar 1. SEATL gabungan graf <i>banana tree</i> $3B_{3,4}$ dengan $d = 0$	67
Gambar 2. SEATL gabungan graf <i>banana tree</i> $5B_{5,5}$ dengan $d = 0$	68
Gambar 3. SEATL gabungan graf <i>banana tree</i> $5B_{5,8}$ dengan $d = 0$	69
Gambar 4. SEATL gabungan graf <i>banana tree</i> $7B_{7,5}$ dengan $d = 0$	70
Gambar 5. SEATL gabungan graf <i>banana tree</i> $2B_{3,5}$ dengan $d = 1$	71
Gambar 6. SEATL gabungan graf <i>banana tree</i> $3B_{5,5}$ dengan $d = 1$	72
Gambar 7. SEATL gabungan graf <i>banana tree</i> $4B_{7,5}$ dengan $d = 1$	73
Gambar 8. SEATL gabungan graf <i>banana tree</i> $4B_{7,7}$ dengan $d = 1$	74
Gambar 9. SEATL gabungan graf <i>banana tree</i> $3B_{3,4}$ dengan $d = 2$	75
Gambar 10. SEATL gabungan graf <i>banana tree</i> $5B_{5,5}$ dengan $d = 2$	76
Gambar 11. SEATL gabungan graf <i>banana tree</i> $5B_{5,8}$ dengan $d = 2$	77
Gambar 12. SEATL gabungan graf <i>banana tree</i> $7B_{7,5}$ dengan $d = 2$	78
Gambar 13. SEATL gabungan graf <i>banana tree</i> $2B_{3,4}$ dengan $d = 3$	79
Gambar 14. SEATL gabungan graf <i>banana tree</i> $4B_{3,5}$ dengan $d = 3$	80
Gambar 15. SEATL gabungan graf <i>banana tree</i> $6B_{3,9}$ dengan $d = 3$	81

DAFTAR LAMBANG

$G(V, E)$	= Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
$V(G)$	= Himpunan titik pada graf G
$E(G)$	= Himpunan sisi pada graf G
$EAVL$	= <i>Edge antimagic vertex labeling</i> atau pelabelan titik sisi antimagic
$SEATL$	= <i>Super edge antimagic total labeling</i> atau pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic
S_n	= Lambang graf bintang dengan n titik
$B_{n,k}$	= Lambang graf <i>banana tree</i>
$x_{i,l}$	= Titik ke- i dan ke- l pada komponen n dan k ($1 \leq i \leq n$ dan $0 \leq l \leq k - 1$) pada graf <i>banana tree</i> $B_{n,k}$ dengan n adalah jumlah graf bintang dan k merupakan jumlah titik masing-masing graf bintang yang salah satu daunnya dihubungkan pada titik pusat
p	= Titik pusat pada graf <i>banana tree</i> $B_{n,k}$
$x_{i,0}x_{i,l}$	= Sisi yang titik ujungnya $x_{i,0}$ dan $x_{i,l}$ pada graf <i>banana tree</i> $B_{n,k}$
$\alpha(x_{i,l})$	= Fungsi bijektif pelabelan titik ($x_{i,l}$)
$w_\alpha(x_{i,0}x_{i,l})$	= Bobot sisi $x_{i,0}x_{i,l}$ dari pelabelan titik α
$\alpha(x_{i,0}x_{i,l})$	= Fungsi bijektif label sisi $x_{i,0}x_{i,l}$
$W_\alpha(x_{i,0}x_{i,l})$	= Bobot sisi $x_{i,0}x_{i,l}$ dari pelabelan total α
$mB_{n,k}$	= Lambang gabungan dari m graf <i>banana tree</i> $B_{n,k}$
$x_{i,l}^j$	= Titik $x_{i,l}$ ke- j dalam komponen m ($1 \leq j \leq m$) pada gabungan graf <i>banana tree</i> $mB_{n,k}$, dengan m adalah banyaknya copy graf <i>banana tree</i>
p_j	= Titik pusat ke- j pada komponen m pada gabungan graf <i>banana tree</i> $mB_{n,k}$
$x_{i,0}^j x_{i,l}^j$	= Sisi yang titik ujungnya $x_{i,0}^j$ dan $x_{i,l}^j$ pada gabungan graf <i>banana tree</i> $mB_{n,k}$
$\alpha(x_{i,l}^j)$	= Fungsi bijektif pelabelan titik ($x_{i,l}^j$)
$w_\alpha(x_{i,0}^j x_{i,l}^j)$	= Bobot sisi $x_{i,0}^j x_{i,l}^j$ dari pelabelan titik α
$\alpha(x_{i,0}^j x_{i,l}^j)$	= Fungsi bijektif label sisi $x_{i,0}^j x_{i,l}^j$
$W_\alpha(x_{i,0}^j x_{i,l}^j)$	= Bobot sisi $x_{i,0}^j x_{i,l}^j$ dari pelabelan total α



BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan disiplin ilmu yang memberikan sumbangan langsung dan mendasar terhadap berbagai aspek kehidupan manusia. Bahkan, CF. Gauss (dalam Tampomas, 2003) menyatakan bahwa matematika adalah ratu dari ilmu. Matematika juga bisa berfungsi sebagai alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dengan menggunakan matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan.

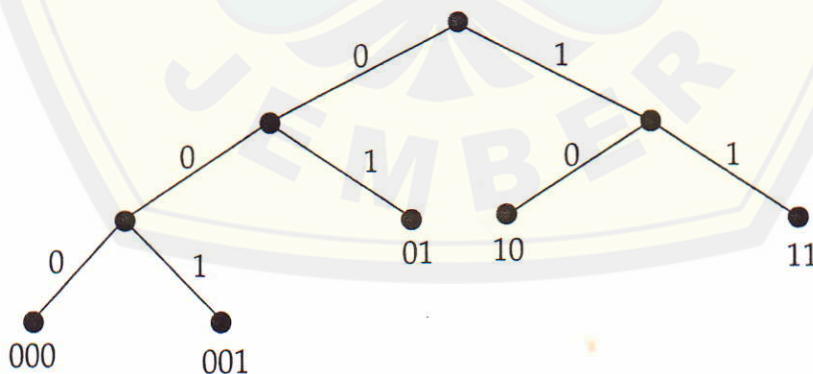
Penyederhanaan penyajian suatu masalah dapat dilakukan dengan membuat model matematika dari masalah tersebut. Suatu model matematika dapat digunakan untuk mengidentifikasi berbagai masalah atau situasi dalam kehidupan sehari-hari. Konstruksi dari suatu model matematika dapat dibuat dalam berbagai cara dan digunakan untuk menyelesaikan masalah yang berbeda-beda. Salah satu model matematika yang sudah cukup dikenal dan bisa mencakup berbagai permasalahan adalah teori graf (*graph theory*).

Teori graf merupakan pokok bahasan yang mempunyai banyak terapan sampai saat ini. Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan diantara objek-objek tersebut. Salah satu bukti nyata dari pentingnya penggunaan teori graf dalam kehidupan sehari-hari adalah ketika L. Euler (pada tahun 1736) dapat membuktikan bahwa dalam sebuah acara jalan-jalan, orang tidak mungkin hanya sekali menyeberangi setiap jembatan Konigsberg-Jerman (yang jumlahnya ada tujuh buah), jika orang tersebut ingin kembali ke tempat semula.

Terdapat beberapa jenis graf dan salah satu diantaranya adalah pohon (*tree*). Diantara sekian banyak konsep dalam teori graf, konsep pohon merupakan konsep yang paling penting, khususnya bagi orang yang tertarik dengan penerapan graf. Hal itu dikarenakan terdapat banyak aplikasi graf pohon yang berkaitan dengan permasalahan kehidupan sehari-hari. Salah satu bentuk aplikasi dari pohon adalah kode awalan.

Kode awalan (*prefix code*) adalah himpunan kode, misalnya kode biner, sedemikian sehingga tidak ada anggota kumpulan yang merupakan awalan dari anggota yang lain. Himpunan {000, 001, 01, 10, 11} merupakan kode awalan, sedangkan {1, 00, 01, 000, 0001} bukan kode awalan karena 00 adalah prefiks dari 0001 (Munir, 2003:402). Kode awalan mempunyai pohon biner yang bersesuaian. Sisi diberi label 0 atau 1. Pelabelan sisi harus konsisten, yakni semua sisi kiri dilabeli 0 saja sedangkan sisi kanan dilabeli 1 saja, atau semua sisi kiri dilabeli 1 saja dan sisi kanan dilabeli 0 saja. Gambar 1.1 menunjukkan pohon biner dari himpunan {000, 001, 01, 10, 11}.

Kegunaan dari kode awalan adalah untuk mengirim pesan pada komunikasi data. Setiap karakter di dalam pesan direpresentasikan dengan barisan angka 0 dan 1. untuk mengirim pesan kita cukup mengirimkan *string* angka 0 dan 1 yang merepresentasikan karakter di dalam pesan. Oleh pihak penerima, *string* angka 0 dan 1 ini dikembalikan lagi ke karakter penyusun semula.



Gambar 1.1: Pohon biner dari kode awalan 000, 001, 01, 10, 11

Bab 1. Pendahuluan

Dari Gambar 1.1, tampak bahwa setiap sisi pada pohon dilabeli dengan angka 0 atau 1. Ini merupakan salah satu contoh pelabelan graf. Pelabelan merupakan pokok bahasan yang banyak menarik perhatian. Hal itu dikarenakan model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk berbagai macam aplikasi, misalnya radar, sistem alamat pada jaringan komunikasi, desain sirkuit, bioinformatika, teori pengkodean, automata dan kristalografi sinar X (Dafik, 2008:2). Pelabelan (pemberian nilai) pada graf adalah pemetaan satu-satu yang membawa elemen dari graf (titik dan atau sisi) ke himpunan bilangan bulat positif.

Pelabelan graf pertama kali muncul pada tahun 1960-an yang diawali oleh hipotesis Ringel dan karya ilmiah Rosa pada tahun 1967 (Slamin; 2001: 287). Pada tahun 1967 Rosa menyebut pelabelan ini sebagai pelabelan β - *valuation* dari graf G dengan e sisi, jika terdapat fungsi f yang memetakan satu-satu dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{0, 1, 2, \dots, e\}$ sedemikian hingga setiap sisi xy di G mendapat label $|f(x) - f(y)|$ yang berbeda untuk setiap sisi pada graf G .

Terdapat berbagai jenis pelabelan dalam graf, salah satu diantaranya adalah pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic (SEATL), dimana a bobot sisi terkecil dan d nilai beda. Pelabelan ini diperkenalkan oleh Simanjutak, Bertault dan Miller pada tahun 2000 (Dafik, 2008:19). Dalam hal ini yang dimaksud bobot sisi adalah jumlah label sisi dan label titik yang terdapat pada ujung sisi tersebut dan pelabelan total adalah dengan melabeli semua titik dan sisinya. Sedangkan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic merupakan pelabelan total yang dimulai dengan melabeli seluruh titik terlebih dahulu dengan bilangan asli yang berurutan, kemudian dilanjutkan dengan melabeli seluruh sisi sedemikian hingga bobot sisinya membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama a dan beda d .

Pada graf diskonektif (gabungan graf saling lepas), hasil-hasil pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic belum banyak ditemukan, terutama untuk jenis graf dari family tree. Salah satu jenis graf yang merupakan famili dari

tree adalah *banana tree*. *Banana tree* adalah suatu graf yang diperoleh dengan menghubungkan tepat satu daun (titik yang berderajat 1) dari n graf bintang ke suatu titik tunggal yang disebut akar. Graf *banana tree* dilambangkan $B_{n,k}$ dengan $n \geq 2$, $k \geq 4$, n dan k bilangan bulat. Sedangkan gabungan graf yang dimaksud dalam penelitian ini adalah gabungan saling lepas dari beberapa graf atau graf diskonektif.

Gabungan dari m buah graf G (ditulis mG) diartikan sebagai graf dengan m komponen, dimana setiap komponennya adalah graf G . Selanjutnya, dalam penelitian ini yang dimaksud gabungan graf *banana tree* adalah gabungan dari m graf *banana tree*. Gambar 1.2 merupakan contoh gabungan dua buah graf *banana tree* yang masing-masing diperoleh dengan menghubungkan tiga graf bintang.



Gambar 1.2: Contoh gabungan Graf Banana Tree

Permasalahan tersebut di atas mendorong penulis untuk meneliti bagaimana cara melabeli graf *banana tree* dengan pelabelan super (a, d) -sisi antimagic, dengan terlebih dahulu menentukan batas atas d . Kemudian menentukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* untuk nilai d yang telah ditemukan. Langkah terakhir adalah menentukan konstruksi fungsi bijektif dari pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf *banana tree*. Sehingga pada penelitian ini penulis memilih judul "**Fungsi Bijektif Pelabelan Antimagic Pada Gabungan Saling Lepas Graf *Banana Tree***".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan permasalahan dalam penelitian ini yaitu:

1. berapa batas atas d sehingga gabungan graf *banana tree* mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic?
2. bagaimana fungsi bijektif dari pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree*?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini permasalahannya dibatasi pada:

1. graf tak berarah yang berhingga dan sederhana, yaitu graf yang tidak mempunyai loop dan sisi ganda;
2. pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ dengan $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 4$. m menyatakan banyaknya jumlah *banana tree* yang digabung sehingga $m \geq 2$. Sedangkan batasan nilai n dan k disesuaikan dengan definisi dari graf *banana tree*.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. mengetahui batas atas d sehingga gabungan graf *banana tree* mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic?
2. mengetahui fungsi bijektif dari pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree*?

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

1. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam bidang pelabelan graf yaitu mengetahui ada tidaknya pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree*;
2. memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf jenis lain.



BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

Sebelum membahas lebih lanjut tentang penelitian ini, berikut disajikan beberapa konsep dasar graf yang berkaitan dengan penelitian ini.

2.1 Terminologi Dasar Graf

2.1.1 Definisi Graf

Dalam Kreyszig (1993:481), secara kasar graf tersusun atas titik-titik yang dinamakan *verteks*, dan garis-garis yang menghubungkan titik-titik tersebut dinamakan *sisi*. Namun secara matematis, suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , yang dalam hal ini:

V = himpunan tak kosong dari semua titik (*verteks*)

$$= \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

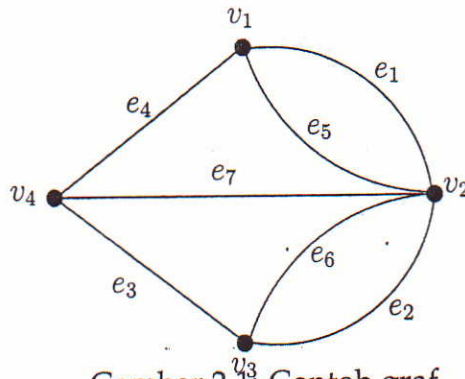
dan

E = himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang titik

$$= \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

Definisi di atas menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada, minimal satu (Munir, 2003:291). Titik pada graf dapat dinomori dengan huruf, dengan bilangan asli, atau dengan menggunakan huruf dan angka (bilangan asli). Misalkan v_i dan v_j adalah titik pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan titik v_i dan v_j dinyatakan dengan pasangan (v_i, v_j) atau dengan lambang $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$.

Secara geometri, graf digambarkan sebagai sekumpulan noktah (titik) di dalam bidang datar yang dihubungkan dengan sekumpulan garis (sisi). Gambar 2.1 memperlihatkan sebuah graf dengan himpunan titik V dan himpunan



Gambar 2.1: Contoh graf

sisi E adalah :

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$\begin{aligned} E &= \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_1, v_4), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4)\} \\ &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \end{aligned}$$

Sisi e_1 dan e_5 merupakan contoh *multiple edge*, yaitu beberapa sisi (*edge*) yang menghubungkan titik-titik ujung yang sama. Selain itu, sebuah graf juga dimungkinkan mempunyai satu atau lebih *loop*, yaitu sebuah sisi yang titik-titik ujungnya adalah verteks yang sama.

2.1.2 Jenis-jenis Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Terdapat beberapa kriteria untuk mengelompokkan graf, beberapa diantaranya adalah pengelompokan berdasarkan jumlah titik atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

Jumlah titik pada suatu graf G (dinotasikan dengan $|V(G)|$) disebut *order*, dan jumlah sisi disebut dengan *size* dan dinyatakan dengan $|E(G)|$. Berdasarkan jumlah titik pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf berhingga

Graf berhingga adalah graf yang jumlah titiknya berhingga.

2. Graf tak berhingga

Graf yang jumlah titiknya tak berhingga disebut graf tak berhingga.

Sisi pada graf dapat mempunyai orientasi arah. Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas dua jenis, yaitu:

1. Graf tak berarah

Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak berarah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$ adalah sisi yang sama.

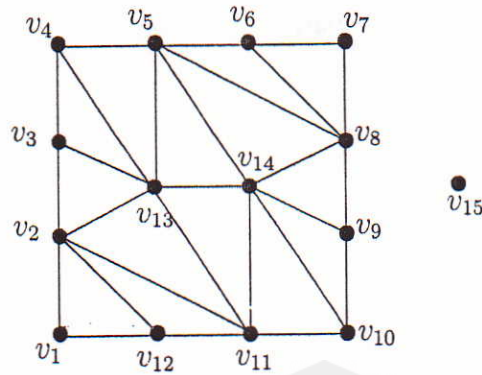
2. Graf berarah

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut graf berarah. Pada graf berarah, (v_i, v_j) dan (v_j, v_i) menyatakan dua buah sisi yang berbeda. Untuk sisi (v_i, v_j) , titik v_i dinamakan titik asal dan titik v_j disebut titik terminal.

2.1.3 Konsep Dasar Graf

Misalkan $e = (v_i, v_j)$ merupakan sebuah sisi pada graf G , yaitu v_i dan v_j adalah titik ujung dari e , maka verteks v_i dikatakan *adjacent* (berelasi) terhadap verteks v_j dan edge e *incident* (terhubung) pada v_i dan v_j . Sedangkan derajat sebuah verteks v pada sebuah graf G ditulis dengan $\deg(v)$, adalah jumlah edge yang *incident* (terhubung) pada v , dengan kata lain jumlah edge yang memuat v sebagai titik ujung (Lipschutz dan Lipson, 2002: 7). Jika semua titik pada graf G mempunyai derajat yang sama n maka graf G disebut graf *regular* n . Jika terdapat sebuah titik yang tidak mempunyai sisi yang *incident* dengannya atau dengan kata lain derajat titik tersebut $= 0$, maka titik tersebut dinamakan titik *terpencil* (*isolated vertex*). Dari Gambar 2.2, tampak bahwa verteks v_2 bertetangga (berelasi) dengan verteks v_1, v_3, v_{11}, v_{12} , dan v_{13} sehingga derajat dari v_2 adalah 5 dan v_{15} merupakan contoh *isolated vertex* karena tidak ada sisi yang terhubung dengan v_{15} .

Perhatikan kembali Gambar 2.2, himpunan $\{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_5, v_5\}$ disebut lintasan (*path*) yang panjangnya 4. Secara umum, lintasan yang panjangnya n dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n di dalam graf G didefinisikan seba-



Gambar 2.2: Graf dengan isolated verteks

gai barisan selang-seling titik-titik dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1)$, $e_2 = (v_1, v_2)$, $e_3 = (v_2, v_3), \dots$, $e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf G (Munir, 2003: 306)

Sebuah *path* α dapat dituliskan sebagai:

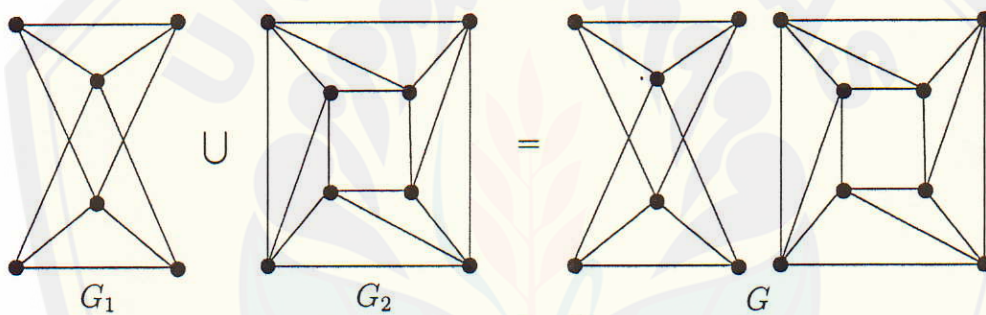
1. $\alpha = \{v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n\}$
2. $\alpha = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}$ atau $\alpha = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ jika graf yang ditinjau adalah graf yang sederhana, yaitu graf yang tidak mempunyai *loop* dan *multiple edge*.

Jika terdapat sebuah *path* $\alpha = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, maka dikatakan sederhana jika semua vertexnya berbeda dan disebut *trail* jika semua sisinya berbeda. α juga bisa dikatakan tertutup jika $v_0 = v_n$, yaitu jika titik asal α = titik akhir α . Selain itu, *path* α juga bisa disebut *cycle* (putaran) jika tertutup dan semua vertexnya berbeda kecuali $v_0 = v_n$. Sebuah *cycle* dengan panjang K disebut *cycle K*. *Cycle* pada sebuah graf harus mempunyai panjang 3 atau lebih. Jarak antara v_i dan v_j biasa di tulis dengan $d(v_i, v_j)$ merupakan panjang sebuah *path* terpendek antara v_i dan v_j . Jika tidak ada *path* antara v_i dan v_j maka $d(v_i, v_j)$ tidak terdefinisi.

Dua buah titik v_i dan v_j dikatakan terhubung jika terdapat lintasan dari v_i ke v_j . Sedangkan graf tak berarah G disebut graf terhubung (*connected graph*) jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j didalam himpunan V terdapat lintasan

dari v_i ke v_j . Jika tidak, maka G disebut graf tak terhubung (*disconnected graph*). Graf yang hanya terdiri dari satu titik tetap disebut graf terhubung karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri.

Gabungan dari dua graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$, didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titiknya adalah $V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1) \cup E(G_2)$. Pada Gambar 2.3, graf G merupakan gabungan graf G_1 dan G_2 , yaitu $G = G_1 \cup G_2$. Graf gabungan mG didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari m buah kopi graf G , atau dapat juga dikatakan sebagai graf dengan m komponen, dimana setiap komponennya adalah graf G . Dengan kata lain $mG = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \dots \cup G_m$, dengan $G_1 = G_2 = G_3 = \dots = G_m = G$. Misal graf G mempunyai p titik dan q sisi, maka graf mG mempunyai mp titik dan mq sisi (Wijaya, 2001:85).



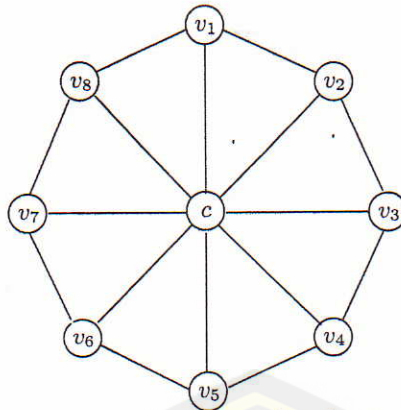
Gambar 2.3: Contoh gabungan graf

2.2 Graf-graf Khusus

Beberapa family graf adalah sebagai berikut:

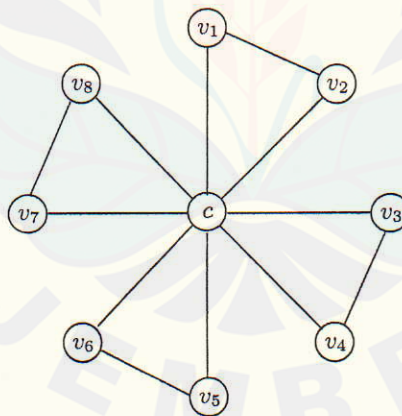
1. Graf Roda

Graf roda W_n ($n \geq 3$) adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lingkaran C_n dengan suatu titik yang disebut pusat. Jadi, W_n terdiri dari $n + 1$ titik dan $2n$ sisi. Sebagai contoh perhatikan W_8 pada Gambar 2.4.

Gambar 2.4: Graf roda W_8

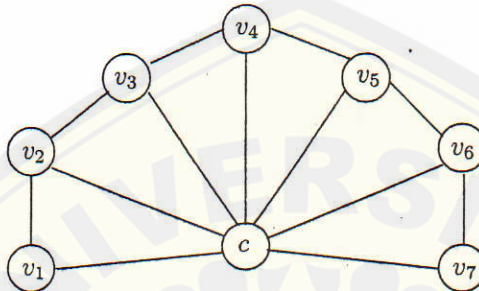
2. Graf *Friendship*

Graf *friendship* F_n adalah graf yang terdiri dari n segitiga dengan tepat 1 titik persekutuan yang disebut dengan titik pusat. Gambar 2.5 adalah contoh graf *friendship*.

Gambar 2.5: Graf friendship F_4

3. Graf Kipas (*fan*)

Graf kipas $\hat{K}_n (n \geq 3)$ adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lintasan P_n dengan suatu titik yang disebut pusat. Jadi, $\hat{K}_n$ terdiri dari $n + 1$ titik dan $2n - 1$ sisi. Misalkan $c, v_1, v_2, \dots, v_n$ adalah titik pada graf kipas $\hat{K}_n$ dengan c merupakan titik pusat, maka $cv_1, cv_2, \dots, cv_n, v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ adalah sisi-sisi dari $\hat{K}_n$. Untuk contoh, perhatikan $\hat{K}_n$ pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6: Graf kipas $\hat{K}_7$

4. Graf Pohon (*Tree*)

Graf pohon T_n adalah graf terhubung dengan n titik dan tidak memuat graf lingkaran (*cycle*). Pengurangan satu sisi pada suatu graf pohon mengakibatkan graf tersebut menjadi graf tak-terhubung, sebaliknya penambahan satu sisi mengakibatkan terbentuknya subgraf lingkaran. Graf pohon yang terdiri dari verteks tunggal dan tidak mempunyai sisi disebut *tree degenerate*. Beberapa graf yang termasuk tipe graf pohon adalah *katerpillar*, *binatang*, dan *banana tree*.

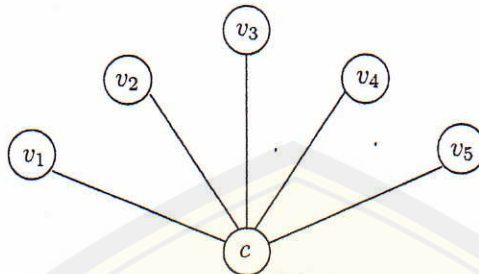
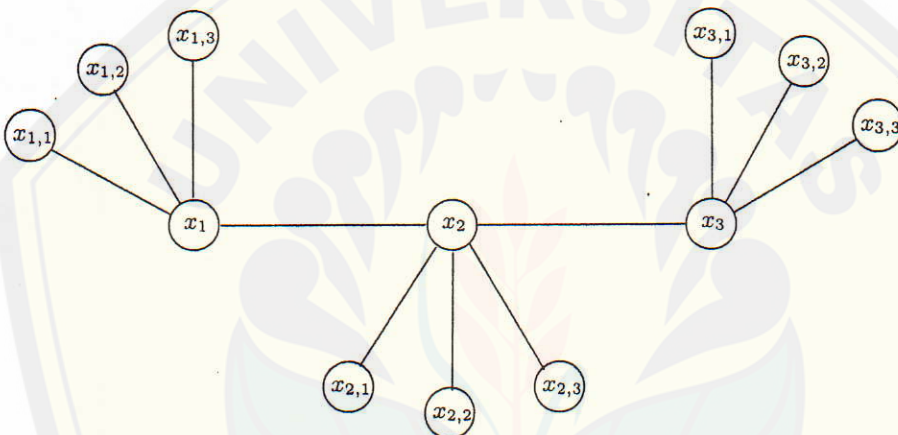
5. Graf Bintang

Graf bintang $S_n, n \geq 3$ adalah graf pohon yang terdiri dari 1 titik yang berderajat $n - 1$ dan $n - 1$ titik yang berderajat 1. Jadi, graf bintang S_n terdiri dari n titik dan $n - 1$ sisi. Sebagai ilustrasi perhatikan graf S_6 pada Gambar 2.7.

6. Graf Katerpillar (*Cartepillar*)

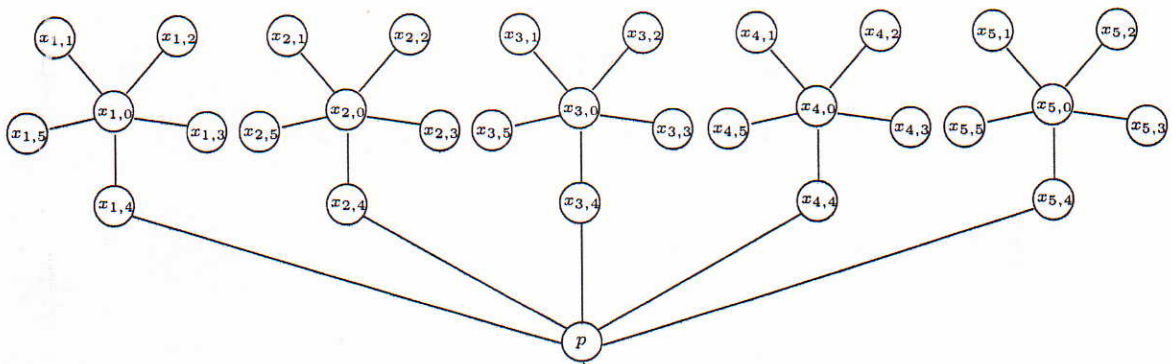
Katerpillar $\hat{C}_n$ adalah sebuah graf yang berasal dari sebuah path dengan menggantungkan beberapa nomor daun pada titik-titik path. Katerpillar

dapat dianggap sebagai sebuah rangkaian beberapa graf star $S_1 \cup S_2 \cup \dots S_i$, dimana setiap S_i adalah sebuah graf star dengan pusat c dan daun-daun n_i ; $i = 1, 2, \dots, r$; dan daun-daun S_i termasuk c_{i-1} dan c_{i+1} , $i = 2, \dots, r-1$ (Sugeng, 2007:97). Untuk contoh, perhatikan $\hat{C}_{12}$ pada Gambar 2.8.

Gambar 2.7: Graf bintang S_6 Gambar 2.8: Graf katepillar $\hat{C}_{12}$

7. Graf Banana Tree

Graf *banana tree* $B_{n,k}$ ($n \geq 2, k \geq 4$) seperti didefinisikan oleh Chen dkk. (1997) adalah suatu graf yang diperoleh dengan menghubungkan tepat satu daun (titik yang berderajat 1) dari n copy graf bintang ke suatu titik tunggal yang disebut akar. Gambar 2.9 berikut ini merupakan contoh graf *banana tree* $B_{5,6}$ yang diperoleh dengan menghubungkan 5 graf bintang (S_5) dengan titik p . Didefinisikan $x_{i,l}$ merupakan titik ke- i pada komponen n dan titik ke- l pada komponen k ($1 \leq i \leq n$ dan $0 \leq l \leq k-1$) dan p adalah titik pusat pada graf *banana tree* $B_{n,k}$, maka gambar graf *banana tree* beserta labelnya disajikan pada gambar 2.9.

Gambar 2.9: Graf *banana tree* $B_{5,6}$

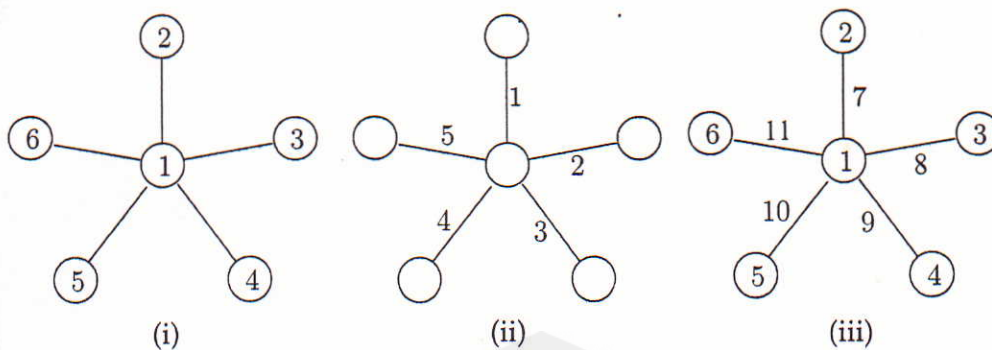
2.3 Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan satu-satu dan onto (fungsi bijektif) yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif. Secara umum, fungsi f yang memetakan himpunan A ke dalam B disebut fungsi satu-satu jika setiap elemen dalam A mempunyai bayangan yang berbeda pada B dan disebut onto jika dan hanya jika range f sama dengan B . Secara lebih singkat, $f : A \rightarrow B$ adalah satu-satu jika $f(a) = f(a')$ maka $a = a'$ dan merupakan onto jika $f(A) = B$. Sehingga, fungsi yang memetakan himpunan elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif disebut fungsi bijektif jika tidak ada dua buah elemen yang berbeda pada graf yang mempunyai bayangan yang sama atau dengan kata lain semua elemen pada graf dinomori dengan bilangan bulat positif yang berbeda. Secara matematik, definisi pelabelan graf dapat dituliskan sebagai berikut:

Pelabelan graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan : $D \rightarrow N$, dimana D : domain, N : himpunan label dari G . Jika,

- $D = V$ maka disebut pelabelan titik
- $D = E$ maka disebut pelabelan sisi
- $D = V \cup E$ maka disebut pelabelan total

Pada pelabelan titik, jumlah label dua titik yang menempel pada suatu sisi disebut *bobot sisi*. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka



Gambar 2.10: (i) Pelabelan titik, (ii) Pelabelan sisi, (iii) Pelabelan total

disebut pelabelan titik sisi ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama a dan beda d maka pelabelan tersebut disebut pelabelan titik sisi anti ajaib (*edge antimagic vertex labelling* (EAVL)).

Sedangkan dalam pelabelan total, bobot sisi diartikan sebagai jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada suatu sisi. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total-sisi-ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmetika dengan suku pertama a dan beda d maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total sisi anti ajaib (pelabelan total sisi antimagic) (Dartono, 2006).

2.3.1 Pelabelan total Super (a, d) -sisi antimagic

Pelabelan total (a, d) -sisi antimagic pertama kali diperkenalkan oleh Rinovia Simanjuntak, Mirka Miller, dan Francois Bertault pada tahun 2000. Pelabelan total (a, d) -sisi antimagic pada graf $G = G(V, E)$ adalah pemetaan satu-satu dari $V(G) \cup E(G)$ pada $\{1, 2, 3, \dots, v + e\}$, sedemikian hingga himpunan bobot sisi dari semua sisi di G adalah $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + (e - 1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$. Sedangkan pelabelan total (a, d) -sisi antimagic disebut pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic (*super edge antimagic total labeling* (SEATL))

$f(V) = \{1, 2, \dots, v\}$ dan $f(E) = \{v+1, v+2, \dots, v+e\}$. Untuk mencari batas atas nilai beda d pada pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dapat ditentukan dengan teorema sebagai berikut (Dafik. 2007:26):

Lemma 2.3.1 Jika sebuah graf (V, E) mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic maka $d \leq \frac{2v+e-5}{e-1}$

Bukti:

$f(V) = \{1, 2, 3, \dots, v\}$ dan $f(E) = \{v+1, v+2, \dots, v+e\}$

Misalkan graf (V, E) mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan pemetaan $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v+e\}$. Nilai minimum yang mungkin dari bobot sisi terkecil merupakan hasil jumlah label sisi terkecil dan dua label titik terkecil yang menempel pada sisi tersebut, yaitu $1 + (v+1) + 2 = v+4$. Dapat ditulis :

$$v+4 \leq a$$

Sedangkan pada sisi yang lain, Nilai maksimum yang mungkin dari bobot sisi terbesar merupakan jumlah label sisi terbesar dan dua label titik terbesar yang menempel pada sisi tersebut, yaitu $(v-1) + (v+e) + v = 3v+e-1$. Karena banyaknya sisi adalah e , maka berdasarkan rumus deret aritmatika, bobot sisi terbesar $a + (e-1)d$. Akibatnya:

$$\begin{aligned} a + (e-1)d &\leq 3v+e-1 \\ \Leftrightarrow (v+4) + (e-1)d &\leq 3v+e-1 \\ \Leftrightarrow d &\leq \frac{3v+e-1-(v+4)}{e-1} \\ \Leftrightarrow d &\leq \frac{2v+e-5}{e-1} \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan tersebut terbukti bahwa $d \leq \frac{2v+e-5}{e-1}$ sehingga dapat diperoleh nilai d dari berbagai famili graf. Secara harfiah, pelabelan total (a, d) -sisi antimagic dan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic memuat perluasan gagasan dari total (a, d) -sisi magic dan pelabelan total super (a, d) -sisi magic (Baca dan Miller, 2007:37). $\square$

2.3.2 Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf *banana tree* $mB_{n,k}$

Berikut ini disajikan salah satu teknik untuk menemukan pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada graf *banana tree* untuk $d = 2$ yang diperoleh dengan pengembangan penulis sendiri dengan mengacu pada hasil penelitian pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada gabungan graf cycle (oleh Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D). Sedangkan untuk nilai d yang lain dapat diperoleh dengan teknik yang sama seperti mencari $d = 2$ yang akan dipaparkan berikut ini. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Menentukan EAVL pada graf *banana tree* dengan teknik *pattern recognition*.

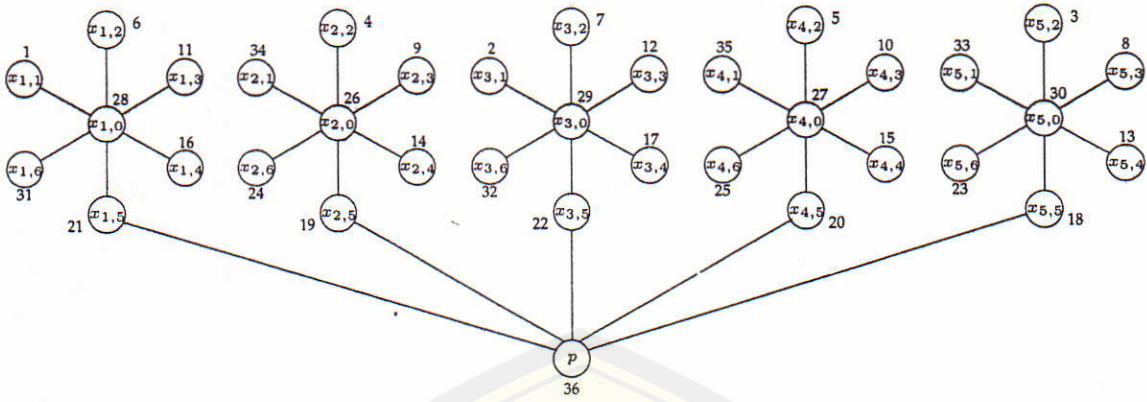
Misalkan $\alpha(x_{i,l})$ dan $\alpha(p)$ masing-masing adalah fungsi bijektif label titik $x_{i,l}$ dan p , maka dengan mengamati pola dan menggunakan konsep barisan dan deret diperoleh fungsi bijektif label titik sebagai berikut:

$$\alpha(x_{i,l}) = \begin{cases} (l-1)n + \frac{i+1}{2}; & \text{jika } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2), 1 \leq l \leq k-2 \\ \frac{(2l-3)n+i+1}{2}; & \text{jika } i \text{ genap, } 2 \leq l \leq k-1 \\ \frac{(2l-3)n+1}{2}; & \text{jika } i = n, 2 \leq l \leq k-2 \\ (k-2)n + \frac{i}{2}; & \text{jika } i \text{ genap, } l = 0 \\ \frac{(2k-3)n+i}{2}; & \text{jika } i \text{ ganjil, } l = 0 \end{cases}$$

$$\alpha(x_{i,l}) = \begin{cases} (k-1)n + \frac{i+1}{2}; & \text{jika } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2), l = k-1 \\ \frac{(2k-1)n+1}{2}; & \text{jika } i = n, l = 1 \\ \frac{(2k-1)n+i+1}{2}; & \text{jika } i \text{ genap, } l = 1 \end{cases}$$

$$\alpha(p) = nk + 1$$

Sebagai contoh, perhatikan EAVL graf *banana tree* $B_{5,7}$ pada Gambar 2.11. Dari Gambar 2.11 diperoleh bahwa barisan bobot sisinya membentuk barisan aritmatika dengan beda 1.

Gambar 2.11: EAVL graf *banana tree* $B_{5,7}$

2. Menentukan fungsi bijektif bobot sisi EAVL

Misalkan w adalah fungsi bijektif bobot sisi EAVL (pelabelan titik $\alpha(x_{i,l})$ dan $\alpha(p)$), maka w dapat diperoleh dengan mengelompokkan terlebih dahulu bobot sisi dengan i yang berurutan dan membentuk deret aritmatika. Dengan cara yang sama akan diperoleh fungsi bijektif untuk bobot sisi dan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$w_1(x_{i,0}x_{i,l}) = \frac{2k+2l-5}{2}n + \frac{2i+1}{2}; \text{ untuk } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2) \text{ dan } 1 \leq l \leq k-2$$

$$w_2(x_{i,0}x_{i,l}) = \frac{2k+2l-7}{2}n + \frac{2i+1}{2}; \text{ untuk } i \text{ genap dan } 2 \leq l \leq k-1$$

$$w_3(x_{i,0}x_{i,l}) = \frac{(2k+2l-5)n+1}{2}; \text{ untuk } i = n \text{ dan } 2 \leq l \leq k-1$$

$$w_4(x_{i,0}x_{i,l}) = \frac{4k-5}{2}n + \frac{2i+1}{2}; \text{ untuk } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2) \text{ } l = k-1 \text{ atau untuk } i \text{ genap, } l = 1$$

$$w_6(x_{i,0}x_{i,l}) = \frac{(4k-3)n+1}{2}; \text{ untuk } i = n \text{ dan } l = 1$$

$$w_7(px_{i,k-2}) = (2k-3)n + \frac{i+3}{2}; \text{ untuk } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2)$$

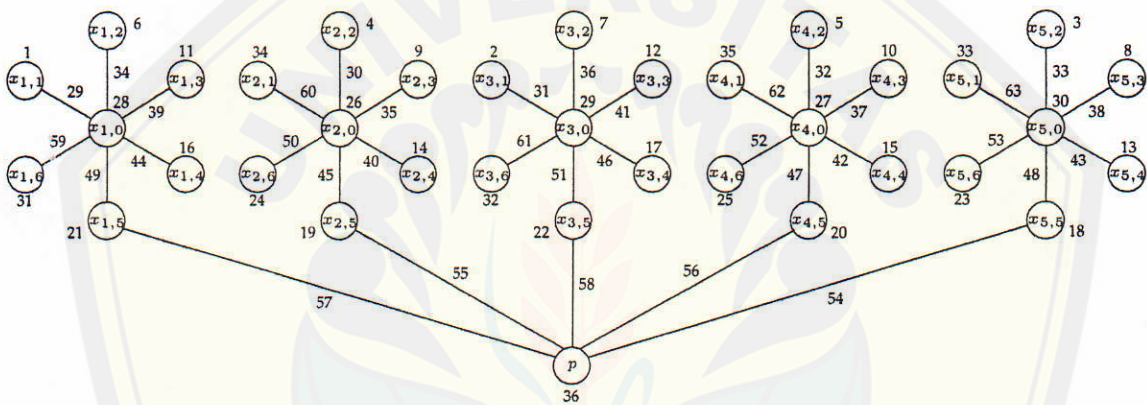
$$w_8(px_{i,k-2}) = \frac{4k-7}{2}n + \frac{i+3}{2}; \text{ untuk } i \text{ genap}$$

$$w_9(px_{i,k-2}) = \frac{(4k-7)n+3}{2}; \text{ untuk } i = n$$

Perhatikan himpunan $w = \{w_1, w_2, w_3, w_9, w_8, w_7, w_4, w_5, w_6\}$. Tampak bahwa bobot sisi terkecil terletak pada w_1 dan bobot sisi terbesar terletak pada w_6 . Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1$ dan $l = 1$ pada

w_1 diperoleh $w = \frac{(2k-3)n+3}{2}$, substitusi $i = 2$ dan $l = 2$ pada w_2 diperoleh $w = \frac{(2k-3)n+5}{2}$, substitusi $i = 3$ dan $l = 1$ pada w_1 diperoleh $w = \frac{(2k-3)n+7}{2}$, ..., $w = w_6 \Leftrightarrow w = \frac{(4k-3)n+1}{2}$. Dapat dinyatakan bahwa w membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $\frac{(2k-3)n+3}{2}$ dan beda 1 (satu), atau dapat dituliskan $w = \{\frac{(2k-3)n+3}{2}, \frac{(2k-3)n+5}{2}, \frac{(2k-3)n+7}{2}, \dots, \frac{(4k-3)n+1}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa pelabelan titik $\alpha(x_{i,l})$ dan $\alpha(p)$ adalah pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi antimagic.

Untuk lebih memahami bobot sisi graf *banana tree*, perhatikan Gambar 2.12. Pada Gambar 2.12, angka pada sisi merupakan bobot sisi dari pelabelan titik (EAVL).



Gambar 2.12: Bobot sisi EAVL graf *banana tree* $B_{5,7}$

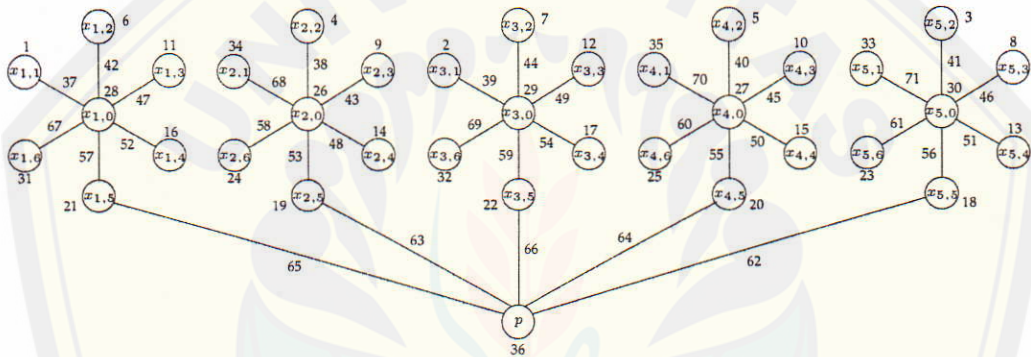
3. Tentukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic (SEATL) pada graf *banana tree* $B_{3,6}$ untuk $d = 2$ dengan teknik:

Lengkapi pelabelan titik dengan melabeli sisi-sisinya sehingga menjadi pelabelan total super $(a, 2)$ -sisi antimagic. Misalkan $\alpha(x_{i,0}x_{i,l})$ adalah label sisi $x_{i,0}x_{i,l}$ dan $\alpha(px_{i,k-2})$ adalah label sisi $px_{i,k-2}$, maka dengan mengamati pola dan menggunakan konsep barisan dan deret akan diperoleh label sisi sebagai berikut:

$$\alpha_1(x_{i,0}x_{i,l}) = (k + l - 1)n + i + 1; \text{ untuk } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n - 2) \quad 1 \leq l \leq k - 2$$

$$\begin{aligned}\alpha_2(x_{i,0}x_{i,l}) &= (k+l-2)n+i+1; \text{ untuk } i \text{ genap } 2 \leq l \leq k-1 \\ \alpha_3(x_{i,0}x_{i,l}) &= (k+l-1)n+1; \text{ untuk } i = n \ 2 \leq l \leq k-1 \\ \alpha_4(x_{i,0}x_{i,l}) &= (2k-1)n+i+1; \text{ untuk } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2) \ l = k-1 \\ \alpha_5(x_{i,0}x_{i,l}) &= (2k-1)n+i+1; \text{ untuk } i \text{ genap } l = 1 \\ \alpha_6(x_{i,0}x_{i,l}) &= 2nk+1; \text{ untuk } i = n \ l = 1 \\ \alpha_7(px_{i,k-2}) &= \frac{(4k-3)n+i}{2}; \text{ untuk } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2) \\ \alpha_8(px_{i,k-2}) &= (2k-2)n + \frac{i}{2} + 2; \text{ untuk } i \text{ genap} \\ \alpha_9(px_{i,k-2}) &= (2k-2)n+2; \text{ untuk } i = n\end{aligned}$$

Sebagai ilustrasi, perhatikan Gambar 2.13 yang merupakan SEATL graf *banana tree* $B_{5,7}$ untuk $d = 2$ berikut ini.



Gambar 2.13: SEATL graf *banana tree* $B_{5,7}$ untuk $d = 2$

4. Menentukan fungsi bobot sisi pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic (SEATL)

Dalam pelabelan total (SEATL), bobot sisi (W) diartikan sebagai jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada suatu sisi atau dengan kata lain dengan menjumlahkan bobot sisi EAVL (w) dan label sisinya, atau secara matematik dinyatakan sebagai berikut:

$$W = w + \alpha_w$$

dengan α_w merupakan label sisi yang mempunyai bobot sisi EAVL w .

Hal ini berarti bahwa untuk menentukan nilai W , harus ditentukan dulu w dan α_w dengan syarat batas i dan l yang sama.

Perhatikan kembali fungsi bijektif bobot sisi dan fungsi bijektif label sisi. Tampak bahwa syarat batas i dan l untuk $w_1(x_{i,0}x_{i,l})$ sama dengan syarat batas i dan l untuk $\alpha_1(x_{i,0}x_{i,l})$, syarat batas i dan l untuk $w_2(x_{i,0}x_{i,l})$ sama dengan syarat batas i dan l untuk $\alpha_2(x_{i,0}x_{i,l})$, syarat batas i dan l untuk $w_3(x_{i,0}x_{i,l})$ sama dengan syarat batas i dan l untuk $\alpha_3(x_{i,0}x_{i,l})$, dan seterusnya. Sehingga fungsi bijektif W dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_1(x_{i,0}x_{i,l}) &= w_1(x_{i,0}x_{i,l}) + \alpha_1(x_{i,0}x_{i,l}) \\ &= \frac{(4k+4l-7)n+3}{2} + 2i; \text{ untuk } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2) \text{ dan } 1 \leq l \leq k-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2(x_{i,0}x_{i,l}) &= w_2(x_{i,0}x_{i,l}) + \alpha_2(x_{i,0}x_{i,l}) \\ &= \frac{(4k+4l-11)n+3}{2}n + 2i; \text{ untuk } i \text{ genap dan } 2 \leq l \leq k-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_3(x_{i,0}x_{i,l}) &= w_3(x_{i,0}x_{i,l}) + \alpha_3(x_{i,0}x_{i,l}) \\ &= \frac{(4k+4l-7)n+5}{2}; \text{ untuk } i = n \text{ dan } 2 \leq l \leq k-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_4(x_{i,0}x_{i,l}) &= w_4(x_{i,0}x_{i,l}) + \alpha_4(x_{i,0}x_{i,l}) \\ &= \frac{(8k-7)n+4i+3}{2}; \text{ untuk } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n/2) \text{ dan } l = k-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_5(x_{i,0}x_{i,l}) &= w_5(x_{i,0}x_{i,l}) + \alpha_5(x_{i,0}x_{i,l}) \\ &= \frac{(8k-7)n+4i+3}{2}; \text{ untuk } i \text{ genap dan } l = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_6(x_{i,0}x_{i,l}) &= w_6(x_{i,0}x_{i,l}) + \alpha_6(x_{i,0}x_{i,l}) \\ &= \frac{(8k-3)n+3}{2}; \text{ untuk } i = n \text{ dan } l = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_7(px_{i,k-2}) &= w_7(px_{i,k-2}) + \alpha_7(px_{i,k-2}) \\ &= \frac{(8k-9)n+2i+7}{2}; \text{ untuk } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_8(px_{i,k-2}) &= w_8(px_{i,k-2}) + \alpha_8(px_{i,k-2}) \\ &= \frac{(8k-11)n+2i+7}{2}; \text{ untuk } i \text{ genap} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_9(px_{i,k-2}) &= w_9(px_{i,k-2}) + \alpha_9(px_{i,k-2}) \\ &= \frac{(8k-11)n+7}{2}; \text{ untuk } i = n \end{aligned}$$

Perhatikan himpunan $W = \{W_1, W_2, W_3, W_9, W_8, W_7, W_4, W_5, W_6\}$. Dengan mengamati fungsi bijektif bobot sisi pelabelan total W , maka da-

pat disimpulkan bahwa bobot sisi membentuk barisan aritmatika dengan beda $d = 2$. Bobot sisi terkecil terletak pada W_1 dan bobot sisi terbesar terletak pada W_6 . Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1$ dan $l = 1$ pada W_1 diperoleh $W = \frac{(4k-3)n+7}{2}$, substitusi $i = 2$ dan $l = 2$ pada W_2 diperoleh $W = \frac{(4k-3)n+11}{2}$, substitusi $i = 3$ dan $l = 1$ pada W_1 diperoleh $W = \frac{(4k-3)n+15}{2}, \dots, W = W_6 \Leftrightarrow W = \frac{(8k-3)n+3}{2}$. Dapat dinyatakan bahwa W membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $\frac{(4k-3)n+7}{2}$ dan beda 2 (dua), atau dapat dituliskan $W = \{\frac{(4k-3)n+7}{2}, \frac{(4k-3)n+11}{2}, \frac{(4k-3)n+15}{2}, \dots, \frac{(8k-3)n+3}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa pelabelan $\alpha(x_{i,l}), \alpha(p), \alpha(x_{i,0}x_{i,l}),$ dan $\alpha(px_{i,k-2})$ adalah pelabelan total super $(a, 2)$ -sisi antimagic pada graf *banana tree* $B_{n,k}$.

5. menentukan nilai a untuk pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf *banana tree*

Telah dibuktikan bahwa $W = \{\frac{(4k-3)n+7}{2}, \frac{(4k-3)n+11}{2}, \frac{(4k-3)n+15}{2}, \dots, \frac{(8k-3)n+3}{2}\}$. Sehingga diperoleh nilai $a = \frac{(4k-3)n+7}{2}$ dan dapat disimpulkan graf *banana tree* $B_{n,k}$ mempunyai Super $(\frac{(4k-3)n+7}{2}, 2)$ -EATL; jika n ganjil, $n \geq 3$, dan $k \geq 4$. Penulis akan menggunakan teknik ini untuk menentukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree*.

2.3.3 Hasil-Hasil Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Graf Diskonektif

Pada bagian ini disajikan rangkuman hasil pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf diskonektif seperti yang terlihat pada tabel 2.1:

Tabel 2.1: Ringkasan hasil-hasil pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf diskonektif.

Graf	d	Catatan
$P_n \cup P_{n+1}$	$1 \leq d \leq 3$	(i) $d \in \{1, 3\}$ dan $n \geq 2$ (ii) $d = 2, n \geq 3$, dan n bilangan ganjil (Sudarsana, et all, 2005)
halaman selanjutnya		

Tabel 2.1 – lanjutan.

Graf	d	Catatan
		<u>Open problem:</u> • $d = 2$ untuk n genap
$nP_2 \cup P_n$	$1 \leq d \leq 3$	$d \in \{1, 2\}$ dan $n \geq 2$ (Sudarsana, et all, 2005) <u>Open problem:</u> • $d = 3$ for $n \geq 2$
$nP_2 \cup P_{n+2}$	$1 \leq d \leq 4$	$d \in \{1, 2\}$ dan $n \geq 1$ (Sudarsana, et all, 2005) <u>Open problem:</u> • $d \in \{3, 4\}$ untuk $n \geq 1$
mK_n	$d \leq 5$	jika dan hanya jika (i) $d \in \{0, 2\}$ dan $n \in \{2, 3\}$, $m \geq 3$ ganjil, atau (ii) $d = 1$ dan $m, n \geq 2$, atau (iii) $d \in \{3, 5\}$ dan $n = 2$, $m \geq 2$, atau (iv) $d = 4$ dan $n = 2$, $m \geq 3$ ganjil (M. Bača dan C. Barrientos, submitted)
$mK_{n,n}$	$d \leq 5$	(i) jika $d = 1$ untuk semua m dan n (ii) jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $n = 1$ dan $m \geq 3$ ganjil (iii) jhj $d \in \{3, 5\}$ untuk $n = 1$ dan semua $m \geq 2$ (iv) jhj $d = 4$ untuk $n = 1$ dan semua $m \geq 3$ ganjil (M. Bača dan C. Barrientos, submitted) <u>Open problem:</u> • jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $n = 3$ dan $m \geq 3$ ganjil
mC_n	$d \leq 2$	jika setiap (i) $d \in \{0, 2\}$ untuk $m, n \geq 3$ ganjil (ii) $d = 1$ untuk semua $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ (Dafik, et all, in press)
mP_n	$d \leq 5$	jika setiap (i) $d \in \{1, 3\}$ untuk semua m dan n (ii) $d \in \{0, 2\}$ untuk semua m, n ganjil
halaman selanjutnya		

Tabel 2.1 – lanjutan.

Graf	d	Catatan
		(iii) $d \in \{4, 5\}$ untuk semua m dan $n = 2$ (Dafik, <i>et all</i> , in press)
$mK_{n,n,n}$	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk m ganjil dan n sembarang (Dafik, <i>et all</i> , in press)
$mK_{n,n,\dots,n}$	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk m, n ganjil (Dafik, <i>et all</i> , 2006)
$mC_n \odot \overline{K_n}$	$d \leq 2$	jika setiap (i) $d \in \{0, 2\}$ untuk $m, n \geq 3$ ganjil (ii) untuk semua $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ (M. Bača, <i>et all</i> , in press)
$mP_n \cup \mu C_n$	$d \leq 2$	jika setiap (i) $d \in \{0, 2\}$ untuk setiap $m + \mu$ dan n ganjil (ii) $d = 1$ untuk m genap (Dafik, <i>et all</i> , in press)
$mK_{1,m} \cup K_{1,n}$	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $n + 1$ faktor dari m (Dafik, <i>et all</i> , in press)
$mK_{1,m} \cup S_{k,1}$	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk m, n sembarang (Dafik, <i>et all</i> , in press)
m -caterpillar	$d \leq 5$	$d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ untuk m, n sembarang (M. Bača, <i>et all</i> , in press)
mL_n	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk m, n ganjil (M. Fuad, 2009)

BAB 3

METODE PENELITIAN



3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan aksioma atau teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree*. Dalam penelitian ini, terlebih dahulu akan ditentukan nilai beda (d) pada gabungan graf *banana tree*, selanjutnya nilai d tersebut diterapkan dalam pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree*. Jika terdapat pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic, maka akan dirumuskan bagaimana fungsi bijektif dari pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* tersebut.

3.2 Definisi Operasional

Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi operasional variabel yang dimaksud adalah sebagai berikut:

1. Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic

Pelabelan graf adalah suatu pemetaan satu-satu (fungsi bijektif) yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif. Jika yang dilabeli hanya titiknya saja maka disebut pelabelan titik, jika yang dilabeli hanya sisinya saja maka disebut pelabelan sisi, sedangkan jika yang dilabeli adalah titik dan sisinya maka disebut pelabelan total.

Pelabelan total (a, d) -sisi antimagic adalah sebuah pemetaan satu-satu f dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, v + e\}$ sehingga himpunan bobot sisinya pada semua sisi G adalah $\{a, a + d, \dots, a + (e - 1)d\}$ untuk $a > 0$ dan $d \geq 0$ adalah bilangan bulat. Sebuah pelabelan total (a, d) -sisi antimagic disebut pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic jika $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, v\}$ dan $f(E) = \{v + 1, v + 2, \dots, v + e\}$.

2. Graf Banana Tree

Graf bintang S_n , $n \geq 3$ adalah graf pohon yang terdiri dari 1 titik yang berderajat n dan n titik yang berderajat 1. Jadi, graf bintang S_n terdiri dari $n + 1$ titik dan n sisi. Misalkan x_0 adalah titik yang berderajat n (titik pusat) dan $V(S_n) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, maka $E(S_n) = \{x_0x_1, x_0x_2, \dots, x_0x_n\}$. Sedangkan graf *banana tree* $B_{n,k}$ (untuk $n \geq 2$, $k \geq 4$) adalah suatu graf yang diperoleh dengan menghubungkan tepat satu daun (titik yang berderajat 1) dari n copy graf bintang ke suatu titik tunggal yang disebut akar.

Gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ (untuk $m \geq 2$, $n \geq 2$, $k \geq 4$) didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari sebanyak m copy graf *banana tree* yang mempunyai himpunan titik $V(mB_{n,k}) = \{x_{i,l}^j p_j : 1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq m, 0 \leq l \leq k - 1\}$ dan himpunan sisi $E(mB_{n,k}) = \{x_{i,0}^j x_{i,l}^j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq l \leq k - 1\} \cup \{p_j x_{i,l}^j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, l = k - 2\}$.

Definisikan $x_{i,l}$ merupakan titik ke- i dan titik ke- l ($1 \leq i \leq n$ dan $0 \leq l \leq k - 1$) dengan n merupakan jumlah graf bintang pada $B_{n,k}$ dan k merupakan jumlah titik salah satu graf bintang yang masing-masing dihubungkan pada titik pusat p pada graf *banana tree* $B_{n,k}$, maka $x_{i,l}^j$ merupakan titik $x_{i,l}$ ke- j ($1 \leq j \leq m$) dan p_j adalah titik pusat ke- j pada komponen m pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$. Sebagai ilustrasi perhatikan gabungan graf *banana tree* $3B_{5,8}$ beserta titik $x_{i,l}^j$ dan p_j pada Gambar 3.1.

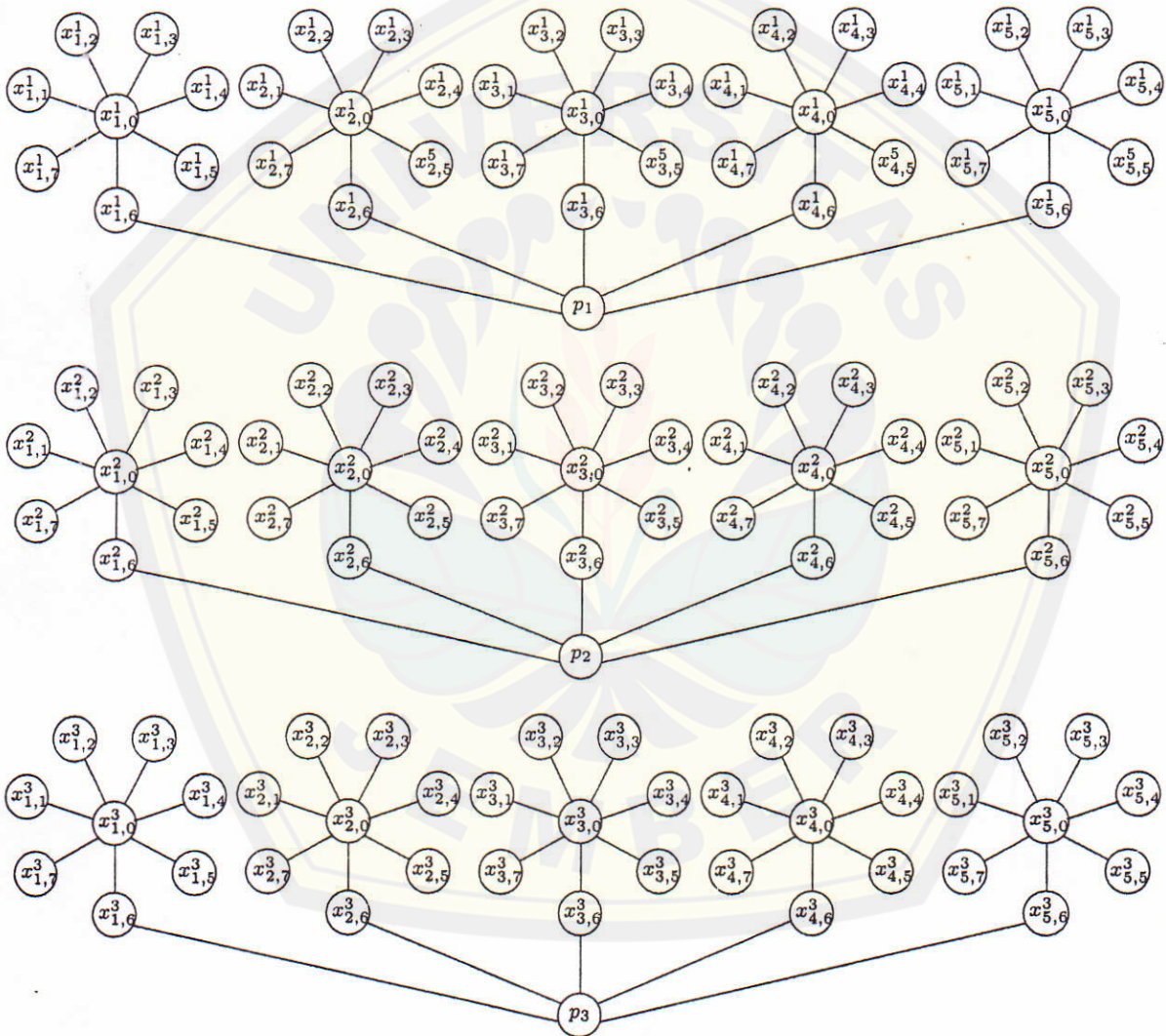
3.3 Prosedur Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada gabungan graf *banana tree*. Jika pada graf tersebut ditemukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola (*pattern recognition*). Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut :

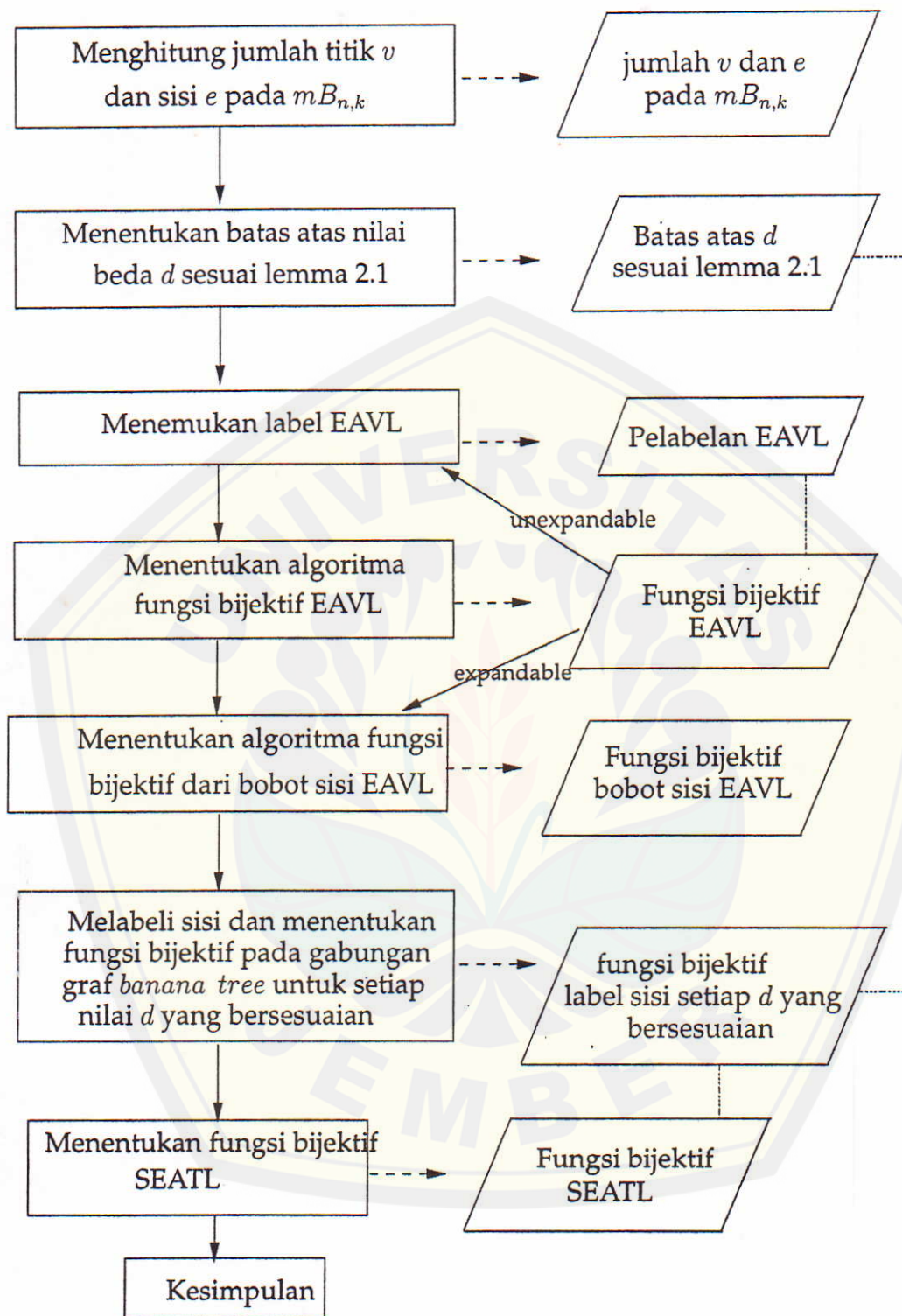
- (a) menghitung jumlah titik v dan sisi e pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$;
- (b) menentukan batas atas nilai beda d pada graf $mB_{n,k}$ sesuai dengan Lemma 2.3.1;
- (c) menentukan pelabelan titik (a, d) -sisi antimagic/EAVL (*edge-antimagic vertex labeling*) pada graf $mB_{n,k}$ untuk d yang bersesuaian;
- (d) menentukan fungsi bijektif EAVL pada graf $mB_{n,k}$;
- (e) menentukan fungsi bijektif dari bobot sisi EAVL pada graf $mB_{n,k}$;
- (f) melabeli graf $mB_{n,k}$ dengan SEATL (*super edge antimagic total labeling*) atau pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan melengkapi pelabelan sisi untuk nilai beda d yang bersesuaian;
- (g) menentukan fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf $mB_{n,k}$ /SEATL (*super edge antimagic total labelling*);
- (h) menentukan fungsi bijektif dari bobot sisi SEATL pada graf $mB_{n,k}$

Secara sistematis, langkah-langkah penelitian di atas disajikan dalam diagram alir. Dalam diagram alir tersebut, terlihat bahwa kalimat yang berada dalam kotak merupakan proses penelitian, sedangkan hasilnya ditandai dengan belah ketupat. Pada diagram alir tersebut juga terdapat tanda panah yang diberi keterangan *expandable* dan *unexpandable*. Tanda panah berlabel *expandable* berarti pelabelan graf tersebut dapat dikembangkan dengan syarat batas yang lebih besar, sedangkan *unexpandable* adalah kebalikannya.

Dalam diagram alir tersebut, aliran proses merupakan rangkaian proses secara terurut mulai awal proses sampai ditemukannya fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree*. Aliran hasil menunjukkan hasil dari proses yang bersesuaian. Sedangkan aliran pengecekan algoritma untuk mengetahui kesesuaian fungsi bijektif yang ditemukan dengan fungsi bijektif yang telah ditemukan sebelumnya dan juga untuk mengecek kebenaran fungsi bijektif yang telah ditemukan.



Gambar 3.1: Gabungan graf *banana tree* $3B_{5,8}$



Keterangan:

————— : aliran proses
 - - - - - : aliran hasil

————— : aliran pengecekan algoritma

Gambar 3.2: Diagram alir penelitian



BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan hasil penelitian tentang pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* dan hasil akhirnya berupa fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* yang diawali dengan menentukan nilai d , menentukan $EAVL$ dan bobot sisi $EAVL$, kemudian menentukan $SEATL$ dan diakhiri dengan menentukan bobot sisi $SEATL$ untuk membuktikan bahwa gabungan graf *banana tree* mempunyai $SEATL$. Hasil utama dari penelitian ini adalah lemma dan teorema yang ditunjukkan dengan tanda $\diamond$. Terdapat 2 (dua) lemma dan 4 (empat) teorema baru yang ditemukan dalam penelitian secara eksperimental dan pembuktiannya dilakukan secara deduktif matematik.

Format penyajian temuan penelitian diawali dengan penyajian teorema kemudian dilanjutkan bukti dan dilengkapi dengan beberapa contoh sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema. Berikut ini akan dijelaskan tahapan-tahapan bagaimana teorema itu ditemukan sekaligus sebagai jawaban dari rumusan masalah penelitian.

4.1 Batas Atas d Gabungan Graf *Banana Tree*

Penentuan batas atas d merupakan hal yang penting dalam penelitian ini. Dengan mengetahui batas atas ini maka peneliti memiliki gambaran seberapa banyak gabungan graf *banana tree* memiliki super (a, d) -sisi antimagic. Untuk menentukan nilai-nilai d ini, penentuan jumlah titik v dan jumlah sisi e gabungan graf *banana tree* merupakan sarat perlu.

4.1.1 Jumlah Titik dan Sisi pada Gabungan Graf *Banana Tree*

Berdasarkan definisi, graf *banana tree* $B_{n,k}$ ($n \geq 2, k \geq 4$) adalah suatu graf yang diperoleh dengan menghubungkan tepat satu daun (titik yang berderajat 1) dari n graf bintang ke suatu titik tunggal yang disebut akar. Graf bintang S_k merupakan graf pohon dengan $k - 1$ titik berderajat satu dan satu titik berderajat $k - 1$, sehingga graf bintang S_k mempunyai k titik dan $k - 1$ sisi. Dari definisi graf bintang dan *banana tree* tersebut diperoleh jumlah titik graf *banana tree* adalah satu (jumlah titik akar) ditambah n kali jumlah titik graf bintang S_k . Karena jumlah titik graf bintang $S_k = k$, maka jumlah titik graf *banana tree* $B_{n,k} = nk + 1$. Sebagai ilustrasi, perhatikan graf *banana tree* $B_{3,6}$ pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1: Graf *banana tree* $B_{3,6}$

Sedangkan jumlah sisi graf *banana tree* merupakan jumlah sisi yang menghubungkan setiap graf bintang (pada *banana tree*) ke titik akar ditambah n kali jumlah sisi graf bintang. Telah disebutkan bahwa graf *banana tree* merupakan suatu graf yang diperoleh dengan menghubungkan tepat satu daun (titik yang berderajat 1) dari n copy graf bintang ke suatu titik tunggal yang disebut akar, sehingga jumlah sisi yang menghubungkan setiap graf bintang dengan titik akar = n (karena terdapat n graf bintang). Karena graf bintang S_k mempunyai $k - 1$ sisi, maka jumlah sisi graf *banana tree* $B_{n,k} = n + n(k - 1) = nk$.

Gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ merupakan graf dengan m komponen dengan setiap komponennya adalah graf *banana tree* $B_{n,k}$, sehingga jumlah titik gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ adalah m kali jumlah titik graf *banana tree* $B_{n,k}$ dan jumlah sisi gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ adalah m kali jumlah sisi graf

banana tree $B_{n,k}$. Misalkan $|V(mB_{n,k})| = v$ adalah jumlah titik gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ dan $|E(mB_{n,k})| = e$ adalah jumlah sisi gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$, maka:

$$v = m(nk + 1) = mnk + m \quad \text{dan} \quad e = m(nk) = mnk$$

4.1.2 Batas Atas d Gabungan Graf *Banana Tree*

Berdasarkan Lemma 2.3.1 maka nilai d dapat diperoleh dengan memanfaatkan formula $d \leq \frac{2v+e-5}{e-1}$. Dengan mensubstitusikan jumlah titik graf gabungan *banana tree* dan jumlah sisi graf gabungan *banana tree*, akan diperoleh:

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{2v + e - 5}{e - 1} \\ &= \frac{2(mnk + m) + mnk - 5}{mnk - 1} \\ &= \frac{3mnk + 2m - 5}{mnk - 1} \\ &= \frac{3mnk - 3 + 2m - 2}{mnk - 1} \\ &= \frac{3mnk - 3}{mnk - 1} + \frac{2m - 2}{mnk - 1} \\ &= \frac{3(mnk - 1)}{mnk - 1} + \frac{2m - 2}{mnk - 1} \\ \Leftrightarrow d &\leq 3 + \frac{2m - 2}{mnk - 1} \end{aligned}$$

Karena $mnk - 1 > 2m - 2$, maka $\frac{2m-2}{mnk-1} < 1$. Sehingga berlaku:

$$\begin{aligned} d &\leq 3 + \frac{2m - 2}{mnk - 1} \\ \Leftrightarrow d &< 3 + 1 \\ \Leftrightarrow d &< 4 \end{aligned}$$

Karena pelabelan dalam SEAT menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai $d \geq 0$ dan d bilangan bulat. Sehingga dapat disimpulkan $d \in \{0, 1, 2, 3\}$. Selanjutnya akan ditentukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic sesuai dengan nilai d yang telah ditemukan.

4.2 Fungsi Bijektif Pelabelan Total Super (a, d) -sisi Antimagic pada Gabungan Graf *Banana Tree* $mB_{n,k}$

Metode dalam menemukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ terdiri dari beberapa langkah yang diawali dengan menggunakan pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas m , n , dan k yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Setelah fungsi bijektif diketahui maka harus dibuktikan secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari teorema atau lemma. Perlu diketahui bahwa lemma dan teorema dalam penelitian ini adalah bukan lemma atau teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Dari hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika (lihat lampiran sebagai contoh), maka diperoleh beberapa lemma dan teorema sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

4.2.1 Pelabelan Titik $(a, 1)$ -sisi Antimagic Gabungan Graf *Banana Tree* $mB_{n,k}$

Setelah mengetahui batas atas nilai d , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan terlebih dahulu menentukan pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ sekaligus menentukan fungsi bijektifnya. Berikut ini lemma yang berkaitan dengan pelabelan titik tersebut di atas.

◇ **Lemma 4.2.1** *Ada pelabelan titik $(\frac{2mnk-3mn+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 4$.*

Bukti. Untuk $1 \leq j \leq m$, definisikan pelabelan $\alpha_1 : V(mB_{n,k}) \rightarrow \{1, 2, \dots, mnk + m\}$ maka pelabelan α_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

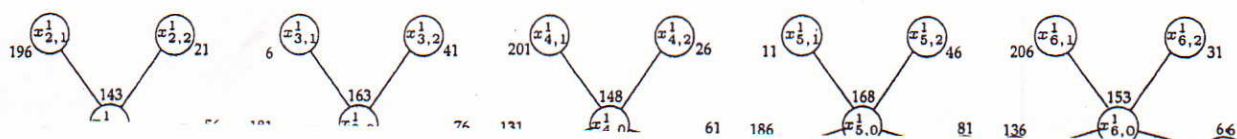
$$\alpha_1(x_{i,l}^j) = \begin{cases} \frac{(l-1)4n+2i-1+(-1)^j}{4}m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2), \\ & 1 \leq l \leq k-2 \\ \frac{(2l-3)2n+2i-1+(-1)^j}{4}m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } i \text{ genap, } 2 \leq l \leq k-1 \\ \frac{(2l-3)2n-1+(-1)^j}{4}m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } i = n, 2 \leq l \leq k-1 \\ \frac{(4k-7-(-1)^i)n+2i-3-(-1)^j}{4}m + \frac{j}{2}; & \text{jika } l = 0 \\ \frac{(k-1)4n+2i-1+(-1)^j}{4}m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2), \\ & l = k-1 \\ \frac{(2k-1)2n-1+(-1)^j}{4}m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } i = n, l = 1 \\ \frac{(2k-1)2n+2i-1+(-1)^j}{4}m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } i \text{ genap, } l = 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\alpha_1(p_j) = \frac{4kn + 1 - (-1)^j}{4}m + \frac{j}{2} \quad (4.2)$$

Dari persamaan di atas, dapat dipahami bahwa $\alpha_1(x_{i,l}^j)$ dan $\alpha_1(p_j)$ adalah fungsi bijektif yang memetakan $V(mB_{n,k})$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \dots, mnk + m\}$. Jika w_{α_1} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan titik α_1 , maka w_{α_1} dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{\alpha_1}^1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= \frac{(2k+2l-5)n+(i-1)2}{2}m + \frac{2j+1}{2}; \text{ jika } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2), 1 \leq l \leq k-2 \\ w_{\alpha_1}^2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= \frac{(2k+2l-7)n+(i-1)2}{2}m + \frac{2j+1}{2}; \text{ jika } i \text{ genap, } 2 \leq l \leq k-1 \\ w_{\alpha_1}^3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= \frac{(2k+2l-5)n-2}{2}m + \frac{2j+1}{2}; \text{ jika } i = n, 2 \leq l \leq k-1 \\ w_{\alpha_1}^4(p_j x_{i,l}^j) &= \frac{(4k-7)}{2}mn + \frac{2j+1}{2}; \text{ jika } i = n, l = k-2 \\ w_{\alpha_1}^5(p_j x_{i,l}^j) &= \frac{(4k-7)n+i}{2}m + \frac{2j+1}{2}; \text{ jika } i \text{ genap, } l = k-2 \\ w_{\alpha_1}^6(p_j x_{i,l}^j) &= (2k-3)mn + \frac{mi+1}{2} + j; \text{ jika } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2), l = k-2 \\ w_{\alpha_1}^7(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= \frac{(4k-5)n+(i-1)2}{2}m + \frac{2j+1}{2}; \text{ jika } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2), l = k-1, \\ &\text{atau } i \text{ genap, } l = 1 \\ w_{\alpha_1}^8(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= \frac{(4k-3)n-2}{2}m + \frac{2j+1}{2}; \text{ jika } i = n, l = 1 \end{aligned}$$

Perhatikan Himpunan bobot sisi $w_{\alpha_1} = \{w_{\alpha_1}^1, w_{\alpha_1}^2, w_{\alpha_1}^3, w_{\alpha_1}^4, w_{\alpha_1}^5, w_{\alpha_1}^6, w_{\alpha_1}^7, w_{\alpha_1}^8\}$. Tampak bahwa bobot sisi terkecil terletak pada $w_{\alpha_1}^1$ dan bobot sisi terbesar terletak pada $w_{\alpha_1}^8$. Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1, j = 1$ dan $l = 1$





pada $w_{\alpha_1}^1$ diperoleh $w_{\alpha_1} = \frac{2mnk-3mn+3}{2}$, substitusi $i = 1, j = 2$ dan $l = 1$ pada $w_{\alpha_1}^1$ diperoleh $w_{\alpha_1} = \frac{2mnk-3mn+5}{2}$, substitusi $i = 1, j = 3$ dan $l = 1$ pada $w_{\alpha_1}^1$ diperoleh $w_{\alpha_1} = \frac{2mnk-3mn+7}{2}, \dots$, substitusi $j = m$ pada $w_{\alpha_1}^8$ diperoleh $w_{\alpha_1} = \frac{4mnk-3mn+1}{2}$. Dapat dinyatakan bahwa w_{α_1} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $\frac{2mnk-3mn+3}{2}$ dan beda 1 (satu), atau dapat dituliskan $\bigcup_{t=1}^8 w_{\alpha_1}^t = \{\frac{2mnk-3mn+3}{2}, \frac{2mnk-3mn+5}{2}, \frac{2mnk-3mn+7}{2}, \dots, \frac{4mnk-3mn+1}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa pelabelan titik $\alpha_1(x_{i,l}^j)$ dan $\alpha_1(p_j)$ adalah pelabelan titik $(a, 1)$ -sisi antimagic jika m dan n ganjil, $m \geq 2, n \geq 2, k \geq 4$. $\square$

Angka 1, 2, ..., 8 pada $w_{\alpha_1}^1, w_{\alpha_1}^2, w_{\alpha_1}^3, w_{\alpha_1}^4, w_{\alpha_1}^5, w_{\alpha_1}^6, w_{\alpha_1}^7, w_{\alpha_1}^8$ bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan w_{α_1} yang mempunyai syarat batas i, j , dan l yang berbeda-beda. Gambar 4.2 merupakan contoh pelabelan titik $(\frac{2mnk-3mn+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ dengan $d = 1$. Sedangkan pelabelan titik beserta bobot sisi EAVLnya dapat dilihat pada gambar 4.3.

4.2.2 Pelabelan Total Super $(a, 0)$ -Sisi Antimagic Gabungan Graf *Banana Tree* $mB_{n,k}$

Berdasarkan Lemma 4.2.1 maka diperoleh pelabelan titik $(\frac{2mnk-3mn+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic dan dapat ditentukan pelabelan total super $(a, 0)$ -sisi antimagic dengan menentukan label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL w dengan urutan yang berkebalikan. Sehingga sisi dengan w terkecil dilabeli dengan label sisi terbesar dan sisi dengan w terbesar dilabeli dengan label sisi terkecil. Dari uraian di atas dapat diturunkan teorema sebagai berikut:

◇ **Teorema 4.2.1** Ada pelabelan total super $(\frac{6mnk-3mn+2m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2, n \geq 2$, dan $k \geq 4$.

Bukti. Untuk $1 \leq j \leq m$, definisikan label sisi $\alpha_1 : E(mB_{n,k}) \rightarrow \{mnk + m + 1, mnk + m + 2, \dots, 2mnk + m\}$, maka label sisi α_1 untuk pelabelan total super $(a, 0)$ -sisi antimagic pada graf $mB_{n,k}$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\alpha_1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) = \begin{cases} ((2k-l+1)n-i+2)m-j+1; & \text{jika } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2), \\ & 1 \leq l \leq k-2 \\ ((2k-l+2)n-i+2)m-j+1; & \text{jika } i \text{ genap, } 2 \leq l \leq k-1 \\ ((2k-l+1)n+2)m-j+1; & \text{jika } i = n, 2 \leq l \leq k-1 \\ ((k+1)n-i+2)m-j+1; & \text{jika } i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2) \\ & l = k-1, \text{ atau } i \text{ genap,} \\ & l = 1 \\ mnk+2m-j+1; & \text{jika } i = n, l = 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\alpha_1(p_j x_{i,l}^j) = \begin{cases} \frac{(2k+3)n-i+2}{2}m-j+1; & \text{jika } i \text{ ganjil,} \\ & (1 \leq i \leq n-2), l = k-2 \\ \frac{(2k+4)n-i+2}{2}m-j+1; & \text{jika } i \text{ genap,} \\ & l = k-2 \\ ((k+2)n+1)m-j+1; & \text{jika } i = n, l = k-2 \end{cases} \quad (4.4)$$

Jika W_{α_1} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total $\alpha_1(x_{i,l}^j)$, $\alpha_1(p_j)$, $\alpha_1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$, dan $\alpha_1(p_j x_{i,l}^j)$ maka W_{α_1} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL w_{α_1} dan rumus label sisi α_1 dengan syarat batas i, j , dan l yang bersesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_1}^1 &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2), \text{ dan } 1 \leq l \leq k-2\} \\ &= \left(\frac{(2k+2l-5)n+(i-1)2}{2}m + \frac{2j+1}{2}\right) + (((2k-l+1)n-i+2)m-j+1) \\ &= \frac{6mnk-3mn+2m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_1}^2 &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); 1 \leq j \leq m, i \text{ genap, dan } 2 \leq l \leq k-1\} \\ &= \left(\frac{(2k+2l-7)n+(i-1)2}{2}m + \frac{2j+1}{2}\right) + (((2k-l+2)n-i+2)m-j+1) \\ &= \frac{6mnk-3mn+2m+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_1}^3 &= \{w_{\alpha_1} + \alpha_1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); 1 \leq j \leq m, i = n, \text{ dan } 2 \leq l \leq k-1\} \\ &= \left(\frac{(2k+2l-5)n-2}{2}m + \frac{2j+1}{2}\right) + (((2k-l+1)n+2)m-j+1) \\ &= \frac{6mnk-3mn+2m+3}{2} \end{aligned}$$

$$W_{\alpha_1}^4 = \{w_{\alpha_1} + \alpha_1(p_j x_{i,l}^j); 1 \leq j \leq m, i = n, (\text{dan } l = k-2)\}$$

$$= \left(\frac{(4k-7)mn}{2} + \frac{2j+1}{2} \right) + (((k+2)n+1)m-j+1)$$

$$= \frac{6mnk-3mn+2m+3}{2}$$

$$W_{\alpha_1}^5 = \{w_{\alpha_1} + \alpha_1(p_j x_{i,l}^j); 1 \leq j \leq m, i \text{ genap}, (\text{dan } l = k-2)\}$$

$$= \left(\frac{(4k-7)n+i}{2}m + \frac{2j+1}{2} \right) + \left(\frac{(2k+4)n-i+2}{2}m - j + 1 \right)$$

$$= \frac{6mnk-3mn+2m+3}{2}$$

$$W_{\alpha_1}^6 = \{w_{\alpha_1} + \alpha_1(p_j x_{i,l}^j); 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2), \text{ dan } l = k-2\}$$

$$= ((2k-3)mn + \frac{mi+1}{2} + j) + \left(\frac{(2k+3)n-i+2}{2}m - j + 1 \right)$$

$$= \frac{6mnk-3mn+2m+3}{2}$$

$$W_{\alpha_1}^7 = \{w_{\alpha_1} + \alpha_1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); 1 \leq j \leq m, i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2) \text{ dan } l = k-1$$

atau jika $1 \leq j \leq m, i \text{ genap}, \text{ dan } l = 1\}$

$$= \left(\frac{(4k-5)n+(i-1)2}{2}m + \frac{2j+1}{2} \right) + (((k+1)n-i+2)m-j+1)$$

$$= \frac{6mnk-3mn+2m+3}{2}$$

$$W_{\alpha_1}^8 = \{w_{\alpha_1} + \alpha_1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); 1 \leq j \leq m, i = n, \text{ dan } l = 1\}$$

$$= \left(\frac{(4k-3)n-2}{2}m + \frac{2j+1}{2} \right) + (mnk + 2m - j + 1)$$

$$= \frac{6mnk-3mn+2m+3}{2}$$

Tampak bahwa $W_{\alpha_1}^1 = W_{\alpha_1}^2 = \dots = W_{\alpha_1}^8 = \frac{6mnk-3mn+2m+3}{2}$. Atau dapat dituliskan sebagai berikut: $\bigcup_{t=1}^8 W_{\alpha_1}^t = \left\{ \frac{6mnk-3mn+2m+3}{2}, \frac{6mnk-3mn+2m+3}{2}, \dots, \frac{6mnk-3mn+2m+3}{2} \right\}$. Dapat disimpulkan bahwa gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ dengan m dan n ganjil, $m \geq 2, n \geq 2$, dan $k \geq 4$ mempunyai pelabelan total super(a, d)-sisi antimagic dengan $a = \frac{6mnk-3mn+2m+3}{2}$ dan $d = 0$, atau gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ mempunyai Super $\left(\frac{((6k-3)n+2)m+3}{2}, 0 \right)$ -sisi antimagic jika m dan n ganjil, $m \geq 2, n \geq 2$, dan $k \geq 4$. $\square$

Angka 1, 2, ..., 8 pada $W_{\alpha_1}^1, W_{\alpha_1}^2, W_{\alpha_1}^3, W_{\alpha_1}^4, W_{\alpha_1}^5, W_{\alpha_1}^6, W_{\alpha_1}^7, W_{\alpha_1}^8$ bukan merupakan pangkat, melainkan untuk membedakan W_{α_1} yang mempunyai syarat batas i, j , dan l yang berbeda-beda. Gambar 4.4 merupakan contoh pelabelan total super ($a, 0$)-sisi antimagic (*SEATL*) pada gabungan graf *banana tree* $5B_{7,6}$.



4.2.3 Pelabelan Total Super $(a, 2)$ -Sisi Antimagic Gabungan Graf *Banana Tree* $mB_{n,k}$

Berdasarkan Lemma 4.2.1 maka diperoleh pelabelan titik $(\frac{2mnk-3mn+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic dan dapat ditentukan pelabelan total super $(a, 2)$ -sisi antimagic dengan menentukan label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL w dengan urutan yang sama. Sehingga sisi dengan w terkecil dilabeli dengan label sisi terkecil dan sisi dengan w terbesar dilabeli dengan label sisi terbesar dan dapat diturunkan teorema sebagai berikut.

◇ **Teorema 4.2.2** *Ada pelabelan total super $(\frac{((4k-3)n+2)m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf banana tree $mB_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 4$.*

Bukti. Untuk $1 \leq j \leq m$, definisikan label titik α_2 dan w_{α_2} sedemikian hingga label titik $\alpha_2 = \alpha_1$ dan $w_{\alpha_2} = w_{\alpha_1}$ (sesuai Lemma 4.2.1) serta label sisi $\alpha_2 : E(mB_{n,k}) \rightarrow \{mnk + m + 1, mnk + m + 2, \dots, 2mnk + m\}$, maka label sisi α_2 untuk $d = 2$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\alpha_2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) = \begin{cases} (k+l-1)mn + mi + j; & \text{jika } i \text{ ganjil, } (1 \leq i \leq n-2), \\ & 1 \leq l \leq k-2 \\ (k+l-2)mn + mi + j; & \text{jika } i \text{ genap, } 2 \leq l \leq k-1 \\ (k+l-1)mn + j; & \text{jika } i = n, 2 \leq l \leq k-1 \\ ((2k-1)n+i)m + j; & \text{jika } i \text{ ganjil, } (1 \leq i \leq n-2), \\ & l = k-1, \text{ atau } 1 \leq j \leq m, i \\ & \text{genap, } l = 1 \\ 2mnk + j; & \text{jika } i = n, l = 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\alpha_2(p_j x_{i,l}^j) = \begin{cases} (2k-2)mn + m + j; & \text{jika } i = n, l = k-2 \\ \frac{(4k-4)n+i+2}{2}m + j; & \text{jika } i \text{ genap, } l = k-2 \\ \frac{(2k-3)n+i+2}{2}m + j; & \text{jika } i \text{ ganjil, } (1 \leq i \leq n-2), \\ & l = k-2 \end{cases} \quad (4.6)$$

Jika W_{α_2} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total $\alpha_2(x_{i,l}^j)$, $\alpha_2(p_j)$, $\alpha_2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$, dan $\alpha_2(p_j x_{i,l}^j)$ maka W_{α_2} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL w_{α_2} dan rumus label sisi α_2 dengan syarat batas i, j dan l yang bersesuaian sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^1 &= \{w_{\alpha_2} + \alpha_2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2), 1 \leq l \leq k-2\} \\ &= \left(\frac{(2k+2l-5)n+(i-1)2}{2}m + \frac{2j+1}{2}\right) + ((k+l-1)mn + mi + j) \\ &= \frac{((4k+4l-7)n+4i-2)m+1}{2} + 2j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^2 &= \{w_{\alpha_2} + \alpha_2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); i \text{ genap}, 2 \leq l \leq k-1\} \\ &= \left(\frac{(2k+2l-7)n+(i-1)2}{2}m + \frac{2j+1}{2}\right) + ((k+l-2)mn + mi + j) \\ &= \frac{((4k+4l-11)n+4i-2)m+1}{2} + 2j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^3 &= \{w_{\alpha_2} + \alpha_2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); i = n, 2 \leq l \leq k-1\} \\ &= \left(\frac{(2k+2l-5)n-2}{2}m + \frac{2j+1}{2}\right) + ((k+l-1)mn + j) \\ &= \frac{(4k+4l-7)mn+1}{2} + 2j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^4 &= \{w_{\alpha_2} + \alpha_2(p_j x_{i,l}^j); i = n, l = k-2\} \\ &= \left(\frac{(4k-7)}{2}mn + \frac{2j+1}{2}\right) + ((2k-2)mn + m + j) \\ &= \frac{((8k-11)n+2)m+1}{2} + 2j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^5 &= \{w_{\alpha_2} + \alpha_2(p_j x_{i,l}^j); i \text{ genap}, l = k-2\} \\ &= \left(\frac{(4k-7)n+i}{2}m + \frac{2j+1}{2}\right) + \left(\frac{(4k-4)n+i+2}{2}m + j\right) \\ &= \frac{((8k-11)n+2i+2)m+1}{2} + 2j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^6 &= \{w_{\alpha_2} + \alpha_2(p_j x_{i,l}^j); i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2), l = k-2\} \\ &= ((2k-3)mn + \frac{mi+1}{2} + j) + \left(\frac{(2k-3)n+i+2}{2}m + j\right) \\ &= \frac{((8k-9)n+2i+2)m+1}{2} + 2j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^7 &= \{w_{\alpha_2} + \alpha_2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); i \text{ ganjil } (1 \leq i \leq n-2), l = k-1 \text{ atau } i \text{ genap}, l = 1\} \\ &= \left(\frac{(4k-5)n+(i-1)2}{2}m + \frac{2j+1}{2}\right) + (((2k-1)n+i)m + j) \\ &= \frac{((8k-7)n+4i-2)m+1}{2} + 2j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_2}^8 &= \{w_{\alpha_2} + \alpha_2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); i = n, l = 1\} \\ &= \left(\frac{(4k+3)n-2}{2}m + \frac{2j+1}{2}\right) + (2mnk + j) \\ &= \frac{((8k-3)n-2)m+1}{2} + 2j \end{aligned}$$

Perhatikan Himpunan bobot sisi $W_{\alpha_2} = \{W_{\alpha_2}^1, W_{\alpha_2}^2, W_{\alpha_2}^3, W_{\alpha_2}^4, W_{\alpha_2}^5, W_{\alpha_2}^6, W_{\alpha_2}^7, W_{\alpha_2}^8\}$. Tampak bahwa bobot sisi terkecil terletak pada $W_{\alpha_2}^1$ dan bobot sisi

terbesar terletak pada $W_{\alpha_2}^8$. Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1, j = 1$ dan $l = 1$ pada $W_{\alpha_2}^1$ diperoleh $W_{\alpha_2} = \frac{((4k-3)n+2)m+5}{2}$, substitusi $i = 1, j = 2$ dan $l = 1$ pada $W_{\alpha_2}^1$ diperoleh $W_{\alpha_2} = \frac{((4k-3)n+2)m+9}{2}$, substitusi $i = 1, j = 3$ dan $l = 1$ pada $W_{\alpha_2}^1$ diperoleh $W_{\alpha_2} = \frac{2mnk-3mn+13}{2}, \dots$, substitusi $j = m$ pada $W_{\alpha_2}^8$ diperoleh $W_{\alpha_2} = \frac{((8k-3)n+2)m+1}{2}$. Dapat dinyatakan bahwa W_{α_2} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $\frac{((4k-3)n+2)m+5}{2}$ dan beda 2 (dua), atau dapat dituliskan $\bigcup_{t=1}^8 W_{\alpha_2}^t = \left\{ \frac{((4k-3)n+2)m+5}{2}, \frac{((4k-3)n+2)m+9}{2}, \dots, \frac{((8k-3)n+2)m+1}{2} \right\}$. Dapat disimpulkan bahwa gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan $a = \frac{((4k-3)n+2)m+5}{2}$ dan $d = 2$ atau gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ mempunyai Super $(\frac{((4k-3)n+2)m+5}{2}, 2)$ -EAT; m dan n ganjil, $m \geq 2, n \geq 2$, dan $k \geq 4$. Sehingga terbukti bahwa pelabelan total $\alpha_2(x_{i,l}^j), \alpha_2(p_j), \alpha_2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$, dan $\alpha_2(p_j x_{i,l}^j)$ adalah pelabelan total super $(a, 2)$ -sisi antimagic jika m dan n ganjil, $m \geq 2, n \geq 2$, dan $k \geq 4$. $\square$

Sebagai contoh, perhatikan Gambar 4.5 yang merupakan pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic/SEATL pada gabungan graf *banana tree* $5B_{7,6}$ dengan $d = 2$.

4.2.4 Pelabelan Total Super $(a, 1)$ -Sisi Antimagic Gabungan Graf *Banana Tree* $mB_{n,k}$

Pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic dapat ditentukan dengan menentukan pelabelan titik terlebih dahulu, kemudian menentukan pelabelan sisinya sehingga setiap bobot sisi totalnya membentuk barisan aritmatika dengan beda = 1. Berikut ini teorema tentang pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$.

◇ **Teorema 4.2.3** Ada pelabelan total super $(\frac{((5k-3)n+2)m+4}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ jika n dan k ganjil, $m \geq 2, n \geq 2$, dan $k \geq 4$.

$$(x_{2,1}^1)$$

$$(x_{2,2}^1)$$

$$(x_{3,1}^1)$$

$$(x_{3,2}^1)$$

$$(x_{4,1}^1)$$

$$(x_{4,2}^1)$$

$$(x_{5,1}^1)$$

$$(x_{5,2}^1)$$

$$(x_{6,1}^1)$$

$$(x_{6,2}^1)$$



Bukti. Untuk $1 \leq j \leq m$, definisikan pelabelan titik $\alpha_3 : V(mB_{n,k}) \rightarrow \{1, 2, \dots, mnk + m\}$ sebagai berikut:

$$\alpha_3(x_{i,l}^j) = \begin{cases} ((k-1)n + i - 1)m + j; & \text{jika } i \text{ ganjil, dan } l = 1 \text{ atau} \\ & i \text{ genap, dan } l = k - 1 \\ ((l-2)n + i - 1)m + j; & \text{jika } i \text{ ganjil, dan } 2 \leq l \leq k - 1 \\ ((l-1)n + i - 1)m + j; & \text{jika } i \text{ genap, dan } 1 \leq l \leq k - 2 \\ ((k-2)n + i - 1)m + j; & \text{jika } 1 \leq i \leq n, \text{ dan } l = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\alpha_3(p_j) = mnk + j; \quad 1 \leq j \leq m \quad (4.8)$$

Jika w_{α_3} didefinisikan sebagai bobot sisi dibawah pelabelan titik α_3 , maka w_{α_3} dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{\alpha_3}^1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= ((k+l-4)n + (i-1)2)m + 2j; \text{ jika } i \text{ ganjil, } l \text{ genap} \\ w_{\alpha_3}^2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= ((k+l-3)n + (i-1)2)m + 2j; \text{ jika } i \text{ genap, } l \text{ ganjil} \\ w_{\alpha_3}^3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= ((2k-3)n + (i-1)2)m + 2j; \text{ jika } i \text{ ganjil, } l = 1 \text{ atau } i \text{ genap, } l = k - 1 \\ w_{\alpha_3}^4(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= ((k+l-4)n + (i-1)2)m + 2j; \text{ jika } i \text{ ganjil, } l \text{ ganjil } (3 \leq l \leq k-2) \\ w_{\alpha_3}^5(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= ((k+l-3)n + (i-1)2)m + 2j; \text{ jika } i \text{ genap, } l \text{ genap } (2 \leq l \leq k-3) \\ w_{\alpha_3}^6(p_j x_{i,l}^j) &= ((2k-4)n + i - 1)m + 2j; \text{ jika } i \text{ ganjil, } l = k - 2 \\ w_{\alpha_3}^7(p_j x_{i,l}^j) &= ((2k-3)n + i - 1)m + 2j; \text{ jika } i \text{ genap, } l = k - 2 \end{aligned}$$

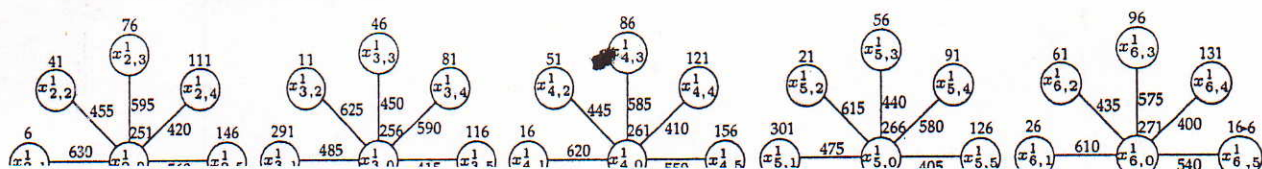
Agar menjadi pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic, didefinisikan $\alpha_3 : E(mB_{n,k}) \rightarrow \{mnk + m + 1, mnk + m + 2, \dots, 2mnk + m\}$, maka label sisi α_3 dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\alpha_3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) = \begin{cases} \frac{(3k+1)n-2i+4}{2}m - j + 1; & \text{jika } i \text{ ganjil, } l = 1 \text{ atau } i \text{ genap,} \\ & l = k - 1 \\ \frac{(4k-l+1)n-2i+4}{2}m - j + 1; & \text{jika } i \text{ genap, } l \text{ ganjil } (1 \leq l \leq k - 2) \\ \frac{(4k-l+2)n-2i+4}{2}m - j + 1; & \text{jika } i \text{ ganjil, } l \text{ genap, } (2 \leq l \leq k - 1) \\ \frac{(3k-l+2)n-2i+4}{2}m - j + 1; & \text{jika } i \text{ ganjil, } l \text{ ganjil, } (3 \leq l \leq k - 2) \\ \frac{(3k-l+1)n-2i+4}{2}m - j + 1; & \text{jika } i \text{ genap, } l \text{ genap } 2 \leq l \leq k - 3 \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\alpha_3(p_j x_{i,l}^j) = \begin{cases} \frac{(2k+2)n-i+3}{2}m - j + 1; & \text{jika } i \text{ ganjil, dan } l = k - 2 \\ \frac{(2k+1)n-i+3}{2}m - j + 1; & \text{jika } i \text{ genap, } l = k - 2 \end{cases} \quad (4.10)$$

Jika W_{α_3} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total $\alpha_3(x_{i,l}^j)$, $\alpha_3(p_j)$, $\alpha_3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$, dan $\alpha_3(p_j x_{i,l}^j)$ maka W_{α_3} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi w_{α_3} dan rumus label sisi α_3 dengan syarat batas i , j dan l yang bersesuaian sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_3}^1 &= \{w_{\alpha_3} + \alpha_3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); i \text{ ganjil, } l \text{ genap } (2 \leq l \leq k-1)\} \\ &= (((k+l-4)n + (i-1)2)m + 2j) + (\frac{(4k-l+2)n-2i+4}{2}m - j + 1) \\ &= \frac{(6k+l-6)n+2i}{2}m + j + 1 \\ W_{\alpha_3}^2 &= \{w_{\alpha_3} + \alpha_3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); i \text{ genap, } l \text{ ganjil } (1 \leq l \leq k-2)\} \\ &= (((k+l-3)n + (i-1)2)m + 2j + \frac{2j+1}{2}) + (\frac{(4k-l+1)n-2i+4}{2}m - j + 1) \\ &= \frac{(6k+l-5)n+2i}{2}m + j + 1 \\ W_{\alpha_3}^3 &= \{w_{\alpha_3} + \alpha_3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); i \text{ ganjil, } l = 1 \text{ atau } 1 \leq j \leq m, i \text{ genap, } l = k-1\} \\ &= (((2k-3)n + (i-1)2)m + 2j) + (\frac{(3k+1)n-2i+4}{2}m - j + 1) \\ &= \frac{(7k-5)n+2i}{2}m + j + 1 \\ W_{\alpha_3}^4 &= \{w_{\alpha_3} + \alpha_3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); i \text{ ganjil, } l \text{ ganjil } (3 \leq l \leq k-2)\} \\ &= (((k+l-4)n + (i-1)2)m + 2j) + (\frac{(3k-l+2)n-2i+4}{2}m - j + 1) \\ &= \frac{(5k+l-6)n+2i}{2}m + j + 1 \\ W_{\alpha_3}^5 &= \{w_{\alpha_3} + \alpha_3(p_j x_{i,l}^j); i \text{ genap, } l \text{ genap } 2 \leq l \leq k-3\} \\ &= (((k+l-3)n + (i-1)2)m + 2j) + (\frac{(3k-l+1)n-2i+4}{2}m - j + 1) \\ &= \frac{(5k+l-5)n+2i}{2}m + j + 1 \\ W_{\alpha_3}^6 &= \{w_{\alpha_3} + \alpha_3(p_j x_{i,l}^j); i \text{ ganjil, } l = k-2\} \\ &= (((2k-4)n + i - 1)m + 2j) + (\frac{(2k+2)n-i+3}{2}m - j + 1) \\ &= \frac{(k-1)6n+i+1}{2}m + j + 1 \\ W_{\alpha_3}^7 &= \{w_{\alpha_3} + \alpha_3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); i \text{ genap, } l = k-2\} \\ &= (((2k-3)n + i - 1)m + 2j) + (\frac{(2k+1)n-i+3}{2}m - j + 1) \\ &= \frac{(6k-5)n+i+1}{2}m + j + 1 \end{aligned}$$



Perhatikan himpunan bobot sisi $W_{\alpha_3} = \{W_{\alpha_3}^4, W_{\alpha_3}^5, W_{\alpha_3}^6, W_{\alpha_3}^7, W_{\alpha_3}^1, W_{\alpha_3}^2, W_{\alpha_3}^3\}$. Bobot sisi terkecil terletak pada $W_{\alpha_3}^4$ dan bobot sisi terbesar terletak pada $W_{\alpha_3}^3$. Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1, j = 1$ dan $l = 3$ pada $W_{\alpha_3}^4$ diperoleh $W_{\alpha_3} = \frac{((5k-3)n+2)m+4}{2}$, substitusi $i = 1, j = 2$ dan $l = 3$ pada $W_{\alpha_3}^4$ diperoleh $W_{\alpha_3} = \frac{((5k-3)n+2)m+6}{2}$, substitusi $i = 1, j = 3$ dan $l = 3$ pada $W_{\alpha_3}^4$ diperoleh $W_{\alpha_3} = \frac{((5k-3)n+2)m+8}{2}, \dots$, substitusi $i = n$ dan $j = m$ pada $W_{\alpha_3}^3$ diperoleh $W_{\alpha_3} = \frac{((7k-3)n+2)m+2}{2}$. Tampak bahwa W_{α_3} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $\frac{((5k-3)n+2)m+4}{2}$ dan beda 1 (satu), atau dapat dituliskan $\bigcup_{t=1}^7 W_{\alpha_3}^t = \left\{ \frac{((5k-3)n+2)m+4}{2}, \frac{((5k-3)n+2)m+6}{2}, \dots, \frac{((7k-3)n+2)m+2}{2} \right\}$. Dapat disimpulkan bahwa gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan $a = \frac{((5k-3)n+2)m+4}{2}$ dan $d = 1$ atau gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ mempunyai Super $(\frac{((5k-3)n+2)m+4}{2}, 1)$ -EAT; n dan k ganjil, $m \geq 2, n \geq 2$, dan $k \geq 4$. Sehingga terbukti bahwa pelabelan total $\alpha_3(x_{i,l}^j), \alpha_3(p_j), \alpha_3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$, dan $\alpha_3(p_j x_{i,l}^j)$ adalah pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic jika k dan n ganjil, $m \geq 2, n \geq 2$, dan $k \geq 4$. $\square$

Sebagai ilustrasi, perhatikan pelabelan total super $(a, 1)$ pada gabungan graf *banana tree* $5B_{7,9}$ seperti tampak pada Gambar 4.6.

4.2.5 Pelabelan Titik $(a, 2)$ -sisi Antimagic Gabungan Graf *Banana Tree* $mB_{n,k}$

Untuk menentukan pelabelan total super $(a, 3)$ -sisi antimagic, terlebih dahulu ditentukan pelabelan titik $(a, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ sekaligus menentukan fungsi bijektifnya. Berikut ini lemma yang berkaitan dengan pelabelan titik tersebut di atas.

◇ **Lemma 4.2.2** Ada pelabelan titik $(\frac{3m+4}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ jika $n = 3, m$ genap, $m \geq 2$, dan $k \geq 4$.

Bukti. Definisikan pelabelan $\alpha_4 : V(mB_{3,k}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 3mk + m\}$ sebagai berikut:

$$\alpha_4(x_{i,l}^j) = \begin{cases} \frac{i-1}{2}m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } j \text{ ganjil, } i \text{ ganjil, } l = 0 \\ 2m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } j \text{ ganjil, } i = 2, l = 0 \\ \frac{6k+2i-5}{2}m + \frac{j}{2}; & \text{jika } j \text{ genap, } 1 \leq i \leq n, l = 0 \\ \frac{6l+i-4}{2}m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } j \text{ ganjil, } i \text{ ganjil, } 1 \leq l \leq k-1 \\ \frac{6l-5}{2}m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } j \text{ ganjil, } i \text{ genap, } 1 \leq l \leq k-1 \\ ((i-1)k+3)m + \frac{j}{2}; & \text{jika } j \text{ genap, } 1 \leq i \leq n, l = 1 \\ ((k-1)i-l+5)m + \frac{j}{2}; & \text{jika } j \text{ genap, } i \leq 2, 2 \leq l \leq k-1 \\ (2k+2)m + \frac{j}{2}; & \text{jika } j \text{ genap, } i = 3, l = 2 \\ (3k-l+3)m + \frac{j}{2}; & \text{jika } j \text{ genap, } i = 3, 3 \leq l \leq k-1 \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\alpha_4(p_j) = \begin{cases} 4m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } j \text{ ganjil} \\ 3mk + \frac{5m-j}{2}; & \text{jika } j \text{ genap} \end{cases} \quad (4.12)$$

Dari persamaan di atas, dapat dipahami bahwa $\alpha_4(x_{i,l}^j)$ dan $\alpha_4(p_j)$ adalah fungsi bijektif yang memetakan $V(mB_{n,k})$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, \dots, 3mk+m\}$. Jika w_{α_4} didefinisikan sebagai bobot sisi dibawah pelabelan α_4 , maka w_{α_4} dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} w_{\alpha_4}^1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= \frac{6l+2i-5}{2}m + j + 1; \text{ jika } j \text{ ganjil, } 1 \leq i \leq n, 1 \leq l \leq k-1 \\ w_{\alpha_4}^2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= \frac{(i+2)2k+2i+1}{2}m + j; \text{ jika } j \text{ genap, } 1 \leq i \leq n, l = 1 \\ w_{\alpha_4}^3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= \frac{(i+3)2k-2l+5}{2}m + j; \text{ jika } j \text{ genap, } 1 \leq i \leq 2, 2 \leq l \leq k-1 \\ w_{\alpha_4}^4(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= \frac{2k+1}{2}5m + j; \text{ jika } j \text{ genap, } i = n, \text{ dan } l = 2 \\ w_{\alpha_4}^5(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) &= \frac{12k-2l+7}{2}m + j; \text{ jika } j \text{ genap, } i = n, 3 \leq l \leq k-1 \\ w_{\alpha_4}^6(p_j x_{i,l}^j) &= \frac{2k-1}{2}3m + j + 1; \text{ jika } j \text{ ganjil, } i \text{ genap, } l = k-1 \\ w_{\alpha_4}^7(p_j x_{i,l}^j) &= \frac{6k+i-2}{2}m + j + 1; \text{ jika } j \text{ ganjil, } i \text{ ganjil, } l = k-1 \\ w_{\alpha_4}^8(p_j x_{i,l}^j) &= \frac{6k+5}{2}m + j; \text{ jika } j \text{ genap, } i = 1, l = k-1 \\ w_{\alpha_4}^9(p_j x_{i,l}^j) &= \frac{(i+2)2k+3}{2}m + j; \text{ jika } j \text{ genap, } i \geq 2, l = k-1 \end{aligned}$$

Perhatikan Himpunan bobot sisi $w_{\alpha_4} = \{w_{\alpha_4}^1, w_{\alpha_4}^6, w_{\alpha_4}^7, w_{\alpha_4}^2, w_{\alpha_4}^8, w_{\alpha_4}^3, w_{\alpha_4}^9, w_{\alpha_4}^4, w_{\alpha_4}^5\}$. Tampak bahwa bobot sisi terkecil terletak pada $w_{\alpha_4}^1$ dan bobot sisi terbesar terletak pada $w_{\alpha_4}^5$. Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1, j = 1$ dan

$l = 1$ pada $w_{\alpha_4}^1$ diperoleh $w_{\alpha_4} = \frac{3m+4}{2}$, substitusi $i = 1, j = 3$ dan $l = 1$ pada $w_{\alpha_4}^1$ diperoleh $w_{\alpha_4} = \frac{3m+8}{2}$, substitusi $i = 1, j = 5$ dan $l = 1$ pada $w_{\alpha_4}^1$ diperoleh $w_{\alpha_4} = \frac{3m+12}{2}, \dots$, substitusi $l = 3$ dan $j = m$ pada $w_{\alpha_4}^5$ diperoleh $w_{\alpha_4} = \frac{12mk+3m}{2}$. Dapat dinyatakan bahwa w_{α_4} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $\frac{3m+4}{2}$ dan beda 2 (dua), atau dapat dituliskan $\bigcup_{t=1}^9 w_{\alpha_4}^t = \{\frac{3m+4}{2}, \frac{3m+8}{2}, \frac{3m+12}{2}, \dots, \frac{12mk+3m}{2}\}$. Sehingga terbukti bahwa pelabelan titik $\alpha_4(x_{i,l}^j)$ dan $\alpha_4(p_j)$ adalah pelabelan titik $(a, 2)$ -sisi antimagic jika $n = 3, m$ genap, $m \geq 2$, dan $k \geq 4$. $\square$

Gambar 4.7 merupakan contoh pelabelan titik $(\frac{3m+4}{2}, 2)$ -sisi antimagic gabungan graf *banana tree* $mB_{3,k}$. Sedangkan pelabelan titik beserta bobot sisi EAVLnya dapat dilihat pada gambar 4.8. Pada Gambar 4.8, angka pada sisi merupakan bobot sisi pelabelan titik $(a, 2)$ -sisi antimagic dari gabungan graf *banana tree* $6B_{3,7}$.

4.2.6 Pelabelan Total Super $(a, 3)$ -sisi Antimagic Gabungan Graf *Banana Tree* $mB_{n,k}$

Berdasarkan Lemma 4.2.2 maka diperoleh pelabelan titik $(\frac{3m+4}{2}, 2)$ -sisi antimagic dan dapat ditentukan pelabelan total super $(a, 3)$ -sisi antimagic dengan menentukan label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi EAVL w dengan urutan yang sama. Sehingga sisi dengan w terkecil dilabeli dengan label sisi terkecil dan sisi dengan w terbesar dilabeli dengan label sisi terbesar dan dapat diturunkan teorema sebagai berikut:

◇ **Teorema 4.2.4** Ada pelabelan total super $(\frac{6mk+5m+6}{2}, 3)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ jika $n = 3, m$ genap, $m \geq 2$, dan $k \geq 4$.

Bukti. Lengkapi label titik $\alpha_4(x_{i,l}^j)$ dan $\alpha_4(p_j)$ sehingga menjadi pelabelan total. Definisikan label sisi $\alpha_4 : E(mB_{3,k}) \rightarrow \{(3mk+m+1), (3mk+m+2), \dots, (6mk+m)\}$, maka α_4 untuk pelabelan total super $(a, 3)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{3,k}$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\alpha_4(x_{i,l}^j x_{i,0}^j) = \begin{cases} \frac{6k+3l+i-2}{2}m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } j \text{ ganjil, } 1 \leq i \leq n, \text{ dan } 1 \leq l \leq k-1 \\ \frac{(i+8)k+i+1}{2}m + \frac{j}{2}; & \text{jika } j \text{ genap, } 1 \leq i \leq n, \text{ dan } l = 1 \\ \frac{(i+9)k-l+3}{2}m + \frac{j}{2}; & \text{jika } j \text{ genap, } 1 \leq i \leq 2, \text{ dan } 2 \leq l \leq k-1 \\ \frac{11k+3}{2}m + \frac{j}{2}; & \text{jika } j \text{ genap, } i = n, \text{ dan } l = 2 \\ \frac{12k-l+4}{2}m + \frac{j}{2}; & \text{jika } j \text{ genap, } i = n, \text{ dan } 3 \leq l \leq k-1 \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\alpha_4(p_j x_{i,l}^j) = \begin{cases} \frac{9k-1}{2}m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } j \text{ ganjil, } i \text{ genap, dan } l = k-1 \\ \frac{9k+i-1}{2}m + \frac{j+1}{2}; & \text{jika } j \text{ ganjil, } i \text{ ganjil, dan } l = k-1 \\ \frac{9k+3}{2}m + \frac{j}{2}; & \text{jika } j \text{ genap, } i = 1, \text{ dan } l = k-1 \\ \frac{(i+8)k+2}{2}m + \frac{j}{2}; & \text{jika } j \text{ genap, } i \geq 2, \text{ dan } l = k-1 \end{cases} \quad (4.14)$$

Jika W_{α_4} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total $\alpha_4(x_{i,l}^j)$, $\alpha_4(p_j)$, $\alpha_4(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$, dan $\alpha_4(p_j x_{i,l}^j)$ maka W_{α_4} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi w_{α_4} dan rumus label sisi α_4 dengan syarat batas i , j dan l yang bersesuaian sebagai berikut:

$$\begin{aligned} W_{\alpha_4}^1 &= \{w_{\alpha_4} + \alpha_4(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); \text{ jika } j \text{ ganjil, } 1 \leq i \leq n, \text{ dan } 1 \leq l \leq k-1\} \\ &= \left(\frac{6l+2i-5}{2}m + j + 1\right) + \left(\frac{6k+3l+i-2}{2}m + \frac{j+1}{2}\right) \\ &= \frac{6k+9l+3i-7}{2}m + \frac{3j+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_4}^2 &= \{w_{\alpha_4} + \alpha_4(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); \text{ jika } j \text{ genap, } 1 \leq i \leq n, \text{ dan } l = 1\} \\ &= \left(\frac{(i+2)2k+2i+1}{2}m + j\right) + \left(\frac{(i+8)k+i+1}{2}m + \frac{j}{2}\right) \\ &= \frac{(i+4)3k+3i+2}{2}m + \frac{3j}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_4}^3 &= \{w_{\alpha_4} + \alpha_4(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); \text{ jika } j \text{ genap, } i \leq 2, \text{ dan } 2 \leq l \leq k-1\} \\ &= \left(\frac{(i+3)2k-2l+5}{2}m + j\right) + \left(\frac{(i+9)k-l+3}{2}m + \frac{j}{2}\right) \\ &= \frac{(i+5)3k-3l+8}{2}m + \frac{3j}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\alpha_4}^4 &= \{w_{\alpha_4} + \alpha_4(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); \text{ jika } j \text{ genap, } i = n, \text{ dan } l = 2\} \\ &= \left(\frac{2k+1}{2}5m + j\right) + \left(\frac{11k+3}{2}m + \frac{j}{2}\right) \\ &= \frac{21k+8}{2}m + \frac{3j}{2} \end{aligned}$$

$$W_{\alpha_4}^5 = \{w_{\alpha_4} + \alpha_4(x_{i,l}^j x_{i,0}^j); \text{ jika } j \text{ genap, } i = n, \text{ dan } 3 \leq l \leq k-1\}$$

$$= \left(\frac{12k-2l+7}{2}m + j \right) + \left(\frac{12k-l+4}{2}m + \frac{j}{2} \right)$$

$$= \frac{24k-3l+11}{2}m + \frac{3j}{2}$$

$$W_{\alpha_4}^6 = \{w_{\alpha_4} + \alpha_4(p_j x_{i,l}^j); \text{ jika } j \text{ ganjil, } i \text{ genap, dan } l = k - 1$$

$$= \left(\frac{2k-1}{2}3m + j + 1 \right) + \left(\frac{9k-1}{2}m + \frac{j+1}{2} \right)$$

$$= \frac{15k-4}{2}m + \frac{3j+3}{2}$$

$$W_{\alpha_4}^7 = \{w_{\alpha_4} + \alpha_4(p_j x_{i,l}^j); \text{ jika } j \text{ ganjil, } i \text{ ganjil, dan } l = k - 1$$

$$= \left(\frac{6k+i-2}{2}m + j + 1 \right) + \left(\frac{9k+i-1}{2}m + \frac{j+1}{2} \right)$$

$$= \frac{30k+3i-5}{4}m + \frac{3j+3}{2}$$

$$W_{\alpha_4}^8 = \{w_{\alpha_4} + \alpha_4(p_j x_{i,l}^j); \text{ jika } j \text{ genap, } i = 1, \text{ dan } l = k - 1$$

$$= \left(\frac{6k+5}{2}m + j \right) + \left(\frac{9k+3}{2}m + \frac{j}{2} \right)$$

$$= \frac{15k+8}{2}m + \frac{3j}{2}$$

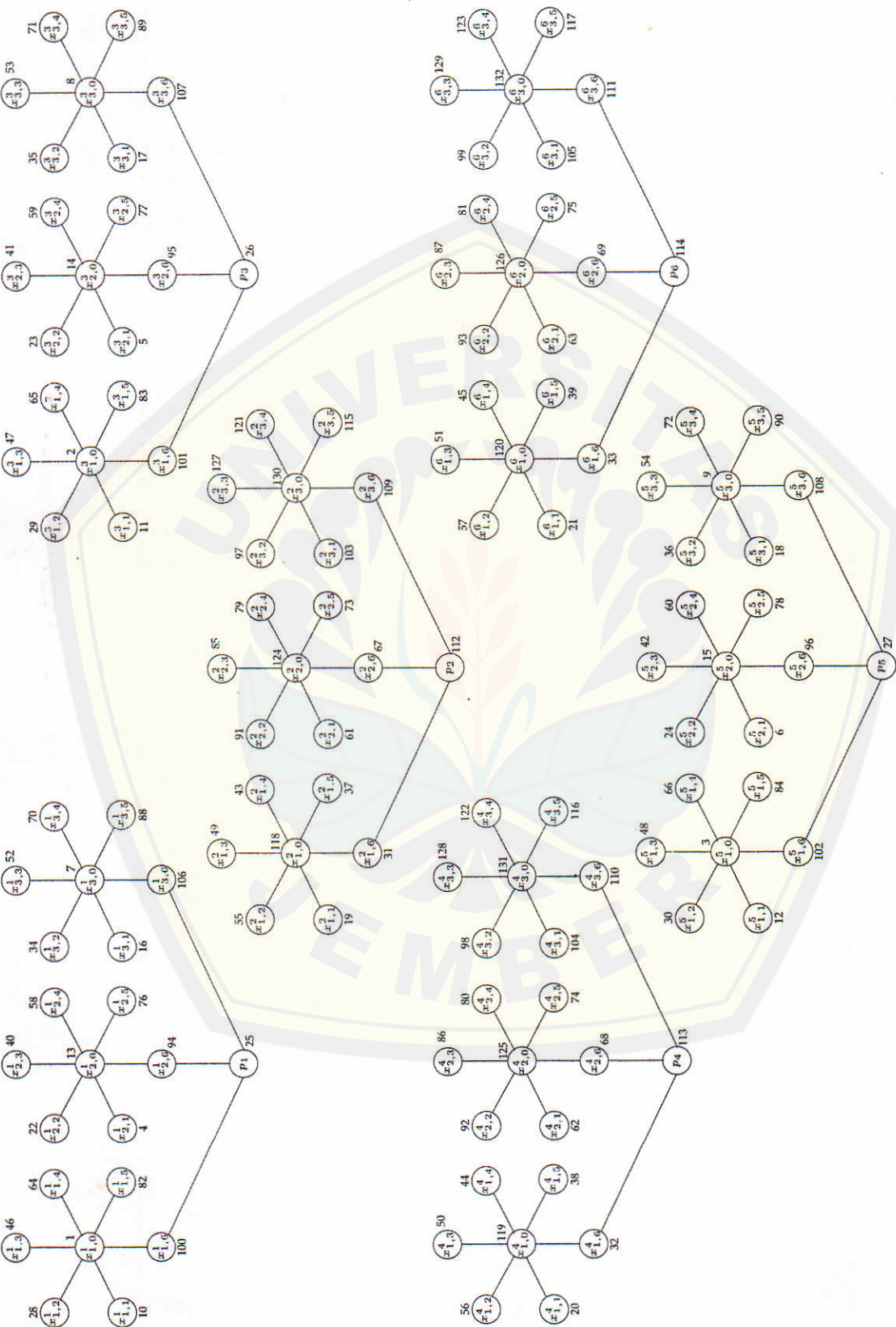
$$W_{\alpha_4}^9 = \{w_{\alpha_4} + \alpha_4(p_j x_{i,l}^j); \text{ jika } j \text{ genap, } i \geq 2, \text{ dan } l = k - 1$$

$$= \left(\frac{(i+2)2k+3}{2}m + j \right) + \left(\frac{(i+8)k+2}{2}m + \frac{j}{2} \right)$$

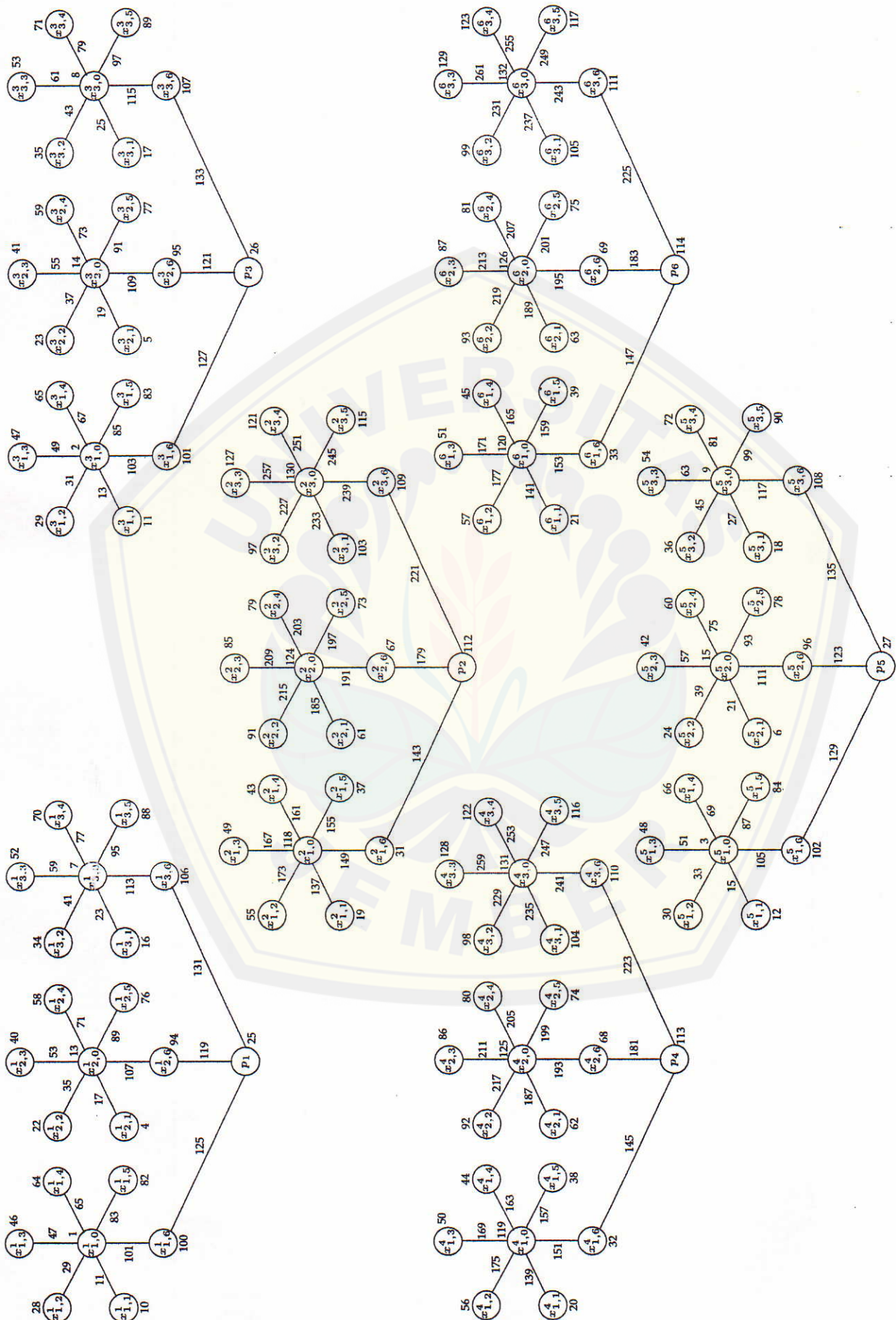
$$= \frac{(i+4)3k+5}{2}m + \frac{3j}{2}$$

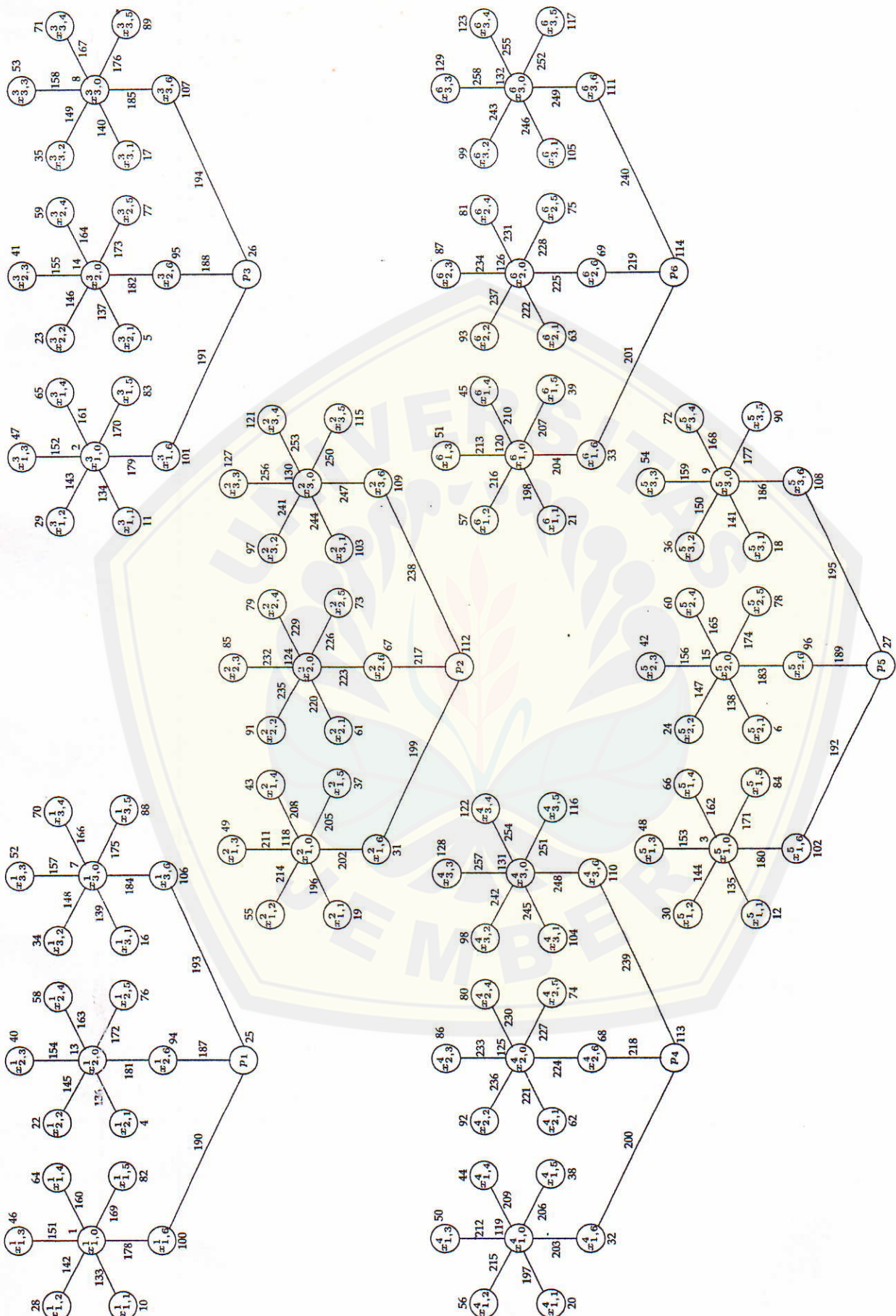
Perhatikan Himpunan bobot sisi $W_{\alpha_4} = \{W_{\alpha_4}^1, W_{\alpha_4}^6, W_{\alpha_4}^7, W_{\alpha_4}^2, W_{\alpha_4}^8, W_{\alpha_4}^3, W_{\alpha_4}^9, W_{\alpha_4}^4, W_{\alpha_4}^5\}$. Tampak bahwa bobot sisi terkecil terletak pada $W_{\alpha_4}^1$ dan bobot sisi terbesar terletak pada $W_{\alpha_4}^5$. Dengan mensubstitusikan nilai $i = 1, j = 1$ dan $l = 1$ pada $W_{\alpha_4}^1$ diperoleh $W_{\alpha_4} = \frac{6mk+5m+6}{2}$, substitusi $i = 1, j = 3$ dan $l = 1$ pada $W_{\alpha_4}^1$ diperoleh $W_{\alpha_4} = \frac{6mk+5m+12}{2}$, substitusi $i = 1, j = 5$ dan $l = 1$ pada $W_{\alpha_4}^1$ diperoleh $W_{\alpha_4} = \frac{6mk+5m+18}{2}, \dots$, substitusi $l = 3$ dan $j = m$ pada $W_{\alpha_4}^5$ diperoleh $W_{\alpha_4} = \frac{24mk+5m}{2}$. Dapat dinyatakan W_{α_4} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal $\frac{6mk+5m+6}{2}$ dan beda 3 (tiga), atau dapat dituliskan $\bigcup_{t=1}^9 W_{\alpha_4}^t = \left\{ \frac{6mk+5m+6}{2}, \frac{6mk+5m+12}{2}, \frac{6mk+5m+18}{2}, \dots, \frac{24mk+5m}{2} \right\}$. Sehingga terbukti bahwa pelabelan titik $\alpha_4(x_{i,l}^j), \alpha_4(p_j), \alpha_4(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$, dan $\alpha_4(p_j x_{i,l}^j)$ adalah pelabelan total super $(a, 3)$ -sisi antimagic jika $n = 3, m$ genap, $m \geq 2$, dan $k \geq 4$. $\square$

Sebagai ilustrasi, perhatikan pelabelan total super $(a, 3)$ pada gabungan graf *banana tree* $6B_{3,7}$ seperti tampak pada Gambar 4.9.



Gambar 4.7: EAVL 6B_{3,7} dengan d = 2

Gambar 4.8: Bobot sisi (w) EAVL $6B_{3,7}$ dengan $d = 2$

Gambar 4.9: SEATL graf banana tree $6B_{3,7}$ dengan $d = 3$

4.3 Hasil dan Pembahasan

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui batas atas nilai d sehingga gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ mempunyai pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic, selanjutnya akan dicari pelabelan pada graf tersebut dan menentukan konstruksi fungsi bijektifnya. Dari hasil perhitungan diperoleh bahwa nilai d yang mungkin untuk pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ adalah $d \in \{0, 1, 2, 3\}$. Setelah menentukan nilai d , peneliti mencari pelabelan sesuai dengan nilai d yang telah ditentukan tersebut.

Dari hasil penelitian pada beberapa nilai d diperoleh 2 (dua) lemma dan 4 (empat) teorema baru tentang pelabelan gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$, yaitu: ada pelabelan titik $(\frac{2mnk-3mn+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 4$; ada pelabelan total super $(\frac{6mnk-3mn+2m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 4$; ada pelabelan total super $(\frac{((4k-3)n+2)m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 4$; ada pelabelan total super $(\frac{((5k-3)n+2)m+4}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ jika n dan k ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 4$; ada pelabelan titik $(\frac{3m+4}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ jika $n = 3$, m genap, $m \geq 2$, dan $k \geq 4$; dan ada pelabelan total super $(\frac{6mk+5m+6}{2}, 3)$ -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* $mB_{n,k}$ jika $n = 3$, m genap, $m \geq 2$, dan $k \geq 4$.

Dalam hal ini, seluruh pelabelan hasil penelitian ditemukan dengan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) yang berarti konstruksi fungsi bijektif yang dihasilkan, dimulai dengan penentuan pola yang berlaku sampai batas m , n , dan k yang ditemukan peneliti kemudian baru mengkonstruksi fungsi bijektifnya. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi bijektif yang dihasilkan tidak dikembangkan secara induktif melainkan secara deduktif. Penulis memang tidak menyebutkan cara mengkonstruksi fungsi bijektif dari pelabelan yang telah ditemukan, akan tetapi pembuktian kebenaran formula/teorema terse-

but telah dipaparkan yang kemudian diikuti dengan contoh pelabelan sebagai visualisasi dari kebenaran teorema. Contoh-contoh pelabelan yang lain juga telah disajikan dalam lampiran.

Terdapat beberapa pelabelan gabungan graf *banana tree* yang belum ditemukan oleh penulis. Dengan adanya contoh-contoh pelabelan dan penerapan fungsi bijektif hasil penelitian yang telah ditemukan, diharapkan dapat membantu peneliti lain yang akan melakukan penelitian yang sejenis. Beberapa pelabelan yang belum ditemukan oleh penulis disajikan pada open problem berikut.

Open Problem 4.3.1 *pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf banana tree $mB_{n,k}$ untuk $d = 0$ dan $d = 2$ dengan m dan n genap;*

Open Problem 4.3.2 *pelabelan total super $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf banana tree $mB_{n,k}$ jika n dan k genap;*

Open Problem 4.3.3 *pelabelan total super $(a, 3)$ -sisi antimagic pada gabungan graf banana tree $mB_{n,k}$ jika $n \neq 3$ dan m ganjil;*

Open Problem 4.3.4 *pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf-graf khusus yang lain.*

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. batas atas d pada pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada $mB_{n,k}$ adalah $d < 4$ dengan d bilangan cacah, sehingga diperoleh $d \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dari nilai d tersebut dapat dibentuk 2 (dua) lemma dan 4 (empat) teorema baru.
2. fungsi bijektif pelabelan titik (a, d) -sisi antimagic dan total super (a, d) -sisi antimagic pada $mB_{n,k}$ dapat ditunjukkan pada pembuktian teorema yang diberi tanda $\diamond$. Berdasarkan bukti teorema, terlihat bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic dengan $d \in \{0, 1, 2, 3\}$. Berikut ini adalah fungsi bijektif dari masing-masing pelabelan yang ditemukan.
 - Fungsi bijektif pelabelan titik $(\frac{2mnk-3mn+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf banana tree $mB_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 4$ adalah $\alpha_1(x_{i,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.1 di halaman 35 dan $\alpha_1(p_j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.2 di halaman 35.
 - Fungsi bijektif pelabelan total super $(\frac{6mnk-3mn+2m+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada gabungan graf banana tree $mB_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 4$ adalah $\alpha_1(x_{i,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.1 di halaman 35, $\alpha_1(p_j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.2 di halaman 35, $\alpha_1(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.3 di halaman 39, dan $\alpha_1(p_j x_{i,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.4 di halaman 39.
 - Fungsi bijektif pelabelan total super $(\frac{(4k-3)n+2)m+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada

gabungan graf banana tree $mB_{n,k}$ jika m dan n ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 4$ adalah $\alpha_2(x_{i,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.1 di halaman 35, $\alpha_2(p_j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.2 di halaman 35, $\alpha_2(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.5 di halaman 42, dan $\alpha_2(p_j x_{i,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.6 di halaman 42.

- Fungsi bijektif pelabelan total super $(\frac{(5k-3)n+2)m+4}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf banana tree $mB_{n,k}$ jika n dan k ganjil, $m \geq 2$, $n \geq 2$, dan $k \geq 4$ adalah $\alpha_3(x_{i,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.7 di halaman 46, $\alpha_3(p_j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.8 di halaman 46, $\alpha_3(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.9 di halaman 46, dan $\alpha_3(p_j x_{i,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.10 di halaman 47.

- Fungsi bijektif pelabelan titik $(\frac{3m+4}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf banana tree $mB_{n,k}$ jika $n = 3$, m genap, $m \geq 2$, dan $k \geq 4$ adalah $\alpha_4(x_{i,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.11 di halaman 50 dan $\alpha_4(p_j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.12 di halaman 50.

- Fungsi bijektif pelabelan total super $(\frac{6mk+5m+6}{2}, 3)$ -sisi antimagic pada gabungan graf banana tree $mB_{n,k}$ jika $n = 3$, m genap, $m \geq 2$, dan $k \geq 4$ adalah $\alpha_4(x_{i,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.11 di halaman 50 dan $\alpha_4(p_j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.12 di halaman 50, $\alpha_4(x_{i,l}^j x_{i,0}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.13 di halaman 52, dan $\alpha_4(p_j x_{i,l}^j)$ yang disebutkan pada persamaan 4.14 di halaman 52.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dari penelitian diperoleh beberapa fungsi bijektif pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada gabungan graf *banana tree* dengan syarat batas tertentu, penulis dapat memberikan saran kepada peneliti lain untuk melakukan penelitian tentang pelabelan total super (a, d) -sisi antimagic pada graf-graf khusus lain atau pada gabungan graf *banana tree* yang belum ditemukan penulis seperti terangkum dalam open problem pada bab 4.

DAFTAR PUSTAKA

- Bača, M dan M. Miller. 2007. *Super Edge-Antimagic Graphs*. Florida: Brown Walker Press Boca Raton.
- Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graph*. Tidak dipublikasikan (Tesis). Australia: School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat.
- Dartono. 2006. *Pelabelan Total (a, d) -Sisi Anti Ajaib pada Lingkaran dan Lintasan*. [http://www.google.co.id/#hl=id&q=Pelabelan+Total+\(a2Cd\)+E28093+Sisi+E28093+Anti+Ajaib+pada+lingkaran+dan+lintasan+oleh+dartono&btnG=Telusuri+dengan+Google&meta=&aq=f&fp=d6fe723fcddb36a](http://www.google.co.id/#hl=id&q=Pelabelan+Total+(a2Cd)+E28093+Sisi+E28093+Anti+Ajaib+pada+lingkaran+dan+lintasan+oleh+dartono&btnG=Telusuri+dengan+Google&meta=&aq=f&fp=d6fe723fcddb36a). [21 Mei 2009]
- Fuad, M. 2009. *Pelabelan Total Super (a, d) -Sisi Antimagic pada Gabungan Graf Triangular Ladder*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Izzati, Nur. 2007. *Pelabelan Total Sisi ajaib pada Graf Bintang yang Diperumum*. Tidak dipublikasikan (Tesis). Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Kreyszig, Erwin. *Matematika Teknik Lanjutan Edisi ke-6 Buku 2*. Terjemahan oleh Bambang Sumantri. 1993. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.
- Lipschutz dan Lipson. 2002. *Matematika Diskrit Jilid 2*. Jakarta : Salemba Teknika.
- Munir, R. 2003. *Matematika Diskrit: Buku teks ilmu komputer*. Bandung: Informatika Bandung.
- Silaban, Pantur. 1985. *Teori Himpunan*. Jakarta: Erlangga.

Slamin. 2001. *Survey of Magic Total Labeling of Graphs*. *Saintifika*, 2(1): 287-297.

Sugeng, K.A. 2008. *Magic and Antimagic Labeling of Graph*. Tidak dipublikasikan (Tesis). Australia: School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat.

Universitas Jember. 2006. *Pedoman Penulisan Karya Ilmiah*. Jember: Badan Penerbit Universitas Jember.

Wijaya, K. 2000. *Pelabelan Total Sisi Ajaib*. Tidak dipublikasikan (Tesis). Bandung: Institut Teknologi Bandung.

