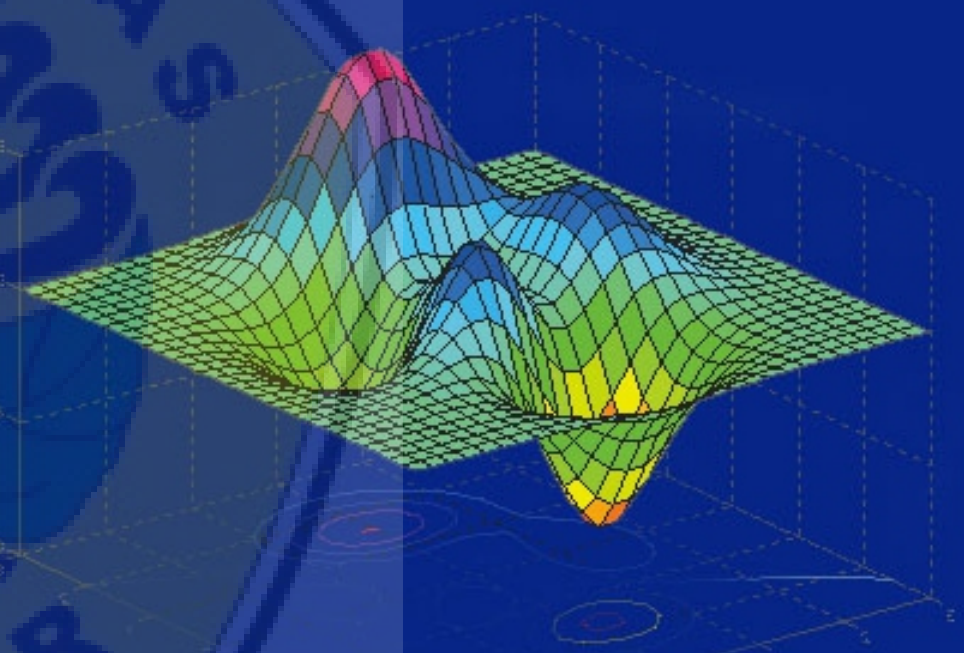


FISIKA MATEMATIKA

Meliputi Materi:
Deret, Bilangan Kompleks, Matrik dan Determinan, Diferensial Parsial,
Integral Lipat, Analisis Vektor, Deret Fourier, Persamaan Diferensial Biasa



Buku 1 ini yang berjudul FISIKA MATEMATIKA terdiri dari delapan bab meliputi materi – materi : (1) *Deret* materi deret ini mencakup antara deret hitung (deret arimatika, geometri, dan harmonik) dan deret pangkat (deret maclaurine dan taylor) dengan masing-masing deret pangkat meliputi deret eksponensial, sinus, cosinus, logaritma, dan bilangan berpangkat, (2) *Bila-ngan Kompleks* meliputi materi bilangan real dan imajiner pada fungsi-fungsi trigonometri, logaritma, dan bilangan-bilangan berpangkat, (3) *Matriks dan Determinan* meliputi materi penggolongan matriks beserta inversnya baik matriks secara real atau imajiner dalam operator integral dan differensial, (4) *Diferensial Parsial* meliputi materi operator fungsi bila-ngan aljabar dan trigonometri dalam masalah fisis yang ada dalam kehidupan sehari-hari, (5) *Integral Lipat* meliputi operator integral secara bertingkat pada fungsi bilangan aljabar dan trigonometri beserta penerapannya pada masalah fisis, (6) *Analisis Vektor* meliputi materi operator vektor yang menempati bidang dan ruang beserta penerapannya dalam kehidupan sehari-hari, (7) *Deret Fourier* meliputi materi perubahan bentuk fungsi bilangan aljabar bertingkat dan trigonometri dalam penyelesaian masalah fisis, (8) *Persamaan Diferensial Biasa* merupakan materi yang didasarkan pada koordinat dan tipikal penyelesaian masalah fisis. Analisis dalam buku 1 ini pada setiap bab senantiasa diliputi masalah – masalah analisis matematis dengan materi fisis yang meliputi materi pada bidang *gerak, gelombang, listrik, panas, bahkan fisika modern* dan diakhir setiap bab diberikan soal – soal latihan agar dapat membantu mahasiswa dalam memahami materi yang telah dipelajari.

Anggota IKAPI No. 127/JTI/2011

ISBN: 978-602-9030-20-4



9 786029 030204

SRI ASTUTIK

FISIKA MATEMATIKA

(Buku 1)

Meliputi Materi:

Deret, Bilangan Kompleks, Matrik dan Determinan,
Diferensial Parsial, Integral Lipat, Analisis Vektor, Deret
Fourier, Persamaan Diferensial Biasa

Oleh:

SRI ASTUTIK

FISIKA MATEMATIKA (Buku 1)

Meliputi Materi: Deret, Bilangan Kompleks, Matrik dan Determinan, Diferensial Parsial, Integral Lipat, Analisis Vektor, Deret Fourier, Persamaan Diferensial Biasa

Diterbitkan oleh
UPT Penerbitan UNEJ
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121
Telp. 0331-330224, Psw. 319, Fax. 0331-339029
E-mail: upt-penerbitan@unej.ac.id

Hak Cipta @ 2012

Cover/layout: Noerkoentjoro W.D.

Perpustakaan Nasional RI – Katalog Dalam Terbitan

530.1
AST
f

ASTUTIK, Sri

Fisika Matematika: Deret, Bilangan Kompleks, Matrik dan Determinan, Diferensial Parsial, Integral Lipat, Analisis Vektor, Deret Fourier, Persamaan Diferensial Biasa/oleh Sri Astutik.--
Jember: Jember University Press, 2012
x, 208 hlm. ; 23 cm.

ISBN: 978-602-9030-20-4

1. TEORI FISIKA MATEMATIS

I. Judul

Hak Cipta dilindungi Undang-Undang. Dilarang memperbanyak tanpa ijin tertulis dari penerbit, sebagian atau seluruhnya dalam bentuk apapun, baik cetak, *photoprint*, maupun *microfilm*.

PRAKATA

Puji syukur kehadiran Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat serta hidayah-Nya sehingga penulisan buku ajar materi kuliah FISIKA MATEMATIKA (Buku 1) ini dapat terselesaikan. Buku ajar ini tersusun secara sistematis baik digunakan oleh mahasiswa Program Studi Pendidikan Fisika dan mahasiswa Jurusan Fisika. Buku ajar ini dibuat bertujuan sebagai referensi serta jendela pengetahuan bagi mahasiswa dalam memahami konsep – konsep fisis maupun matematis secara sistematis.

Isi dari buku ajar ini disusun berdasarkan materi perkuliahan selama satu semester dengan nilai bobot 4 Sistem Kredit Semester (SKS). Buku ajar ini terdiri dari delapan bab meliputi materi – materi : (1) Deret, (2) Bilangan Kompleks, (3) Matriks dan Determinan, (4) Diferensial Parsial, (5) Integral Lipat, (6) Analisis Vektor, (7) Deret Fourier, (8) Persamaan Diferensial Biasa. Analisis dalam buku ajar ini pada setiap bab senantiasa diliputi masalah – masalah analisis matematis dengan materi fisis yang meliputi materi gerak, gelombang, listrik, panas, bahkan fisika modern dan diakhir setiap bab diberikan soal – soal latihan agar dapat membantu mahasiswa dalam memahami materi yang telah dipelajari.

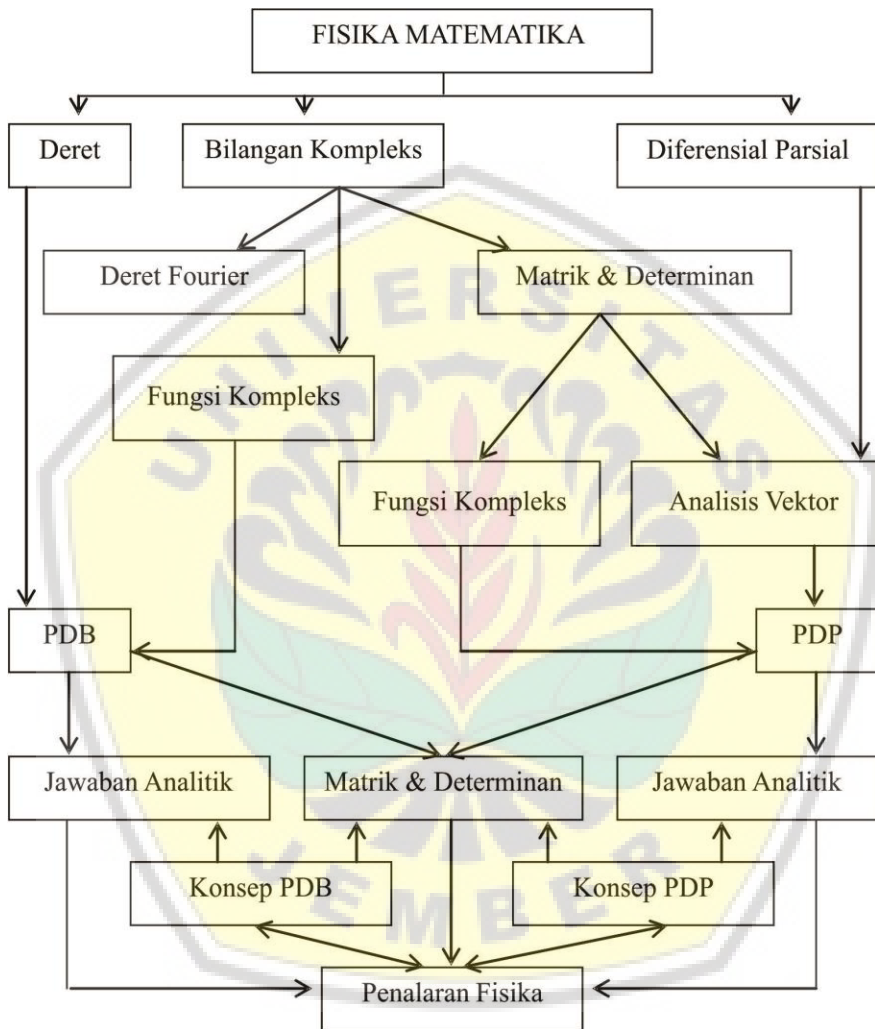
Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu sehingga dapat terselesaikan buku ajar FISIKA MATEMATIKA (Buku 1) ini, baik dukungan dari keluarga, mahasiswa – mahasiswa yang membantu penyusunan materi – materi buku ajar ini, dan terutama pada reviewer buku ini yaitu bapak Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc, Ph.D yang berkenan memberikan gambaran pemikiran demi terselesainya buku ajar ini. Saran dan kritik senantiasa diberikan kepada penulis demi kesempurnaan isi dari buku ajar ini.

Penulis mengharapkan buku ajar FISIKA MATEMATIKA (buku 1) ini dapat menjadi kontribusi secara baik yaitu sebagai pembuka cakrawala untuk memahami materi dari fisika klasik maupun materi fisika lanjut baik secara kontekstual maupun matematis.

Jember, April 2012

Dra. Sri Astutik, M.Si

PETA KONSEP MATERI FISIKA MATEMATIKA



DAFTAR ISI

	Halaman
Prakata	iii
Peta Konsep Materi Fisika Matematika	iv
Daftar Isi	v
Daftar Gambar	viii
Daftar Tabel	ix
BAB I DERET	1
1.1 Pendahuluan	1
1.2 Barisan	1
1.3 Definisi dan Notasi Deret	3
1.4 Deret Bolak-balik	13
1.5 Deret Pangkat/Deret Kuasa	15
1.6 Menguraikan Fungsi dengan Uraian Taylor	17
Rangkuman	22
Latihan Soal	29
BAB II BILANGAN KOMPLEKS	33
2.1 Pendahuluan	33
2.2 Notasi dari Bilangan Kompleks	33
2.3 Bidang Kompleks	34
2.4 Kompleks Sekawan (<i>Conjugate Complex</i>)	36
2.5 Aljabar Kompleks	37
2.6 Aturan Dalam Bilangan Kompleks	38
2.7 Hukum - Hukum dalam Bilangan Kompleks	38
2.8 Fungsi Kompleks Elementer	39
Rangkuman	42
Latihan Soal	46
BAB III MATRIKS DAN DETERMINAN	49
3.1 Pendahuluan	49
3.2 Definisi Matriks	49
3.3 Operasi Komponen – Komponen Pada Matriks	49
3.4 Ketentuan Matriks – Matriks Lain	50
3.5 Matriks Gauss Jordan	52
3.6 Determinan dan Penerapan Nilai Eigen	53

	Rangkuman	56
	Latihan Soal	60
BAB IV	DIFERENSIAL PARSIAL	67
	4.1 Pendahuluan	67
	4.2 Ketentuan – Ketentuan yang Berlaku untuk Diferensial Parsial	68
	4.3 Diferensial Parsial Total	70
	4.4 Diferensial Parsial Dengan Aturan Rantai	72
	4.5 Diferensial Parsial Secara Implisit	74
	4.6 Diferensial Parsial Secara Eksplisit	75
	4.7 Diferensial Parsial Bentuk Integral	77
	Rangkuman	80
	Latihan Soal	83
BAB V	INTEGRAL LIPAT	87
	5.1 Pendahuluan	87
	5.2 Aplikasi Penggunaan Integral Lipat	87
	5.3 Integral Lipat Dua Sebagai Luasan	90
	5.4 Integral Lipat Tiga Sebagai Volume	93
	5.5 Teorema Green Sebagai Penerapan dari Integral Lipat II	95
	5.6 Divergensi Sebagai Perkalian <i>Dot Product</i> (Perkalian Titik)	98
	5.7 Aplikasi dari Teorema Stokes	100
	5.8 Teorema Divergensi 3 Dimensi	100
	Rangkuman	102
	Latihan Soal	106
BAB VI	ANALISA VEKTOR	114
	6.1 Pendahuluan	114
	6.2 Perkalian Vektor	115
	6.3 Perkalian Tiga Vektor	121
	6.4 Turunan Pada Vektor	125
	6.5 Koordinat Polar	127
	6.6 Turunan Berarah (<i>Gradien / Del / Nabla</i>)	129
	6.7 Arti Geometri dari Operator $\nabla \cdot$	133
	6.8 Espresi Lain dari Operator $\nabla \cdot$	133
	6.9 Ekspresi – Ekspresi Yang Mengandung Operator ∇	134
	6.10 Integral Garis	136

6.11 Medan Konservatif	140
6.12 Fungsi Potensial	143
6.13 Teorema Green (<i>Pada Bidang</i>)	144
6.14 Teorema Stoke's	146
6.15 Teorema Divergensi	147
Rangkuman	147
Latihan Soal	155
BAB VII DERET FOURIER	159
7.1 Pendahuluan	159
7.2 Penentuan Koefisien Fungsi Dari Deret Fourier	159
7.3 Deret Fourier Kompleks	164
7.4 Integral Fourier	166
Rangkuman	168
Latihan Soal	171
BAB VIII PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA	179
8.1 Pendahuluan	179
8.2 Persamaan Diferensial Orde Satu (PDOS)	179
8.3 Metode Lain Dari Persamaan Diferensial Biasa (PDB)	179
Rangkuman	194
Latihan Soal	198
DAFTAR PUSTAKA	203
INDEKS	205

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Bidang Kompleks Dalam Koordinat Kartesian	34
Gambar 2.2 Bidang Komplex Dalam Koordinat Polar	35
Gambar 2.3 Kompleks Sekawan Dari Bilangan Kompleks	36
Gambar 5.1 Penampang Luasan Pada Bidang Segi Empat	88
Gambar 5.2 Dua Daerah Pada Koordinat Dua Dimensi Yang Terletak Pada Koordinat Kartesian	90
Gambar 5.3 Penampang Setiap Daerah Pada Koordinat Kartesian	91
Gambar 5.4 Volume V antara permukaan $Z = f(x, y)$ dan bidang D_{xy}	94
Gambar 5.5 Bentuk Luasan Pada Koordinat Kartesian	96
Gambar 5.6 Penampang Luasan Yang Tidak Teratur	98
Gambar 5.7 Analisis Bidang 2 D Membentuk Sebuah Benda 3 D	99
Gambar 5.8 Penampang Pada Volume Yang Diambil Elemen Luasannya	101
Gambar 6.1 Gambaran Proyeksi Vektor \vec{A} Terhadap Vektor \vec{B}	115
Gambar 6.2 Vektor Satuan Pada Koodinat Kartesian	117
Gambar 6.3 Gambaran Geometris Secara 3 Dimensi Pada Koordinat Kartesian	123
Gambar 6.4 Koordinat Polar Dengan Proyeksi Vektor Satuannya	127
Gambar 6.5 Gambaran Distribusi Suhu Dengan Keadaan Tertentu	130
Gambar 6.6 Proyeksi gradient $d\theta/ds$ pada arah \hat{u}	133

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 1.1 Deret Fungsi Maclaurine	22
Tabel 2.1 Ketentuan Dari Nilai Bilangan Imajiner.....	39





DAFTAR PUSTAKA

- Arfken, G B Weber, HJ. 1995. *Mathematical Methods For Physicist*, 4th Edition. Boston: Academic Press.
- Boas, M. L .1983. *Mathematical Methods In The Physical Sciences*. New York: Jhon Wiley & Sons.
- Churchil, Rue1 V., dkk , 1978. *Complex Variables And Application*, 3th Edition. New York: McGraw – Hill.
- Kreyzig, Erwin A. 1972. *Advanced Engineering Mathematics*, 3th . Edition New York: McGraw - Hill.
- Hans J. Wospakrik. 1993. *Dasar-Dasar Matematika untuk Fisika*, Depdikbud, Jakarta.
- Harper, Charlie. 1976. *Introduction to Mathematical Physics*, Engelwood Cliffs: Prentice Hall.
- Jackson, Jhon David. 1975. *Classical Electrodinamics*, 2th .Edition New York: John Willey.
- Mathews, Jon, and R. M . Redheffer, 1970. *Mathematics Methods Of Physics*, 2th Edition New York: Benjamin.
- Mudjiarto, R dan Krips, F.J. 1995. *Matematika Fisika 1*, Institut Teknologi Bandung: Bandung.
- Sokolnikoff, I. S., And R. M. Redhefer. 1966 *Mathematics Of Physics And Modern Engineering*. 2th Edition New York: McGraw - Hill.
- Spiegel, Murray R. 1983 *Schaum's Outline Of Theory And Problems Of Vector Analysis And Introduction To Tensor Analysis*. New York: Schaum's.
- Thomas G. B., Jr, And Finney. 1983 *Calculus And Analytic Geometry*. 2th Edition, Addison – Wesley, Reading Mass.

Wyled., W. 1979. *Mathematical Methods For Physics*. 2th Edition, Addison – Wesley, Reading Mass.



INDEKS

A

Aritmatika, 4, 23
Aturan Rantai, 73, 82

B

Barisan Berhingga, 2, 23
Barisan Tak Berhingga, 2, 23
Barisan, 1, 2, 3, 22, 23
Berhingga, 3
Bilangan, 33, 34, 37, 38, 39, 40, 43, 44, 45

C

Conventional, 52, 58
Curl, 136, 153

D

Deret Positif, 4, 5, 6, 23
Diferensial Eksak, 182, 184, 196
Diferensial Homogen, 182
Diferensial, 68, 70, 73, 75, 76, 78, 81, 82, 83, 85, 179, 182, 184, 188, 189, 194, 195, 196
Divergensi, 98, 100, 101, 105, 106, 147, 148, 155, 156
Dua, 88, 89, 90, 103, 115, 118, 148, 149, 188, 189, 197

E

Eigen, 53, 58
Eksak, 184
Eksplisit, 76, 83
Eksponensial, 18
Euler, 33, 35, 42, 45, 46, 163

G

Gauss Jordan, 52, 58
Gauss, 52, 58, 102
Gelombang, 49
Geometri, 4, 23, 133, 152
Gradien, 129, 152
Green, 95, 100, 105, 144, 155

H

Harmonik, 5, 23

I

Imajiner, 39, 44

Implisit, 75, 82

Integral Lipat, 87, 88, 89, 90, 93, 95, 102, 103, 104, 105

K

Kalkulus, 111

Kartesian, 35, 43, 90, 91, 96, 117, 123, 125, 151

Kompleks, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45

Komponen, 49, 50, 57, 114, 134, 148, 152

Konstanta, 126, 151

Koordinat, 35, 90, 91, 96, 123, 125, 128, 135, 152

L

Laplacian, 135, 136, 153

Logaritma, 19

M

Maxwell, 101, 102

Medan Konservatif, 141, 154

Minor Determinan, 54, 59

O

Operator, 133, 134, 135, 136, 152, 153

P

Partikular, 190, 197

Perkalian, 38, 39, 44, 50, 54, 57, 59, 98, 105, 115, 118, 119, 120, 124, 126, 127, 148, 149, 151

Persamaan, 18, 28, 31, 40, 62, 63, 78, 79, 86, 102, 138, 179, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 188, 189, 194, 195, 196, 197

Polar, 35, 127, 128, 135, 152

Potensial, 143, 144, 154

S

Satuan, 117

Silang, 118, 124, 127, 149, 151

T

Tak Berhingga, 3

Teorema, 95, 100, 101, 105, 106, 144, 146, 147, 148, 155, 156

Tiga, 93, 104, 121, 150

Titik, 98, 105, 111, 112, 115, 121, 127, 148, 150, 151

Total, 70, 81

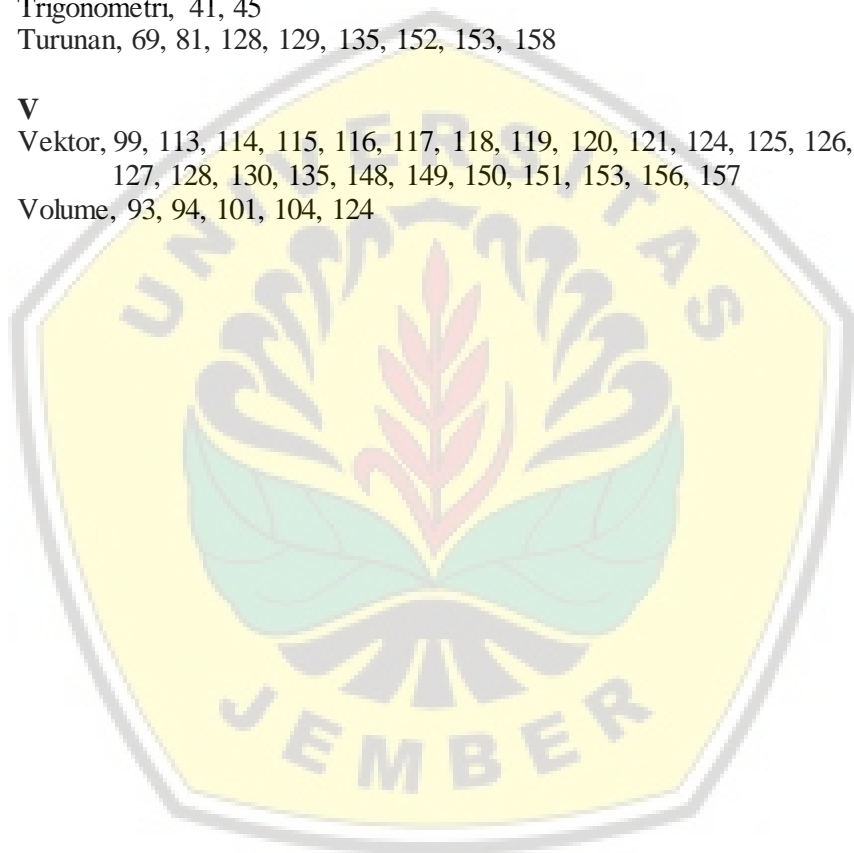
Trigonometri, 41, 45

Turunan, 69, 81, 128, 129, 135, 152, 153, 158

V

Vektor, 99, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 124, 125, 126,
127, 128, 130, 135, 148, 149, 150, 151, 153, 156, 157

Volume, 93, 94, 101, 104, 124





LAMPIRAN

LAMPIRAN I

DAFTAR RUMUS – RUMUS DAN IDENTITAS TRIGONOMETRI

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{csc}^2 x$
4. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
5. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
6. $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$
7. $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$
8. $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{1}{2} x$
9. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
10. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
11. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
12. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
13. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
14. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
15. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$
16. $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$
17. $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$
18. $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$

$$19. 2 \sin \alpha \sin \beta = -\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$20. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$17. \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$18. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$19. -\cos \alpha + \cos \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$20. a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos x$$

$$20. \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$21. \sin \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$22. \cos \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$23. \tan \frac{1}{2}x = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

LAMPIRAN II
DAFTAR RUMUS DASAR BEBERAPA FUNGSI TURUNAN DI
DALAM MATEMATIKA YANG BERGUNA DI DALAM FISIKA

No	Fungsi Asal	Fungsi Turunan	Keterangan
1	$d(cu)$	cu'	c merupakan konstanta
2	$d(u + v)$	$u' + v'$	
3	$d\left(\frac{u}{v}\right)$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	
4	$\frac{du}{dx}$	$\frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$	Aturan Berantai
5	$d(x^n)$	nx^{n-1}	
6	$d(e^x)$	e^x	
7	$d(a^x)$	$a^x \ln a$	
8	$d(\sin x)$	$\cos x$	
9	$d(\cos x)$	$-\sin x$	
10	$d(\tan x)$	$\sec^2 x$	
11	$d(\cot x)$	$-\csc^2 x$	
12	$d(\sinh x)$	$\cosh x$	
13	$d(\cosh x)$	$\sinh x$	
12	$d(\ln x)$	$\frac{1}{x}$	
13	$d(\log_a x)$	$\frac{1}{x \log_e e}$	
14	$d(\arcsin x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
15	$d(\arccos x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
16	$d(\arctan x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	
17	$d(\operatorname{arccot} x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

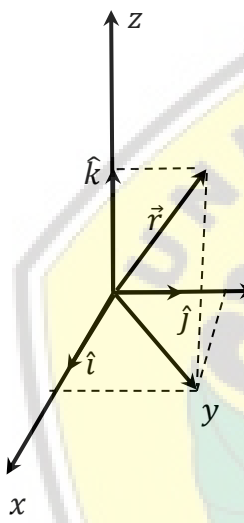
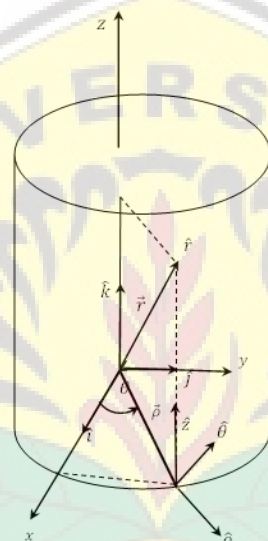
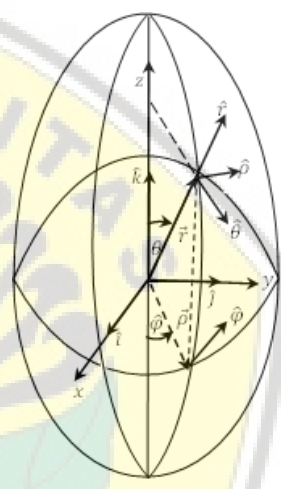
LAMPIRAN III
DAFTAR RUMUS DASAR BEBERAPA FUNGSI INTEGRAL DI
DALAM MATEMATIKA YANG BERGUNA DI DALAM FISIKA

No	Fungsi Asal	Fungsi Integral	Keterangan
1	$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	C merupakan konstanta
2	$\int \frac{1}{x} dx$	$\ln x + C$	
3	$\int e^{ax} dx$	$\frac{1}{a} e^{ax} + C$	
4	$\int uv' dx$	$uv - \int u'v dx + C$	
5	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$	
6	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$	
7	$\int \tan x dx$	$-\ln \cos x + C$	
8	$\int \cot x dx$	$\ln \sin x + C$	
9	$\int \sec x dx$	$\ln \sec x + \tan x + C$	
10	$\int \csc x dx$	$\ln \csc x - \cot x + C$	
11	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	
12	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$	
13	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\sinh^{-1} \frac{x}{a} + C$	
14	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\cosh^{-1} \frac{x}{a} + C$	
15	$\int \sin^2 x dx$	$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$	
16	$\int \cos^2 x dx$	$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$	

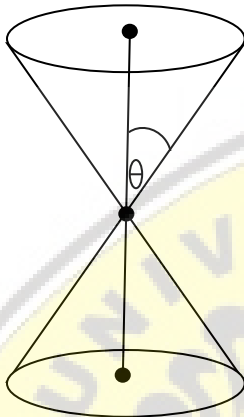
17	$\int \tan^2 x dx$	$\tan x - x + C$	
18	$\int \cot^2 x dx$	$-\cot x - x + C$	
19	$\int \ln x dx$	$x \ln x - x + C$	
20	$\int e^{ax} \sin bx dx$	$\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$	
21	$\int e^{ax} \cos bx dx$	$\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$	



LAMPIRAN IV DAFTAR TABEL KOORDINAT TIGA DIMENSI

<i>Sistem Koordinat Kartesian</i>	<i>Sistem Koordinat Silinder</i>	<i>Sistem Koordinat Bola</i>
		
$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ (x, y, z)	$\vec{r} = \vec{r} \hat{r}$ $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$ $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$ $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{k})$ (ρ, z) $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$ $z = k$ $\hat{\rho} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$ $\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$	$\vec{r} = \vec{r} \hat{r}$ $\vec{r} = r\hat{r}(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ (r, θ, ϕ) $x = r \sin \theta \cos \phi$ $y = r \sin \theta \sin \phi$ $z = r \cos \theta$ $\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$ $\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}$ $\hat{\phi} = -\hat{i} \sin \phi + \hat{j} \cos \phi$

LAMPIRAN V
BAGIAN - BAGIAN DARI IRISAN KERUCUT



Akan Menghasilkan :

1. Titik
2. Garis Lurus
3. Lingkaran
4. Parabola
5. Hiperbola
6. Ellips

keterangan

1. TITIK

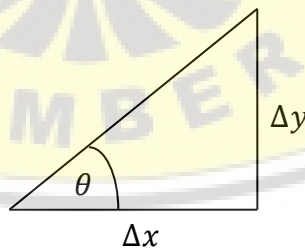
Tanda penghubung antara garis – garis yang terletak didalam kerucut.

2. GARIS LURUS

Dengan ketentuan:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \theta$$

m merupakan sebuah kemiringan garis atau disebut sebagai gradient.



Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1)

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$= mx - mx_1 + y_1$$

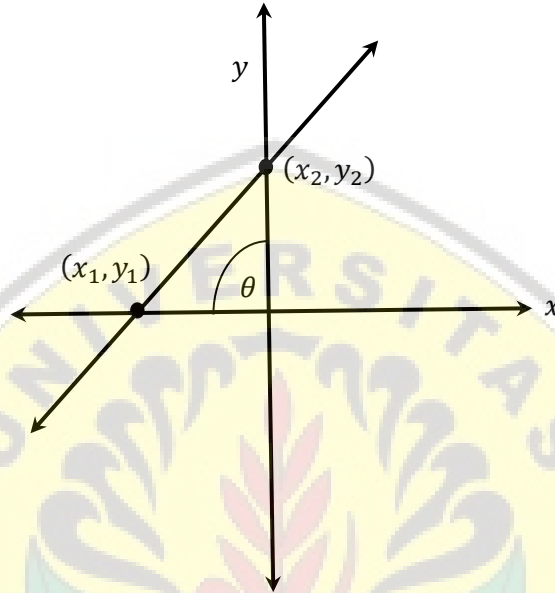
$$y = mx + c$$

Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Dengan kata lain persamaan garis dapat dituliskan:

$$ax + by + c = 0$$



3. LINGKARAN

Tempat kedudukan titik – titik yang berjarak sama terhadap satu titik tetap

- Persamaan lingkaran dengan pusat (0,0) dengan jari – jari r
 $r^2 = x^2 + y^2$
- Persamaan lingkaran dengan pusat (a, b) dengan jari – jari r
 $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$
- Dapat diketahui persamaan umum lingkaran diatas dengan cara menguraikan :

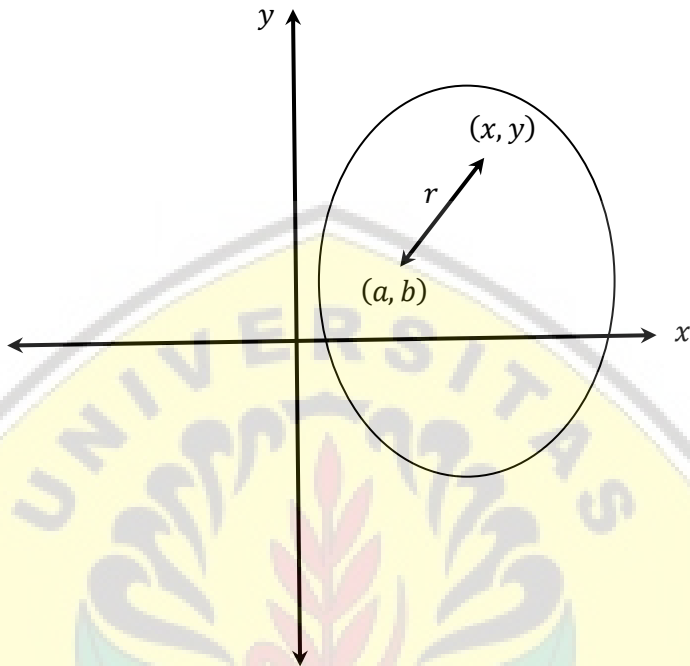
$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - Ax - By + C = 0$$



- Jarak antara 2 titik :

$$\text{Jarak } PQ = r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

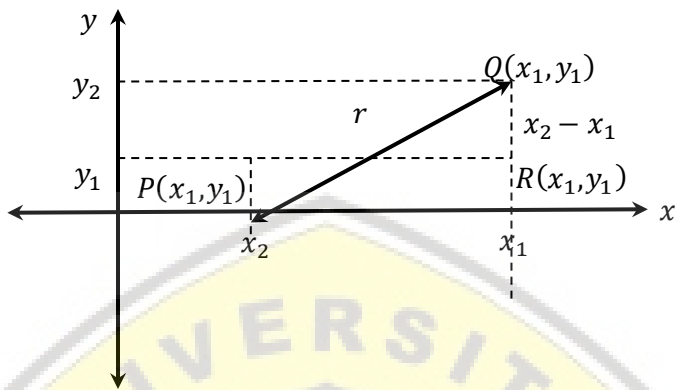
Persamaan lingkaran dengan pusat :

$$\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$$

Maka jari – jari :

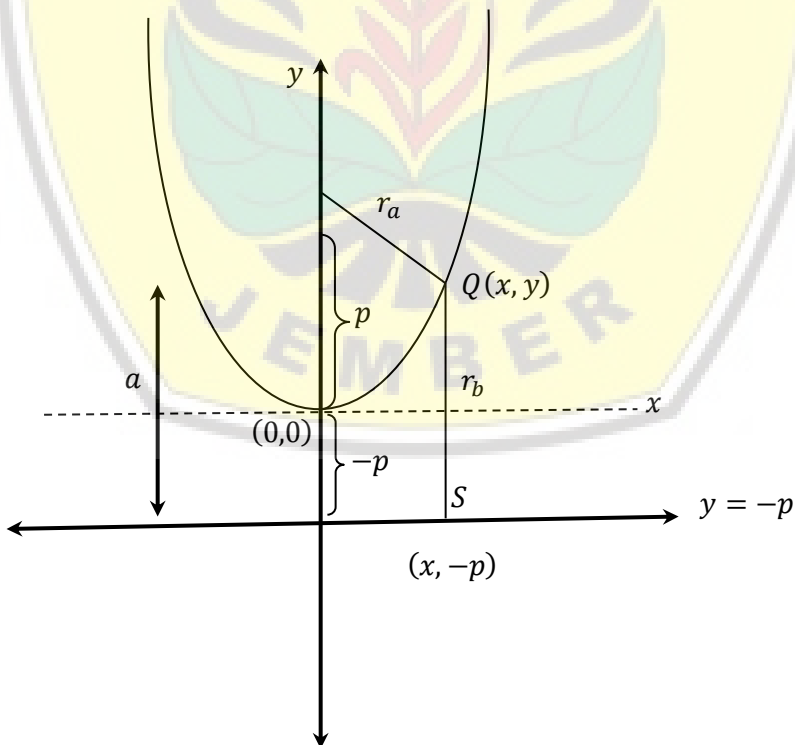
$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}B\right)^2 - C}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$



4 PARABOLA

Tempat kedudukan titik – titik yang berjarak sama terhadap satu titik tetap (*fokus*) dan 1 garis lurus (*direefrik*).



a. Parabola Tegak

$$FQ^2 = r_a^2 = (x - 0)^2 + (y - p)^2$$

$$QS^2 = r_b^2 = (x - x)^2 + (y + p)^2$$

$$FQ^2 = QS^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = 0 + y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 + y^2 - y^2 + p^2 - p^2 = 2py + 2py$$

$$x^2 = 4py$$

Persamaan parabola yang berpusat di $(0,0)$ dan berfokus $(0,p)$ dengan persamaan direktrik $y = -p$.jika puncak parabola di (a, b) , maka persamaan menjadi :

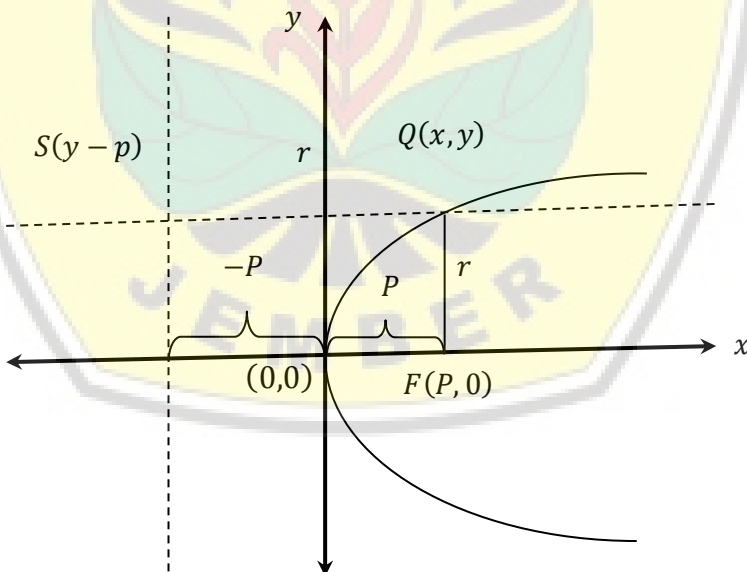
$$(x - a)^2 = 4p(y - b)$$

Fokus di $(a, p + b)$, persamaan direktrik $y = b - p$
 “catatan”

$p > 0$, Parabola menghadap ke atas

$p < 0$, Parabola menghadap ke bawah

b. Persamaan Datar



$$FQ^2 = r^2 = (x - p)^2 + (y - 0)^2$$

$$QS^2 = r^2 = (x + p)^2 + (y - y)^2$$

$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 + x^2 - x^2 + p^2 - p^2 = 2px + 2px$$

$$y^2 = 4px$$

Persamaan parabola yang berpuncak di $(0,0)$ berfokus di $F(p, 0)$ dengan persamaan direktrik $x = -p$ Jika puncak parabola di (a, b) , maka persamaan menjadi :

$$(y - b)^2 = 4p(x - a)$$

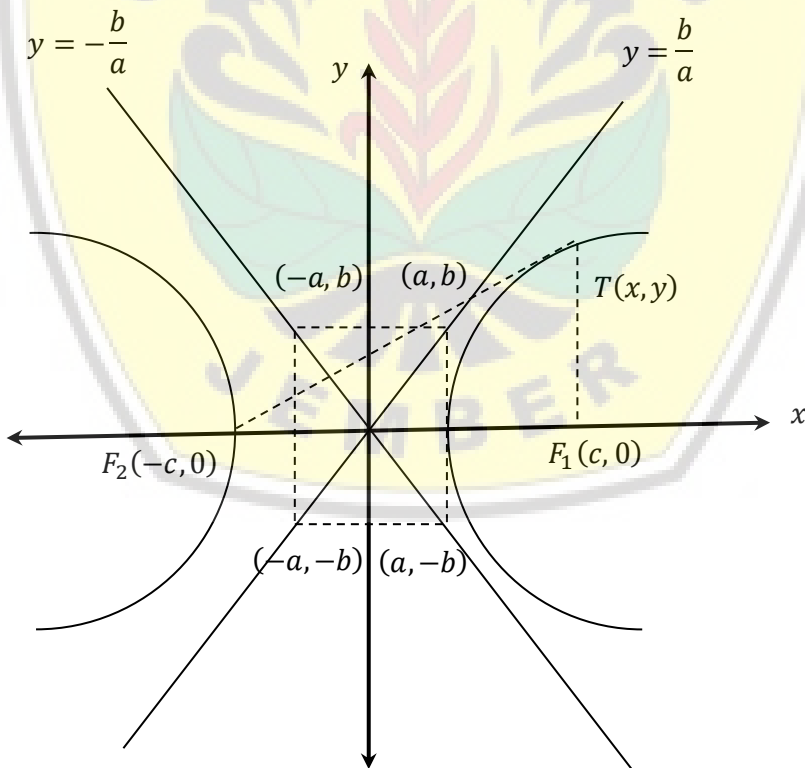
Fokus $(a + p, b)$ dengan persamaan direktrik $x = a - p$
 “catatan”

$p > 0$, Parabola menghadap ke kanan

$p < 0$, Parabola menghadap ke kiri

5. HIPERBOLA

Himpunan titik – titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tetap selalu sama.



Persamaan Hiperbola yang berpusat di titik $(0,0)$:

$$TF_2 - TF_1 = 2a$$

$$TF_2 = 2a + TF_1$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

(kuadratkan masing – masing ruas)

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - x^2 + 2cx - c^2 - y^2$$

$$= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + 4cx$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -a^2 + cx \quad (\text{kuadratkan masing – masing ruas})$$

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = (-a^2 + cx)^2$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Perlu diketahui bahwasannya nilai dari $a^2 - c^2$ adalah negatif dan kita misalkan bernilai $-b^2$, maka akan diperoleh :

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

Maka dapat disederhanakan menjadi :

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

$$\frac{a^2b^2}{a^2b^2} \frac{-b^2x^2 + a^2y^2}{-a^2b^2} = \frac{-b^2x^2 + a^2y^2}{-a^2b^2} = 1$$

Persamaan Hiperbola yang berpusat di titik (h,k) dan sumbu mayornya sejajar sumbu x

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Dengan ketentuan :

1. Pusat di (h,k)
2. Puncak $(h+a, k)$ dan $(h-a, k)$

3. Fokus $(h + c, k)$ dan $(h - c, k)$

Persamaan Hiperbola yang berpusat di titik (h, k) dan sumbu mayornya sejajar sumbu y

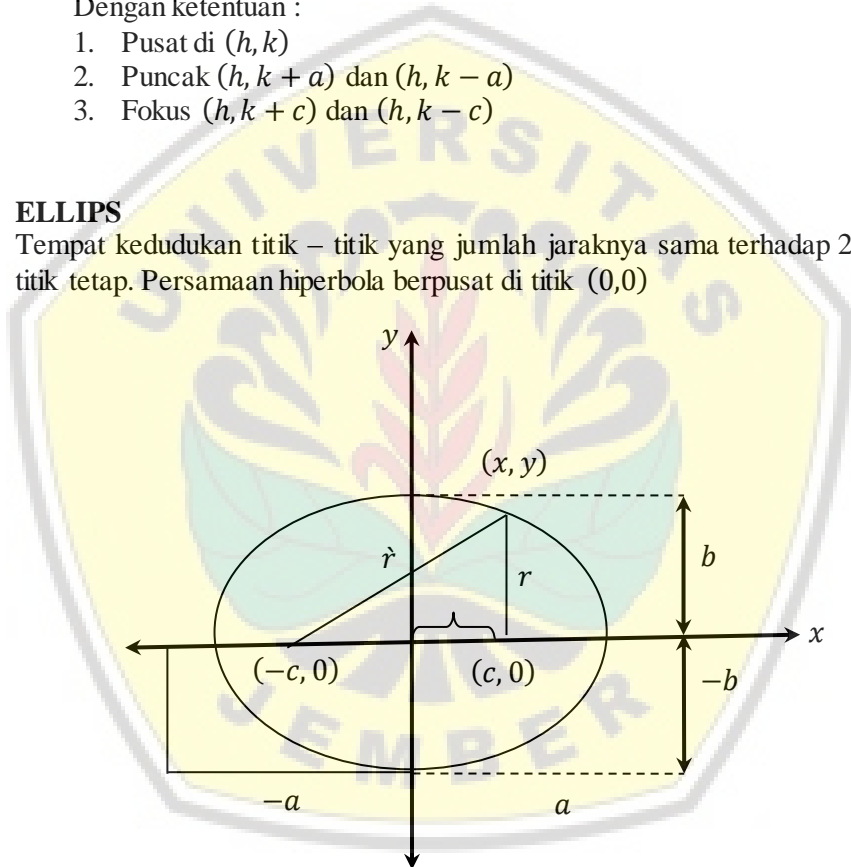
$$\frac{(x - h)^2}{b^2} - \frac{(y - k)^2}{a^2} = -1$$

Dengan ketentuan :

1. Pusat di (h, k)
2. Puncak $(h, k + a)$ dan $(h, k - a)$
3. Fokus $(h, k + c)$ dan $(h, k - c)$

6 ELLIPS

Tempat kedudukan titik – titik yang jumlah jaraknya sama terhadap 2 titik tetap. Persamaan hiperbola berpusat di titik $(0, 0)$



$$r + r = 2a$$

$$r = 2a - r$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

(kuadratkan masing masing ruas)

$$\left(\sqrt{(x + c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - x^2 + 2cx - c^2 - y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ 4cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 4cx \\ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - cx \\ (\text{kuadratkan masing - masing ruas}) \\ \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 &= (a^2 - cx)^2 \\ a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 - 2a^2cx + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + c^2x^2 \\ a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

Misal $a^2 - c^2 = b^2$, Maka :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{\frac{a^2b^2}{b^2}} + \frac{y^2}{\frac{a^2b^2}{a^2}} = 1$$

Jadi :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Persamaan Ellipsis Yang Berpusat di (0,0)

Untuk : $a > b$ maka sumbu mayor sejajar dengan sumbu x

$a < b$ maka sumbu mayor sejajar dengan sumbu y

Jika pusat Ellipsis di (m, n) sejajar dengan sumbu x , maka :

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

1. Pusat di titik (m, n)
2. Puncak di $(h + a, k)$ dan $(h - a, k)$
3. Fokus di $(h + c, k)$ dan $(h - c, k)$

Jika pusat Ellipsis di (m, n) sejajar dengan sumbu y , maka :

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

1. Pusat di titik (m, n)
2. Puncak di $(h, k + a)$ dan $(h, k - a)$
3. Fokus di $(h, k + c)$ dan $(h, k - c)$

LAMPIRAN VI BEBERAPA OPERASI DALAM OPERATOR (∇)

1. $\nabla \cdot \nabla \Psi = \nabla^2 \Psi \rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$
2. $\nabla \times \nabla \Psi = 0$
3. $\nabla(\nabla \cdot \Psi) = \hat{i} \left(\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial x \partial z} \right) +$
 $\hat{j} \left(\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial y \partial z} \right) +$
 $\hat{k} \left(\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial z^2} \right)$
4. $\nabla \cdot (\nabla \times \Psi) = 0$
5. $\nabla \times (\nabla \times \Psi) = \nabla(\nabla \cdot \Psi) - \nabla^2 \Psi$
6. $\nabla \cdot (\varphi \Psi) = \varphi(\nabla \cdot \Psi) + \Psi \cdot (\nabla \varphi)$
7. $\nabla \times (\varphi \Psi) = \varphi(\nabla \times \Psi) - \Psi \times (\nabla \varphi)$
8. $\nabla \cdot (k \times \Psi) = \Psi \cdot (\Psi \times k) - k \times (\nabla \times \Psi)$
9. $\nabla \times (k \times \Psi) = (\Psi \cdot \nabla)k - (k \cdot \nabla)\Psi - \Psi(\nabla \cdot k) + k(\nabla \cdot \Psi)$
10. $\nabla(k \cdot \Psi) = k \times (\nabla \times \Psi) + (k \cdot \nabla)\Psi + \Psi \times (\nabla \times k) + (\Psi \cdot \nabla)k$
11. $\nabla \cdot (\nabla \varphi \times \nabla \Psi) = 0$

BIOGRAFI PENULIS



Dra. Sri Astutik, M.Si, lahir di Jember pada tahun 1967. Pada tahun 1980 lulus dari SDN Tembokrejo 4. Pada tahun 1983 lulus dari SLTPN 1 Kencong, pada tahun 1986 lulus dari SMAN 1 Jember, dan pada tahun 1991 lulus dari Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Fisika Universitas Jember. Mulai tahun 1992 hingga sekarang aktif sebagai dosen di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Fisika Universitas Jember. Pada tahun 2000 berhasil menyelesaikan program magister (S2) pada bidang Geofisika di Institut Teknologi Bandung (ITB). Pada tahun 2004 - 2006 menjabat sebagai Kepala Laboratorium Fisika di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember, dalam selang waktu 2006 - 2010 menjabat sebagai Ketua Program Studi Pendidikan Fisika di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember. Pada tahun 2010 sampai sekarang menjabat sebagai Ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan IPA di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.