



**ANALISIS *RESOLVING PERFECT DOMINATING SET* DAN
SKEMA APLIKASINYA DALAM MENYELESAIKAN
MASALAH TRANSPORTASI BUS DENGAN TEKNIK *GRAPH
NEURAL NETWORK***

*Diajukan untuk memenuhi persyaratan memperoleh gelar Sarjana pada program
studi Pendidikan Matematika*

SKRIPSI

Oleh

**Muhammad Zainur Rofiqi
190210101003**

**KEMETERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS JEMBER
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JEMBER
2023**



**ANALISIS *RESOLVING PERFECT DOMINATING SET* DAN
SKEMA APLIKASINYA DALAM MENYELESAIKAN
MASALAH TRANSPORTASI BUS DENGAN TEKNIK *GRAPH
NEURAL NETWORK***

*Diajukan untuk memenuhi persyaratan memperoleh gelar Sarjana pada program
studi Pendidikan Matematika*

SKRIPSI

Oleh

**Muhammad Zainur Rofiqi
190210101003**

**KEMETERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS JEMBER
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JEMBER
2023**

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penulis persembahkan skripsi ini sebagai ungkapan kebahagiaan dan rasa terima kasih kepada:

1. Keluarga besar saya, bapak Tolak Yasin dan ibu Herlin Juhariyah, serta adik saya Nabil Fadilah Febriansyah yang telah mendukung dan memberikan doa, kasih sayang, motivasi, kepercayaan dan senyuman yang selalu menguatkan di setiap perjalanan hidup saya;
2. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D selaku Dosen Pembimbing Utama dan ibu Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota yang senantiasa meluangkan waktu dalam memberikan pengarahan dan bimbingan hingga terselesaikannya penulisan skripsi ini;
3. Bapak Drs. Toto Bara Setiawan, M.Si selaku Dosen Penguji I dan ibu Rafiantika Megahnia Prihandini, S.Pd., M.Si selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
4. Seluruh bapak dan ibu dosen Program Studi Pendidikan Matematika yang telah memberikan banyak ilmu dan suasana kekeluargaan di setiap masanya;
5. Almamater tercinta Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

MOTTO

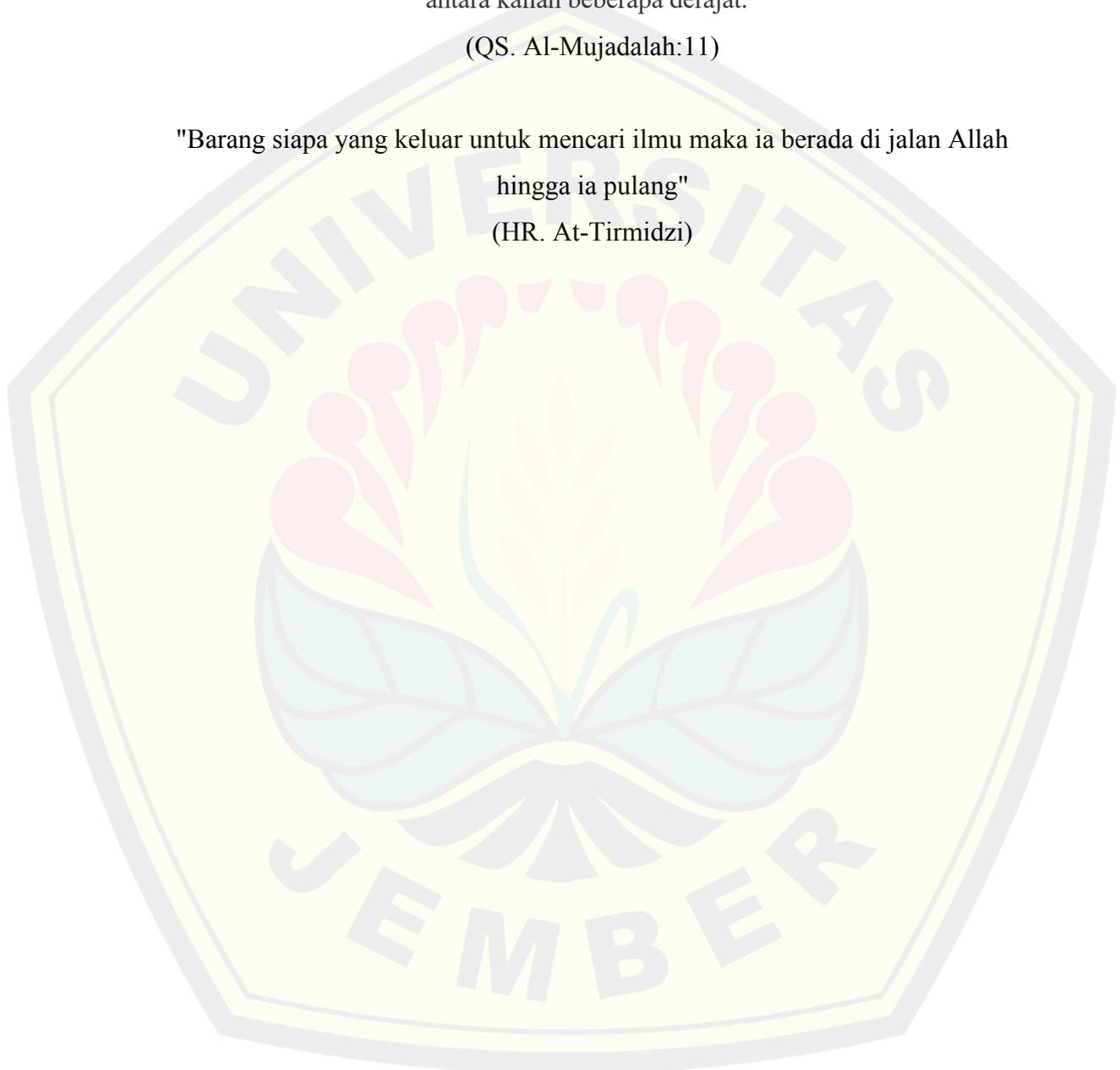
يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنْكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ

“Allah akan mengangkat kedudukan orang-orang yang beriman dan diberi ilmu di antara kalian beberapa derajat.”

(QS. Al-Mujadalah:11)

"Barang siapa yang keluar untuk mencari ilmu maka ia berada di jalan Allah hingga ia pulang"

(HR. At-Tirmidzi)



PERNYATAAN ORISINALITAS

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Muhammad Zainur Rofiqi

NIM : 190210101003

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: "*Analisis Resolving Perfect Dominating Set dan Skema Aplikasinya dalam Menyelesaikan Masalah Transportasi Bus dengan Teknik Graph Neural Network*"

adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum pernah diajukan pada institusi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan skripsi ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 03 Juli 2023

Yang menyatakan,

Muhammad Zainur Rofiqi

NIM 190210101003

HALAMAN PERSETUJUAN

Skripsi berjudul "*Analisis Resolving Perfect Dominating Set dan Skema Aplikasinya dalam Menyelesaikan Masalah Transportasi Bus dengan Teknik Graph Neural Network*" telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember pada:

Hari : Senin

Tanggal : 06 Juli 2023

Tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Pembimbing

Tanda Tangan

1. Pembimbing Utama

Nama : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. (.....)

NIP : 19680802 199303 1 004

2. Pembimbing Anggota

Nama : Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si. (.....)

NIP : 19920731 201903 2 015

Penguji

1. Penguji Utama

Nama : Drs. Toto Bara Setiawan, M.Si. (.....)

NIP : 19581209 198603 1 003

2. Penguji Anggota 1

Nama : Rafiantika Megahnia P., S.Pd., M.Si. (.....)

NIP : 19891005 201903 2 034

ABSTRAK

Resolving perfect dominating set terjadi ketika suatu graf telah memenuhi kondisi dominasi sempurna dan jarak dari simpul ke dominator berbeda dengan simpul lainnya. Sedangkan syarat penyelesaian himpunan dominasi sempurna adalah ketika jarak suatu simpul ke semua simpul dominator berbeda dengan simpul lainnya dan grafnya adalah himpunan dominasi sempurna. Penelitian ini merupakan penelitian eksploratif dan penelitian terapan. Adapun metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode pendeteksian pola dan metode deduktif aksiomatik. Dari hasil penyelesaian himpunan dominasi sempurna, diperoleh tiga teorema, antara lain sebagai berikut. nilai penyelesaian himpunan dominasi sempurna pada graf tangga (L_n) adalah $\frac{n+2}{2}$ dan $\frac{n+1}{2}$, pada graf tangga segitiga (TL_n) adalah $\frac{4n+6}{10}$ dan adalah $\frac{4n+4}{10}$, dan pada graf tangga miring (SL_n) adalah $\frac{n+2}{2}$ dan $\frac{n+1}{2}$.

Kata kunci: *Resolving perfect dominating set*, graf ladder, graf triangular ladder, graf sloping ladder

ABSTRACT

Resolving perfect dominating set happens when a graph has met the perfect dominating conditions and when the distance from the vertex to the dominator is different from the other vertex. Meanwhile, the condition of resolving perfect dominating set is when the distance of a vertex to all dominator vertex is different from the other vertex and the graph is perfect dominating set. This research was an explorative research and applied research. As for the research method used in this study, namely the detection method axiomatic deductive patterns and methods. From the results of resolving perfect dominating set, three theorems were obtained, including the following. the value of solving perfect dominating set on graph ladder (L_n) is $\frac{n+2}{2}$ and $\frac{n+1}{2}$, on graph triangular ladder (TL_n) is $\frac{4n+4}{10}$ and is $\frac{4n+6}{10}$, and on graph sloping ladder (SL_n) is $\frac{n+2}{2}$ and $\frac{n+1}{2}$.

Keywords: *Resolving perfect dominating set*, graph ladder, graph triangular ladder, graph sloping ladder

RINGKASAN

Dominating set merupakan himpunan simpul yang mendominasi pada sebuah graf dengan jumlah yang minimum, atau bisa diartikan juga sebagai kardinalitas minimum dari semua himpunan dominasi dari graf G . Jika D adalah himpunan simpul yang mendominasi dari suatu graf sederhana G , maka setiap titik u di $V(G) - D$ adalah tetangga dari beberapa titik v di D . *Dominating set* dengan $|D| = \gamma(G)$ dinamakan *dominating set minimum*. Graf tersebut dapat dikatakan *perfect dominating set* apabila setiap titiknya pada sebuah graf tersebut hanya memiliki satu dominator. Minimum kardinalitas himpunan *resolving perfect dominating set* disebut *resolving perfect dominating number* yang dilambangkan dengan $\gamma_{rp}(G)$. *Resolving perfect dominating set* merupakan suatu graf yang telah memenuhi syarat *perfect dominating* dan ketika jarak titik terhadap dominator berbeda dengan titik lainnya. Sedangkan syarat dari *resolving perfect dominating set* yaitu ketika jarak titik terhadap semua titik dominator berbeda dengan titik yang lainnya dan graf tersebut telah *perfect dominating set*.

Artificial intelegent atau yang biasanya disingkat AI merupakan kecerdasan yang diwujudkan dalam mesin yang berbeda dengan *natural intelligence* yang dimiliki oleh manusia atau hewan. Definisi lainnya dari AI adalah cabang ilmu komputer yang berusaha mereplikasi dan mensimulasikan kecerdasan manusia dalam mesin, sehingga mesin dapat melaksanakan tugasnya seperti yang dilakukan oleh manusia. Teknologi *artificial intelegent* dapat membuat keputusan dengan cara menganalisis dan menggunakan data yang tersedia di dalam sistem tersebut. Proses yang terjadi dalam *artificial intelegent* mencakup learning, reasoning, dan self-correction. Sedangkan *machine learning* merupakan sistem dalam AI yang dapat belajar sendiri berdasarkan algoritma/model yang dikembangkan oleh manusia. Contoh aplikasi *machine learning* dalam bidang *computer vision* berupa *fingerprint*, CCTV, dan pendektasian tulisan tangan. Bidang informasi *retrival* berupa kategorisasi spam

dan non spam dalam email. Bidang *recommendation search* pada google, facebook, youtube, dll.

Dari hasil penelitian *resolving perfect dominating set* diperoleh tiga teorema diantaranya sebagai berikut.

- a. Pada *ladder* (L_n), nilai *resolving perfect dominating set* adalah $\frac{n+2}{2}$ dan $\frac{n+1}{2}$,
- b. Pada *triangular ladder* (TL_n), nilai *resolving perfect dominating set* adalah $\frac{2n+2}{5}$ dan $\frac{2n+3}{5}$,
- c. Pada *sloping ladder* (SL_n), nilai *resolving perfect dominating set* adalah $\frac{n+2}{2}$ dan $\frac{n+1}{2}$.

Selain itu, pada simulasi GNN menggunakan MATLAB juga diperoleh model yang terbaik. Dari tabel yang diperoleh yaitu untuk model ke 8 merupakan model yang terbaik dikarenakan untuk nilai regresinya mendekati 1 yaitu 0.99968 dan untuk MSE ujinya memiliki nilai terkecil dibandingkan model lainnya yaitu 2.59×10^5 .

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Analisis Resolving Perfect Dominating Set dan Skema Aplikasinya dalam Menyelesaikan Masalah Transportasi Bus dengan Teknik Graph Neural Network*". Skripsi ini diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Koordinator Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D selaku Dosen Pembimbing Utama dan Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. Drs. Toto Bara Setiawan, M.Si selaku Dosen Penguji I dan Dosen Pembimbing Akademik dan Rafiantika Megahnia Prihandini, S.Pd., M.Si selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
5. Teman-teman pejuang graf dan aplikasinya yang tergabung dalam CGANT, khususnya mbak Anis dan mas Rifqi, teman-teman Pendidikan Matematika angkatan 2019 (Constanta), pengurus *Mathematics Student Club* (MSC) 2020, dan teman-teman kontrakan Brantas 7 no 29;
6. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

DAFTAR ISI

PERSEMBAHAN.....	iii
MOTTO	iv
PERNYATAAN ORISINALITAS.....	v
HALAMAN PERSETUJUAN	vi
ABSTRAK	vii
RINGKASAN	viii
PRAKATA.....	x
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR LAMBANG	xv
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
1.6 Kebaharuan Penelitian	4
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA.....	5
2.1 Terminologi Dasar Graf.....	5
2.2 Dominating Set	6
2.3 Perfect Dominating Set	6
2.4 Dimensi Metrik	7
2.5 Resolving Perfect Dominating Set.....	7
2.6 Keluarga Graf <i>Ladder</i>	8
2.6.1 Graf <i>Ladder</i>	8
2.6.2 Graf <i>Triangular Ladder</i>	8

2.6.3	Graf <i>Sloping Ladder</i>	9
2.7	<i>Graph Neural Network</i>	9
2.8	Transportasi Bus	11
2.9	Hasil Penelitian Sebelumnya	12
BAB 3.	METODOLOGI PENELITIAN	13
3.1	Jenis Penelitian	13
3.2	Metode Penelitian	13
3.3	Definisi Operasional.....	14
3.3.1	<i>Resolving perfect dominating set</i>	14
3.3.2	Teknik <i>graph neural network</i>	14
3.4	Prosedur Penelitian	14
BAB 4.	HASIL DAN PEMBAHASAN	17
4.1	Kardinalitas Graf	17
4.2	<i>Resolving Perfect Dominating Set</i> pada Graf <i>Ladder</i> , Graf <i>Triangular Ladder</i> , dan Graf <i>Sloping Ladder</i>	18
4.3	Keterkaitan Masalah Transportasi Bus dengan <i>Resolving Perfect Dominating Set</i>	27
4.4	Algoritma GNN Satu <i>Layer</i> dalam Menyelesaikan Masalah Transportasi Bus dengan <i>Resolving Perfect Dominating Set</i>	28
4.5	Analisis Skema Aplikasi Penerapan <i>Resolving Perfect Dominating Set</i> dalam Menyelesaikan Masalah Transportasi Bus dengan Teknik <i>Graph Neural Network</i>	37
BAB 5.	KESIMPULAN DAN SARAN	39
5.1	Kesimpulan	39
5.2	Saran.....	39
	DAFTAR PUSTAKA	40
	LAMPIRAN	41

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Jembatan Königsberg.....	5
Gambar 2.2 Contoh Graf.....	5
Gambar 2.3 <i>Dominating Set</i>	6
Gambar 2.4 <i>Perfect Dominating Set</i>	6
Gambar 2.5 Dimensi Metrik.....	7
Gambar 2.6 <i>Resolving Perfect Dominating Set</i>	8
Gambar 2.7 Graf <i>Ladder</i>	8
Gambar 2.8 Graf <i>Triangular Ladder</i>	9
Gambar 2.9 Graf <i>Sloping Ladder</i>	9
Gambar 2.10 <i>Perceptron</i>	10
Gambar 2.11 <i>Radial Basis Network</i>	10
Gambar 2.12 <i>Deep Feed Forward</i>	10
Gambar 2.13 <i>Neural Massage Passing</i>	10
Gambar 2.14 <i>Graph Neural Network</i>	11
Gambar 3.1 Bagan Penelitian.....	16
Gambar 4.1 Representasi Rute Transportasi Bus.....	27
Gambar 4.2 <i>Perfect Dominating Set</i> Dari Rute Transportasi Bus.....	27

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Hasil Penelitian *Resolving Perfect Dominating Set* Sebelumnya 12
Tabel 4.1 Indikator Kinerja Arsitektur dan Model GNN 37



DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$V(G)$	=	Himpunan titik pada graf
$E(G)$	=	Himpunan sisi pada graf
$ V(G) $	=	<i>Order</i> pada graf G
$ E(G) $	=	<i>Size</i> pada graf G
L_n	=	Graf <i>Ladder</i> dengan $2n$ titik
TL_n	=	Graf <i>Triangular Ladder</i> dengan $2n$ titik
SL_n	=	Graf <i>Sloping Ladder</i> dengan $2n$ titik
P_n	=	Graf <i>Lintasan</i> dengan n titik
S_n	=	Graf <i>Star</i> dengan $n + 1$ titik
Pr_n	=	Graf <i>Prism</i> dengan n titik
$\gamma_{rp}(G)$	=	<i>Resolving perfect domination number</i>
$d(v W)$	=	Jarak titik v terhadap W
Wg	=	<i>Learning weight</i>
α	=	<i>Learning rate</i>
ε	=	Toleransi
SUM	=	Fungsi penjumlahan
h_u^{l-1}	=	Fitur titik
m_u^l	=	<i>Message function</i>

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu yang erat kaitannya dengan kehidupan sehari-hari dan sangat bermanfaat untuk memecahkan suatu masalah dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu cabang ilmu matematika yang bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari adalah teori graf. Teori graf merupakan cabang dari ilmu matematika terapan yaitu matematika diskrit. Teori graf ini pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 dimana pada saat itu permasalahan pertama yaitu Jembatan Königsberg (Königsberg, Prussia timur, Jerman). Pada Tahun 1736 Leonhard Euler merupakan orang pertama yang berhasil menemukan permasalahan tersebut dengan pembuktian yang sederhana. Ia memodelkan ini kedalam graf. Daratan yang yang dihubungkan oleh jembatan tersebut dinyatakan sebagai titik yang disebut simpul (*vertex*) dan jembatan dinyatakan dengan garis yang disebut sisi (*edge*).

Salah satu topik pada teori graf yang saat ini dikembangkan yaitu pada *resolving perfect dominating set*. *Dominating set* adalah konsep untuk menentukan suatu titik pada graf dengan ketentuan titik tersebut menjangkau titik yang ada di sekitarnya dengan seminimal mungkin. Kardinalitas minimum dari *dominating set* disebut dengan *dominating number* yang disimbolkan dengan $\gamma(G)$. Teori *dominating set* ini telah dipelajari sejak tahun 1960. Akan tetapi tingkat pengkajian tentang *dominating set* berkembang dan terus meningkat pada pertengahan 1970-an. Salah satu pengembangannya berupa *perfect dominating set*. *Perfect dominating set* dapat diartikan dengan suatu graf yang titiknya tepat berada pada satu dominator.

Jaringan syaraf tiruan (JST) atau yang biasa disebut *artificial neural network* (ANN) atau *neural network* (NN) berupa suatu model sederhana dari suatu syaraf nyata dalam otak manusia seperti suatu unit *threshold* yang biner. Pada penelitian ini difokuskan pada *graph neural network* (GNN). *Graph neural network* merupakan salah satu jenis dari *neural network* yang langsung beroperasi

pada struktur data graf. *Graph neural network* juga dapat digunakan untuk memprediksi hal yang akan terjadi kedepannya dan mengestrak informasi penting dari suatu graf.

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan nilai *resolving perfect dominating set* pada keluarga graf *ladder*. Selanjutnya untuk teorema-teorema yang didapatkan harus dibuktikan terlebih dahulu. Untuk membuktikan teorema-teorema tersebut, maka harus didapatkan terlebih dahulu *resolving perfect dominating set* pada keluarga graf *ladder*. *Resolving perfect dominating set* sangat berguna untuk menyelesaikan permasalahan di kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan dominasi. Salah satu contoh permasalahannya yang akan dibahas yaitu tentang transportasi.

Transportasi adalah perpindahan orang atau barang dengan menggunakan alat atau kendaraan dari dan ke tempat-tempat yang terpisah secara geografis (Steenbrink, 1974). Transportasi ini juga dapat mempermudah pertumbuhan dan perkembangan pembangunan di daerah tertentu. Transportasi ini dibagi menjadi beberapa jenis yaitu transportasi darat, transportasi udara, dan transportasi laut. Di penelitian ini yang akan dibahas mengenai transportasi darat yaitu transportasi bus.

Berdasarkan latar belakang diatas, *resolving perfect dominating set* dengan teknik graf *neural network* ini merupakan topik yang masih tergolong baru di graf sehingga masih sedikit penelitian yang membahas mengenai topik tersebut. Pada penelitian ini adalah melanjutkan penelitian terakhir yang sudah dilakukan mengenai *resolving perfect dominating set* pada graf lintasan, graf *prism*, graf *star*, dan pada graf operasi *comb*. Melalui penelitian ini nantinya dapat ditemukan *resolving perfect dominating set* pada permasalahan transportasi bus. Oleh karena itu, penulis mengajukan penelitian yang berjudul **"Analisis Resolving Perfect Dominating Set dan Skema Aplikasinya dalam Menyelesaikan Masalah Transportasi bus dengan Teknik *Graph Neural Network*"**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pemaparan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Berapa *resolving perfect dominating set* pada graf L_n, TL_n, SL_n ?
2. Bagaimana skema aplikasi penerapan *resolving perfect dominating set* dalam menyelesaikan masalah arus transportasi bus dengan menggunakan teknik *graph neural network*?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini terdapat pada graf yang digunakan. Untuk graf yang digunakan di penelitian ini yaitu pada keluarga graf *ladder* meliputi graf *ladder* L_n untuk $n \geq 5$, graf *triangular ladder* TL_n untuk $n \geq 6$ dan graf *sloping ladder* SL_n untuk $n \geq 6$.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan pemaparan latar belakang di atas, adapun tujuan dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Menentukan *resolving perfect dominating set* pada graf L_n, TL_n, SL_n .
2. Menentukan skema aplikasi penerapan *resolving perfect dominating set* dalam menyelesaikan masalah arus transportasi bus dengan menggunakan teknik *graph neural network*.

1.5 Manfaat Penelitian

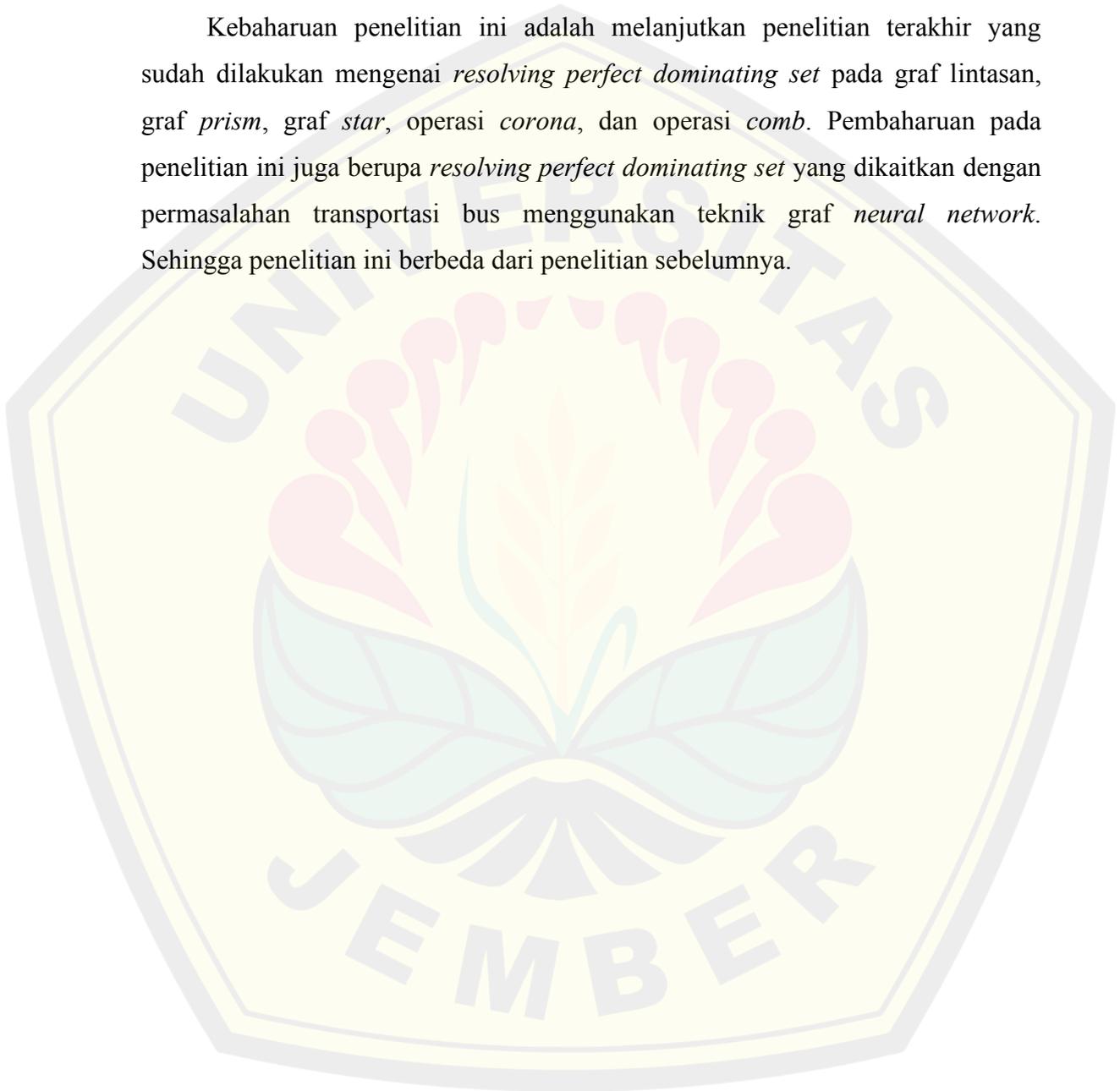
Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

1. Menambah wawasan dan pengetahuan baru bagi peneliti lain dalam bidang teori aplikasi graf khususnya mengenai *resolving perfect dominating set* dan graf *neural network*;
2. Memberikan inspirasi bagi pembaca untuk lebih mengembangkan penelitian tentang *resolving perfect dominating set* dan graf *neural network* pada graf lainnya;

3. Hasil dari penelitian ini dapat digunakan bagi peneliti lain sebagai pengembangan ilmu dari permasalahan *resolving perfect dominating set* dan graf *neural network*.

1.6 Kebaharuan Penelitian

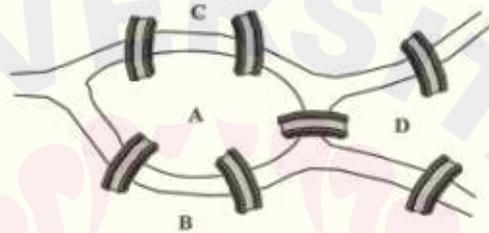
Kebaharuan penelitian ini adalah melanjutkan penelitian terakhir yang sudah dilakukan mengenai *resolving perfect dominating set* pada graf lintasan, graf *prism*, graf *star*, operasi *corona*, dan operasi *comb*. Pembaharuan pada penelitian ini juga berupa *resolving perfect dominating set* yang dikaitkan dengan permasalahan transportasi bus menggunakan teknik graf *neural network*. Sehingga penelitian ini berbeda dari penelitian sebelumnya.



BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

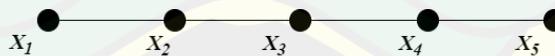
2.1 Terminologi Dasar Graf

Graf pertama kali ditemukan pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan asal Swiss, Leonhard Euler. Leonhard Euler telah menyelesaikan persoalan tujuh jembatan yang berada di kota Königsberg yang direpresentasikan dengan graf. Persoalan tujuh jembatan di kota Königsberg tersebut dinyatakan dengan garis dan titik dimana tujuh jembatan sebagai garis atau sisi dan daratan sebagai titik.



Gambar 2.1 Jembatan Königsberg

Definisi 2.1 Sebuah graf G adalah himpunan $V(G)$ dan $E(G)$, dimana $V(G)$ merupakan himpunan berhingga yang tak kosong dari elemen yang disebut titik sedangkan $E(G)$ merupakan sebuah himpunan yang boleh kosong dari pasangan tak terurut u, v dari titik-titik u, v elemen $V(G)$ yang disebut sisi. $V(G)$ disebut himpunan titik dari G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G (Slamin, 2009). Contoh dari suatu graf G terlihat pada Gambar 2.2 dibawah ini.



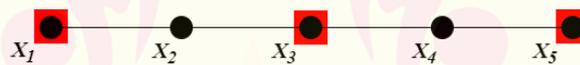
Gambar 2.2 Contoh Graf

Pada tahun 1994, Hartsfield dan Ringel mendefinisikan sisi sebagai pasangan tak terurut (u, v) dari dua titik u dan v di V . Himpunan titik graf G dinotasikan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi graf G dinotasikan dengan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ atau $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$ dengan $e = (v_i, v_j)$ yang berarti bahwa sisi tersebut menghubungkan titik v_i dan v_j . Banyaknya titik pada graf G disebut sebagai kardinalitas titik yang dinotasikan

dengan $|V(G)|$ sedangkan banyaknya sisi pada graf G disebut sebagai kardinalitas sisi dinotasikan dengan $|E(G)|$.

2.2 Dominating Set

Dominating set merupakan himpunan titik yang mendominasi pada sebuah graf dengan jumlah yang minimum, atau bisa diartikan juga sebagai kardinalitas minimum dari semua himpunan dominasi dari graf G (Yudha dkk., 2018 dan Ratnasari dkk., 2017). Jika D adalah himpunan titik yang mendominasi dari suatu graf sederhana G , maka setiap titik u di $V(G) - D$ adalah tetangga dari beberapa titik v di D . *Dominating set* dinotasikan sebagai $\gamma(G)$. *Dominating set* dengan $|D| = \gamma(G)$ dinamakan *dominating set minimum* (Liu dkk., 2018 dan Agustin dkk., 2014).



Gambar 2.3 *Dominating Set*

Gambar 2.3 merupakan contoh dari *Dominating set*. (X_1, X_3, X_5) disebut titik dominator atau himpunan dominasi karena menjangkau titik-titik disekitarnya yaitu (X_1, \dots, X_5) .

2.3 Perfect Dominating Set

Perfect dominating set adalah sebuah graf yang memiliki dominator dengan jumlah yang minimum, atau bisa diartikan juga sebagai kardinalitas minimum dari semua himpunan dominasi dari graf G . Graf tersebut dapat dikatakan *perfect dominating set* apabila setiap titiknya pada sebuah graf tersebut hanya memiliki satu dominator.



Gambar 2.4 *Perfect Dominating Set*

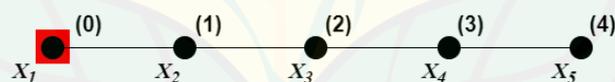
Gambar 2.4 merupakan contoh dari *perfect dominating set*. Pada gambar diatas didapatkan *perfect dominating set* dengan titik dominator yaitu (X_1, X_4, X_5) .

2.4 Dimensi Metrik

Pada tahun 2016 Kelenc, pertama kali memperkenalkan mengenai dimensi metrik sisi merupakan salah satu pengembangan dari topik dimensi metrik. Untuk dimensi metriknya sebagai berikut:

Definisi 2.4.1 Misalkan G merupakan graf terhubung dan sederhana dengan V adalah himpunan titik dan E adalah himpunan sisi. Jarak antara titik u dan v didefinisikan sebagai lintasan terpendek dari titik u ke v di G dan dinotasikan $d(u, v)$. Jika diberikan suatu himpunan terurut $W = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_k) \subseteq V(G)$ dari titik-titik dalam graf terhubung G dan titik v di $V(G)$, maka representasi dari titik v terhadap W adalah $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k))$. Jika $r(v|W)$ untuk setiap titik $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut sebagai himpunan titik pembeda dari $V(G)$. Kardinalitas minimum dari himpunan titik pembeda atau basis dari G disebut dimensi metrik (Adawiyah dkk, 2021). Selain dari definisi diatas juga terdapat teorema pendukung yaitu:

Teorema 2.4.2 Graf terhubung G dengan ordo n memiliki dimensi metrik satu jika dan hanya jika graf G merupakan graf lintasan (Chartrand and Lesniak, 2000). Berikut ini merupakan contoh dari dimensi metrik pada suatu graf.



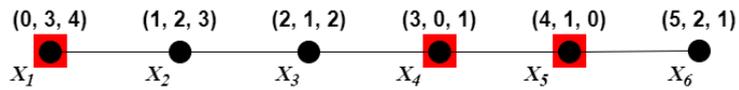
Gambar 2.5 Dimensi Metrik

2.5 Resolving Perfect Dominating Set

Pada tahun 2016 Kelenc, pertama kali memperkenalkan mengenai dimensi metrik sisi merupakan salah satu pengembangan dari topik dimensi metrik. Untuk dimensi metriknya sebagai berikut:

Minimum kardinalitas himpunan *resolving perfect dominating set* disebut *resolving perfect dominating number* yang dilambangkan dengan $\gamma_{rp}(G)$. *Resolving perfect dominating set* merupakan suatu graf yang telah memenuhi syarat *perfect dominating*. Sedangkan syarat dari *resolving perfect dominating set*

yaitu ketika jarak titik terhadap semua titik dominator berbeda dengan titik yang lainnya dan graf tersebut telah *perfect dominating set*. Ilustrasi *resolving perfect dominating set* dapat dilihat pada gambar 2.6.



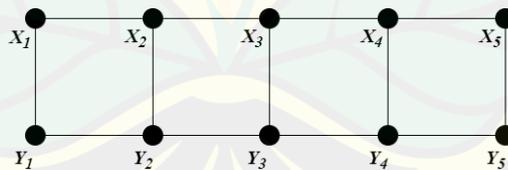
Gambar 2.6 *Resolving Perfect Dominating Set*

2.6 Keluarga Graf Ladder

Keluarga graf adalah pengelompokan suatu graf menjadi satu kelompok dimana graf yang dikelompokkan tersebut memiliki karakteristik yang sama. Keluarga graf *ladder* atau graf tangga merupakan salah satu contoh dari keluarga graf. Keluarga graf tangga memiliki unsur penyusun utama yaitu graf tangga (L_n) yang didefinisikan atas hasil kali kartesius antara graf lintasan (P_n) dan graf lengkap dengan dua titik (K_2). Pada penelitian ini akan dicari nilai *resolving perfect dominating set* pada keluarga graf *ladder* meliputi graf *ladder* (L_n), graf *triangular ladder* (TL_n) dan graf *sloping ladder* (SL_n).

2.6.1 Graf Ladder

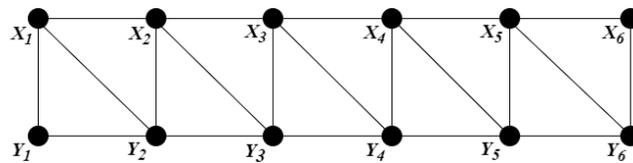
Graf *ladder* atau graf tangga (L_n) dapat didefinisikan sebagai $L_n = P_n \times K_2$ dimana P_n adalah graf lintasan dengan n titik dan K_2 adalah graf lengkap dengan 2 titik (M. I. Moussa, and E. M. Badr, 2016).



Gambar 2.7 Graf Ladder

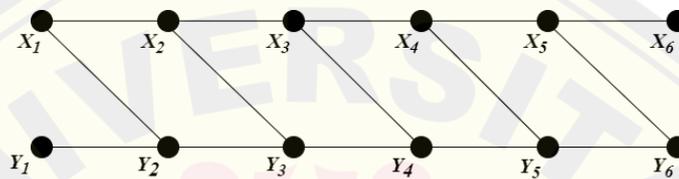
2.6.2 Graf Triangular Ladder

Graf *triangular ladder* atau graf tangga segitiga (TL_n) adalah sebuah graf yang diperoleh dari graf ladder $TL_n = P_n \times P_2$ untuk ($n \geq 2$) dengan menambahkan sisi $x_i y_{j+1}$, dimana titik-titik kedua P_n adalah $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ dan $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ dengan sisi $\{x_i y_j\}$ (P. Jeyanthi, 2015).

Gambar 2.8 Graf *Triangular Ladder*

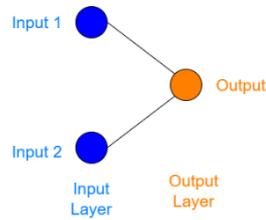
2.6.3 Graf *Sloping Ladder*

Graf *sloping ladder* atau graf tangga miring (SL_n) adalah sebuah graf yang diperoleh dari (TL_n) dengan mengurangi sisi $\{x_i y_i\}$. Titik pada (SL_n) adalah x_i dan y_j . Titik x_i dan y_j adalah 2 lintasan di graf (SL_n) dimana $i, j = 1, 2, \dots, n$.

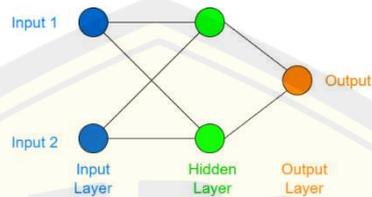
Gambar 2.9 Graf *Sloping Ladder*

2.7 *Graph Neural Network*

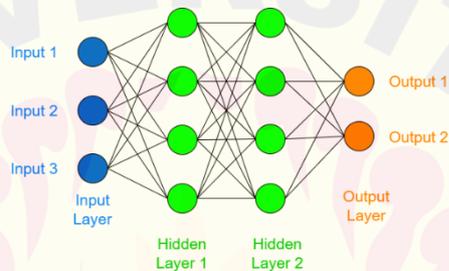
Graph neural network (GNN) pertama kali diperkenalkan oleh Franco Scarselli Bruna pada tahun 2009. Dalam makalah yang berjudul “The graph neural network model”, didalam makalah tersebut mengusulkan perluasan jaringan saraf yang ada untuk memproses data yang direpresentasikan dalam bentuk grafik. *Graph neural network* sangat dipengaruhi oleh *Convolutional Neural Networks* (CNNs) dan penyematan grafik. *Graph neural network* atau GNN termasuk salah satu jenis dari algoritma *machine learning*. *Graph neural network* juga dapat digunakan untuk memprediksi hal yang akan terjadi kedepannya dan mengestrak informasi penting dari suatu graf. *Graph neural networks* adalah kelas khusus dari *neural network* yang mampu bekerja dengan data yang direpresentasikan dalam bentuk grafik. *Graph neural network* merupakan bagian dari sebuah tipe dari *neural network* yang menggunakan data struktur graf pada data set dan outputnya. GNN dirancang secara khusus untuk menangani data berstruktur graf, seperti jaringan sosial, struktur molekul, graf pengetahuan, dll. Berikut ini bagan dari sebagian besar *graph neural network*.



Gambar 2.10 Perceptron

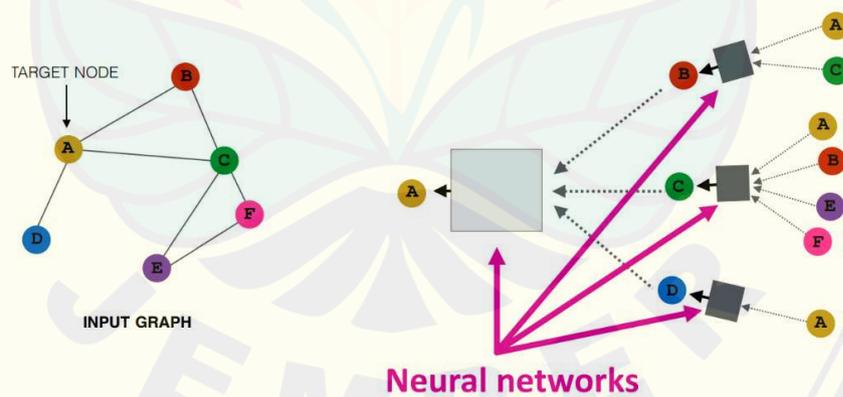


Gambar 2.11 Radial Basis Network



Gambar 2.12 Deep Feed Forward

Dataset setiap simpul diberi label terlebih dahulu kemudian model akan dilatih untuk memprediksi label dari setiap simpul.



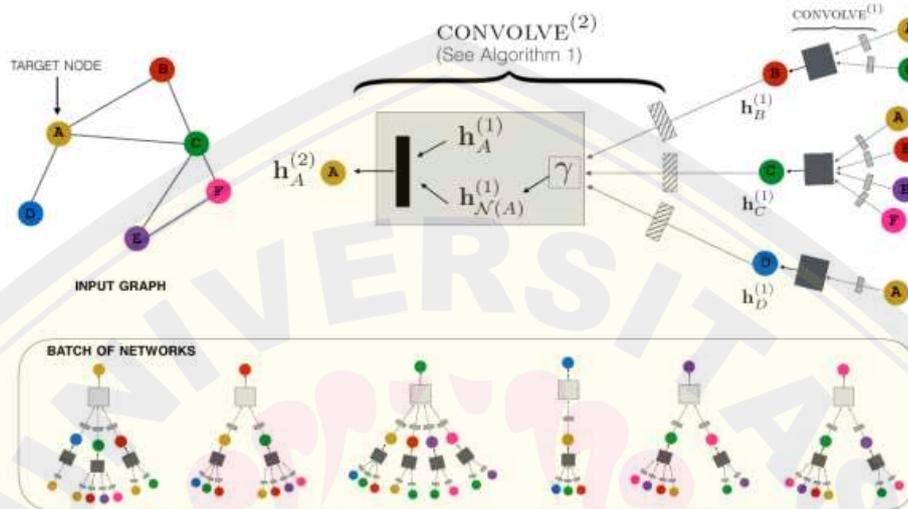
Neural networks

Gambar 2.13 Neural Message Passing

Graph neural network memiliki beberapa keterbatasan sebagai berikut:

1. Memperbarui status *node* yang tersembunyi tidak efisien untuk titik tetap,

2. *Graph neural network* menggunakan parameter yang sama di setiap iterasi sementara *neural network* lainnya menggunakan parameter yang berbeda di setiap lapisan,
3. Pemodelan fitur informatif yang diperoleh dari tepi sulit.

Gambar 2.14 *Graph Neural Network*

2.8 Transportasi Bus

Transportasi adalah perpindahan orang atau barang dengan menggunakan alat atau kendaraan dari dan ke tempat-tempat yang terpisah secara geografis (Steenbrink, 1974). Secara umum transportasi adalah suatu kegiatan memindahkan sesuatu dari suatu tempat ke tempat lain, baik dengan atau tanpa sarana. Penyediaan fasilitas yang mendukung pergerakan yang lebih cepat dan sesuai kebutuhan akan kapasitas angkut dengan menyesuaikan dengan jenis transportasi yang digunakan. Dalam hal ini dapat menganalisis arus kepadatan rute transportasi bus dengan mensimulasikan beberapa terminal berdasarkan pada cuaca, jumlah penumpang dan jumlah bus.

Penyelesaian permasalahan ini dengan merepresentasikan terminal sebagai titik (*vertex*) dan setiap rute bus dari terminal satu ke terminal lainnya direpresentasikan dengan sisi (*edge*). Untuk gambar dari rute terminal bus dan representasi rute perjalanan bus dapat dilihat pada bagian lampiran 6.

2.9 Hasil Penelitian Sebelumnya

Pada penelitian sebelumnya yang sudah diteliti tentang *resolving perfect dominating set* yang dapat dijadikan referensi untuk pembuatan penelitian ini. Berikut adalah beberapa hasil penelitian dari sebelumnya dapat dilihat pada tabel diawah ini:

Tabel 2.1 Hasil Penelitian *Resolving Perfect Dominating Set* Sebelumnya

Graf G	$\gamma_{rp}(G)$	Keterangan
Graf $(Bt_4 \triangleright P_2)$	$\gamma_{rp}(Bt_4 \triangleright P_2) = 6$	(M. O. Azizah dkk., 2020)
Graf <i>Star</i> (S_n)	$\gamma_{rp}(S_n) = n$	
Graf <i>Prism</i> (A_n)	$\gamma_{rp}(A_n) = 3$	
Graf $(P_n \odot P_2)$	$\gamma_{rp}(P_n \odot P_2) = n$	
Graf $(K_5 \triangleright P_2)$	$\gamma_{rp}(K_5 \triangleright P_2) = 5$	(M. O. Azizah dkk., 2021)
Graf $(K_5 \triangleright P_3)$	$\gamma_{rp}(K_5 \triangleright P_3) = 5$	
Graf $(Bt_n \triangleright P_3)$	$\gamma_{rp}(Bt_n \triangleright P_3) = 5$	
Graf $(Bt_4 \triangleright C_3)$	$\gamma_{rp}(Bt_4 \triangleright C_3) = 6$	

BAB 3. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan pada penelitian ini yaitu penelitian eksploratif dan penelitian terapan. Penelitian eksploratif merupakan suatu penelitian yang dilakukan dengan menggali data dan hal-hal baru yang ingin diketahui oleh peneliti seperti merumuskan suatu masalah yang akan diteliti sehingga hasil yang diperoleh dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya. Sedangkan penelitian terapan adalah jenis penelitian yang bertujuan untuk menyelesaikan suatu permasalahan tertentu secara praktis. Selain itu, penelitian ini merupakan pengembangan dari topik sebelumnya sehingga memungkinkan diadakan penelitian lanjutan terhadap topik yang dibahas.

3.2 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini yaitu metode pendeteksian pola dan metode deduktif aksiomatik:

1. Metode Pendekatan Pola

Metode pendekatan pola atau *pattern recognition* adalah metode penelitian dengan merumuskan atau menemukan pola pada *resolving perfect dominating set* sehingga didapat nilai *resolving* pada keluarga graf *ladder*.

2. Metode Deduktif Aksiomatik

Metode deduktif aksiomatik merupakan metode yang menggunakan prinsip pembuktian deduktif yang diterapkan dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang ada. Kemudian terapkan dalam penyelesaian dari suatu permasalahan yang berkaitan dengan *resolving perfect dominating set* sehingga didapat nilai *resolving* pada keluarga graf *ladder*.

3.3 Definisi Operasional

Definisi operasional variabel yang digunakan pada penelitian ini untuk memberikan gambaran sistematis untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi operasional untuk penelitian ini sebagai berikut.

3.3.1 *Resolving perfect dominating set*

Resolving perfect dominating set merupakan suatu graf yang telah memenuhi syarat *perfect dominating set* dan ketika jarak titik terhadap setiap dominator berbeda dengan titik lainnya. Sedangkan syarat dari *resolving perfect dominating set* yaitu ketika jarak titik terhadap semua titik dominator berbeda dengan titik yang lainnya dan graf tersebut telah *perfect dominating set*.

3.3.2 Teknik *graph neural network*

Graph neural network adalah kelas khusus dari *neural network* yang mampu bekerja dengan data yang direpresentasikan dalam bentuk grafik. *Graph neural network* merupakan bagian dari sebuah tipe dari *neural network* yang menggunakan data struktur graf pada data set dan outputnya. GNN juga merupakan salah satu jenis dari algoritma *machine learning*. *Artificial Intelligence* atau yang biasanya disingkat AI merupakan sistem komputer yang mampu melakukan tugas-tugas yang biasanya membutuhkan kecerdasan manusia. *Machine Learning* atau yang biasanya disingkat ML merupakan mesin yang dikembangkan supaya bisa belajar dengan sendirinya tanpa arahan dari penggunanya.

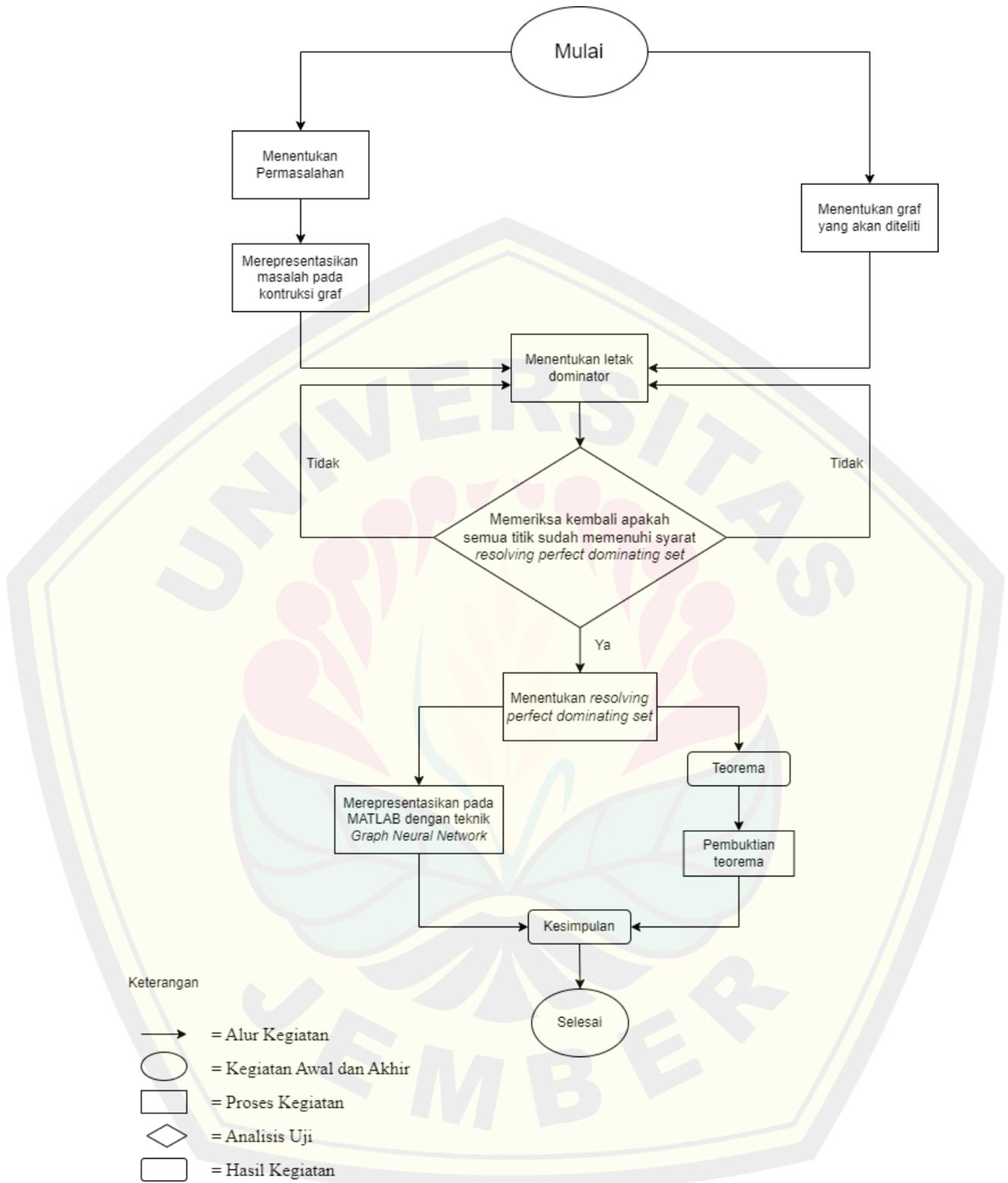
3.4 Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian adalah gambaran sistematis mengenai langkah-langkah yang akan dilakukan sebagai pedoman dalam melaksanakan penelitian untuk mendapatkan hasil yang dicapai sesuai dengan tujuan penelitian. Prosedur penelitian yang akan dilakukan dalam menentukan *resolving perfect dominating set* dan skema aplikasinya dalam menyelesaikan masalah transportasi bus dengan teknik *graph neural network*. Pada penelitian ini prosedur penelitian yang digunakan sebagai berikut:

1. Mulai;

2. Menentukan graf yang akan diteliti untuk analisis awal *resolving perfect dominating set*;
3. Menentukan letak dominator graf yang akan diteliti;
4. Memeriksa kembali apakah sudah memenuhi syarat *resolving perfect dominating set* dan apakah seluruh titik pada graf G sudah terdominasi seluruhnya, jika masih ada yang belum maka kembali lagi ke tahap ke 4 dan apabila sudah sesuai maka bisa dilanjutkan pada tahap selanjutnya;
5. Menentukan *resolving perfect dominating set* pada graf yang diteliti;
6. Menentukan teorema dari hasil *resolving perfect dominating set* pada graf yang akan diteliti;
7. Menentukan objek penelitian berupa masalah transportasi bus;
8. Merepresentasikan permasalahan dalam konstruksi graf;
9. Menentukan dominator pada konstruksi graf;
10. Memeriksa kembali apakah sudah memenuhi syarat *resolving perfect dominating set* dan apakah seluruh titik pada graf G sudah terdominasi seluruhnya, jika masih ada yang belum maka kembali lagi ke tahap ke 10 dan apabila sudah sesuai maka bisa dilanjutkan pada tahap selanjutnya;
11. Menentukan *resolving perfect dominating set* pada konstruksi graf untuk menyelesaikan permasalahan;
12. Merepresentasikan graf yang diperoleh dengan teknik *graph neural network* dan mengoperasikan dengan MATLAB;
13. Selesai.

Penelitian ini dilakukan untuk menemukan *resolving perfect dominating set* pada graf dan menyelesaikan permasalahan transportasi bus dengan menggunakan *graph neural network*. Secara umum, untuk langkah-langkah penelitian di atas dapat disajikan dalam diagram alir pada Gambar dibawah ini.



Gambar 3.1 Bagan Penelitian

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan hasil penelitian mengenai *resolving perfect dominating set* pada keluarga graf *ladder*. Penelitian ini diawali dengan memilih graf yang akan diteliti yaitu graf *ladder* (L_n), graf *triangular ladder* (TL_n) dan graf *sloping ladder* (SL_n). Pada penelitian ini didapatkan tiga teorema baru. Format penyajian temuan penelitian dalam bab ini diawali dengan pernyataan teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar sebagai visualisasi. Selanjutnya dihubungkan antara representasi transportasi bus dengan *resolving perfect dominating set*. Dan untuk yang terakhir yaitu pengaplikasian *graph neural network* pada rute transportasi bus dengan menggunakan aplikasi matlab.

4.1 Kardinalitas Graf

Penelitian diawali dengan melakukan observasi untuk menentukan kardinalitas pada keluarga graf *ladder*.

Observasi 4.1.1 Misal diketahui (L_n) adalah graf *ladder* yang memiliki kardinalitas titik $|V(L_n)| = 2n$ dan kardinalitas sisi $|E(L_n)| = 3n - 2$.

Bukti. Graf *ladder* (L_n) merupakan hasil kali kartesius antara graf lintasan (P_n) dan graf lengkap dengan dua titik (K_2). Sehingga graf *ladder* memiliki himpunan titik $V(L_n) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(L_n) = \{x_i x_{i+1}, y_j y_{j+1}; 1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$. Kardinalitas titik dari graf *ladder* (L_n) adalah $|V(L_n)| = n + n = 2n$. Sedangkan untuk kardinalitas sisi pada graf *ladder* (L_n) adalah $|E(L_n)| = (n - 1) + (n - 1) + n = 3n - 2$.

Observasi 4.1.2 Misal diketahui (TL_n) adalah graf *triangular ladder* yang memiliki kardinalitas titik $|V(TL_n)| = 2n$ dan kardinalitas sisi $|E(TL_n)| = 4n - 3$.

Bukti. Graf *triangular ladder* (TL_n) merupakan sebuah graf yang diperoleh dari (L_n) dengan menambahkan sisi $x_i y_{j+1}$. Sehingga graf *triangular ladder* memiliki

himpunan titik $V(TL_n) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(TL_n) = \{x_i x_{i+1}, y_j y_{j+1}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i y_{j+1}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1\}$. Kardinalitas titik dari graf *triangular ladder* (TL_n) adalah $|V(TL_n)| = n + n = 2n$. Sedangkan untuk kardinalitas sisi pada graf *triangular ladder* (TL_n) adalah $|E(TL_n)| = (n-1) + (n-1) + n + (n-1) = 4n - 3$.

Observasi 4.1.3 Misal diketahui (SL_n) adalah graf *sloping ladder* yang memiliki kardinalitas titik $|V(SL_n)| = 2n$ dan kardinalitas sisi $|E(SL_n)| = 3n - 3$.

Bukti. Graf *sloping ladder* (SL_n) merupakan sebuah graf yang diperoleh dari (TL_n) dengan mengurangi sisi $x_i y_j$. Sehingga graf *sloping ladder* memiliki himpunan titik $V(SL_n) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(SL_n) = \{x_i x_{i+1}, y_j y_{j+1}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_i y_{j+1}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1\}$. Kardinalitas titik dari graf *sloping ladder* (SL_n) adalah $|V(SL_n)| = n + n = 2n$. Sedangkan untuk kardinalitas sisi pada graf *sloping ladder* (SL_n) adalah $|E(SL_n)| = (n-1) + (n-1) + (n-1) = 3n - 3$.

4.2 Resolving Perfect Dominating Set pada Graf Ladder, Graf Triangular Ladder, dan Graf Sloping Ladder

Pada penelitian ini didapatkan tiga teorema *resolving perfect dominating set* pada graf *ladder* L_n dengan $n \geq 5$, graf *triangular ladder* TL_n dengan $n \geq 6$, dan graf *sloping ladder* SL_n dengan $n \geq 6$. Tahapan untuk mendapatkan dapat dilihat berikut ini:

Teorema 4.1 Jika (L_n) merupakan graf *ladder* dengan $n \geq 5$, maka

$$\gamma_{rp}(L_n) = \begin{cases} \frac{n+2}{2}, & n = \text{genap} \\ \frac{n+1}{2}, & n = \text{ganjil} \end{cases}$$

Bukti. Misalkan graf *ladder* (L_n) $n \geq 5$, merupakan graf yang memiliki himpunan titik $V(L_n) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(L_n) = \{x_i x_{i+1}, y_j y_{j+1}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$.

$i \leq n$ }. Kardinalitas titik dari graf *ladder* (L_n) adalah $|V(L_n)| = 2n$. Sedangkan untuk kardinalitas sisi pada graf *ladder* (L_n) adalah $|E(L_n)| = 3n - 2$.

Kasus 1. $\gamma_{rp}(L_n) = \frac{n+2}{2}$, jika $n =$ genap dibuktikan dengan menunjukkan batas bawah $\gamma_{rp}(L_n) \geq \frac{n+2}{2}$ dan batas atas $\gamma_{rp}(L_n) \leq \frac{n+2}{2}$. Pertama akan dibuktikan batas atas *resolving perfect dominating set* dari (L_n). Kita memilih $W = \{x_i; i \in 1 \bmod 4\} \cup \{x_n\} \cup \{y_j; j \in 3 \bmod 4\}$ sehingga diperoleh $|W| = \frac{n+2}{2}$. Jadi representasi titik pada graf (L_n) untuk $n \equiv 0, 2 \bmod 4$ terhadap *resolving perfect dominating set* dapat dilihat pada penjelasan dibawah ini.

Untuk $n \equiv 2 \bmod 4$

$$(R_D)(L_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n, i \equiv 1 \bmod 4, i = n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n, j \equiv 3 \bmod 4\}$$

- $1 \leq i \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 1 \bmod 4, i_{rd} = n,$
 $|i - i_{rd}|.$
- $1 \leq i \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 3 \bmod 4,$
 $|i - i_{rd}| + 1.$
- $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 1 \bmod 4, i_{rd} = n,$
 $|j - i_{rd}| + 1.$
- $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 3 \bmod 4,$
 $|j - i_{rd}|.$

Untuk $n \equiv 0 \bmod 4$

$$(R_D)(L_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n, i \equiv 1 \bmod 4\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n, j \equiv 3 \bmod 4, j = n\}$$

- $1 \leq i \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 1 \bmod 4,$
 $|i - i_{rd}|.$
- $1 \leq i \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 3 \bmod 4, i_{rd} = n,$
 $|i - i_{rd}| + 1.$
- $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_{rd} \equiv n, i_{rd} \equiv 1 \bmod 4,$
 $|j - i_{rd}| + 1.$
- $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 3 \bmod 4, i_{rd} = n,$
 $|j - i_{rd}|.$

Berdasarkan representasi fungsi diatas dapat disimpulkan bahwa tiap titik pada (L_n) memiliki representasi yang berbeda, sehingga batas atas dari *resolving perfect dominating set* dari graf *ladder* (L_n) adalah $\gamma_{rp}(L_n) \leq \frac{n+2}{2}$. Selanjutnya, akan dibuktikan batas bawah dari (L_n) yaitu $\gamma_{rp}(L_n) \geq \frac{n+2}{2}$. Berdasarkan representasi fungsi didapatkan $\gamma(L_n) = \frac{n+2}{2}$. Dengan demikian, kita dapatkan batas bawah dari *resolving perfect dominating set* dari graf *ladder* (L_n) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\gamma_{rp}(L_n) &\geq \max \{ \gamma(L_n), \dim(L_n) \} \\ &= \max \left\{ \frac{n+2}{2}, 2 \right\} \\ &= \frac{n+2}{2}\end{aligned}$$

Kita telah membuktikan batas bawah $\gamma_{rp}(L_n) \geq \frac{n+2}{2}$ dan batas atas $\gamma_{rp}(L_n) \leq \frac{n+2}{2}$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa *resolving perfect dominating set* dari graf *ladder* saat $n = \text{genap}$ adalah $\gamma_{rp}(L_n) = \frac{n+2}{2}$.

Kasus 2. $\gamma_{rp}(L_n) = \frac{n+1}{2}$, jika $n = \text{ganjil}$ dibuktikan dengan menunjukkan batas bawah $\gamma_{rp}(L_n) \geq \frac{n+1}{2}$ dan batas atas $\gamma_{rp}(L_n) \leq \frac{n+1}{2}$. Pertama akan dibuktikan batas atas *resolving perfect dominating set* dari (L_n) . Kita memilih $W = \{x_i; i \in 1 \text{ mod } 4\} \cup \{x_i; i \in \text{bilangan ganjil}\} \cup \{y_j; j \in 3 \text{ mod } 4\}$ sehingga diperoleh $|W| = \frac{n+1}{2}$. Jadi representasi titik pada graf (L_n) untuk $n \equiv 1, 3 \text{ mod } 4$ terhadap *resolving perfect dominating set* dapat dilihat pada penjelasan dibawah ini.

Untuk $n \equiv 1, 3 \text{ mod } 4$

$$\begin{aligned}(R_D)(L_n) &= \{x_i; 1 \leq i \leq n, i \equiv 1 \text{ mod } 4\} \cup \{x_i; i \in \text{bil. ganjil}\} \cup \{y_j; 1 \leq j \\ &\leq n, j \equiv 3 \text{ mod } 4\}\end{aligned}$$

- $1 \leq i \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 1 \text{ mod } 4,$
 $|i - i_{rd}|.$
- $1 \leq i \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 3 \text{ mod } 4,$
 $|i - i_{rd}| + 1.$

- $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 1 \pmod{4},$
 $|j - i_{rd}| + 1.$
- $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 3 \pmod{4}$
 $|j - i_{rd}|.$

Berdasarkan representasi fungsi diatas dapat disimpulkan bahwa tiap titik pada (L_n) memiliki representasi yang berbeda, sehingga batas atas dari *resolving perfect dominating set* dari graf *ladder* (L_n) adalah $\gamma_{rp}(L_n) \leq \frac{n+1}{2}$. Selanjutnya, akan dibuktikan batas bawah dari (L_n) yaitu $\gamma_{rp}(L_n) \geq \frac{n+1}{2}$. Berdasarkan representasi fungsi didapatkan $\gamma(L_n) = \frac{n+1}{2}$. Dengan demikian, kita dapatkan batas bawah dari *resolving perfect dominating set* dari graf *ladder* (L_n) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \gamma_{rp}(L_n) &\geq \max \{ \gamma(L_n), \dim(L_n) \} \\ &= \max \left\{ \frac{n+1}{2}, 2 \right\} \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Kita telah membuktikan batas bawah $\gamma_{rp}(L_n) \geq \frac{n+1}{2}$ dan batas atas $\gamma_{rp}(L_n) \leq \frac{n+1}{2}$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa *resolving perfect dominating set* dari graf *ladder* saat $n =$ ganjil adalah $\gamma_{rp}(L_n) = \frac{n+1}{2}$. Dimisalkan graf *ladder* (L_n) dengan $n = 8$ maka didapat gambarnya pada lampiran 1.

Teorema 4.2 Jika (TL_n) merupakan graf *triangular ladder* dengan $n \geq 6$, maka

$$\gamma_{rp}(TL_n) = \begin{cases} \frac{2n+3}{5}, n = 1 \pmod{5} \\ \frac{2n+2}{5}, n = 4 \pmod{5} \end{cases}$$

Bukti. Misalkan graf *triangular ladder* (TL_n) $n \geq 6$, merupakan graf yang memiliki himpunan titik $V(TL_n) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(TL_n) = \{x_i x_{i+1}, y_j y_{j+1}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i y_{j+1}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1\}$. Kardinalitas titik dari graf *triangular ladder* (TL_n) adalah $|V(TL_n)| = 2n$. Sedangkan untuk kardinalitas sisi pada graf *triangular ladder* (TL_n) adalah $|E(TL_n)| = 4n - 3$.

Kasus 1. $\gamma_{rp}(TL_n) = \frac{2n+3}{5}$, jika $n \equiv 1 \pmod{5}$ dibuktikan dengan menunjukkan batas bawah $\gamma_{rp}(L_n) \geq \frac{2n+3}{5}$ dan batas atas $\gamma_{rp}(TL_n) \leq \frac{2n+3}{5}$. Pertama akan dibuktikan batas atas *resolving perfect dominating set* dari (TL_n) . Kita memilih $W = \{x_i; i \in 1 \pmod{5}\} \cup \{y_j; j \in 4 \pmod{5}\}$ sehingga diperoleh $|W| = \frac{2n+3}{5}$. Jadi representasi titik pada graf (TL_n) untuk $n \equiv 1 \pmod{5}$ terhadap *resolving perfect dominating set* dapat dilihat pada penjelasan dibawah ini.

Untuk $n \equiv 1 \pmod{5}$

$$(R_D)(TL_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n, i \equiv 1 \pmod{5}\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n, j \equiv 4 \pmod{5}\}$$

- $1 \leq i \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 1 \pmod{5},$
 $|i - i_{rd}|.$
- $1 \leq i \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 4 \pmod{5},$
 $|i - i_{rd}|$ untuk $i < i_{rd}, |i - i_{rd}| + 1$ untuk $i \geq i_{rd}.$
- $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 1 \pmod{5},$
 $|j - i_{rd}| + 1$ untuk $j \leq i_{rd}, |j - i_{rd}|$ untuk $j > i_{rd}.$
- $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 4 \pmod{5},$
 $|j - i_{rd}|.$

Berdasarkan representasi fungsi diatas dapat disimpulkan bahwa tiap titik pada (TL_n) memiliki representasi yang berbeda, sehingga batas atas dari *resolving perfect dominating set* dari graf *triangular ladder* (TL_n) adalah $\gamma_{rp}(TL_n) \leq \frac{2n+3}{5}$.

Selanjutnya, akan dibuktikan batas bawah dari (TL_n) yaitu $\gamma_{rp}(TL_n) \geq \frac{2n+3}{5}$.

Berdasarkan representasi fungsi didapatkan $\gamma(TL_n) = \frac{2n+3}{5}$. Dengan demikian, kita dapatkan batas bawah dari *resolving perfect dominating set* dari graf *triangular ladder* (TL_n) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \gamma_{rp}(TL_n) &\geq \max \{ \gamma(TL_n), \dim(TL_n) \} \\ &= \max \left\{ \frac{2n+3}{5}, 2 \right\} \\ &= \frac{2n+3}{5} \end{aligned}$$

Kita telah membuktikan batas bawah $\gamma_{rp}(TL_n) \geq \frac{2n+3}{5}$ dan batas atas $\gamma_{rp}(TL_n) \leq \frac{2n+3}{5}$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa *resolving perfect dominating set* dari graf *triangular ladder* saat $n = 1 \pmod 5$ adalah $\gamma_{rp}(TL_n) = \frac{2n+3}{5}$.

Kasus 2. $\gamma_{rp}(TL_n) = \frac{2n+2}{5}$, jika $n = 4 \pmod 5$ dibuktikan dengan menunjukkan batas bawah $\gamma_{rp}(L_n) \geq \frac{2n+2}{5}$ dan batas atas $\gamma_{rp}(TL_n) \leq \frac{2n+2}{5}$. Pertama akan dibuktikan batas atas *resolving perfect dominating set* dari (TL_n) . Kita memilih $W = \{x_i; i \in 1 \pmod 5\} \cup \{y_j; j \in 4 \pmod 5\}$ sehingga diperoleh $|W| = \frac{2n+2}{5}$. Jadi representasi titik pada graf (TL_n) untuk $n \equiv 4 \pmod 5$ terhadap *resolving perfect dominating set* dapat dilihat pada penjelasan dibawah ini.

Untuk $n \equiv 4 \pmod 5$

$$(R_D)(TL_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n, i \equiv 1 \pmod 5\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n, j \equiv 4 \pmod 5\}$$

- $1 \leq i \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 1 \pmod 5,$
 $|i - i_{rd}|.$
- $1 \leq i \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 4 \pmod 5,$
 $|i - i_{rd}|$ untuk $i < i_{rd}, |i - i_{rd}| + 1$ untuk $i \geq i_{rd}.$
- $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 1 \pmod 4, i_{rd} = n,$
 $|j - i_{rd}| + 1$ untuk $j \leq i_{rd}, |j - i_{rd}|$ untuk $j > i_{rd}.$
- $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 4 \pmod 5,$
 $|j - i_{rd}|.$

Berdasarkan representasi fungsi diatas dapat disimpulkan bahwa tiap titik pada (TL_n) memiliki representasi yang berbeda, sehingga batas atas dari *resolving perfect dominating set* dari graf *triangular ladder* (TL_n) adalah $\gamma_{rp}(TL_n) \leq \frac{2n+2}{5}$.

Selanjutnya, akan dibuktikan batas bawah dari (TL_n) yaitu $\gamma_{rp}(TL_n) \geq \frac{2n+2}{5}$.

Berdasarkan representasi fungsi didapatkan $\gamma(TL_n) = \frac{2n+2}{5}$. Dengan demikian, kita dapatkan batas bawah dari *resolving perfect dominating set* dari graf *triangular ladder* (TL_n) sebagai berikut:

$$\gamma_{rp}(TL_n) \geq \max \{\gamma(TL_n), \dim(TL_n)\}$$

$$= \max \left\{ \frac{2n+2}{5}, 2 \right\}$$

$$= \frac{2n+2}{5}$$

Kita telah membuktikan batas bawah $\gamma_{rp}(TL_n) \geq \frac{2n+2}{5}$ dan batas atas $\gamma_{rp}(TL_n) \leq \frac{2n+2}{5}$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa *resolving perfect dominating set* dari graf *triangular ladder* saat $n = 4 \pmod 5$ adalah $\gamma_{rp}(TL_n) = \frac{2n+2}{5}$. Dimisalkan graf *triangular ladder* (TL_n) dengan $n = 9$ maka didapat gambarnya pada lampiran 2.

Teorema 4.3 Jika (SL_n) merupakan graf *sloping ladder* dengan $n \geq 6$, maka

$$\gamma_{rp}(SL_n) = \begin{cases} \frac{n+2}{2}, n = 0, 2 \pmod 4 \\ \frac{n+1}{2}, n = 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Bukti. Misalkan graf *sloping ladder* (SL_n) $n \geq 6$, merupakan graf yang memiliki himpunan titik $V(SL_n) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(SL_n) = \{x_i x_{i+1}, y_j y_{j+1}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$. Kardinalitas titik dari graf *sloping ladder* (SL_n) adalah $|V(SL_n)| = 2n$. Sedangkan untuk kardinalitas sisi pada graf *sloping ladder* (SL_n) adalah $|E(SL_n)| = 3n - 2$.

Kasus 1. $\gamma_{rp}(SL_n) = \frac{n+2}{2}$, jika $n = 0, 2 \pmod 4$ dibuktikan dengan menunjukkan batas bawah $\gamma_{rp}(SL_n) \geq \frac{n+2}{2}$ dan batas atas $\gamma_{rp}(SL_n) \leq \frac{n+2}{2}$. Pertama akan dibuktikan batas atas *resolving perfect dominating set* dari (SL_n). Kita memilih $W = \{x_i; i \in 2 \pmod 4\} \cup \{x_n\} \cup \{y_j; j \in 1 \pmod 4\}$ sehingga diperoleh $|W| = \frac{n+2}{2}$. Jadi representasi titik pada graf (SL_n) untuk $n \equiv 0, 2 \pmod 4$ terhadap *resolving perfect dominating set* dapat dilihat pada penjelasan dibawah ini.

Untuk $n \equiv 0 \pmod 4$

$$(R_D)(SL_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n, i \equiv 2 \pmod 4, i = n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n, j \equiv 1 \pmod 4\}$$

- $1 \leq i \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 2 \pmod 4, i = n$
 $|i - i_{rd}|$.
- $1 \leq i \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 1 \pmod 4, i_{rd} = n$

$$|i - i_{rd}| + 1.$$

- $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 2 \pmod{4},$
 $|j - i_{rd}| + 1.$
- $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 1 \pmod{4}, i_{rd} = n$
 $|j - i_{rd}|.$

Untuk $n \equiv 2 \pmod{4}$

$$(R_D)(SL_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n, i \equiv 2 \pmod{4}\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n, j \equiv 1 \pmod{4}\}$$

- $1 \leq i \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 2 \pmod{4},$
 $|i - i_{rd}|.$
- $1 \leq i \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 1 \pmod{4},$
 $|i - i_{rd}|$ untuk $i < i_{rd}, |i - i_{rd}| + 2$ untuk $i \geq i_{rd}.$
- $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 2 \pmod{4},$
 $|j - i_{rd}| + 2$ untuk $j \leq i_{rd}, |j - i_{rd}|$ untuk $j > i_{rd}.$
- $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 1 \pmod{4},$
 $|j - i_{rd}|.$

Berdasarkan representasi fungsi diatas dapat disimpulkan bahwa tiap titik pada (SL_n) memiliki representasi yang berbeda, sehingga batas atas dari *resolving perfect dominating set* dari graf *sloping ladder* (SL_n) adalah $\gamma_{rp}(SL_n) \leq \frac{n+2}{2}.$

Selanjutnya, akan dibuktikan batas bawah dari (SL_n) yaitu $\gamma_{rp}(SL_n) \geq \frac{n+2}{2}.$

Berdasarkan representasi fungsi didapatkan $\gamma(SL_n) = \frac{n+2}{2}.$ Dengan demikian, kita dapatkan batas bawah dari *resolving perfect dominating set* dari graf *sloping ladder* (SL_n) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \gamma_{rp}(L_n) &\geq \max \{ \gamma(SL_n), \dim(SL_n) \} \\ &= \max \left\{ \frac{n+2}{2}, 2 \right\} \\ &= \frac{n+2}{2} \end{aligned}$$

Kita telah membuktikan batas bawah $\gamma_{rp}(SL_n) \geq \frac{n+2}{2}$ dan batas atas $\gamma_{rp}(SL_n) \leq \frac{n+2}{2}.$ Jadi, dapat disimpulkan bahwa *resolving perfect dominating set* dari graf

ladder saat $n = 0, 2 \pmod{4}$ adalah $\gamma_{rp}(SL_n) = \frac{n+2}{2}.$

Kasus 2. $\gamma_{rp}(SL_n) = \frac{n+1}{2}$, jika $n = 3 \pmod 4$ dibuktikan dengan menunjukkan batas bawah $\gamma_{rp}(SL_n) \geq \frac{n+1}{2}$ dan batas atas $\gamma_{rp}(SL_n) \leq \frac{n+1}{2}$. Pertama akan dibuktikan batas atas *resolving perfect dominating set* dari (SL_n) . Kita memilih $W = \{x_i; i \in 2 \pmod 4\} \cup \{y_j; j \in 1 \pmod 4\}$ sehingga diperoleh $|W| = \frac{n+1}{2}$. Jadi representasi titik pada graf (SL_n) untuk $n \equiv 3 \pmod 4$ terhadap *resolving perfect dominating set* dapat dilihat pada penjelasan dibawah ini.

Untuk $n \equiv 3 \pmod 4$

$$(R_D)(SL_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n, i \equiv 2 \pmod 4\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n, j \equiv 1 \pmod 4\}$$

- $1 \leq i \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 2 \pmod 4,$
 $|i - i_{rd}|.$
- $1 \leq i \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 1 \pmod 4,$
 $|i - i_{rd}|$ untuk $i < i_{rd}, |i - i_{rd}| + 2$ untuk $i \geq i_{rd}.$
- $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 2 \pmod 4,$
 $|j - i_{rd}| + 2$ untuk $j \leq i_{rd}, |j - i_{rd}|$ untuk $j > i_{rd}.$
- $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_{rd} \leq n, i_{rd} \equiv 1 \pmod 4,$
 $|j - i_{rd}|.$

Berdasarkan representasi fungsi diatas dapat disimpulkan bahwa tiap titik pada (SL_n) memiliki representasi yang berbeda, sehingga batas atas dari *resolving perfect dominating set* dari graf *sloping ladder* (SL_n) adalah $\gamma_{rp}(SL_n) \leq \frac{n+1}{2}$.

Selanjutnya, akan membuktikan batas bawah dari (SL_n) yaitu $\gamma_{rp}(SL_n) \geq \frac{n+1}{2}$.

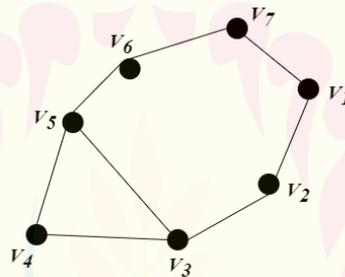
Berdasarkan representasi fungsi didapatkan $\gamma(SL_n) = \frac{n+1}{2}$. Dengan demikian, kita dapatkan batas bawah dari *resolving perfect dominating set* dari graf *sloping ladder* (SL_n) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \gamma_{rp}(SL_n) &\geq \max \{ \gamma(SL_n), \dim(SL_n) \} \\ &= \max \left\{ \frac{n+1}{2}, 2 \right\} \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Kita telah membuktikan batas bawah $\gamma_{rp}(SL_n) \geq \frac{n+1}{2}$ dan batas atas $\gamma_{rp}(SL_n) \leq \frac{n+1}{2}$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa *resolving perfect dominating set* dari graf *sloping ladder* saat $n = 3 \bmod 4$ adalah $\gamma_{rp}(SL_n) = \frac{n+1}{2}$. Dimisalkan graf *sloping ladder* (SL_n) dengan $n = 7$ maka didapat gambarnya pada lampiran 3.

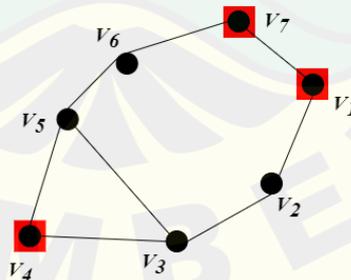
4.3 Keterkaitan Masalah Transportasi Bus dengan *Resolving Perfect Dominating Set*

Keterkaitan *resolving perfect dominating set* pada masalah transportasi bus ini terlihat pada bentuk representasi rute transportasi bus. Untuk representasi dapat dilihat pada gambar dibawah ini.



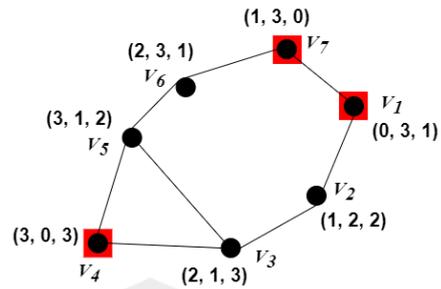
Gambar 4.1 Representasi Rute Transportasi Bus

Dari gambar diatas terbentuk seperti *cone ice cream* jadi graf ini diberi nama graf *cone* ($Cone_n$) dengan $n = 7$. Jadi dapat ditentukan letak dominatornya dengan menggunakan syarat *perfect dominating set*.



Gambar 4.2 *Perfect Dominating Set* Dari Rute Transportasi Bus

Setelah menentukan letak dominatornya selanjutnya menentukan *resolving* dari graf tersebut. Dengan menggunakan cara yang dijelaskan sebelumnya sehingga didapatkan *resolving* sebagai berikut.



Gambar 4.4.1 *Resolving Perfect Dominating Set* Dari Rute Transportasi Bus

4.4 Algoritma GNN Satu Layer dalam Menyelesaikan Masalah Transportasi Bus dengan *Resolving Perfect Dominating Set*

Analisis *resolving perfect dominating set* pada masalah transportasi bus bertujuan untuk menentukan arus kepadatan rute transportasi bus. Penentuan terminal dilakukan dengan merepresentasikan beberapa terminal ke dalam konstruksi graf kemudian dianalisis dengan menggunakan *resolving perfect dominating set*. Selanjutnya, menentukan dominator dari graf di atas sesuai dengan syarat *resolving perfect dominating set* yaitu setiap titik harus terhubung dengan satu dominator. Selanjutnya, mengecek apakah representasi setiap titik terhadap dominator sudah berbeda. Berikut ini merupakan representasi dari terminal bus yang sudah memenuhi syarat *resolving perfect dominating set*. Untuk gambar Representasi Rute Transportasi Bus dapat dilihat pada lampiran 4.

Pada gambar di atas direpresentasikan terminal sebagai titik (*vertex*) dan setiap rute bus dari terminal satu ke terminal lainnya direpresentasikan dengan sisi (*edge*). Setelah merepresentasikan terminal bus selanjutnya menentukan letak dominator dengan syarat setiap titik memiliki satu dominator supaya representasi terminal bus tersebut *perfect dominating set*. Untuk representasi rute transportasi bus yang telah *perfect dominating set* dapat dilihat pada lampiran 5. Setelah meletakkan dominator di titik-titik graf transportasi bus selanjutnya menentukan *resolving* pada graf transportasi bus. Untuk representasi rute transportasi bus yang telah *resolving perfect dominating set* dapat dilihat pada lampiran 6.

Algoritma GNN dengan satu layer

Langkah 0: Diberikan sebuah graf $G(V, E)$ dengan order n dan feature matriks $H_{r \times d}$ dari n titik dan m fitur, dan diberikan toleransi ε .

Langkah 1: Menentukan matriks ketetanggaan A dari graf G dan menentukan matriks $B = A + I$, di mana I adalah matriks identitas.

Langkah 2: Inisialisasi bobot Wg , bias β , kecepatan α . Untuk kesederhanaan, atur $Wg_{m \times 1} = [w_1, w_2, \dots, w_m]$, dimana $0 < w_j < 1$, $\beta = 0$ dan $0 < \alpha < 1$.

Langkah 3: Kalikan bobot matriks dengan fitur titik, dengan menetapkan pesan fungsi $m_u^l = MSG^l$, untuk lapisan linear $m_u^l = Wg^l(h_u^{l-1})$.

Langkah 4: Jumlahkan pesan dari tetangga titik v , dengan pengaturan fungsi $h_v^l = AGG^l(m_u^{l-1}, u \in N(v))$ dan dengan menerapkan fungsi **sum** $h_v^l = SUM^l(m_u^{l-1}, u \in N(v))$.

Langkah 5: Menentukan *error*, dengan cara $e^l = \frac{\|h_{v_i} - h_{v_j}\|^2}{|E|^2}$, dimana v_i, v_j merupakan dua titik yang berdekatan.

Langkah 6: Amati apakah $error \leq \varepsilon$ atau tidak. Jika ya kemudian *stop*, jika tidak kemudian melanjutkan ke langkah 7 untuk memperbarui matriks bobot Wg .

Langkah 7: Memperbarui matriks bobot dengan cara $Wg^{l+1} = Wg_j^{l+1} + \alpha \times z_j \times e_l$ dimana z_j merupakan jumlah dari setiap kolom dalam H_{vi}^l dan membaginya dengan angka paada node.

Langkah 8: Ulangi langkah 3-6 sampai $error \leq \varepsilon$.

Langkah 9: Simpan hasil *embedding* menjadi vektor, dengan memberi nama file vektor *embeddingdata.mat*. Dimana data merupakan data *time series*, kemudian lakukan proses yang sama untuk pengamatan data berikutnya.

Langkah 10: Muat *dataembeddingdata.mat* lalu gunakan *time series machine learning* untuk melakukan *forecasting*.

Langkah 11: Dapatkan hasil *training, testing* dan *forecasting*, kemudian *STOP*.

Observasi 1. Diberikan sebuah graf G dengan n titik. Misalkan himpunan titik dan sisi $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan $E(G) = \{v_i, v_j | v_i, v_j \in V(G)\}$.

Diberikan sebuah fitur titik sebagai berikut, $H_{vi} = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \dots & s_{1,3} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & & s_{2,3} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \dots & s_{n,3} \end{bmatrix}$

Titik *embedding* ini dapat ditentukan dengan menggunakan *massage passing* dari tetangga titik v , $h_v^l = AGG^l(m_u^{l-1}, u \in N(v))$ dibawah *aggregation sum*, menjadi $h_v^l = SUM^l(m_u^{l-1}, u \in N(v))$ dengan melihat matriks $B = A + I$ dimana A , I merupakan matriks *adjacency* dan matriks identitas.

Bukti. Berdasarkan graf G , dapat ditentukan matriks *adjacency*. Selajutnya perlu mempertimbangkan *self adjacency* untuk disetiap titik di G maka kita perlu menambahkan A dengan matriks identitas I dan kita memiliki matriks B sebagai

berikut. $B = A + I = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,3} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & & h_{2,3} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \dots & h_{n,3} \end{bmatrix}$

Menurut algoritma single layer GNN, kita perlu menginisialisasi bobot pembelajaran sebagai $Wg_{m \times 1} = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$. Bobot ini akan digunakan untuk mendapatkan nilai m_{vi} dan memperbarui bobot baru pada iterasi berikutnya. Proses *embedding* titik pada GNN dapat dibagi menjadi dua tahap, yaitu *message passing* dan *aggregation*. Pada langkah pertama kita melakukan *message passing*.

$$m_u^l = MSG_l(h_u^{l-1}), m_u^l = W^l(h_u^{l-1})$$

$$m_{v_1}^i = W^1 \cdot H_{v_1}^0$$

$$m_{v_1}^1 = \{w_{1,1}, w_{1,2}, \dots, w_{1,m}\} \cdot \{s_{1,1}, s_{1,2}, \dots, s_{1,m}\}$$

$$= w_1 \times s_{1,1} + w_2 \times s_{1,2} + \dots + w_m \times s_{1,m}$$

$$m_{v_2}^1 = \{w_{1,1}, w_{1,2}, \dots, w_{1,m}\} \cdot \{s_{2,1}, s_{2,2}, \dots, s_{2,m}\}$$

$$= w_{1,1} \times s_{2,1} + w_{1,2} \times s_{2,2} + \dots + w_{1,m} \times s_{2,m}$$

⋮

$$m_{v_n}^1 = \{w_{1,1}, w_{1,2}, \dots, w_{1,m}\} \cdot \{s_{n,1}, s_{n,2}, \dots, s_{n,m}\}$$

Setelah proses di atas selesai kita lakukan langkah kedua yaitu *aggregation* dengan melihat tetangga titik v . Dengan menerapkan *aggregation sum*, untuk $h_v^l = AGG^l(m_u^{l-1}, u \in N(v))$ kita mempunyai $h_v^l = SUM^l(m_u^{l-1}, u \in N(v))$ dengan melihat matriks $B = A + I$. Vektor *embedding*, h_{vi} dapat ditulis sebagai berikut: $h_{vi}^1 = [m_{v1}; m_{v2}; \dots; m_{vn}]$. Untuk selanjutnya, menghitung nilai *error* yang menunjukkan seberapa dekat dua titik yang bertetangga di ruang *embedding*. Semakin kecil nilai *error*, semakin dekat jarak antara dua titik. Nilai *error* tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$e^l = \frac{\|h_{x_i}^l - h_{x_j}^l\|_{inf}}{|E(G)|^2}, \text{ dimana } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Pada iterasi selanjutnya, kita perlu memperbarui H_{vi} menggunakan H_{vi} dan \mathfrak{H}_{vi} pada iterasi sebelumnya.

$$H_{v1}^2 = \frac{[s_{1,1}, s_{1,2}, \dots, s_{1,m}]}{\sum[s_{1,1}, s_{1,2}, \dots, s_{1,m}]} \times \mathfrak{H}_{v1}$$

$$H_{v1}^2 = \frac{[(s_{1,1} \times \mathfrak{H}_{v1}) + (s_{1,2} \times \mathfrak{H}_{v1}) + \dots + (s_{1,m} \times \mathfrak{H}_{v1})]}{\sum[s_{1,1}, s_{1,2}, \dots, s_{1,m}]}$$

$$H_{v2}^2 = \frac{[s_{2,1}, s_{2,2}, \dots, s_{2,m}]}{\sum[s_{2,1}, s_{2,2}, \dots, s_{2,m}]} \times \mathfrak{H}_{v2}$$

$$H_{v2}^2 = \frac{[(s_{2,1} \times \mathfrak{H}_{v2}) + (s_{2,2} \times \mathfrak{H}_{v2}) + \dots + (s_{2,m} \times \mathfrak{H}_{v2})]}{\sum[s_{2,1}, s_{2,2}, \dots, s_{2,m}]}$$

⋮

$$H_{vn}^2 = \frac{[s_{n,1}, s_{n,2}, \dots, s_{n,m}]}{\sum [s_{n,1}, s_{n,2}, \dots, s_{n,m}]} \times \mathfrak{H}_{vn}$$

$$H_{vn}^2 = \frac{[(s_{n,1} \times \mathfrak{H}_{vn}) + (s_{n,2} \times \mathfrak{H}_{vn}) + \dots + (s_{n,m} \times \mathfrak{H}_{vn})]}{\sum [s_{n,1}, s_{n,2}, \dots, s_{n,m}]}$$

$$H_{vi}^2 \text{ dapat dituliskan } H_{vi}^2 = [H_{v1}^2; H_{v2}^2; \dots; H_{vn}^2]$$

Pada iterasi ini bobot pembelajaran perlu diperbarui. Tujuannya adalah untuk mendapatkan model pembelajaran yang terbaik. Namun, sebelum memperbarui bobot, kita perlu menemukan nilai z_k .

$$z_1 = \frac{\sum [H_{1,1}^2 \ H_{2,1}^2 \ \dots \ H_{n,1}^2]}{n}$$

⋮

$$z_m = \frac{\sum [H_{1,m}^2 \ H_{2,m}^2 \ \dots \ H_{n,m}^2]}{n}$$

Dengan menginisialisasi laju pembelajaran (α), bobot pembelajaran dapat diperbarui sebagai berikut.

$$W_1^2 = W_1^1 + \alpha \times z_1 \times e$$

Dengan demikian, bobot pembelajarannya sebagai berikut.

$$W^2 = \sum [W_1^2 \ W_2^2 \ \dots \ W_m^2]$$

Penyelesaian masalah transportasi bus dilakukan dengan teknik *Graph Neural Network* (GNN). Simulasi numerik akan dilakukan dengan bantuan software aplikasi MATLAB. Sebelum melakukan dengan software tersebut sebelumnya dilakukan perhitungan manual untuk mengetahui pengerjaan algoritma GNN ketika menyelesaikan data set. Diberikan sebuah graf G dengan 7 titik. Himpunan titik dan sisi dari graf tersebut adalah $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan $E(G) = \{v_1 v_2, v_2 v_7, v_2 v_3, v_3 v_4, v_3 v_5, v_4 v_5, v_5 v_6, v_6 v_7\}$. Disajikan sebuah fitur dari Masing-masing terminal bus, penelitian dilakukan selama 15 minggu, data penelitian terdapat pada lampiran 7 dan lampiran 8 Diberikan simpul fitur sebagai berikut.

$$\xi_{vi}^0 = \begin{bmatrix} 0.71 & 0.76 & 0.37 \\ 0.10 & 0.52 & 0.22 \\ 0.87 & 0.12 & 0.12 \\ 0.90 & 0.90 & 0.90 \\ 0.84 & 0.10 & 0.10 \\ 0.73 & 0.21 & 0.17 \\ 0.67 & 0.42 & 0.20 \end{bmatrix}$$

Terdapat *nodes embedding* dengan satu *hidden layer* dengan satu neuron, dan dengan minimal *loss* fungsi.

Solusi. Dengan matriks di atas, dapat menentukan matriks *adjacency*, *identity*, dan *loop-adjacency* sebagai berikut.

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Kita dapat memulai perhitungan teknis dengan memulai bobot pembelajaran $W^1 = [0.05 \ 0.05 \ 0.05]$ dari (1,3)-matriks. Untuk iterasi pertama kita melakukan *message passing*:

$$m_{vi}^l = W^l \cdot \xi_{vi}^{l-1}, \text{ dimana } i = 1,2,3,4,5,6,7$$

$$m_{v1}^1 = W^1 \cdot \xi_{v1}^0$$

$$= [0.05 \ 0.05 \ 0.05] \cdot [0.71 \ 0.76 \ 0.37] = [0.0920]$$

$$m_{v2}^1 = W^1 \cdot \xi_{v2}^0$$

$$= [0.05 \ 0.05 \ 0.05] \cdot [0.10 \ 0.52 \ 0.22] = [0.0420]$$

$$m_{v3}^1 = W^1 \cdot \xi_{v3}^0$$

$$= [0.05 \ 0.05 \ 0.05] \cdot [0.87 \ 0.12 \ 0.12] = [0.0555]$$

$$m_{v4}^1 = W^1 \cdot \xi_{v4}^0$$

$$= [0.05 \ 0.05 \ 0.05] \cdot [0.90 \ 0.90 \ 0.90] = [0.1350]$$

$$m_{v5}^1 = W^1 \cdot \xi_{v5}^0$$

$$= [0.05 \ 0.05 \ 0.05] \cdot [0.84 \ 0.10 \ 0.10] = [0.0520]$$

$$m_{v6}^1 = W^1 \cdot \xi_{v6}^0$$

$$= [0.05 \ 0.05 \ 0.05] \cdot [0.73 \ 0.21 \ 0.17] = [0.0555]$$

$$m_{v7}^1 = W^1 \cdot \xi_{v7}^0$$

$$= [0.05 \ 0.05 \ 0.05] \cdot [0.67 \ 0.42 \ 0.20] = [0.0645]$$

jadi, didapatkan m_{vi}^1 :

$$m_{vi}^1 = \begin{bmatrix} 0.0920 \\ 0.0420 \\ 0.0555 \\ 0.1350 \\ 0.0520 \\ 0.0555 \\ 0.0645 \end{bmatrix}$$

Dengan mempertimbangkan matriks B , sertakan elemen bukan nol dari m_{vi}^1 , jadi didapatkan,

$$m_{v1}^1 = \begin{bmatrix} 0.0920 \\ 0.0420 \\ 0.0645 \end{bmatrix}, m_{v2}^1 = \begin{bmatrix} 0.0920 \\ 0.0420 \\ 0.0555 \end{bmatrix}, m_{v3}^1 = \begin{bmatrix} 0.0420 \\ 0.0555 \\ 0.1350 \\ 0.0520 \end{bmatrix}, m_{v4}^1 = \begin{bmatrix} 0.0555 \\ 0.1350 \\ 0.0520 \end{bmatrix},$$

$$m_{v5}^1 = \begin{bmatrix} 0.0555 \\ 0.1350 \\ 0.0520 \\ 0.0520 \end{bmatrix}, m_{v6}^1 = \begin{bmatrix} 0.0520 \\ 0.0555 \\ 0.0645 \end{bmatrix}, m_{v7}^1 = \begin{bmatrix} 0.0555 \\ 0.0645 \\ 0.0920 \end{bmatrix}$$

Ambil sejumlah elemen dari setiap simpul yang disematkan sebagai berikut:

$$h_{v1}^1 = 0.1985, h_{v2}^1 = 0.1895, h_{v3}^1 = 0.2845, h_{v4}^1 = 0.2425, h_{v5}^1 = 0.2980, h_{v6}^1 =$$

$$0.1720, h_{v7}^1 = 0.2120. \text{ Jadi, memiliki iterasi pertama dengan } h_{vi}^1 = \begin{bmatrix} 0.1985 \\ 0.1895 \\ 0.2845 \\ 0.2425 \\ 0.2980 \\ 0.1720 \\ 0.2120 \end{bmatrix}$$

dimana $i = 1,2,3,4,5,6,7$. Dengan $loss (e)$ dapat dihitung dengan cara berikut ini,

$$e^l = \frac{\sum |h_{vi}^l - h_{vj}^l|_{inf}}{|E(G)|}, \text{ dimana } i, j \in \{1,2, \dots, 7\}$$

$$= 0.0018$$

Dengan iterasi kedua, dengan pembaharuan \mathfrak{S}_{vi}^{l-1} pertama:

$$\mathfrak{S}_{vi}^{l-1} = \frac{\mathfrak{S}_{vi}^{l-2}}{\sum(\mathfrak{S}_{vi}^{l-2})} \times \mathfrak{S}_{vi}^{l-1}, \text{ dimana } i = 1,2,3,4,5,6,7$$

$$\mathfrak{S}_{v1}^1 = \frac{[0.71 \ 0.76 \ 0.37]}{\sum[0.71 \ 0.76 \ 0.37]} \times 0.1985$$

$$= [0.0766 \ 0.0820 \ 0.0399]$$

$$\mathfrak{S}_{v2}^1 = \frac{[0.10 \ 0.52 \ 0.22]}{\sum[0.10 \ 0.52 \ 0.22]} \times 0.1895$$

$$= [0.0226 \ 0.1173 \ 0.0496]$$

$$\mathfrak{S}_{v3}^1 = \frac{[0.87 \ 0.12 \ 0.12]}{\sum[0.87 \ 0.12 \ 0.12]} \times 0.2845$$

$$= [0.2230 \ 0.0308 \ 0.0308]$$

$$\xi_{v4}^1 = \frac{[0.90 \ 0.90 \ 0.90]}{\Sigma[0.90 \ 0.90 \ 0.90]} \times 0.2425$$

$$= [0.0808 \ 0.0808 \ 0.0808]$$

$$\xi_{v5}^1 = \frac{[0.84 \ 0.10 \ 0.10]}{\Sigma[0.84 \ 0.10 \ 0.10]} \times 0.2980$$

$$= [0.2407 \ 0.0287 \ 0.0287]$$

$$\xi_{v6}^1 = \frac{[0.73 \ 0.21 \ 0.17]}{\Sigma[0.73 \ 0.21 \ 0.17]} \times 0.1720$$

$$= [0.1131 \ 0.0325 \ 0.0263]$$

$$\xi_{v7}^1 = \frac{[0.67 \ 0.42 \ 0.20]}{\Sigma[0.67 \ 0.42 \ 0.20]} \times 0.2120$$

$$= [0.1101 \ 0.0690 \ 0.0329]$$

jadi, didapatkan ξ_{vi}^1 :

$$\xi_{vi}^1 = \begin{bmatrix} \xi_{v1}^1 \\ \xi_{v2}^1 \\ \xi_{v3}^1 \\ \xi_{v4}^1 \\ \xi_{v5}^1 \\ \xi_{v6}^1 \\ \xi_{v7}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0766 & 0.0820 & 0.0399 \\ 0.0226 & 0.1173 & 0.0496 \\ 0.2230 & 0.0308 & 0.0308 \\ 0.0808 & 0.0808 & 0.0808 \\ 0.2407 & 0.0287 & 0.0287 \\ 0.1131 & 0.0325 & 0.0263 \\ 0.1101 & 0.0690 & 0.0329 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya memperbarui bobot pembelajaran. Sebelum itu, perlu mengambil jumlah dari setiap kolom di ξ_{vi}^1 dan membaginya dengan jumlah simpul sebagai berikut: $z_1 = 0.1238, z_2 = 0.0630, z_3 = 0.0413$. Jadi, didapatkan $z_k = [0.1238 \ 0.0630 \ 0.0413]$ dimana $k = 1,2,3$. Mengingat bahwa tingkat pembelajaran α , dapat diperharui w sebagai berikut:

$$W^l = W_m^{l-1} + \alpha \times z_k \times e^{l-1}, \text{ dimana } k = 1,2,3$$

$$W^2 = W_m^1 + \alpha \times z_k \times e^1, \text{ untuk } \alpha = 0.1$$

$$W_1^2 = W_2^1 + \alpha \times z_1 \times e^1 = 0.05 + 0.1 \times 0.1238 \times 0.0018 = 0.0500$$

$$W_2^2 = W_2^1 + \alpha \times z_2 \times e^1 = 0.05 + 0.1 \times 0.0630 \times 0.0018 = 0.0500$$

$$W_3^2 = W_2^1 + \alpha \times z_3 \times e^1 = 0.05 + 0.1 \times 0.0413 \times 0.0018 = 0.0500$$

jadi, didapatkan W^2 :

$$W^2 = [W_1^2 \ W_2^2 \ W_3^2] = [0.0500 \ 0.0500 \ 0.0500]$$

Dengan W^2 baru, kita dapat menghitung iterasi kedua sebagai berikut.

$$m_{vi}^l = W^l \cdot \xi_{vi}^{l-1}, \text{ dimana } i = 1,2,3,4,5,6,7$$

$$m_{v1}^2 = W^2 \cdot \xi_{v1}^1$$

$$= [0.0500 \ 0.0500 \ 0.0500] \cdot [0.0766 \ 0.0820 \ 0.0399] = [0.0099]$$

$$m_{v_2}^2 = W^2 \cdot \xi_{v_2}^1$$

$$= [0.0500 \ 0.0500 \ 0.0500] \cdot [0.0226 \ 0.1173 \ 0.0496] = [0.0095]$$

$$m_{v_3}^2 = W^2 \cdot \xi_{v_3}^1$$

$$= [0.0500 \ 0.0500 \ 0.0500] \cdot [0.2230 \ 0.0308 \ 0.0308] = [0.0142]$$

$$m_{v_4}^2 = W^2 \cdot \xi_{v_4}^1$$

$$= [0.0500 \ 0.0500 \ 0.0500] \cdot [0.0808 \ 0.0808 \ 0.0808] = [0.0121]$$

$$m_{v_5}^2 = W^2 \cdot \xi_{v_5}^1$$

$$= [0.0500 \ 0.0500 \ 0.0500] \cdot [0.2407 \ 0.0287 \ 0.0287] = [0.0149]$$

$$m_{v_6}^2 = W^2 \cdot \xi_{v_6}^1$$

$$= [0.0500 \ 0.0500 \ 0.0500] \cdot [0.1131 \ 0.0325 \ 0.0263] = [0.0086]$$

$$m_{v_7}^2 = W^2 \cdot \xi_{v_7}^1$$

$$= [0.0500 \ 0.0500 \ 0.0500] \cdot [0.1101 \ 0.0690 \ 0.0329] = [0.0106]$$

jadi, didapatkan m_{vi}^2 :

$$m_{vi}^1 = \begin{bmatrix} 0.0099 \\ 0.0095 \\ 0.0142 \\ 0.0121 \\ 0.0149 \\ 0.0086 \\ 0.0106 \end{bmatrix}$$

Dengan mempertimbangkan matriks B , sertakan elemen bukan nol dari m_{vi}^2 , jadi didapatkan,

$$m_{v_1}^1 = \begin{bmatrix} 0.0099 \\ 0.0095 \\ 0.0106 \end{bmatrix}, m_{v_2}^1 = \begin{bmatrix} 0.0099 \\ 0.0095 \\ 0.0142 \end{bmatrix}, m_{v_3}^1 = \begin{bmatrix} 0.0095 \\ 0.0142 \\ 0.0121 \\ 0.0149 \end{bmatrix}, m_{v_4}^1 = \begin{bmatrix} 0.0142 \\ 0.0121 \\ 0.0149 \end{bmatrix},$$

$$m_{v_5}^1 = \begin{bmatrix} 0.0142 \\ 0.0121 \\ 0.0149 \\ 0.0086 \end{bmatrix}, m_{v_6}^1 = \begin{bmatrix} 0.0149 \\ 0.0086 \\ 0.0106 \end{bmatrix}, m_{v_7}^1 = \begin{bmatrix} 0.0099 \\ 0.0086 \\ 0.0106 \end{bmatrix}$$

Ambil sejumlah elemen dari setiap simpul yang disematkan sebagai berikut:

$$h_{v_1}^1 = 0.0300, h_{v_2}^1 = 0.0336, h_{v_3}^1 = 0.0507, h_{v_4}^1 = 0.0412, h_{v_5}^1 = 0.0498, h_{v_6}^1 =$$

0.0341, $h_{v7}^1 = 0.0291$. Jadi, memiliki iterasi pertama dengan $h_{vi}^1 = \begin{bmatrix} 0.0300 \\ 0.0336 \\ 0.0507 \\ 0.0412 \\ 0.0498 \\ 0.0341 \\ 0.0291 \end{bmatrix}$

dimana $i = 1,2,3,4,5,6,7$. Dengan *loss* (e) dapat dihitung dengan cara berikut ini,

$$e^l = \frac{\sum_{i,j \in \{1,2, \dots, 7\}} |h_{vi}^l - h_{vj}^l|}{|E(G)|}, \text{ dimana } i, j \in \{1,2, \dots, 7\}$$

$$= 2.742 \times 10^{-4}$$

4.5 Analisis Skema Aplikasi Penerapan *Resolving Perfect Dominating Set* dalam Menyelesaikan Masalah Transportasi Bus dengan Teknik *Graph Neural Network*

Data fitur dari transportasi disajikan pada lampiran 7 dan 8, penelitian dilakukan selama 15 minggu. Dari data fitur yang diperoleh, akan diteliti pada tahap GNN dengan Satu *Layer* pada lampiran 9 yang selanjutnya dilanjutkan pada tahap *testing* dan *training* dilampirkan script MATLAB pada lampiran 10 dan 11, sehingga memperoleh anomali transportasi bus.

Selanjutnya membandingkan dari 8 model yang sudah didapat. Perbandingan berdasarkan MSE latih, MSE uji, waktu komp latihan dan regresi. Berikut hasil perbandingannya.

Tabel 4.1 Indikator Kinerja Arsitektur dan Model GNN

Model	MSE Latih	MSE Uji	Waktu Komp Latihan	Regresi
1	4.89×10^5	2.25×10^4	2.163	0.99926
2	1.03×10^4	2.26×10^4	2.717	0.99839
3	2.46×10^5	1.06×10^4	3.195	0.99961
4	8.37×10^5	2.68×10^4	3.091	0.99868
5	2.00×10^4	7.11×10^4	3.346	0.99939
6	1.57×10^4	3.78×10^4	2.428	0.99931
7	1.43×10^4	6.81×10^5	2.316	0.99776
8	2.08×10^5	2.59×10^5	2.333	0.99968

Untuk model pertama ini yang digunakan yaitu model *feedforwardnet* [4 6 6], model kedua yaitu *feedforwardnet* [5 6 7], model ketiga yaitu *fitnet* [4 6 6], model keempat yaitu *fitnet* [5 6 7], model kelima yaitu *patternet* [4 6 6], model keenam yaitu *patternet* [5 6 7], model ketujuh yaitu *cascaedeforwardnet* [4 6 6], dan model yang kedelapan atau model terakhir adalah *cascaedeforwardnet* [5 6 7].

Selain indikator kinerja, ditampilkan juga plot dari proses *training* dan *testing* untuk menemukan dimana data anomali berada. Untuk hasilnya bisa dilihat pada bagian lampiran 12 sampai 19. Setelah mendapatkan data *embedding* diperkirakan data *time series* menggunakan ANN. Pada tahap ini terdapat proses *training* dan *testing*. Pada proses *training*, diperoleh hasil yang kemudian digunakan pada tahap *testing*. Hasil yang dibangun kemudian diuji pada tahap *testing* untuk mengukur ANN. Untuk acuan, digunakan *Mean Square Error* (MSE). Berdasarkan hasil *testing* diperoleh yaitu untuk model ANN ke 8 yaitu 0.99968 dan untuk MSE ujinya yaitu 2.59×10^5 .

Sehingga didapatkan pada langkah manual didapatkan untuk nilai *loss* (e) yaitu 2.742×10^{-4} . Sedangkan pada langkah yang menggunakan aplikasi matlab diperoleh model ke 8 yaitu model yang terbaik karena didapatkan nilai MSE Latih sebesar $2,08 \times 10^5$, MSE Uji sebesar $2,59 \times 10^5$, Waktu Komp Latihan sebesar 2.333, dan Regresi 0.99968.

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Pada graf L_n , $n \geq 5$ mempunyai banyak dominator dengan $n =$ genap adalah $\frac{n+2}{2}$ dan $n =$ ganjil adalah $\frac{n+1}{2}$, pada graf TL_n , $n \geq 6$ mempunyai banyak dominator dengan $n \equiv 1 \pmod{5}$ adalah $\frac{2n+3}{5}$ dan $n \equiv 4 \pmod{5}$ adalah $\frac{2n+2}{5}$, sedangkan pada graf SL_n , $n \geq 6$ mempunyai banyak dominator dengan $n \equiv 0, 2 \pmod{4}$ adalah $\frac{n+2}{2}$ dan $n \equiv 3 \pmod{4}$ adalah $\frac{n+1}{2}$;
2. Pada representasi ini untuk terminal direpresentasikan dengan titik (*vertex*) dan setiap rute bus dari terminal satu ke terminal lainnya direpresentasikan dengan sisi (*edge*). Data simulasi yang diambil selama 15 minggu. Pada langkah manual didapatkan untuk nilai *loss* (e) yaitu 2.742×10^{-4} . Sedangkan pada langkah yang menggunakan aplikasi matlab diperoleh model ke 8 yaitu model yang terbaik dikarenakan untuk nilai regresinya mendekati 1 dan untuk MSE ujinya memiliki nilai terkecil dibandingkan model lainnya. Untuk model ke 8 ini didapatkan nilai MSE Latih sebesar $2,08 \times 10^5$, MSE Uji sebesar $2,59 \times 10^5$, Waktu Komp Latihan sebesar 2.333, dan Regresi 0.99968.

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian mengenai *resolving perfect dominating set* dalam mencari γ_{rp} pada keluarga graf *ladder* yaitu graf *ladder*, graf *triangular ladder* dan graf *sloping ladder*, maka peneliti memberikan saran kepada peneliti lain untuk melakukan penelitian mengenai *resolving perfect dominating set* pada keluarga graf *ladder* lainnya. Selain itu, peneliti juga menyarankan untuk mengambil permasalahan lainnya yang kemudian dianalisis menggunakan *resolving perfect dominating set* dan dengan teknik *graph neural network*.

DAFTAR PUSTAKA

- Dafik., Slamin., I. H. Agustin., D. A. Retnowardani., dan E. Y. Kurniawati. 2021. On The Resolving Strong Domination Number Of Graphs: A New Notion. *Journal of Physics: Conference Series*: 1-6.
- Azizah, M. O., Dafik, Kristiana, A. I., Alfarisi, R., dan D. A. R. Wardani. 2020. On Resolving Perfect Dominating Number of Comb Product of Special Graphs. *Journal of Physics: Convergence Series*: 1-9.
- Azizah, M. O., Dafik, dan A. I. Kristina. 2020. The Analysis of The Implementation of Research-based Learning on The Students Combinatorial Thinking Skills in Solving a Resolving Perfect Dominating Set Problem. *Journal of Physics: Convergence Series*: 1-20.
- Akbar. R. A., Dafik., dan R. M. Prihandini. 2022. Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Refleksif pada Keluarga Graf Tangga. *Mathematics and Applications*: 1-16.
- Ridho, A., Dafik., dan A. I. Kristiana. 2019. Resolving dominating number of graphs. *World Scientific*, 11(6): 1-13.
- Regita, T. M., A.I. Kristiana, dan Dafik. 2020. Resolving Domination Numbers of Family of Tree Graph. *International Journal of Academic and Applied Research (IJAAR)*, 4: 27-30.
- Adawiyah, R., dan R. M. Prihandini. 2021. Dimensi metrik sisi pada keluarga graf tangga. *KADIKMA*, 12(1): 34-39.
- Wardani. D. A. R., M. I. Utoyo., Dafik., dan K. Dliou. 2021. The Distance 2-Resolving Domination Number of Graphs. *Journal of Physics: Conference Series*: 1-5.
- Pushpa, N., dan Dhananjayamurthy. B. V. 2021. The Nonsplit Resolving Domination Polynomial of a Graph. *Atlantis Press International B. V*: 40-46.
- K. Sreejil dan R. Balakumar. 2020. Perfect Dominating Set On Fuzzy Graph Theory. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, 9 (2020): 129-139.
- Robert C. B., Orlando, G. Chartrand, Kalamazoo, R. D. Dutton., dan Ping Zhang. 2001. Resolving Domination in Graphs. *Mathematica Bohemica* 128: 25-36.

LAMPIRAN

Untuk lamprannya dapat dilihat dengan melalui barcode dibawah ini.

