



**ANALISIS *RAINBOW ANTIMAGIC COLORING* DAN SKEMA  
APLIKASINYA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH ARUS  
TRANSPORTASI UDARA DENGAN *GRAPH NEURAL NETWORK***

**SKRIPSI**

Oleh

**Indi Izzah Makhfudloh**

**NIM 190210101112**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2023**



**ANALISIS *RAINBOW ANTIMAGIC COLORING* DAN SKEMA  
APLIKASINYA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH ARUS  
TRANSPORTASI UDARA DENGAN *GRAPH NEURAL NETWORK***

**SKRIPSI**

Oleh

**Indi Izzah Makhfudloh  
NIM 190210101112**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS JEMBER  
2023**

## PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penulis persembahkan ungkapa kebahagiaan atas terselesaikannya skripsi dan p rasa terima kasih kepada:

1. keluarga besar saya, abah Anshori dan ibu Umi Salamah, serta kakak dan keponakan yang telah mendukung dan memberikan doa, kasih sayang, motivasi, kepercayaan dan senyuman yang selalu menguatkan di setiap perjalanan hidup saya;
2. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ibu Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota yang senantiasa meluangkan waktu dalam memberikan pengarahan dan bimbingan hingga terselesaikannya penulisan skripsi ni;
3. Bapak Drs.Antonius Cahya Prihandoko, M.App.Sc., Ph.D. selaku Dosen Penguji I dan Ibu Rafiantika Megahnia Prihandini, S.Pd., M.Si selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
4. Seluruh guru dan dosen beserta almamater sekolah yang telah memberikan banyak ilmu dan suasana kekeluargaan di setiap masanya serta teman-teman CGANT yang telah membagikan ilmu dan pengalaman berharga serta mengajarkan bahwa sebuah perbedaan bukanlah alasan untuk tidak saling membantu;
5. Sahabat terbaik dan tersayang Nabilah Ayu Az-Zahra yang sudah menjadi saudara, selalu bersama mulai dari masuk kuliah sampai lulus, selalu mendukung, memberi motivasi, selalu ada ketika saya sedih dan sellau bersama dalam mengerjakan skripsi ini;
6. Sahabat saya Ainun Rofiah dan Melisa Alviana yang juga selalu mendukung dan memberikan motivasi serta mendoakan saya;
7. Seluruh keluarga besar Mathematics Students Club (MSC), terutama keluarga besar Constanta angkatan 2019 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember;

8. Almamater tercinta Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.



**MOTO**

*"Never Give Up"*

(Indi Izzah M)

"Perjalanan seribu mil dimulai dengan satu langkah"

(Lao Tzu)

"Jangan terlalu ambil hati dengan ucapan seseorang,  
kadang manusia punya mulut tapi belum tentu punya  
pikiran"

(Albert Einstein)

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan"

(QS. Al-Insyirah: 5)

**PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Indi Izzah Makhfudloh

NIM : 190210101112

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa tesis yang berjudul "Analisis Rainbow Antimagic Coloring Dan Skema Aplikasinya Dalam Menyelesaikan Masalah Arus Transportasi Udara Dengan *graph neural network*" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 20 Januari 2023

Yang menyatakan,

Indi Izzah Makhfudloh

NIM 190210101112

**HALAMAN PEMBIMBING**

**SKRIPSI**

**ANALISIS RAINBOW ANTIMAGIC COLORING DAN SKEMA  
APLIKASINYA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH ARUS  
TRANSPORTASI UDARA DENGAN *GRAPH NEURAL NETWORK***

Oleh

Indi Izzah Makhfudloh

NIM 190210101112

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D

Dosen Pembimbing Anggota : Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si

**PENGESAHAN**

Skripsi berjudul "Analisis Rainbow Antimagic Coloring dan Skema Aplikasinya dalam Menyelesaikan Masalah Arus Transportasi Udara dengan *Graph Neural Network*":

hari, tanggal : Jum'at, 20 Januari 2023

tempat : R.Ujian Gedung III/35D 201, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.  
NIP. 19680802 199303 1 004

Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si.  
NIP. 19920731 201903 2 015

Dosen Penguji I,

Dosen Penguji II,

Drs. Antonius Cahya Prihandoko.,  
M.App.Sc., Ph.D.  
NIP. 19690928 199302 1 001

Rafiantika Megahnia Prihandini,  
S.Pd., M.Si.  
NIP. 19891005 201903 2 034

Mengesahkan

Dekan,

Prof. Dr. Bambang Soepeno, M.Pd.  
NIP. 19600612 198702 1 001



## RINGKASAN

***Analisis Rainbow Antimagic Coloring Dan Skema Aplikasinya Dalam Menyelesaikan Masalah Arus Transportasi Udara Dengan graph neural network;***  
Indi Izzah Makhfudloh, 190210101112; 2023:108 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penelitian ini membahas tentang *rainbow antimagic coloring*, *rainbow antimagic coloring* merupakan gabungan dari topik pelabelan antiajaib dengan pewarnaan pelangi. Pelabelan antiajaib merupakan pelabelan pada setiap titik dari graf  $G$  dengan label yang berbeda, sedemikian sehingga setiap jumlah label titik pada graf memiliki bobot yang berbeda. Pewarnaan pelangi merupakan bagian dari pewarnaan sisi yang terhubung pelangi, dimana setiap graf  $G$  memiliki lintasan pelangi. Lintasan pelangi dalam graf  $G$  terbentuk jika ada dua titik pada graf  $G$  tidak memiliki warna yang sama. Jumlah warna minimum pada graf terhubung pelangi disebut dengan *rainbow connection number* (bilangan koneksi pelangi) dinotasikan dengan  $rc(G)$ . Jika pemberian warna pada setiap sisi dengan warna yang berbeda, misalkan dalam fungsi  $f$  diberi warna pada  $uv$  dengan bobot  $w(uv)$  disebut dengan *rainbow antimagic coloring*. *Rainbow antimagic coloring* memiliki syarat bahwa setiap dua titik pada graf tidak boleh memiliki lintasan pelangi yang sama. Jumlah warna minimum dari *rainbow antimagic coloring* disebut dengan *rainbow antimagic connection number* (bilangan koneksi pelangi antiajaib) dinotasikan dengan  $rac(G)$

*Rainbow antimagic coloring* pada penelitian ini, diaplikasikan dalam permasalahan arus transportasi udara. Permasalahan arus transportasi udara terletak pada kepadatan arus lalu lintas udara. Pada transportasi udara terdapat petugas yang mengatur lalu lintas udara yang disebut dengan *Air Traffic Controller* (ATC). ATC bertugas untuk mengendalikan keadaan darurat, menginformasikan lalu lintas udara serta memberi informasi cuaca. ATC akan dipantau oleh *AIRNAV* pusat yang ada di beberapa wilayah dengan lalu lintas udara terpadat yaitu pada bandara Jakarta, Bali dan Makassar. *Rainbow antimagic coloring* dipakai untuk menentukan minimum banyaknya perusahaan yang mengelolah penempatan ATC agar seminimal mungkin. Penyelesaian permasalahan arus transportasi udara ini juga diselesaikan dengan *graph*

*neural network*. Teknik ini digunakan untuk proses *time series* dengan *forecasting*. Proses tersebut untuk menganalisis *airport* yang memiliki kepadatan yang paling padat dalam waktu tertentu.

Dari hasil penelitian diperoleh tujuh teorema sebagai berikut.

1. *Rainbow Connection Number* dari graf siput  $S_n$  dengan  $n \geq 3$  adalah  $rc(S_n) = 5$ ;
2. *Rainbow Connection Number* dari graf tunas kelapa  $CR_{n,m}$  dengan  $n = 5$  dan  $m \geq 2$  adalah

$$rc(CR_{n,m}) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m = 2, 3, 4; n = 5 \\ m - 1, & \text{untuk } m \geq 5; n = 5 \end{cases}$$

3. *Rainbow Connection Number* dari graf lotus  $Lo_n$  dengan  $n \geq 2$  adalah

$$rc(Lo_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 2 \\ \frac{n+3}{2}, & \text{untuk } n \geq 3; n = \text{bilangan ganjil} \\ \frac{n+2}{2}, & \text{untuk } n \geq 4; n = \text{bilangan genap} \end{cases}$$

4. *Rainbow Antimagic Connection Number* pada graf siput  $S_n$  dengan  $n \geq 3$  adalah  $rac(S_n) = n + 3$ ;
5. *Rainbow Antimagic Connection Number* pada graf tunas kelapa  $CR_{n,m}$  dengan  $n = 5$  dan  $m \geq 2$  adalah  $rac(CR_{n,m}) = m + 3$ ;
6. *Rainbow Antimagic Connection Number* pada graf lotus  $Lo_n$  dengan  $n \geq 2$  adalah  $rac(Lo_n) = n + 1$ ;
7. *Rainbow Antimagic Connection Number* pada graf kipas tangkai  $Kt_n$  dengan  $n \geq 2$  adalah  $rac(Kt_n) = n + 1$ ;

Pada simulasi *graph neural network* berbantuan software MATLAB diperoleh data hasil *embedding* yang kemudian disimulasikan menggunakan arsitektur ANN. Model ANN terbaik *Cascadeforwardnet* dengan arsitektur 455 untuk kelompok 1, model ANN terbaik *Fitnet* dengan arsitektur 574 untuk kelompok 2 dan model ANN terbaik *Feedforwardnet* dengan arsitektur 455 untuk kelompok 3. Penelitian dengan menggunakan tiga fitur yaitu intensitas cuaca, jumlah penumpang dan jumlah pesawat. Penelitian dilakukan selama 15 minggu, data yang didapatkan disimulasikan

dengan MATLAB. Simulasi ini menggunakan tiga tahapan yaitu *testing*, *training* dan *forecasting*. Dari hasil simulasi didapatkan anomali pada kelompok 1, 2 dan 3 di Jakarta. Kepadatan arus lalu lintas berada pada bandara Jakarta. Penempatan *AIRNAV* pada kelompok 1 berada di Jakarta, kelompok 2 berada di Bali dan kelompok 3 berada di Makasar.



## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Analisis *Rainbow Antimagic Coloring* dan Skema Aplikasinya dalam Menyelesaikan Masalah Arus Transportasi Udara dengan *Graph Neural Network*". Penelitian ini diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA FKIP Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember;
4. Ketua Laboratorium Matematika Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan MIPA FKIP Universitas Jember;
5. Dr. Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing dan memberikan ilmu;
6. Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. dan Ibu Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing yang telah meluangkan waktu dan pikiran hingga terselesaikannya penulisan skripsi ini;
7. Drs.Antonius Cahya Prihandoko, M.App.Sc., Ph.D. dan Ibu Rafiantika Megahnia Prihandini, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
8. Dosen dan Karyawan FKIP Universitas Jember;
9. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya tesis ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tesis ini dapat bermanfaat.

Jember, 20 Januari 2023

Penulis

**DAFTAR ISI**

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	ii
<b>HALAMAN MOTTO</b> .....	iv
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	v
<b>HALAMAN PEMBIMBINGAN</b> .....	vi
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	vii
<b>RINGKASAN</b> .....	viii
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiv
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xvii
<b>DAFTAR LAMBANG</b> .....	xviii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xx
<b>BAB 1. PENDAHULUAN</b> .....	1
<b>1.1 Latar Belakang</b> .....	1
<b>1.2 Rumusan Masalah</b> .....	3
<b>1.3 Tujuan Penelitian</b> .....	3
<b>1.4 Manfaat Penelitian</b> .....	3
<b>1.5 Batasan Penelitian</b> .....	4
<b>1.6 Kebaharuan</b> .....	4
<b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	6
<b>2.1 Terminologi Graf</b> .....	6
<b>2.2 Pelabelan Graf</b> .....	8

2.3	Pewarnaan Graf .....	10
2.4	<i>Rainbow Antimagic Coloring</i> (Pewarnaan pelangi antiajaib) .....	11
2.5	Permasalahan Arus Transportasi Udara .....	12
2.6	<i>Graph Neural Network</i> .....	15
2.7	Penelitian Terdahulu .....	18
<b>BAB 3. METODE PENELITIAN .....</b>		<b>20</b>
3.1	Jenis Penelitian .....	20
3.2	Metode Penelitian .....	20
3.3	Definisi Operasional .....	21
3.3.1	<i>Rainbow Antimagic Coloring</i> .....	21
3.3.2	Teknik <i>Graph Neural Network</i> .....	21
3.4	Prosedur Penelitian .....	21
<b>BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN .....</b>		<b>25</b>
4.1	Hasil Penelitian <i>Rainbow Connection Number</i> .....	26
4.2	Hasil Penelitian <i>Rainbow Antimagic Connection Number</i> .....	36
4.3	Algoritma <i>Graph Neural Network</i> dalam Menyelesaikan Masalah Arus Transportasi Udara dengan <i>Rainbow Antimagic Coloring</i> .....	49
4.4	Analisis Skema Aplikasi <i>Rainbow Antimagic Coloring</i> pada Masalah Arus Transportasi Udara dengan <i>Graph Neural Network</i> .	62
<b>BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN .....</b>		<b>76</b>
5.1	Kesimpulan .....	76
5.2	Saran .....	77
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>		<b>78</b>

**DAFTAR GAMBAR**

	Halaman
2.1 Graf $G$ .....	7
2.2 Jenis graf.....	9
2.3 (a)Pelabelan titik, (b) Pelabelan sisi, dan (c) Pelabelan antiajaib .....	9
2.4 (a)pewarnaan titik, (b) pewarnaan sisi, dan (c) Pewarnaan pelangi.....	11
2.5 <i>Rainbow Antimagic Coloring</i> .....	12
2.6 <i>Flight route</i> Bandara Soekarno-Hatta .....	13
2.7 Peta rute penerbangan pesawat .....	14
2.8 Bandara di Indonesia .....	14
2.9 Sistem Kerja ATC .....	14
2.10 Representasi rute penerbangan .....	15
2.11 Nama bandara [cuaca;jumlah pesawat;jumlah penumpang] .....	15
2.12 <i>Neural Network</i> .....	16
2.13 <i>Node classification</i> .....	16
2.14 Graf <i>Neural Network 2 hidden layer</i> .....	16
2.15 <i>Graph Neural Network</i> .....	17
2.16 <i>Neural Message Passing</i> .....	17
2.17 <i>Graph Neural Network layer</i> .....	18
3.1 Prosedur penelitian .....	24
4.1 RC graf siput ( $S_3$ ) .....	28
4.2 RC graf tunas kelapa( $CR_{5,2}$ ) .....	30
4.3 RC graf tunas kelapa( $CR_{5,6}$ ) .....	32
4.4 RC graf lotus ( $Lo_2$ ) .....	33

4.5	RC graf lotus ( $Lo_7$ ) .....	35
4.6	RC graf lotus ( $Lo_8$ ) .....	36
4.7	RAC graf siput ( $S_5$ ) .....	39
4.8	RAC graf tunas kelapa ( $CR_{5,2}$ dan $CR_{5,3}$ ) .....	44
4.9	RAC graf tunas kelapa ( $CR_{5,4}$ dan $CR_{5,5}$ ) .....	44
4.10	RAC graf lotus ( $Lo_7$ ) .....	47
4.11	RAC graf kipas tangkai ( $Kt_9$ ) .....	49
4.12	Representasi graf <i>airport</i> di Indonesia .....	63
4.13	RAC Representasi graf <i>airport</i> di Indonesia .....	64
4.14	Pengelompokkan arus transportasi udara K1,K2,K3 .....	65
4.15	Perbandingan <i>output</i> ANN dan data target arus transportasi <i>airport</i> pada hasil <i>training</i> kelompok 1 .....	68
4.16	Perbandingan <i>output</i> ANN dan data target arus transportasi <i>airport</i> pada hasil <i>testing</i> kelompok 1 .....	68
4.17	Peramalan arus transportasi <i>airport</i> untuk menentukan kepadatan terbesar kelompok 1 .....	69
4.18	Plot Regresi kelompok 1 .....	69
4.19	Perbandingan <i>output</i> ANN dan data target arus transportasi <i>airport</i> pada hasil <i>training</i> kelompok 2 .....	70
4.20	Perbandingan <i>output</i> ANN dan data target arus transportasi <i>airport</i> pada hasil <i>testing</i> kelompok 2 .....	71
4.21	Peramalan arus transportasi <i>airport</i> untuk menentukan kepadatan terbesar kelompok 2 .....	71
4.22	Plot Regresi kelompok 2 .....	72
4.23	Perbandingan <i>output</i> ANN dan data target arus transportasi <i>airport</i> pada hasil <i>training</i> kelompok 3 .....	73



4.24 Perbandingan <i>output</i> ANN dan data target arus transportasi <i>airport</i> pada hasil <i>testing</i> kelompok 3 .....	73
4.25 Peramalan arus transportasi <i>airport</i> untuk menentukan kepadatan terbesar kelompok 3 .....	74
4.26 Plot Regresi kelompok 3 .....	74



## DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Penelitian terdahulu .....	18
4.1 <i>Rainbow Path</i> pada graf siput ( $S_n$ ) .....	27
4.2 <i>Rainbow Path</i> pada graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ) .....	29
4.3 <i>Rainbow Path</i> pada graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ) .....	31
4.4 <i>Rainbow Path</i> pada graf lotus ( $Lo_2$ ) .....	33
4.5 <i>Rainbow Path</i> pada graf lotus ( $Lo_n$ ) .....	34
4.6 <i>Rainbow Path</i> pada graf lotus ( $Lo_n$ ) .....	36
4.7 <i>Rainbow Path</i> pada graf siput ( $S_n$ ) .....	39
4.8 <i>Rainbow Path</i> pada graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ) .....	43
4.9 <i>Rainbow Path</i> pada graf lotus ( $Lo_n$ ) .....	46
4.10 <i>Rainbow Path</i> pada graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ) .....	49
4.11 Pengelompokan arus transportasi udara .....	64
4.12 Indikator kinerja arsitektur dan model JST Kelompok1 .....	66
4.13 Indikator kinerja arsitektur dan model JST Kelompok2 .....	66
4.14 Indikator kinerja arsitektur dan model JST Kelompok3 .....	67

DAFTAR LAMBANG

$G$	=	Graf $G$
$V(G)$	=	Himpunan titik pada graf $G$
$E(G)$	=	Himpunan sisi pada graf $G$
$ V(G) $	=	<i>Order</i> pada graf $G$
$ E(G) $	=	<i>Size</i> pada graf $G$
$x_i$	=	Titik $ke - i$ pada graf $G$
$e_i$	=	Sisi $ke - i$ pada graf $G$
$diam(G)$	=	Diameter dari graf $G$
$\delta(G)$	=	Derajat terkecil ( <i>minimum</i> ) pada graf $G$
$\Delta(G)$	=	Derajat terbesar ( <i>maximum</i> ) pada graf $G$
$uv$	=	Sisi yang dihubungkan oleh titik $u$ dan $v$
$rc(G)$	=	<i>Rainbow Connection</i> pada graf $G$
$rac(G)$	=	<i>Rainbow Antimagic Connection Number</i> pada graf $G$
$S_n$	=	Graf siput dengan $2n + 7$ titik
$CR_{n,m}$	=	Graf tunas kelapa dengan $n$ titik pada cycle graph dan $m$ titik pada path graph
$Kt_n$	=	Graf kipas tangkai dengan $n + 2$ titik
$Lo_n$	=	Graf lotus dengan $2n + 1$ titik
$\epsilon$	=	Toleransi
$Wg$	=	<i>Learning weight</i>
$\beta$	=	Bias
$\alpha$	=	<i>Learning late</i>
$m_u^l$	=	<i>Message function</i>
$MSG$	=	<i>Message</i>
$h_u^{i-1}$	=	Fitur titik

**DAFTAR LAMBANG**

$AGG^l$  = *Aggregate message*

$SUM^l$  = Fungsi penjumlahan

$e^l$  = Nilai error

$z_j$  = Jumlah dari setiap kolom



DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
4.1 Data Non-normalization Pengamatan Airport Kelompok 1 .....	80
4.2 Data Normalization Pengamatan Airport Kelompok 1 .....	82
4.3 Data Non-normalization Pengamatan Airport Kelompok 2 .....	84
4.4 Data Normalization Pengamatan Airport Kelompok 2 .....	86
4.5 Data Non-normalization Pengamatan Airport Kelompok 3 .....	88
4.6 Data Normalization Pengamatan Airport Kelompok 3 .....	90
4.7 Pemrograman MATLAB GNN dengan Satu Layer .....	92
4.8 Pemrograman MATLAB Tahap <i>Training</i> .....	95
4.9 Pemrograman MATLAB Tahap <i>Testing</i> .....	98
4.10 Model JST Kelompok 1 .....	100
4.11 Model JST Kelompok 2 .....	103
4.12 Model JST Kelompok 3 .....	106

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Masalah kepadatan arus lalu lintas udara termasuk dalam permasalahan yang belum terselesaikan di Indonesia. Transportasi merupakan bentuk perpindahan yang dilakukan oleh manusia maupun barang dari tempat asal ke tempat tujuan. Transportasi udara termasuk dalam alat transportasi yang menggunakan angkutan udara. Angkutan udara merupakan kegiatan menggunakan pesawat udara untuk mengangkut penumpang atau barang dari satu bandara ke bandara lainnya. Minat masyarakat untuk menggunakan transportasi ini semakin meningkat sehingga mengalami kepadatan. Kepadatan arus transportasi udara diperlukan adanya pengatur arus lalu lintas untuk mengontrol kedatangan dan keberangkatan pesawat.

Kedatangan dan keberangkatan pesawat tidak bisa dilakukan oleh beberapa pesawat sehingga harus dilakukan secara bergantian. Hal tersebut yang mengakibatkan kepadatan arus lalu lintas udara. Dalam transportasi udara terdapat lalu lintas udara yang diatur oleh *Air Traffic Controller (ATC)*. ATC bertugas untuk memberikan, mengendalikan keadaan darurat, menginformasikan lalu lintas udara serta memberi informasi cuaca. ATC akan diawasi oleh *AIRNAV* pusat yang ada di beberapa wilayah dengan tingkat kepadatan yang paling tinggi. Peletakan ATC diatur oleh perusahaan yang mengatur lalu lintas udara, perusahaan ini ditentukan seminimal mungkin dengan sangat efisien. Salah satu ilmu pengetahuan yang dapat diterapkan dalam meminimalkan banyak *Air Traffic Controller (ATC)* adalah teori graf.

Topik dalam teori graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah *rainbow antimagic coloring*, teori ini menggabungkan dua konsep yaitu pelabelan graf dan pewarnaan graf. Penelitian ini akan membahas mengenai penyelesaian masalah

dengan konsep *rainbow antimagic coloring*, disajikan pemahaman konsep *rainbow antimagic coloring* dengan meneliti sebuah graf dan menghasilkan teorema serta pembuktiannya. Pada penelitian sebelumnya, beberapa graf sudah diteliti *rainbow antimagic coloring* yaitu graf lintasan ( $P_n$ ), graf *dragonfly* ( $Dg_n$ ), graf *octopus* ( $O_n$ ) dan lainnya. Penelitian ini juga meneliti topik *rainbow antimagic coloring*, namun pada graf yang berbeda. Penulis menggunakan graf siput ( $S_n$ ), graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ), graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ) dan graf lotus ( $Lo_n$ ). Setelah dilakukan pemahaman konsep *rainbow antimagic coloring*, kemudian mengaplikasikannya dalam penyelesaian permasalahan arus transportasi udara.

*Rainbow antimagic connection number* dapat menentukan banyak perusahaan *Air Traffic Controller* (ATC) di Indonesia. *Air Traffic Controller* (ATC) di pantau oleh AIRNAV pusat untuk mengetahui keakuratan data dari ATC. Dalam hal ini, menggunakan visualisasi yang mudah dipahami, yaitu dengan bandara direpresentasikan sebagai titik (*vertex*) dan setiap rute pesawat dari bandara satu ke bandara lainnya direpresentasikan dengan sisi (*edge*). Kemudian akan dicari *Rainbow antimagic connection number* dari representasi graf tersebut. Selain itu, penyelesaian permasalahan ini diperlukan suatu cara untuk mengetahui anomali kepadatan arus transportasi udara dalam kurun waktu tertentu. Cara yang digunakan yaitu *graph neural network* dengan berbantuan *software* yaitu MATLAB. Pada simulasi *graph neural network* diperoleh *forecasting time series* yang digunakan untuk mengetahui anomali kepadatan arus transportasi udara. Berdasarkan latar belakang tersebut peneliti mengambil judul yaitu **“Analisis Rainbow Antimagic Coloring Dan Skema Aplikasinya Dalam Menyelesaikan Masalah Arus Transportasi Udara Dengan *graph neural network*”**.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan yang dapat dirumuskan dalam penelitian ini sebagai berikut:

- Berapa *rainbow connection number* dari graf siput ( $S_n$ ) dengan  $n \geq 3$ , graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ) dengan  $n = 5$ ;  $m \geq 2$  dan graf lotus ( $Lo_n$ ) dengan  $n \geq 2$ ?
- Berapa *rainbow antimagic connection number* dari graf siput ( $S_n$ ) dengan  $n \geq 3$ , graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ) dengan  $n = 5$ ;  $m \geq 2$ , graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ) dengan  $n \geq 2$  dan graf lotus ( $Lo_n$ ) dengan  $n \geq 2$ ?
- Bagaimana algoritma GNN satu layer dalam menyelesaikan masalah peramalan kepadatan arus transportasi udara dengan *rainbow antimagic coloring*?
- Bagaimana analisis skema aplikasi penerapan *rainbow antimagic coloring* dalam menyelesaikan masalah arus transportasi udara dengan *graph neural network*?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan latar belakang diatas, maka tujuan yang dicapai dalam penelitian ini sebagai berikut:

- Menentukan *rainbow connection number* dari graf siput ( $S_n$ ) dengan  $n \geq 3$ , graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ) dengan  $n = 5$ ;  $m \geq 2$  dan graf lotus ( $Lo_n$ ) dengan  $n \geq 2$ ;
- Menentukan *rainbow antimagic connection number* dari graf siput ( $S_n$ ) dengan  $n \geq 3$ , graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ) dengan  $n = 5$ ;  $m \geq 2$ , graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ) dengan  $n \geq 2$  dan graf lotus ( $Lo_n$ ) dengan  $n \geq 2$ ;
- Mengembangkan algoritma GNN satu layer dalam menyelesaikan masalah peramalan kepadatan arus transportasi udara dengan *rainbow antimagic coloring*;
- Menganalisis skema aplikasi penerapan *rainbow antimagic coloring* dalam menyelesaikan masalah arus transportasi udara dengan *graph neural network*.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini sebagai berikut:



- a. Menambah pengetahuan serta wawasan dalam bidang teori graf, Khususnya dalam topik *rainbow connection* pada graf siput ( $S_n$ ) dengan  $n \geq 3$ , graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ) dengan  $n = 5$ ;  $m \geq 2$  dan graf lotus ( $Lo_n$ ) dengan  $n \geq 2$ ;
- b. Menambah pengetahuan serta wawasan dalam bidang teori graf, Khususnya dalam topik *rainbow antimagic coloring* pada graf siput ( $S_n$ ) dengan  $n \geq 3$ , graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ) dengan  $n = 5$ ;  $m \geq 2$ , graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ) dengan  $n \geq 2$  dan graf lotus ( $Lo_n$ ) dengan  $n \geq 2$ ;
- c. Menambah pengetahuan serta wawasan dalam menyelesaikan permasalahan arus transportasi udara dengan menggunakan penyelesaian *rainbow antimagic coloring* dan *graph neural network*;
- d. Penelitian ini dapat digunakan sebagai landasan atau referensi para pembaca dalam pengembangan penelitian yang berkaitan dengan *rainbow antimagic coloring* serta teknik *graph neural network*.

### 1.5 Batasan Penelitian

Untuk menghindari permasalahan yang meluas, maka permasalahan pada penelitian ini diberikan batasan sebagai berikut:

- a. Pada penelitian ini graf yang digunakan adalah graf siput ( $S_n$ ) dengan  $n \geq 3$ , graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ) dengan  $n = 5$ ;  $m \geq 3$ , graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ) dengan  $n \geq 2$  dan graf lotus ( $Lo_n$ ) dengan  $n \geq 2$ ;
- b. Permasalahan yang digunakan dalam penelitian ini adalah arus transportasi udara;
- c. Teknik yang digunakan dalam penelitian ini adalah *graph neural network*.

### 1.6 Kebaharuan

Dalam penelitian ini, terdapat beberapa kebaharuan yang belum pernah diteliti oleh peneliti lain yaitu sebagai berikut:

- a. *Rainbow connection number* dari graf siput ( $S_n$ ) dengan  $n \geq 3$ , graf tunas kelapa

- ( $CR_{n,m}$ ) dengan  $n = 5$ ;  $m \geq 2$  dan graf lotus ( $Lo_n$ ) dengan  $n \geq 2$ ;
- b. *Rainbow antimagic coloring* pada graf siput ( $S_n$ ) dengan  $n \geq 3$ , graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ) dengan  $n = 5$ ;  $m \geq 2$ , graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ) dengan  $n \geq 2$  dan graf lotus ( $Lo_n$ ) dengan  $n \geq 2$ ;
- c. Pengembangan algoritma satu layer dalam menyelesaikan masalah arus transportasi udara;
- d. Skema aplikasi penerapan *rainbow antimagic coloring* dalam menyelesaikan masalah arus transportasi udara dengan *graph neural network*.



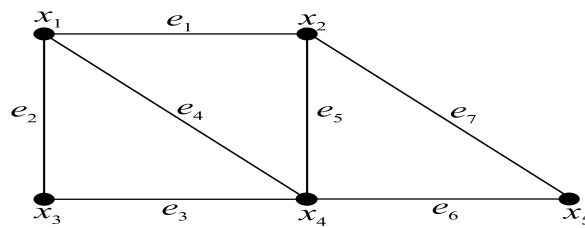
## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Terminologi Graf

Seorang matematikawan dari Swiss yaitu Leonhard Euler yang pertama kali menemukan teori graf. Pada tahun 1736, Euler berhasil memecahkan persoalan tujuh jembatan di kota Königsberg yang direpresentasikan dengan teori graf. penyelesaian persoalan tersebut dinyatakan dengan titik dan sisi dimana tujuh jembatan sebagai sisi dan daratan sebagai titik. Sejak terpecahkan persoalan jembatan Königsberg, teori graf dikenal dunia. Hal tersebut menyatakan bahwa teori graf dapat diaplikasikan dalam menyelesaikan permasalahan.

**Definisi 2.1.1** Graf  $G$  merupakan pasangan himpunan  $(V, E)$  dengan  $V(G)$  adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut dengan titik (*vertex*) dan  $E(G)$  adalah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak berurutan dari titik-titik yang berbeda dari  $V$  disebut dengan sisi (*edge*). Sebuah graf berkemungkinan tidak memiliki sisi namun sudah pasti memiliki minimal satu titik. Graf yang tidak memiliki sebuah sisi dan hanya memiliki satu buah titik disebut dengan graf *trivial*. Sedangkan graf kosong (*null graph*) merupakan graf yang tidak memiliki sisi atau himpunan titiknya berupa himpunan kosong.

Graf  $G$  memiliki dua titik  $u$  dan  $v$ , jika kedua titik tersebut terhubung langsung dengan sebuah sisi maka dinyatakan bertetangga (*adjacent*). Jika terdapat sisi  $e = (u, v)$ , maka sisi  $e$  dikatakan bersisian dengan titik  $u$  dan  $v$ . Banyaknya titik (*vertex*) pada graf  $G$  disebut dengan orde (*order*) dinotasikan dengan  $|V(G)|$ . Sedangkan banyaknya sisi (*edge*) pada graf  $G$  disebut dengan ukuran (*size*) dinotasikan dengan  $|E(G)|$ . Derajat (*degree*) pada graf  $G$  adalah banyaknya sisi yang bersisian dengan titik  $x$  pada graf  $G$ . Contoh dari graf  $G$  terdapat pada gambar berikut:

Gambar 2.1 Graf  $G$ 

Pada Gambar 2.1 menunjukkan contoh dari graf yang berordo 5 dengan himpunan titik  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  dan 6 sisi dengan himpunan  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ . Derajat terbesar (*maximum*) pada graf  $G$  dinotasikan dengan  $\Delta(G)$ . Sedangkan derajat terkecil (*minimum*) dari graf  $G$  dinotasikan dengan  $\delta(G)$ . Derajat dari  $x_4$  yaitu  $\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$  sehingga  $x_4$  memiliki derajat 4. Dua buah titik pada graf tak berarah dikatakan terhubung langsung/bertetangga (*adjacent*) jika kedua titik itu dihubungkan oleh sebuah sisi. Sembarang sisi yang menghubungkan dua titik pada graf, sisi itu dikatakan terkait/bersisian (*incident*) dengan dua titik itu.

Pada sisi graf terdapat orientasi arah, orientasi arah pada graf dibedakan menjadi dua macam yaitu graf berarah (*directed graph*) dan graf tak-berarah (*undirected graph*). Graf berarah merupakan graf pada setiap sisinya memiliki orientasi arah. Sedangkan graf tak-berarah merupakan graf pada setiap sisinya tidak memiliki orientasi arah. Jika terdapat sebuah graf yang memiliki titik  $u$  dan  $v$  didalam himpunan  $V(G)$  memiliki lintasan yang menghubungkan titik tersebut disebut dengan graf terhubung. Sedangkan jika terdapat graf yang memiliki titik  $u$  dan  $v$  tetapi tidak memiliki lintasan disebut dengan graf tidak terhubung.

Jenis graf yang digunakan pada penelitian ini adalah graf siput ( $S_n$ ), graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ), dan graf tunjung ( $Tj_n$ ). Berikut penjelasan dari graf yang akan diteliti:

a. Graf Siput

Graf siput merupakan salah satu contoh dari graf *Well-Defined*. Graf siput dapat

dinotasikan dengan  $(S_n)$ . Graf siput merupakan perkembangan dari graf roda (*wheel*).

b. Graf Tunas Kelapa

Graf tunas kelapa merupakan salah satu contoh dari graf *Well-Defined*. Graf tunas kelapa dinotasikan dengan  $CR_{n,m}$ .

c. Graf Kipas Tangkai

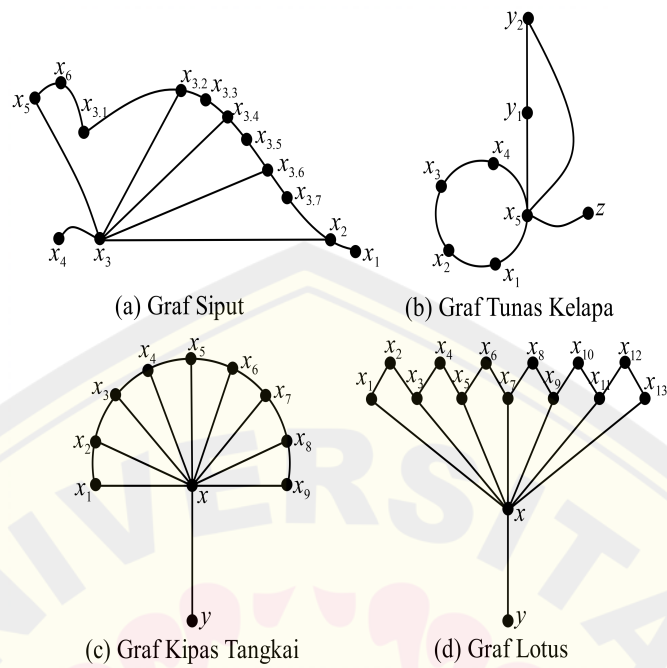
Graf kipas tangkai merupakan graf yang diperoleh dari penggabungan semua titik dari graf lintasan  $P_n$  dengan suatu titik yang disebut dengan titik pusat. Titik pusat dihubungkan ke satu titik tangkai yang berada diluar  $P_n$ . Graf kipas tangkai dinotasikan dengan  $Kt_n$ .

d. Graf Lotus

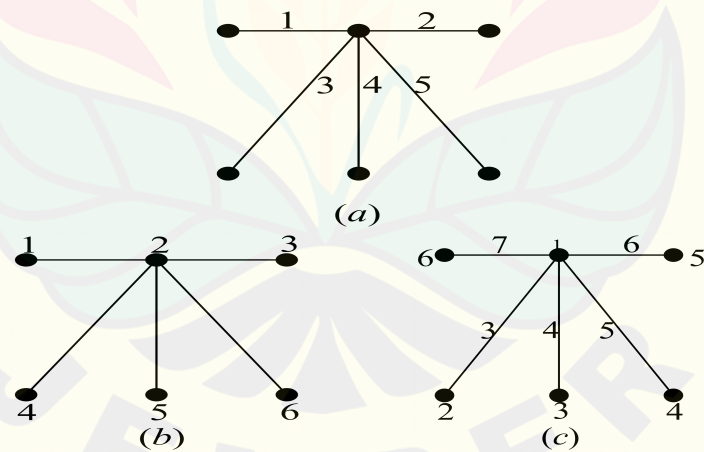
Graf Lotus merupakan graf yang diperoleh dari graf *shell* dengan menambahkan sebuah simpul diantara setiap pasang simpul yang bertetangga pada putaran dan menambahkan tepi di pusat titik. Graf lotus dinotasikan dengan  $Lo_n$ .

## 2.2 Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah pemetaan dari himpunan elemen dalam graf baik berupa titik, sisi atau keduanya ke dalam himpunan bilangan bulat positif atau bilangan asli (Dafik, 2021). Pelabelan titik adalah pelabelan pada graf  $G$  dengan melabeli titik. Pelabelan sisi adalah pelabelan pada graf  $G$  dengan melabeli sisi. Pelabelan yang berupa pelabelan sisi dan pelabelan titik disebut pelabelan total. Pelabelan memiliki berapa jenis diantaranya pelabelan *graceful*, pelabelan total tak beraturan, pelabelan antiajaib. Jika terdapat fungsi bijektif pada graf  $G$ ,  $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$  disebut pelabelan antiajaib dengan jumlah titik yang bebasangan memiliki nilai bobot berbeda. Jumlah label dari setiap titik disebut dengan bobot sisi dan dapat dinotasikan dengan  $w(v)$  (Chartrand, 2019).



Gambar 2.2 Jenis graf



Gambar 2.3 (a) Pelabelan titik, (b) Pelabelan sisi, dan (c) Pelabelan antiajaib

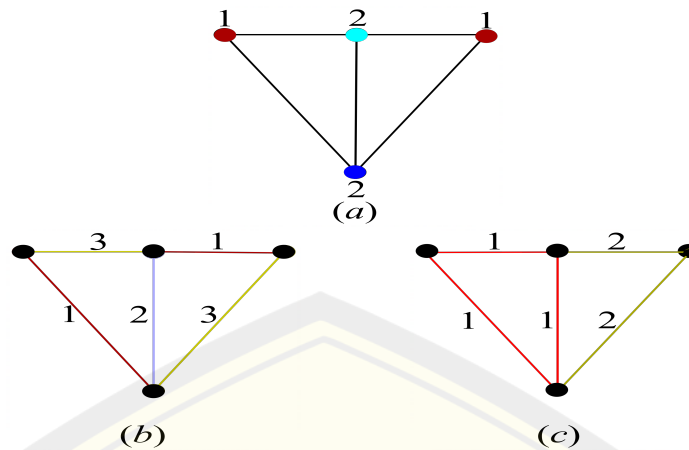
### 2.3 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf adalah pemberian sebuah warna pada himpunan titik dan himpunan sisi pada graf. Syarat pewarnaan graf yaitu setiap warna berbeda untuk setiap anggota graf yang bertetangga. Pewarnaan graf dapat dilakukan dengan memetakan warna yang berbeda terhadap masing-masing titik atau sisi. Terdapat beberapa graf yang memiliki warna yang lebih sedikit dari jumlah titik atau sisi pada graf (Rasiman, 2018). Pewarnaan titik pada graf adalah pemberian warna pada titik dalam graf sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna sama (Saputra F. , 2012). Pewarnaan sisi pada graf adalah pemberian warna pada sisi dalam graf dengan warna sisi yang bertetangga berbeda.

Pewarnaan pelangi merupakan salah satu dari bagian pewarnaan sisi dalam graf  $G$ . Misalkan graf  $G$  adalah graf terhubung dengan pewarnaan sisi  $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ , dengan ketentuan  $k$  merupakan bagian dari bilangan asli dimana sisi yang bertetangga dapat memiliki warna yang sama. Lintasan pelangi dalam graf  $G$  terbentuk jika dua titik dalam graf tidak memiliki lintasan dengan warna yang sama. Pewarnaan pelangi disebut juga pewarnaan sisi dalam graf  $G$  yang terhubung pelangi. Pewarnaan pelangi memiliki warna minimum yang disebut dengan *rainbow connection number* (bilangan koneksi pelangi) . *Rainbow connection number* pada graf  $G$  dapat dinotasikan dengan  $rc(G)$ .

**Lema 2.3.1.** Misalkan  $G$  adalah graf terhubung dengan size  $m$ , maka  $diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m$ , dimana  $diam(G)$  adalah diameter  $G$  dan  $m$  adalah banyak sisi dari  $G$  (Li dan Sun, 2012).

**Lema 2.3.2.** Misalkan  $G$  adalah graf terhubung dengan  $d(G) \geq 2$ , maka  $G$  adalah graf interval,  $diam(G) \leq rc(G) \leq diam(G) + 1$  sedangkan jika  $G$  adalah graf interval,  $diam(G) = rc(G)$ .



Gambar 2.4 (a) pewarnaan titik, (b) pewarnaan sisi, dan (c) Pewarnaan pelangi

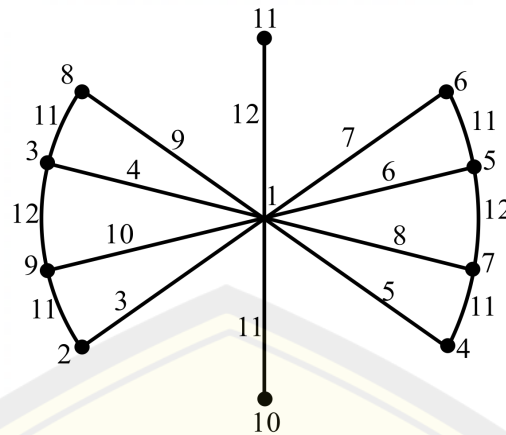
#### 2.4 Rainbow Antimagic Coloring (Pewarnaan pelangi antiajaib)

*rainbow antimagic coloring* merupakan gabungan dari pelabelan antiajaib dan pewarnaan pelangi. Berikut definisi dari pewarnaan pelangi antiajaib:

**Definisi 2.7.1** Misalkan graf  $G$  bagian dari graf sederhana, fungsi bijektif  $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$  bobot sisi untuk setiap  $uv \in E(G)$  pada  $f$  adalah  $w(uv) = f(u) + f(v)$ . Jika terdapat dua sisi  $uv, u'v' \in E(G)$ , dimana warna setiap sisinya direpresentasikan dari bobot sisi  $w(uv), w(u'v')$  pada lintasan  $P$  di pelabelan titik graf  $G$  disebut dengan lintasan pelangi. Sebuah fungsi pada graf  $G$  dapat dikatakan *rainbow antimagic labelling* (pelabelan pelangi antiajaib), jika setiap dua titik  $u, v \in V(G)$ , maka terdapat lintasan pelangi  $uv$ . *Rainbow antimagic coloring* adalah pemberian warna setiap sisi dengan warna yang berbeda, misalkan dalam fungsi  $f$  diberi warna pada  $uv$  dengan bobot  $w(uv)$  (Dafik, 2021).

**Definisi 2.7.2** Jumlah warna terkecil yang diperlukan untuk membuat graf  $G$  terkoneksi pelangi antiajaib disebut *rainbow antimagic connection number* (bilangan koneksi pelangi antiajaib). *rainbow antimagic connection number* memiliki batas bawah yaitu  $rac(G) \geq \max \{rc(G), \Delta(G)\}$ . Contoh dari *Rainbow Antimagic Coloring* (pewarnaan pelangi antiajaib) sebagai berikut:

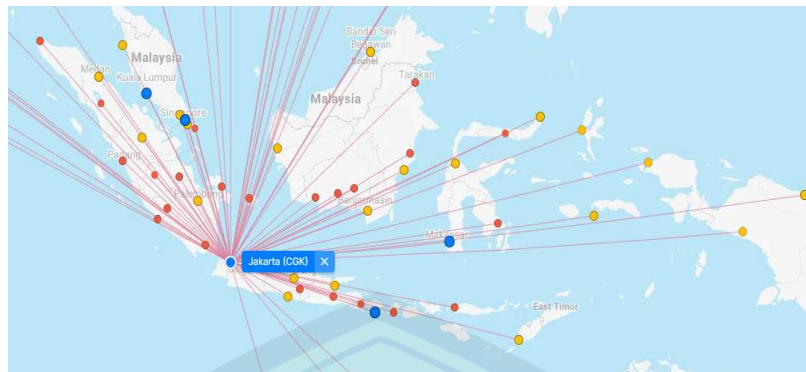


Gambar 2.5 *Rainbow Antimagic Coloring*

## 2.5 Permasalahan Arus Transportasi Udara

Transportasi merupakan bentuk perpindahan dari suatu tempat ketempat lainnya yang dilakukan manusia maupun barang dengan menggunakan kendaraan seperti pesawat, mobil, dan lainnya. Transportasi juga sebagai alat mempermudah manusia melakukan aktivitas sehari-hari. Konsep transportasi berdasarkan pada perjalanan antara asal dengan tujuan. Dalam UU No. 1 Tahun 2009 menjelaskan bahwa transportasi udara adalah setiap kegiatan dengan menggunakan pesawat udara untuk mengangkut penumpang, barang dan pos dari satu bandara ke bandara lainnya. Pesawat udara merupakan alat yang dapat terbang di atmosfer. Lintasan dari pesawat udara dari bandara asal ke bandara tujuan disebut rute penerbangan (*flight route*).

*Airport* merupakan kawasan di daratan atau perairan sebagai tempat pesawat mendarat dan naik turun penumpang yang memiliki fasilitas yaitu keselamatan dan keamanan penerbangan. Kepadatan di *airport* memiliki beberapa faktor yaitu intensitas cuaca, jumlah penumpang dan jumlah pesawat. Dalam hal ini, dapat menganalisis arus kepadatan transportasi udara dengan mensimulasikan beberapa *airport* di Indonesia berdasarkan pada intensitas cuaca, jumlah penumpang dan jumlah pesawat. Kepadatan *airport* dapat diatasi dengan mengatur arus lalu lintas udara. Arus lalu lintas udara di



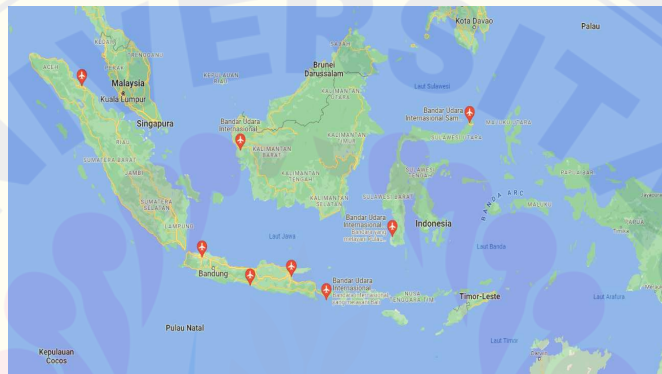
Gambar 2.6 *Flight route* Bandara Soekarno-Hatta

atur oleh *Air Traffic Controller* (ATC) dan dipantau oleh *AIRNAV* pusat.

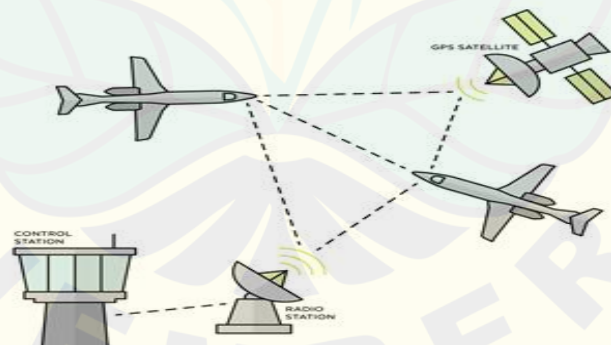
Peletakan *Air Traffic Controller* (ATC) diatur oleh perusahaan dengan efisien dan seminimal mungkin agar lalu lintas udara berjalan dengan lancar. Kinerja ATC dibantu dengan radar, radar berfungsi untuk mengatur lalu lintas udara bagi setiap pesawat yang akan lepas landas, terbang diudara, maupun mendarat. Terdapat radar yang membantu ATC, Radar yang terletak di darat diantaranya *Primary Surveillance Radar* (PSR), *Secondary Surveillance Radar* (SSR), *Automatic Dependent Surveillance–Broadcast* (ADS-B) dan *Mode S Transponder*. Radar didarat menerima sinyal dari GPS satelit untuk mendapatkan informasi yang akan dikelola oleh ATC. Akan tetapi, tidak semua ATC mempunyai semua alat radar tersebut. Radar dimiliki oleh ATC yang mempunyai *traffic* paling padat. Lalu lintas udara yang tidak terlalu padat diatur ATC dengan menggunakan *aerodrome control unit*. Menyelesaikan permasalahan ini dengan merepresentasikan bandara sebagai titik (*vertex*) dan setiap rute pesawat dari bandara satu ke bandara lainnya direpresentasikan dengan sisi (*edge*).



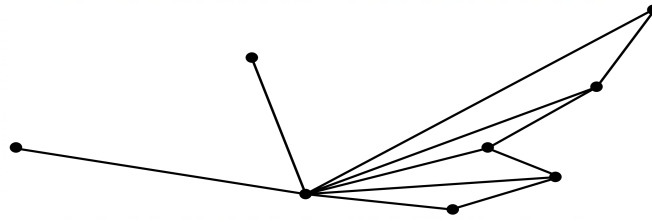
Gambar 2.7 Peta rute penerbangan pesawat



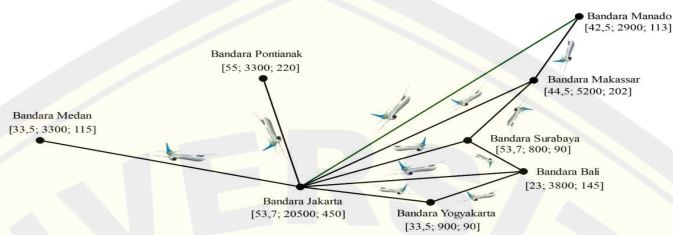
Gambar 2.8 Bandara di Indonesia



Gambar 2.9 Sistem Kerja ATC



Gambar 2.10 Representasi rute penerbangan

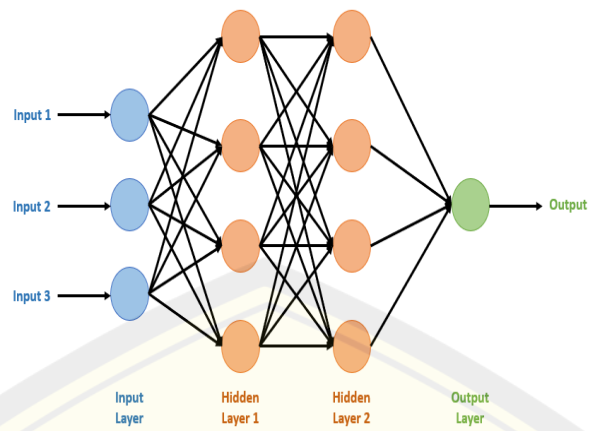


Gambar 2.11 Nama bandara [cuaca;jumlah pesawat;jumlah penumpang]

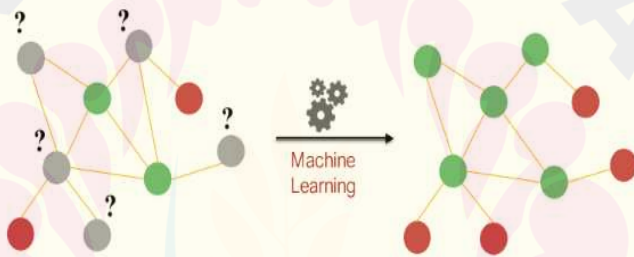
## 2.6 Graph Neural Network

*Graph Neural Network* dikenalkan pertama kali pada tahun 2009 oleh Scarselli. *Graph Neural Network* merupakan bagian dari sebuah tipe dari *neural network* yang menggunakan data struktur graf pada dataset dan *outputnya*. *Graph Neural Network* merupakan *machine learning* yang termasuk dalam tipe *supervised learning*, mesin akan dilatih untuk mengenali disetiap label pada simpul setelah simpul diberi label dahulu. *Graph Neural Network* digunakan untuk mengklasifikasi setiap simpul pada graf dan makna dari setiap simpul tersebut.

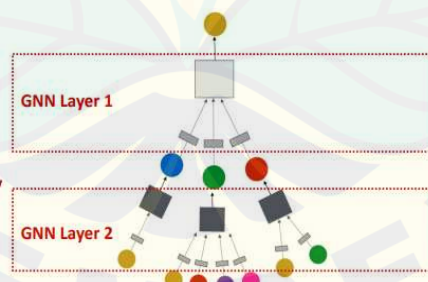
Dataset setiap simpul diberi label terlebih dahulu kemudian model akan dilatih untuk memprediksi label dari setiap simpul.



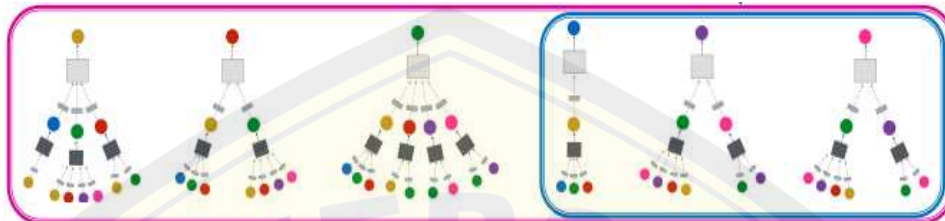
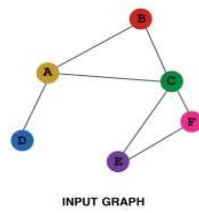
Gambar 2.12 Neural Network



Gambar 2.13 Node classification



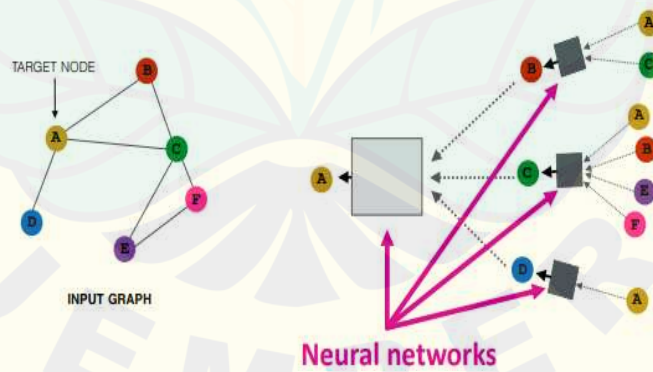
Gambar 2.14 Graf Neural Network 2 hidden layer



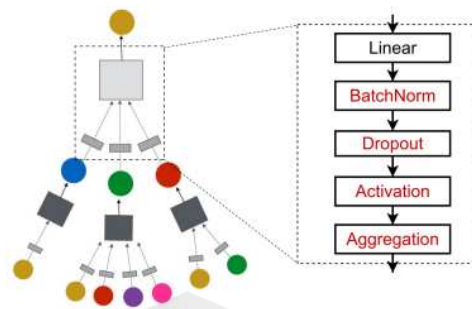
Gambar 2.15 Graph Neural Network

Langkah kerja dari *graph neural network* sebagai berikut:

1. Menjadikan data setiap simpul sebagai unit yang dapat diperbarui dan sisi sebagai lintasan pengiriman *message*.
2. Melakukan N-buah *neural message passing* untuk setiap simpul.
3. Menjumlahkan data dari setiap simpul untuk mendapatkan *representasi* graf.



Gambar 2.16 Neural Message Passing



Gambar 2.17 *Graph Neural Network layer*

### 2.7 Penelitian Terdahulu

Ada bagian ini, terdapat beberapa hasil penelitian sebelumnya dengan topik pewarnaan pelangi antiajaib (*rainbow antimagic coloring*) yang digunakan peneliti sebagai referensi. Beberapa hasil penelitian sebagai berikut:

Tabel 2.1: Penelitian terdahulu

Graf $G$	Hasil $rac(G)$	Keterangan
Graf Lintasan	$rac(P_n) = n - 1$	(Dafik dkk, 2019).
Graf Siklus	$rac(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor rac(C_n)^{\frac{n}{2}}, n = 1, 2(mod 4)$	(Dafik dkk, 2019).
Graf Bintang	$rac(S_n) = n$	(Dafik dkk, 2019).
Graf Ladder	$rac(L_n) = \begin{cases} n, n = 1 mod \\ n + 1, n = 0 mod 2 \end{cases}$	(Sulistiyono dkk, 2020).
Graf Triangular Windmill	$rac(TL_n) \leq n + 2, n \geq 4$	(Sulistiyono dkk, 2020).
Graf Diamond	$2n + 1 \leq rac(D_n) \leq 2n + 2, n \geq 2$	(Sulistiyono dkk, 2020).
Graf Triangular Book	$rac(Tb_n) = n + 2, \text{ untuk } n \geq 3$	(Al Jabbar dkk, 2020).
Graf Lolipop	$rac(L_{3,n}) = n + 2, \text{ untuk } n \geq 1$	(Budi dkk, 2021).
Graf Dragonfly	$rac(Dg_n) = 2n + 6$	(Budi dkk, 2021).
Graf Stacked Book	$m + 1 \leq rac(B_{m,2}) \leq m + 2$	(Budi dkk, 2021).
Graf Dutch Windmill	$rac(B_7^{10}) = 2, \text{ untuk } n \geq 3$	(Budi dkk, 2021).
Graf Flowerpot	$rac(C_3S_n) = n + 1$	(Budi dkk, 2021).
Graf Lemon	$rac(Le_n) = m, \text{ untuk } m \geq 3$	(Septory dkk, 2021).

Graf $G$	Hasil $rac(G)$	Keterangan
Graf Complete Bipartite	$rac(K_{2,m}) = m + 1$ , untuk $m \geq 3$	(Septory dkk, 2021).
Graf Double Star	$rac(S_{m,m}) = 2m + 1$	(Septory dkk, 2021).
Graf Jahangir	$rac(J_{2,m}) = m$ , untuk $2 \leq m \leq 8$	(Septory dkk, 2021).
Graf Firecracker	$rac(F_{m,3}) = 3m - 1$	(Septory dkk, 2021).
Graf Gurita	$rac(O_n) = 2n$	(Wahidah dkk, 2022).
Graf Sandat	$rac(St_n) = \begin{cases} 3n, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 3n + 1, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$	(Wahidah dkk, 2022).
Graf Bunga Matahari	$rac(Sf_n) = 3n$	(Wahidah dkk, 2022).
Graf Gunung Berapi	$rac(V_n) = n + 2$	(Wahidah dkk, 2022).
Graf Tadpole	$\lceil \frac{\alpha}{2} \rceil + \beta \leq rac(T) \leq \lfloor \frac{\alpha}{2} \rfloor + \beta + 1$	(Nisviasari dkk, 2022).
Graf $P_n \triangleright_{v_0} S_m$	$rac(P_{nv_0}S_m) = mn + n - 1$	(Suryandana, 2022).
Graf $P_n \triangleright_{v_1} S_m$	$rac(P_{nv_1}S_m) = mn + n - 1$	(Suryandana, 2022).
Graf $P_n \triangleright_{v_1} P_m$	$rac(P_{nv_1}P_m) = mn - 1$	(Suryandana, 2022).



## BAB 3. METODE PENELITIAN

### 3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan yaitu jenis penelitian eksploratif dan terapan. Penelitian eksploratif merupakan penelitian yang bertujuan untuk mencari dan merumuskan masalah atau fenomena dimana peneliti belum memiliki arah atau peta penjelasan tentang fenomena yang dihadapinya (Mudjiyanto, 2018). Pengumpulan data dalam penelitian eksploratif dapat dilakukan melalui teknik survei. Penelitian eksploratif disebut dengan penelitian formulasi, dilakukan disaat peneliti belum memiliki informasi mengenai masalah yang terjadi. Penelitian terapan merupakan penelitian yang digunakan untuk menerapkan hasil penemuan untuk memecahkan masalah dengan memberikan solusi secara sistematis. Penelitian ini juga sebagai bahan kajian untuk penelitian selanjutnya.

### 3.2 Metode Penelitian

Metode yang akan digunakan pada penelitian ini ada 2 metode yaitu metode deduktif aksiomatik dan pengenalan pola (*pattern recognition*). Metode deduktif aksiomatik adalah metode yang menggunakan pembuktian bersifat deduktif yang berlaku dalam logika matematika. Metode ini menggunakan aksioma, lemma, dan teorema yang sudah ada untuk menyelesaikan permasalahan topik yang akan diteliti. Sedangkan metode pendeteksi pola (*pattern recognition*) adalah metode yang digunakan untuk menentukan pola, kardinalitas serta mencari *rainbow antimagic coloring number* (bilangan koneksi pelangi antiajaib).

### 3.3 Definisi Operasional

Definisi operasional yang digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian. Berikut merupakan definisi operasional dalam penelitian ini:

#### 3.3.1 *Rainbow Antimagic Coloring*

Misalkan graf  $G$  bagian dari graf sederhana, fungsi bijektif  $f := V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$  bobot sisi untuk setiap  $uv \in E(G)$  pada  $f$  adalah  $w(uv) = f(u) + f(v)$ . Jika terdapat dua sisi  $uv, u'v' \in E(G)$ , dimana warna setiap sisinya direpresentasikan dari bobot sisi  $w(uv), w(u'v')$  pada lintasan  $P$  di pelabelan titik graf  $G$  disebut dengan lintasan pelangi. Sebuah fungsi pada graf  $G$  dapat dikatakan *rainbow antimagic labelling* (pelabelan pelangi antiajaib), jika setiap dua titik  $u, v \in V(G)$  terdapat lintasan pelangi  $uv$ . *Rainbow antimagic coloring* adalah pemberian warna setiap sisi dengan warna yang berbeda, misalkan dalam fungsi  $f$  diberi warna pada  $uv$  dengan bobot  $w(uv)$  (Dafik, 2021).

#### 3.3.2 *Teknik Graph Neural Network*

*Graph Neural Network* merupakan bagian dari sebuah tipe dari *neural network* yang menggunakan data struktur graf pada dataset dan *outputnya*. *Graph Neural Network* merupakan *machine learning* yang termasuk dalam tipe *supervised learning*, mesin akan dilatih untuk mengenali disetiap label pada simpul setelah simpul diberi label dahulu. *Graph Neural Network* digunakan untuk mengklasifikasi setiap simpul pada graf dan makna dari setiap simpul tersebut.

### 3.4 Prosedur Penelitian

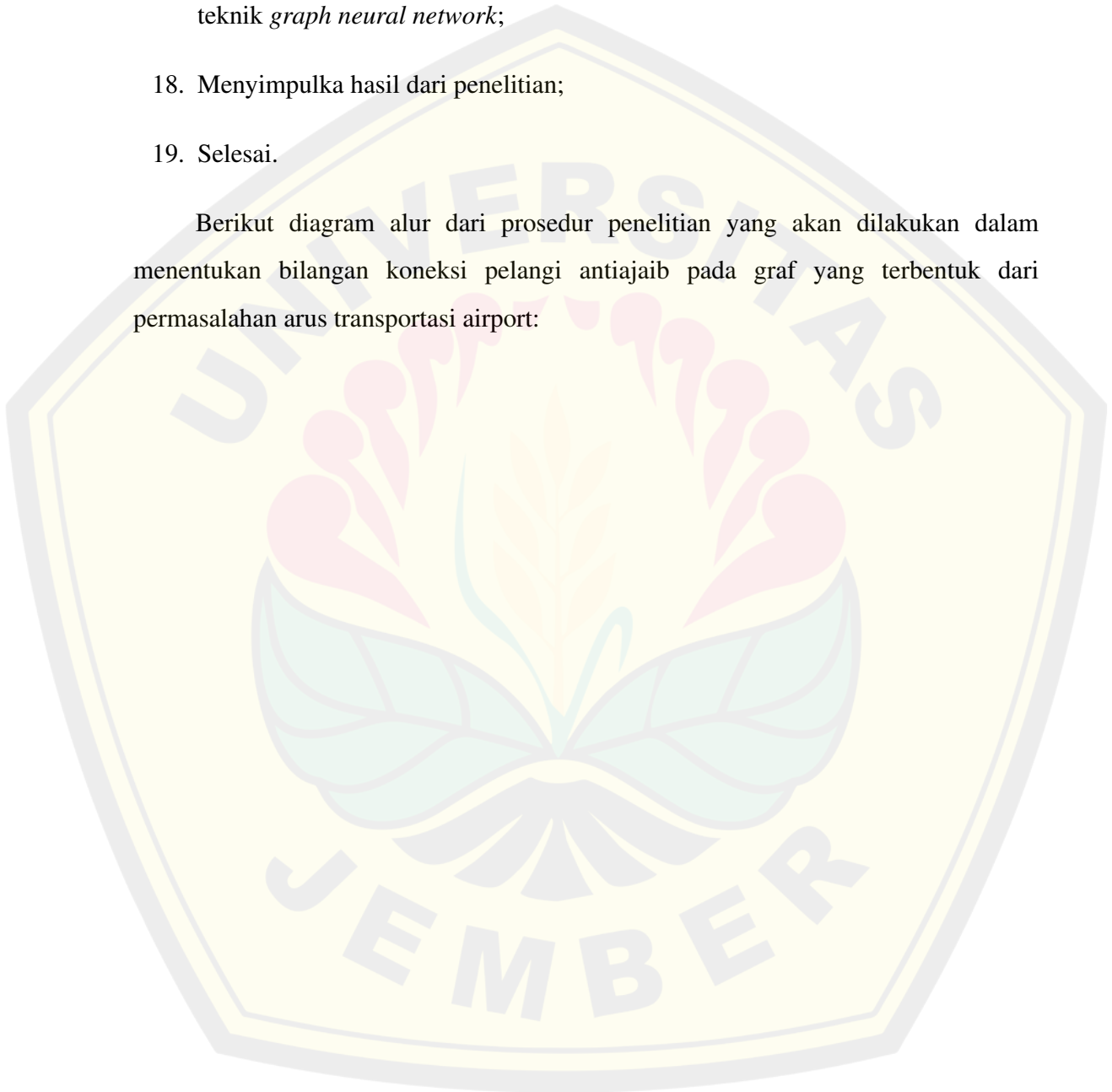
Prosedur penelitian merupakan uraian terkait langkah-langkah yang akan dilakukan sebagai pedoman untuk memperoleh hasil yang sesuai dengan tujuan dari penelitian. Berikut prosedur penelitian yang digunakan dalam penelitian:

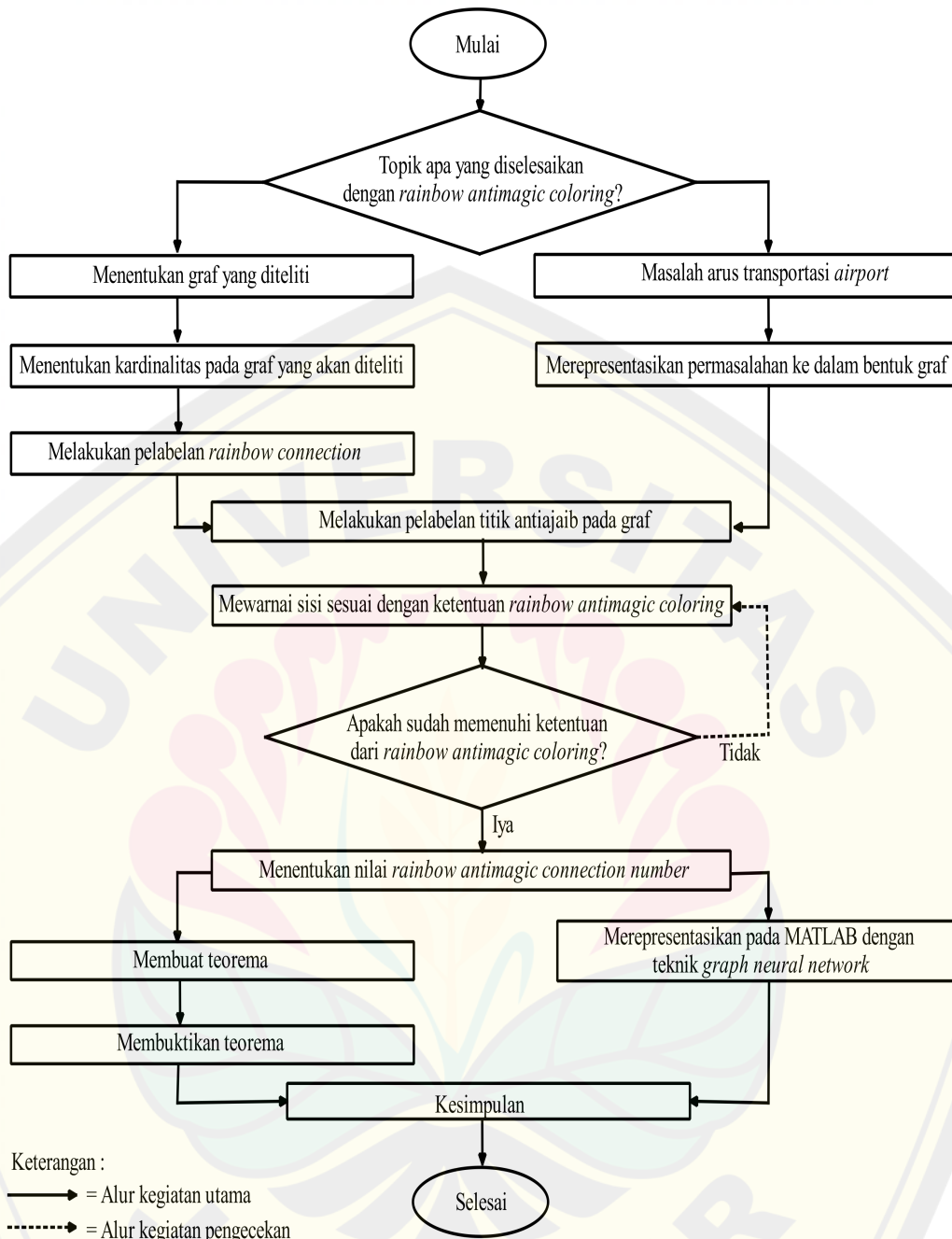
1. Menganalisis topik yang diselesaikan dengan *rainbow antimagic coloring*;
2. Menentukan graf yang digunakan dalam penelitian yaitu graf siput ( $S_n$ ), graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ), graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ) dan graf lotus ( $Lo_n$ );
3. Menentukan kardinalitas pada graf yang akan diteliti;
4. Melakukan pelabelan *rainbow connection*;
5. Melakukan pelabelan titik antiajaib pada graf;
6. Mewarnai sisi sesuai dengan ketentuan *rainbow antimagic coloring*;
7. Melakukan pengujian pewarnaan sisi harus minimal sesuai dengan ketentuan *rainbow antimagic coloring*. Jika belum minimal mengulangi langkah sebelumnya dan apabila sudah sesuai maka bisa dilanjutkan ke tahap selanjutnya;
8. Menentukan nilai *rainbow antimagic connection number*;
9. Membuat teorema dari hasil nilai *rainbow antimagic connection number*;
10. Membuktikan teorema dari teorema yang telah diperoleh pada *rainbow antimagic connection number*;
11. Menentukan objek penelitian yaitu masalah arus transportasi *airport*;
12. Merepresentasikan permasalahan ke dalam bentuk graf;
13. Melakukan pelabelan titik antiajaib pada graf;
14. Mewarnai sisi sesuai dengan ketentuan *rainbow antimagic coloring*;
15. Melakukan pengujian pewarnaan sisi harus minimal sesuai dengan ketentuan *rainbow antimagic coloring*. Jika belum minimal mengulangi langkah

sebelumnya dan apabila sudah sesuai maka bisa dilanjutkan ke tahap selanjutnya;

16. Menentukan nilai *rainbow antimagic connection number*;
17. Merepresentasikan graf yang diperoleh pada MATLAB dengan menggunakan teknik *graph neural network*;
18. Menyimpulkan hasil dari penelitian;
19. Selesai.

Berikut diagram alur dari prosedur penelitian yang akan dilakukan dalam menentukan bilangan koneksi pelangi antiajaib pada graf yang terbentuk dari permasalahan arus transportasi airport:





Gambar 3.1 Prosedur penelitian

## BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini akan menjelaskan hasil penelitian mengenai analisis *rainbow antimagic coloring* dan skema aplikasinya pada masalah arus transportasi udara. Dalam penelitian ini akan dihasilkan teorema  $rc(G)$  dan  $rac(G)$  dengan melakukan pelabelan sesuai ketentuan *rainbow connection number* dan *rainbow antimagic connection number*. Penelitian diawali dengan menentukan graf yang akan diteliti. Graf yang digunakan dalam penelitian ini yaitu graf siput ( $S_n$ ), graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ), graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ) dan graf lotus ( $Lo_n$ ). Penelitian dilanjutkan dengan menentukan kardinalitas himpunan titik dan himpunan sisi dari graf yang diteliti. Tahap selanjutnya, melabeli graf dengan pelabelan antiajaib sehingga menghasilkan warna sesuai dengan ketentuan *rainbow antimagic coloring*. Apabila sudah memenuhi kriteria *rainbow antimagic coloring*, maka tahap selanjutnya yaitu menentukan *rainbow antimagic connection number*. Kemudian menyusun fungsi pelabelan titik dan fungsi bobot sisi.

Penyusunan teorema dan membuktikannya dengan meninjau batas bawah dan batas atas. Batas bawah dapat dilihat dari  $rac(G) \geq \max\{rc(G), \Delta(G)\}$ . Berdasarkan syarat batas bawah, sebelum menentukan teorema  $rac(G)$ , menentukan terlebih dahulu *rainbow connection*  $rc(G)$  dari graf yang belum diteliti yaitu pada graf siput ( $S_n$ ), graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ) dan graf lotus ( $Lo_n$ ). Sedangkan *rainbow connection* dari graf kipas tangkai sudah diteliti sebelumnya yaitu  $rc(Kt_n) = 2$ ; untuk  $n = 2, 3$  dan  $3$ ; untuk  $n \geq 4$ . Derajat terbesar  $\Delta(G)$  dilihat dari maksimum sisi yang bersisihan dari satu titik pada graf. Batas atas berdasarkan pada fungsi pelabelan titik dan bobot sisi. Penyajian dalam penelitian ini diawali dengan teorema  $rc(G)$ , kemudian teorema  $rac(G)$  disertakan juga bukti dan gambar ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran teorema.

Pada bab ini juga membahas tentang skema pengaplikasian teori graf dalam pemecahan masalah arus transportasi udara. Penelitian ini menerapkan topik *rainbow antimagic coloring* dalam memecahkan masalah arus transportasi udara. Permasalahan dalam arus transportasi udara yaitu pada kepadatan arus lalu lintas udara. Arus lalu lintas udara diatur oleh *Air Traffic Controller (ATC)*. *Rainbow antimagic connection number* digunakan untuk menentukan banyaknya admin ATC agar minimal. Penyelesaian masalah arus transportasi udara ini dengan *graph neural network* pada *software* MATLAB. Penyelesaian ini dengan merepresentasikan masalah arus transportasi udara dalam bentuk graf. Menentukan *rainbow antimagic connection number* dari graf yang terbentuk. Selanjutnya, mengelompokkan data simulasi dari cuaca, jumlah penumpang dan jumlah pesawat dalam pengamatan 15 minggu. Data tersebut disimulasikan pada *software* MATLAB dengan *graph neural network*.

#### 4.1 Hasil Penelitian Rainbow Connection Number

Penelitian ini menghasilkan tiga teorema tentang *rainbow connection number*. Berikut hasil teorema beserta pembuktian tentang *Rainbow Connection Number* pada graf siput ( $S_n$ ), graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ) dan graf lotus ( $Lo_n$ ):

**Teorema 4.1.** *Rainbow connection number dari graf siput ( $S_n$ ), untuk setiap bilangan bulat  $n \geq 3$  adalah*

$$rc(S_n) = 5$$

**Bukti:** Graf Siput ( $S_n$ ) memiliki himpunan titik  $V(S_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 6\} \cup \{x_{3,j}; 1 \leq j \leq 2n + 1\}$  dan himpunan sisi  $E(S_n) = \{x_i x_{i+1}; i = 1, 2, 3, 5\} \cup \{x_3 x_5\} \cup \{x_3 x_{3,j}; 2 \leq j \leq 2n, j \in \text{bil. genap}\} \cup \{x_{3,j} x_{3,j+1}; 1 \leq j \leq 2n\} \cup \{x_6 x_{3,1}\} \cup \{x_2 x_{3,2n+1}\}$ . Kardinalitas dari himpunan sisi dan himpunan titik pada graf siput ( $S_n$ ) berturut-turut adalah  $|V(S_n)| = 2n + 7$  dan  $|E(S_n)| = 3n + 7$ . Berdasarkan Lemma 2.4.2 dinyatakan bahwa  $diam(G) \leq rc(G) \leq diam(G) + 1$ . Graf  $S_n$  dengan  $n \geq 3$  memiliki diameter 4 maka  $4 \leq rc(S_n) \leq 5$ . Asumsikan

$rc(S_n) = 4$ , jika label dari  $x_3x_4 = x_{3,j}x_{3,j+1} = 4$ . Hal tersebut kontradiksi karena lintasan pelangi  $x_1 - x_4, x_1 - x_{3,1}$  memiliki jalur warna yang sama, jadi label dari  $(x_3x_4) = (x_{3,j}x_{3,j+1}) \geq 4$ . Misal kita ambil label 5 ketika  $S_3$ , maka tidak ada jalur warna yang sama. Berdasarkan asumsi diatas, maka  $rc(S_n) \geq 5$ . Gambar 4.1 (a) menunjukkan graf siput yang memiliki lintasan pelangi sama.

Selanjutnya dibuktikan  $rc(S_n) \leq 5$  didefinisikan  $f : V(S_n) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$  sebagai berikut.

$$f_3(e) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } e = x_5x_6 \text{ dan } e = x_6x_{3,1} \\ 2, \text{ untuk } e = x_3x_5 \text{ dan } e = x_3x_{3,j} ; 2 \leq j \leq 2n ; j \text{ genap} \\ 3, \text{ untuk } e = x_2x_3 \text{ dan } e = x_{3,j}x_{3,j+1} ; 1 \leq j \leq 2n ; j \text{ genap} \\ 4, \text{ untuk } e = x_1x_2 \\ 5, \text{ untuk } e = x_3x_4, e = x_{3,j}x_{3,j+1} ; 1 \leq j \leq 2n ; j \text{ ganjil} \\ \text{ dan } e = x_2x_{3,2n+1} \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi titik diatas, nilai maksimum adalah 5 maka  $rc(S_n) \leq 5$ . Jadi *rainbow connection number* dari graf siput  $(S_n) = 5$ . Gambar 4.1 (b) menunjukkan *rainbow connection* dari graf siput. Berikut *Rainbow Path* (lintasan pelangi) dari graf siput:

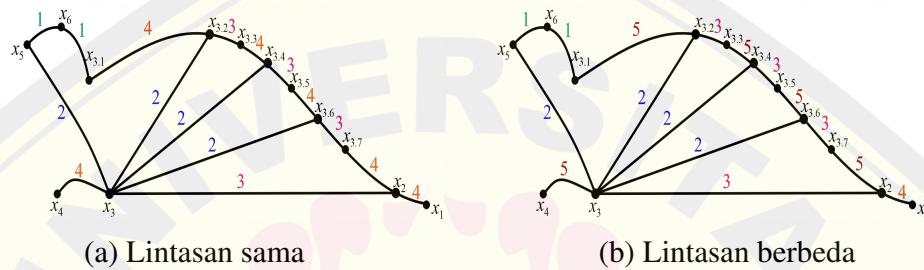
Tabel 4.1: *Rainbow Path* pada graf siput  $(S_n)$

Kasus	Syarat	$x$	$y$	<i>Rainbow Path</i>	Kondisi
1	$n \geq 3$	$x_i$	$x_j$	$x_i, x_j$	$i = 1, 2, 3, 5;$ $j = i + 1$
2	$n \geq 3$	$x_i$	$x_k$	$x_i, x_j, x_k$	$1 \leq i \leq 3; j = i + 1;$ $k = i + 2$
3	$n \geq 3$	$x_i$	$x_l$	$x_i, x_j, x_k, x_l$	$a = 1, 2; b = 2, 3;$ $c = 3, 5; d = 4, 5, 6$



Kasus	Syarat	$x$	$y$	Rainbow Path	Kondisi
4	$n \geq 3$	$x_i$	$x_m$	$x_i, x_j, x_k, x_l, x_m$	$a = 1; b = 2; c = 3;$ $d = 5; e = 6$
5	$n \geq 3$	$x_3$	$x_{3,j}$	$x_3, x_{3,i}, x_{3,j}$	$2 \leq i \leq 2n, j \in \text{bil. genap};$ $1 \leq j \leq 2n, j \in \text{bil. ganjil}$
6	$n \geq 3$	$x_{3,i}$	$x_{3,k}$	$x_{3,i}, x_{3,j}, x_{3,k}$	$2 \leq j \leq 2n; 1 \leq i \leq 2n;$ $3 \leq k \leq 2n$

Berikut gambar rainbow connection dari graf siput:



Gambar 4.1 RC graf siput ( $S_3$ )

**Teorema 4.2.** Rainbow connection number dari graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ), untuk setiap bilangan bulat  $n = 5$  dan  $m \geq 2$  adalah

$$rc(CR_{n,m}) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m = 2, 3, 4; n = 5 \\ m - 1, & \text{untuk } m \geq 5; n = 5 \end{cases}$$

**Bukti:** Graf Tunas Kelapa ( $CR_{n,m}$ ) memiliki himpunan titik  $V(CR_{n,m}) = \{x_i, y_j, z; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$  dan himpunan sisi  $E(CR_{n,m}) = \{x_n x_1\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_n y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_n z\}$ . Kardinalitas dari himpunan sisi dan himpunan titik pada graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ) berturut-turut adalah  $|V(CR_{n,m})| = n + m + 1$  dan  $|E(CR_{n,m})| = n + 2m$ . Berdasarkan Lemma 2.4.2 dinyatakan bahwa  $diam(G) \leq rc(G) \leq diam(G) + 1$ .

**Kasus I.** Graf  $CR_{n,m}$  dengan  $m = 2, 3, 4$ ;  $n = 5$  memiliki diameter 3 maka  $3 \leq rc(CR_{n,m}) \leq 4$ . Asumsikan  $rc(CR_{n,m}) = 3$ , jika label dari  $x_5y_j = 3$ . Hal tersebut kontradiksi karena lintasan pelangi  $y_j - z$  memiliki jalur warna yang sama, jadi label dari  $x_5y_j \geq 3$ . Misal kita ambil label 4 ketika  $CR_{5,2}$ , maka tidak ada jalur warna yang sama. Berdasarkan asumsi diatas, maka  $rc(CR_{n,m}) \geq 4$ . Gambar 4.2 (a) menunjukkan graf tunas kelapa yang memiliki lintasan pelangi sama.

Selanjutnya dibuktikan  $rc(CR_{n,m}) \leq 4$  didefinisikan  $f : V(CR_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  sebagai berikut:

$$f_3(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_4x_5, e = x_i x_{i+1}; i = 1, 3 \text{ dan } e = y_1y_2 \\ 2, & \text{untuk } e = x_3x_1 \text{ dan } e = y_2y_3 \\ 3, & \text{untuk } e = x_2x_3, e = x_5z \text{ dan } e = y_3y_4 \\ 4, & \text{untuk } e = x_5y_j; 1 \leq j \leq m - 1 \end{cases}$$

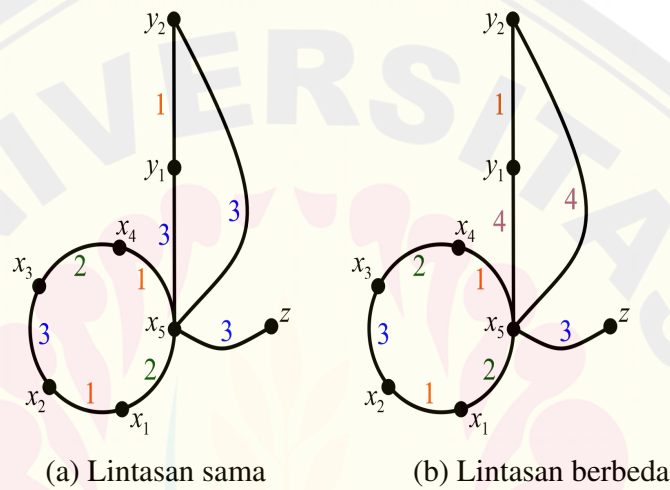
Berdasarkan fungsi titik diatas, nilai maksimum adalah 5 maka  $rc(CR_{n,m}) \leq 5$ . Jadi *rainbow connection number* dari graf tunas kelapa  $(CR_{n,m}) = 5$ . Gambar 4.2 (b) menunjukkan *rainbow connection* dari graf tunas kelapa  $(CR_{n,m})$ . Berikut *Rainbow Path* (lintasan pelangi) dari graf tunas kelapa:

Tabel 4.2: *Rainbow Path* pada graf tunas kelapa  $(CR_{n,m})$

Kasus	Syarat	$x$	$y$	<i>Rainbow Path</i>	Kondisi
1	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x$	$z$	$x, z$	-
2	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x_i$	$x_j$	$x_i, x_j$	$1 \leq i \leq 4$ $j = i + 1$
3	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x_i$	$x_j$	$x_i, x_{i+1}, x_j$	$1 \leq i \leq 3$ $j - i = 2$
4	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x_5$	$y_j$	$x_5, y_j$	$1 \leq j \leq m$

Kasus	Syarat	$x$	$y$	Rainbow Path	Kondisi
5	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x_i$	$y_j$	$x_i, x_k, y_j$	$i = 1, 4; k = 5$ $1 \leq j \leq m$
6	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x_i$	$y_j$	$x_i, x_k, x_5, y_j$	$i = 2, 3; k = 1, 4$ $1 \leq j \leq m$
7	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$y_i$	$y_j$	$y_i, y_j$	$1 \leq i \leq m - 1$ $2 \leq j \leq m$

Berikut gambar *rainbow connection* dari graf tunas kelapa:



Gambar 4.2 RC graf tunas kelapa( $CR_{5,2}$ )

**Kasus II.** Graf  $CR_{n,m}$  dengan  $m \geq 5$  memiliki diameter 3 maka  $3 \leq rc(CR_{n,m}) \leq m - 1$ . Asumsikan  $rc(CR_{n,m}) = 3$ , jika label dari  $x_5y_j = y_4y_5 = y_5y_6 = 3$ . Hal tersebut kontradiksi karena lintasan pelangi  $y_j - z, y_jy_{j+1}$  memiliki jalur warna yang sama, jadi label dari  $x_5y_j = y_4y_5 = y_5y_6 \geq 3$ . Misal kita ambil label 5 ketika  $CR_{5,6}$  dan label 6 ketika  $CR_{5,7}$ , maka tidak ada jalur warna yang sama. Berdasarkan asumsi diatas, maka  $rc(CR_{n,m}) \geq m - 1$ . Gambar 4.3 (a) menunjukkan graf tunas kelapa yang memiliki lintasan pelangi sama.

Selanjutnya dibuktikan  $rc(CR_{n,m}) \leq m - 1$  didefinisikan  $f : V(CR_{n,m}) \rightarrow$

$\{1, 2, 3, 4, \dots, m - 1\}$  sebagai berikut:

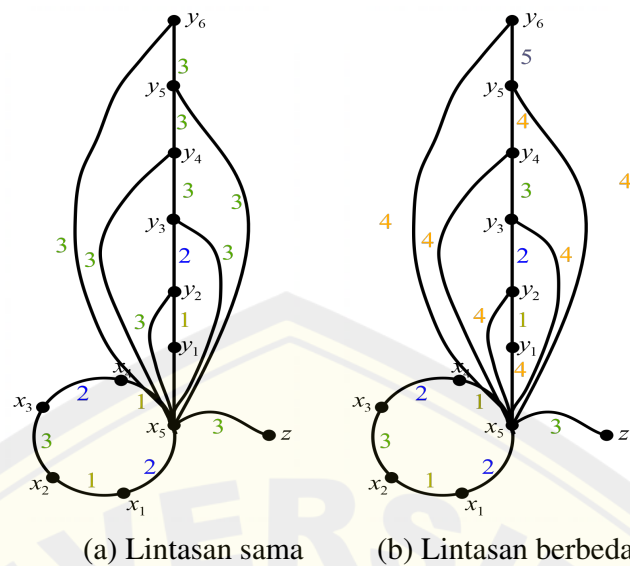
$$f_3(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_4x_5 \text{ dan } e = x_i x_{i+1}; i = 1, 3 \\ 2, & \text{untuk } e = x_3x_1 \\ 3, & \text{untuk } e = x_2x_3 \text{ dan } e = x_5z \\ 4, & \text{untuk } e = x_5y_j; 1 \leq j \leq m - 1 \\ j, & \text{untuk } e = y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1 \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi titik diatas, nilai maksimum adalah  $m - 1$  maka  $rc(CR_{n,m}) \leq m - 1$ . Jadi *rainbow connection number* dari graf tunas kelapa  $(CR_{n,m}) = m - 1$ . Gambar 4.3 (b) menunjukkan *rainbow connection* dari graf tunas kelapa  $(CR_{n,m})$ . Berikut *Rainbow Path* (lintasan pelangi) dari graf tunas kelapa:

Tabel 4.3: *Rainbow Path* pada graf tunas kelapa  $(CR_{n,m})$

Kasus	Syarat	$x$	$y$	<i>Rainbow Path</i>	Kondisi
1	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x$	$z$	$x, z$	-
2	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x_i$	$x_j$	$x_i, x_j$	$1 \leq i \leq 4$ $j = i + 1$
3	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x_i$	$x_j$	$x_i, x_{i+1}, x_j$	$1 \leq i \leq 3$ $j - i = 2$
4	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x_5$	$y_j$	$x_5, y_j$	$1 \leq j \leq m$
5	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x_i$	$y_j$	$x_i, x_k, y_j$	$i = 1, 4; k = 5$ $1 \leq j \leq m$
6	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x_i$	$y_j$	$x_i, x_k, x_5, y_j$	$i = 2, 3; k = 1, 4$ $1 \leq j \leq m$
7	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$y_i$	$y_j$	$y_i, y_j$	$1 \leq i \leq m - 1$ $2 \leq j \leq m$

Berikut gambar *rainbow connection* dari graf tunas kelapa:



Gambar 4.3 RC graf tunas kelapa( $CR_{5,6}$ )

**Teorema 4.3.** Rainbow connection number dari graf lotus ( $Lo_n$ ), untuk setiap bilangan bulat  $n \geq 2$  adalah

$$rc(Lo_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 2 \\ \frac{n+3}{2}, & \text{untuk } n \geq 3 ; n \in \text{bil. ganjil} \\ \frac{n+2}{2}, & \text{untuk } n \geq 4 ; n = \text{bilangan genap} \end{cases}$$

**Bukti:** Graf lotus ( $Lo_n$ ) memiliki himpunan titik  $V(Lo_n) = \{x\} \cup \{y\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq 2n - 1\}$  dan himpunan sisi  $E((Lo_n)) = \{xy\} \cup \{xx_i; 1 \leq i \leq 2n - 1; i \in \text{bil. ganjil}\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq 2n - 2\}$ . Kardinalitas dari himpunan sisi dan himpunan titik pada graf lotus ( $Lo_n$ ) berturut-turut adalah  $|V(Lo_n)| = 2n + 1$  dan  $|E(Lo_n)| = 4n - 2$ . Berdasarkan Lemma 2.4.2 dinyatakan bahwa  $diam(G) \leq rc(G) \leq diam(G) + 1$ .

**kasus I.** Graf  $Lo_n$  dengan  $n = 2$  memiliki diameter 3 maka  $3 \leq rc(Lo_2) \leq 3$ . Asumsikan  $rc(Lo_2) = 3$ , maka setiap lintasan pelangi pada graf memiliki warna

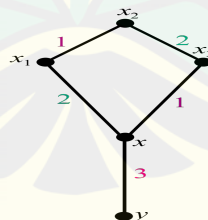
yang berbeda, Berdasarkan asumsi diatas, maka  $rc(Lo_2) \geq 3$ . Selanjutnya dibuktikan  $rc(Lo_n) \leq 3$  didefinisikan  $f : V(Lo_2) \rightarrow \{1, 2, 3\}$  sebagai berikut.

$$f_3(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_1x_2 \text{ dan } e = xx_3 \\ 2, & \text{untuk } e = x_2x_3 \text{ dan } e = xx_1 \\ 3, & \text{untuk } e = xy \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi titik diatas, nilai maksimum adalah 3 maka  $rc(Lo_2) \leq 3$ . Jadi *rainbow connection number* dari graf lotus ( $Lo_2$ ) = 3. Gambar 4.4 menunjukkan *rainbow connection* dari graf lotus ( $Lo_2$ ). Berikut *Rainbow Path* (lintasan pelangi) dari graf lotus:

Tabel 4.4: *Rainbow Path* pada graf lotus ( $Lo_2$ )

Kasus	Syarat	$x$	$y$	<i>Rainbow Path</i>	Kondisi
1	$n = 2$	$x$	$y$	$x, y$	-
2	$n = 2$	$x$	$x_i$	$x, x_i$	$1 \leq i \leq 2n - 1$ $i \in bil. ganjil$
3	$n = 2$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_i, x, x_{i+1}$	$1 \leq i \leq 2n - 3, i \in bil. ganjil$
4	$n = 2$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_i, x_{i+1}$	$1 \leq i \leq 2n - 1$
5	$n = 2$	$x_i$	$x$	$x_i, x_j, x$	$1 \leq j \leq 2n - 1, i \in bil. ganjil$ $2 \leq i \leq 2n - 2, j \in bil. genap$
6	$n = 2$	$x_i$	$y$	$x_i, x_j, x, y$	$1 \leq j \leq 2n - 1, i \in bil. ganjil$ $2 \leq i \leq 2n - 2, j \in bil. genap$



Gambar 4.4 RC graf lotus ( $Lo_2$ )

**kasus II.** Graf  $Lo_n$  dengan  $n \geq 3; n \in bil. ganjil$  memiliki diameter 3 maka  $3 \leq rc(Lo_n) \leq \frac{n+3}{2}$ . Asumsikan  $rc(Lo_n) = 3$ , jika label dari  $xy = xx_i = 3$ . Hal tersebut kontradiksi karena lintasan pelangi  $x_i - y$  memiliki jalur warna yang sama, jadi label dari  $xy = xx_i \geq 3$ . Misal kita ambil label 5 ketika  $Lo_7$  dan label 6 ketika  $Lo_9$ , maka tidak ada jalur warna yang sama. Berdasarkan asumsi diatas, maka  $rc(Lo_n) \geq \frac{n+3}{2}$ . Gambar 4.5 (a) menunjukkan graf lotus yang memiliki lintasan pelangi sama.

Selanjutnya dibuktikan  $rc(Lo_n) \leq \frac{n+3}{2}$  didefinisikan  $f : V(Lo_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, \frac{n+3}{2}\}$  sebagai berikut.

$$f_3(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_i x_{i+1}; i \in bil. ganjil, 1 \leq i \leq 2n - 2 \\ 2, & \text{untuk } e = x_i x_{i+1}; i \in bil. genap, 1 \leq i \leq 2n - 2 \\ \frac{i+3}{2}, & \text{untuk } e = xy \\ \frac{i+3}{4}, & \text{untuk } e = xx_i; i = 1 \pmod 4, 1 \leq i \leq 2n - 1 \\ \frac{i+1}{4}, & \text{untuk } e = xx_i; i = 3 \pmod 4, 3 \leq i \leq 2n - 1 \end{cases}$$

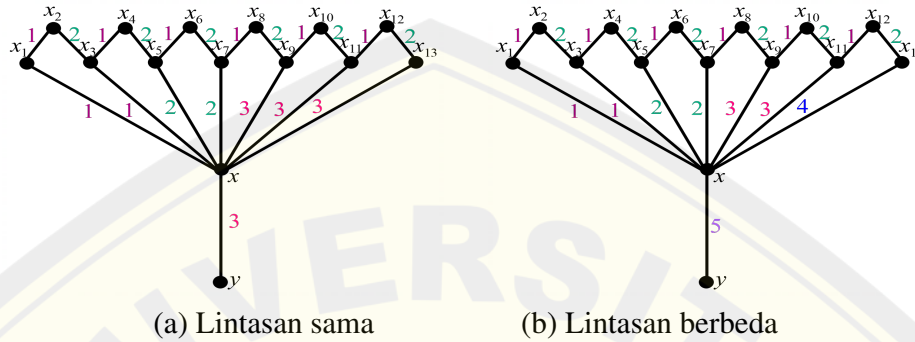
Berdasarkan fungsi titik diatas, nilai maksimum adalah  $\frac{i+3}{2}$  maka  $rc(Lo_n) \leq \frac{n+3}{2}$ . Jadi *rainbow connection number* dari graf lotus  $(Lo_n) = \frac{n+3}{2}; n = ganjil$ . Gambar 4.5 (b) menunjukkan *rainbow connection* dari graf lotus  $(Lo_n)$ . Berikut *Rainbow Path* (lintasan pelangi) dari graf lotus:

Tabel 4.5: *Rainbow Path* pada graf lotus  $(Lo_n)$

Kasus	Syarat	$x$	$y$	<i>Rainbow Path</i>	Kondisi
1	$n = 2$	$x$	$y$	$x, y$	-
2	$n = 2$	$x$	$x_i$	$x, x_i$	$1 \leq i \leq 2n - 1, i \in bil. ganjil$
3	$n = 2$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_i, x, x_{i+1}$	$1 \leq i \leq 2n - 3, i \in bil. ganjil$
4	$n = 2$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_i, x_{i+1}$	$1 \leq i \leq 2n - 1$
5	$n = 2$	$x_i$	$x$	$x_i, x_j, x$	$1 \leq j \leq 2n - 1, i \in bil. ganjil$ $2 \leq i \leq 2n - 2, j \in bil. genap$

Kasus	Syarat	$x$	$y$	Rainbow Path	Kondisi
6	$n = 2$	$x_i$	$y$	$x_i, x_j, x, y$	$1 \leq j \leq 2n - 1, i \in \text{bil. ganjil}$ $2 \leq i \leq 2n - 2, j \in \text{bil. genap}$

Berikut gambar rainbow connection dari graf lotus:



Gambar 4.5 RC graf lotus ( $Lo_7$ )

**kasus III.** Graf  $Lo_n$  dengan  $n \geq 4; n \in \text{bil. genap}$  memiliki diameter 3 maka  $3 \leq rc(Lo_n) \leq \frac{n+2}{2}$ . Asumsikan  $rc(Lo_n) = 3$ , jika label dari  $xy = xx_i = 3$ . Hal tersebut kontradiksi karena lintasan pelangi  $x_i - y$  memiliki jalur warna yang sama, jadi label dari  $xy = xx_i \geq 3$ . Misal kita ambil label 4 ketika  $Lo_6$  dan label 5 ketika  $Lo_8$ , maka tidak ada jalur warna yang sama. Berdasarkan asumsi diatas, maka  $rc(Lo_n) \geq \frac{n+2}{2}$ . Gambar 4.6 (a) menunjukkan graf lotus yang memiliki lintasan pelangi sama.

Selanjutnya dibuktikan  $rc(Lo_n) \leq \frac{n+2}{2}$  didefinisikan  $f : V(Lo_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, \frac{n+2}{2}\}$  sebagai berikut.

$$f_3(e) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } e = x_i x_{i+1}; i \in \text{bil. ganjil}, 1 \leq i \leq 2n - 2 \\ 2, & \text{untuk } e = x_i x_{i+1}; i \in \text{bil. genap}, 1 \leq i \leq 2n - 2 \\ \frac{i+2}{2}, & \text{untuk } e = xy \\ \frac{i+3}{4}, & \text{untuk } e = xx_i; i = 1 \text{ mod } 4, 1 \leq i \leq 2n - 1 \\ \frac{i+1}{4}, & \text{untuk } e = xx_i; i = 3 \text{ mod } 4, 3 \leq i \leq 2n - 1 \end{cases}$$

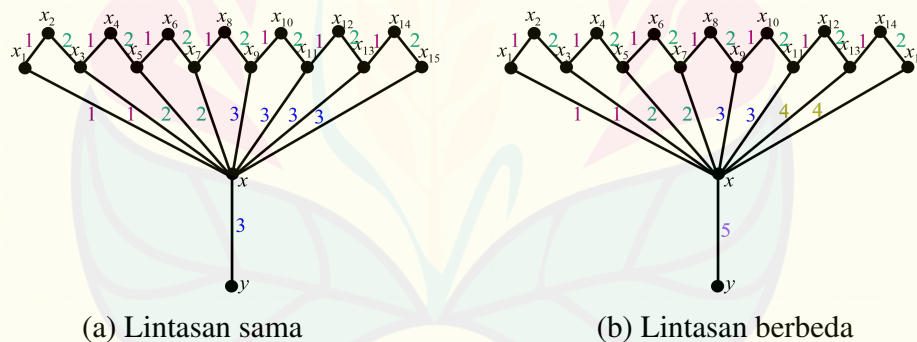


Berdasarkan fungsi titik diatas, nilai maksimum adalah  $\frac{i+2}{2}$  maka  $rc(Lo_n) \leq \frac{n+2}{2}$ . Jadi *rainbow connection number* dari graf lotus ( $Lo_n$ ) =  $\frac{n+2}{2}$  ;  $n = \text{genap}$ . Gambar 4.6 (b) menunjukkan *rainbow connection* dari graf lotus ( $Lo_n$ ). Berikut *Rainbow Path* (lintasan pelangi) dari graf lotus:

Tabel 4.6: *Rainbow Path* pada graf lotus ( $Lo_n$ )

Kasus	Syarat	$x$	$y$	<i>Rainbow Path</i>	Kondisi
1	$n = 2$	$x$	$y$	$x, y$	-
2	$n = 2$	$x$	$x_i$	$x, x_i$	$1 \leq i \leq 2n - 1$ $i \in \text{bil. ganjil}$
3	$n = 2$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_i, x, x_{i+1}$	$1 \leq i \leq 2n - 3, i \in \text{bil. ganjil}$
4	$n = 2$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_i, x_{i+1}$	$1 \leq i \leq 2n - 1$
5	$n = 2$	$x_i$	$x$	$x_i, x_j, x$	$1 \leq j \leq 2n - 1, i \in \text{bil. ganjil}$ $2 \leq i \leq 2n - 2, j \in \text{bil. genap}$
6	$n = 2$	$x_i$	$y$	$x_i, x_j, x, y$	$1 \leq j \leq 2n - 1, i \in \text{bil. ganjil}$ $2 \leq i \leq 2n - 2, j \in \text{bil. genap}$

Berikut gambar *rainbow connection* dari graf lotus:



Gambar 4.6 RC graf lotus ( $Lo_8$ )

#### 4.2 Hasil Penelitian Rainbow Antimagic Connection Number

Penelitian ini menghasilkan empat teorema tentang *rainbow antimagic connection number*. Berikut hasil teorema beserta pembuktian tentang *rainbow*

*antimagic connection number* pada graf siput ( $S_n$ ), graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ), graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ) dan graf lotus ( $Lo_n$ ):

**Teorema 4.4.** *Rainbow antimagic connection number pada graf siput ( $S_n$ ), untuk setiap bilangan bulat  $n \geq 3$  adalah*

$$rac(S_n) = n + 3$$

**Bukti:** Graf Siput ( $S_n$ ) memiliki himpunan titik  $V(S_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 6\} \cup \{x_{3,j}; 1 \leq j \leq 2n + 1\}$  dan himpunan sisi  $E(S_n) = \{x_i x_{i+1}; i = 1, 2, 3, 5\} \cup \{x_3 x_5\} \cup \{x_3 x_{3,j}; 2 \leq j \leq 2n, j \in \text{bil. genap}\} \cup \{x_{3,j} x_{3,j+1}; 1 \leq j \leq 2n\} \cup \{x_6 x_{3,1}\} \cup \{x_2 x_{3,2n+1}\}$ . Kardinalitas dari himpunan sisi dan himpunan titik pada graf siput ( $S_n$ ) berturut-turut adalah  $|V(S_n)| = 2n + 7$  dan  $|E(S_n)| = 3n + 7$ . Dibuktikan  $rac(S_n) = n + 3$  menggunakan batas bawah dan batas atas. Pertama dibuktikan batas bawah dari graf siput ( $S_n$ ) dengan  $n \geq 3$ ,  $rac(S_n) \geq n + 3$ . Berdasarkan Definisi 2.7.2 diperoleh:

$$\begin{aligned} rac(S_n) &\geq \max \{rc(S_n), \Delta(S_n)\} \\ n + 3 &\geq \max \{5, n + 3\} \\ n + 3 &\geq n + 3 \end{aligned}$$

Jadi batas bawah dari *rainbow antimagic connection number* graf siput ( $S_n$ ) adalah  $rac(S_n) \geq n + 3$ . Selanjutnya dibuktikan batas atas dari graf siput ( $S_n$ ) dengan  $n \geq 3$ ,  $rac(S_n) \leq n + 3$ , dimisalkan  $f : V(S_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n + 7\}$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(x_i) &= \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & \text{untuk } i = 1, 3 \\ 2n - i + 11, & \text{untuk } i = 4, 5 \end{cases} \\ f(x_6) &= 3 \\ f(x_2) &= n + 4 \end{aligned}$$

$$f(x_{3,j}) = \begin{cases} \frac{4n-i+11}{2}, & \text{untuk } j \in \text{bil. ganjil} \\ \frac{6+i}{2}, & \text{untuk } j \in \text{bil. genap} \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi titik diatas, diperoleh bobot sisi pada graf siput ( $S_n$ ) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} w(x_i x_{i+1}) &= n + 4 + i; \text{ untuk } i = 1, 2 \\ w(x_i x_{i+1}) &= 2n + 9; \text{ untuk } i = 3, 5 \\ w(x_3 x_5) &= 2n + 8 \\ w(x_3 x_{3j}) &= \frac{j}{2}; \text{ untuk } 2 \leq j \leq 2n, j \in \text{bil. genap} \\ w(x_{3,j} x_{3,j+1}) &= \begin{cases} 2n + 9, & \text{untuk } j \in \text{bil. ganjil} \\ 2n + 8, & \text{untuk } j \in \text{bil. genap} \end{cases} \\ w(x_6 x_{3,1}) &= 2n + 8 \\ w(x_2 x_{3,2n+1}) &= 2n + 9 \end{aligned}$$

Selanjutnya menganalisis himpunan bobot sisi yang berbeda. Himpunan  $w(x_{3,j}, x_{3,j+1}); j \in \text{bil. ganjil}$  dan  $w(x_i x_{i+1}); i = 1, 5$  merupakan himpunan bagian dari  $w(x_2 x_{3,2n+1})$ . Himpunan  $w(x_{3,j}, x_{3,j+1}); j \in \text{bil. genap}$  dan  $w(x_3 x_5)$  merupakan himpunan bagian dari  $w(x_6 x_{3,1})$ . Sehingga himpunan bobot sisi yang berbeda yaitu himpunan  $w(x_2 x_{3,2n+1}), w(x_6 x_{3,1}), w(x_2 x_3)$  dan  $w(x_3 x_{3j})$ . Berikut penjabaran dari himpunan bobot sisi yang berbeda secara berturut-turut.

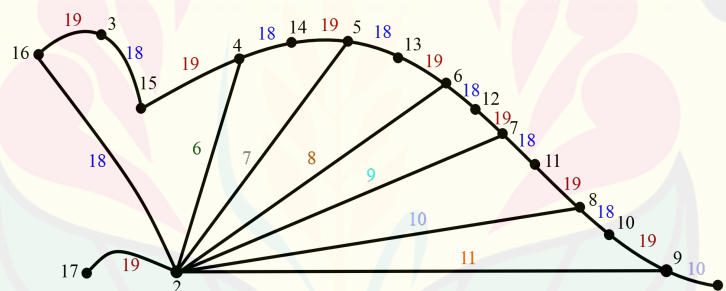
$$\begin{aligned} W &= \{6, 7, 8, \dots, n + 5, 2 + 8, 2n + 9, n + 6\} \\ |W| &= n + 3 \end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot sisi tersebut, diperoleh batas atas  $rac(S_n) \leq n + 3$ . Berdasarkan batas bawah dan batas atas, diperoleh *rainbow antimagic connection number* pada graf siput ( $S_n$ ) adalah  $rac(S_n) = n + 3$ . Berikut *rainbow path* dari graf siput:

Tabel 4.7: *Rainbow Path* pada graf siput ( $S_n$ )

Kasus	Syarat	$x$	$y$	<i>Rainbow Path</i>	Kondisi
1	$n \geq 3$	$x_i$	$x_j$	$x_i, x_j$	$i = 1, 2, 3, 5;$ $j = i + 1$
2	$n \geq 3$	$x_i$	$x_k$	$x_i, x_j, x_k$	$1 \leq i \leq 3; j = i + 1;$ $k = i + 2$
3	$n \geq 3$	$x_i$	$x_l$	$x_i, x_j, x_k, x_l$	$a = 1, 2; b = 2, 3;$ $c = 3, 5; d = 4, 5, 6$
4	$n \geq 3$	$x_i$	$x_m$	$x_i, x_j, x_k, x_l, x_m$	$a = 1; b = 2; c = 3;$ $d = 5; e = 6$
5	$n \geq 3$	$x_3$	$x_{3,j}$	$x_3, x_{3,i}, x_{3,j}$	$2 \leq i \leq 2n, j \in \text{bil. genap};$ $1 \leq j \leq 2n, j \in \text{bil. ganjil}$
6	$n \geq 3$	$x_{3,i}$	$x_{3,k}$	$x_{3,i}, x_{3,j}, x_{3,k}$	$2 \leq j \leq 2n; 1 \leq i \leq 2n;$ $3 \leq k \leq 2n$

Berikut gambar dari *rainbow antimagic coloring* graf siput ( $S_5$ ):



Gambar 4.7 RAC graf siput ( $S_5$ )

**Teorema 4.5.** *Rainbow antimagic connection number pada graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ), untuk setiap bilangan bulat  $n = 5$  dan  $m \geq 2$  adalah*

$$rac(CR_{n,m}) = m + 3$$

**Bukti:** Graf Tunas Kelapa  $(CR_{n,m})$  memiliki himpunan titik  $V(CR_{n,m}) = \{x_i, y_j, z; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$  dan himpunan sisi  $E(CR_{n,m}) = \{x_n x_1\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_n z\}$ . Kardinalitas dari himpunan sisi dan himpunan titik pada graf tunas kelapa  $(CR_{n,m})$  berturut-turut adalah  $|V(CR_{n,m})| = n + m + 1$  dan  $|E(CR_{n,m})| = n + 2m$ . Dibuktikan  $rac(CR_{n,m}) = m + 3$  menggunakan batas bawah dan batas atas. Pertama dibuktikan batas bawah dari graf tunas kelapa  $(CR_{n,m})$  dengan  $n = 5$  dan  $m \geq 2$ ,  $rac(CR_{n,m}) \geq m + 3$ . Berdasarkan Definisi 2.7.2 diperoleh:

$$\begin{aligned} rac(CR_{n,m}) &\geq \max \{rc(CR_{n,m}), \Delta(CR_{n,m})\} \\ m + 3 &\geq \max \{4, m + 3\} \\ m + 3 &\geq m + 3 \end{aligned}$$

Jadi batas bawah dari *rainbow antimagic connection number* graf tunas kelapa  $(CR_{n,m})$  adalah  $rac(CR_{n,m}) \geq m + 3$ . Selanjutnya dibuktikan batas atas dari graf tunas kelapa  $(CR_{n,m})$  dengan  $n = 5$  dan  $m \geq 2$ ,  $rac(CR_{n,m}) \leq m + 3$ , dimisalkan  $f : V(CR_{n,m}) \rightarrow \{1, 2, \dots, n + m + 1\}$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(z) &= m + 5, \text{ untuk } m \geq 6 \\ f(x_1) &= m + 3, \text{ untuk } m \geq 6 \\ f(x_2) &= m - 1, \text{ untuk } m \geq 6 \\ f(x_3) &= m, \text{ untuk } m \geq 6 \\ f(x_4) &= m + 4, \text{ untuk } m \geq 6 \\ f(x_5) &= m - 2, \text{ untuk } m \geq 6 \\ f(y_m) &= \begin{cases} m + 5, \text{ untuk } 9 \leq m \leq 18 \\ m - 6, \text{ untuk } m \geq 19 \end{cases} \\ f(y_{m-1}) &= \begin{cases} m + 5, \text{ untuk } 6 \leq m \leq 8 \text{ dan } m \geq 19 \\ m - 6, \text{ untuk } 13 \leq m \leq 18 \\ m - 5, \text{ untuk } 10 \leq m \leq 12 \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(y_j) = \begin{cases} j - 1, & \text{untuk } 4 \leq j \leq 6 \\ j - 3, & \text{untuk } j = 7, 8 \text{ } m = 9 \\ 1, & \text{untuk } j = 1 \\ m - 5, & \text{untuk } m = j \text{ } m = 6, 7 \\ m - 6, & \text{untuk } m + j = 8, m = 7; m = j, m = 8; m - j = 5 \\ m - 6, & \text{untuk } m - j = 7, m = 10; m + j = 9, m = 11, m = 9 \\ m + j, & \text{untuk } j = 1, 2 \text{ } m = 6 \\ m - j, & \text{untuk } j = 3, 4 \text{ } m = 6 \\ m + j - 1, & \text{untuk } j = 2, 3 \text{ } m = 7, 8 \\ m - j + 1, & \text{untuk } j = 4, 5 \text{ } m = 7 \end{cases}$$

Berdasarkan fungsi titik diatas, diperoleh bobot sisi pada graf tunas kelapa adalah sebagai berikut

$$w(y_j x_5) = \begin{cases} \frac{j+2m-3}{2}, & \text{untuk } j \text{ ganjil}; 1 \leq j \leq 11, m \geq \frac{j+15}{2}; 13 \leq j \leq n \\ \frac{j+2m-3}{2}, & \text{untuk } m \geq j + 2 \\ \frac{4m-j+2}{2}, & \text{untuk } j = 2, 4, m \geq 9 \\ \frac{4m-j}{2}, & \text{untuk } j = 6, 8, m \geq 9 \\ \frac{4m-j}{2}, & \text{untuk } 10 \leq j \leq n, m \geq j + 2 \\ m + j - 3, & \text{untuk } 4 \leq j \leq 6; j = 7, 8, m = 9 \\ 2m + j - 2, & \text{untuk } m = 6, j = 1, 2 \\ 2m - j - 2, & \text{untuk } m = 6, j = 3, 4 \\ 2m - j - 1, & \text{untuk } m = 7, j = 4, 5 \\ 2m + j - 3, & \text{untuk } m = 7, 8, j = 2, 3 \\ 2m - 8, & \text{untuk } m + j = 8, m = 7; m = j, m = 8; m - j = 5 \\ 2m - 8, & \text{untuk } m = 9; m - j = 7, m = 10 \\ 2m - 7, & \text{untuk } m = j, m = 6, 7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 w(x_1x_5) &= 2m + 1, \text{ untuk } m \geq 6 \\
 w(x_2x_3) &= 2m - 1, \text{ untuk } m \geq 6 \\
 w(x_3x_4) &= 2m + 4, \text{ untuk } m \geq 6 \\
 w(x_jx_{j+1}) &= 2m + 2, \text{ untuk } m \geq 6, j = 1, 4 \\
 w(x_5z) &= 2m + 4, \text{ untuk } m \geq 6 \\
 \\
 w(y_jy_{j+1}) &= \begin{cases} m + 3, \text{ untuk } j = 1, 3, m \geq 9 \\ m + 4, \text{ untuk } j = 2, 4, m \geq 9 \\ m, \text{ untuk } j = 5, 7, m \geq 9; j = 9, m \geq 13; j = \text{genap} \\ m, \text{ untuk } 12 \leq j \leq n, m \geq j + 2 \\ m + 1, \text{ untuk } j = 6, 8, m \geq 9; j = 10, m \geq 13; j = 5, 6 \\ m - 1, \text{ untuk } 11 \leq j \leq n, j = \text{ganjil}, m \geq j + 2, m = 8, 9 \\ 2m - 1, \text{ untuk } j = 2, 3, m = 6, 7; m \geq 13 \\ 2m + 1, \text{ untuk } j = 4, 5, m = 6, 7; j = 8, m = 9 \\ 2m + 1, \text{ untuk } 12 \leq j \leq 15, 14 \leq m \leq 17 \\ 2m + 2, \text{ untuk } j = 6, m = 8 \\ 2m + 3, \text{ untuk } j = 1, 2, m = 6, 7 \\ 2m, \text{ untuk } j = 5, m = 6 \\ 2m - 6j + 15, \text{ untuk } j = 2, 3, 4, m = 8 \\ m + 2, \text{ untuk } j = 1, m = 7, 8 \\ m + j + 1, \text{ untuk } j = 6, 7, m = 7, 8 \\ \frac{3m-12}{2}, \text{ untuk } j = 16, m = 18 \\ \frac{3m+9}{2}, \text{ untuk } j = 17, m = 19 \\ \frac{4m-j+7}{2}, \text{ untuk } 19 \leq j \leq 27 \\ \frac{4m-j+8}{2}, \text{ untuk } j = \text{genap}, 18 \leq j \leq 26 \end{cases} \\
 \\
 w(y_{m-1}x_5) &= \begin{cases} 2m + 3, \text{ untuk } 6 \leq m \leq 9; m \geq 19 \\ 2m - 8, \text{ untuk } 13 \leq m \leq 18 \\ 2m - 7, \text{ untuk } 10 \leq m \leq 12 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$w(y_mx_5) = \begin{cases} 2m + 3, & \text{untuk } 9 \leq m \leq 18 \\ 2m - 8, & \text{untuk } m \geq 19 \end{cases}$$

$$w(x_5y_1) = \begin{cases} 2m - 1, & \text{untuk } m = 6 \\ m - 1, & \text{untuk } m \geq 7 \end{cases}$$

Selanjutnya menganalisis himpunan bobot sisi yang berbeda. Himpunan bobot sisi yang berbeda yaitu himpunan  $w(x_1x_5), w(x_4x_5), w(x_5z)$  dan  $w(y_jx_5)$ . Berikut penjabaran dari himpunan bobot sisi yang berbeda secara berturut-turut.

$$W = \{2m + 1, 2m + 2, 2m + 4, \frac{2m-1}{2}, \dots, \frac{n+2m-3}{2}\}$$

$$|W| = m + 3$$

Berdasarkan himpunan bobot sisi tersebut, diperoleh batas atas  $rac(CR_{n,m}) \leq n + 3$ . Berdasarkan batas bawah dan batas atas, diperoleh *rainbow antimagic connection number* pada graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ) adalah  $rac(CR_{n,m}) = m + 3$ . Berikut *rainbow path* dari graf tunas kelapa:

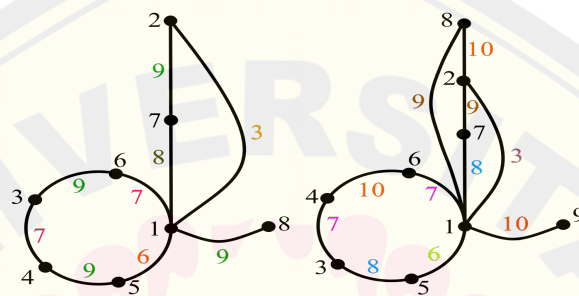
Tabel 4.8: *Rainbow Path* pada graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ )

Kasus	Syarat	$x$	$y$	<i>Rainbow Path</i>	Kondisi
1	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x$	$z$	$x, z$	-
2	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x_i$	$x_j$	$x_i, x_j$	$1 \leq i \leq 4$ $j = i + 1$
3	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x_i$	$x_j$	$x_i, x_{i+1}, x_j$	$1 \leq i \leq 3$ $j - i = 2$
4	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x_5$	$y_j$	$x_5, y_j$	$1 \leq j \leq m$
5	$n = 5$ $m = 2, 3, 4$	$x_i$	$y_j$	$x_i, x_k, y_j$	$i = 1, 4; k = 5$ $1 \leq j \leq m$

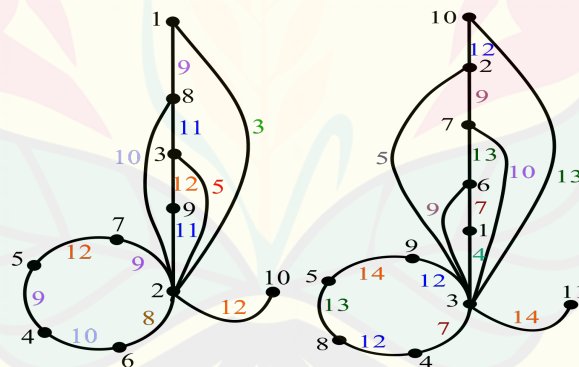


Kasus	Syarat	$x$	$y$	Rainbow Path	Kondisi
6	$n = 5$				$i = 2, 3; k = 1, 4$
	$m = 2, 3, 4$	$x_i$	$y_j$	$x_i, x_k, x_5, y_j$	$1 \leq j \leq m$
7	$n = 5$				$1 \leq i \leq m - 1$
	$m = 2, 3, 4$	$y_i$	$y_j$	$y_i, y_j$	$2 \leq j \leq m$

Berikut gambar dari *rainbow antimagic coloring* graf tunas kelapa ( $CR_{5,2}, CR_{5,3}, CR_{5,4}$ , dan  $CR_{5,5}$ ):



Gambar 4.8 RAC graf tunas kelapa ( $CR_{5,2}$  dan  $CR_{5,3}$ )



Gambar 4.9 RAC graf tunas kelapa ( $CR_{5,4}$  dan  $CR_{5,5}$ )

**Teorema 4.6.** *Rainbow antimagic connection number pada graf lotus ( $Lo_n$ ), untuk setiap bilangan bulat  $n \geq 2$  adalah*

$$rac(Lo_n) = n + 1$$

**Bukti:** Graf lotus ( $Lo_n$ ) memiliki himpunan titik  $V(Lo_n) = \{x\} \cup \{y\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq 2n - 1\}$  dan himpunan sisi  $E((Lo_n)) = \{xy\} \cup \{xx_i; 1 \leq i \leq 2n - 1; i \in \text{bil. ganjil}\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq 2n - 2\}$ . Kardinalitas dari himpunan sisi dan himpunan titik pada graf lotus ( $Lo_n$ ) berturut-turut adalah  $|V(Lo_n)| = 2n + 1$  dan  $|E(Lo_n)| = 4n - 2$ . Dibuktikan  $rac(Lo_n) = n + 1$  menggunakan batas bawah dan batas atas. Pertama dibuktikan batas bawah dari graf lotus ( $Lo_n$ ) dengan  $n \geq 2$ ,  $rac(Lo_n) \geq n + 1$  berdasarkan Definisi 2.7.2 diperoleh:

$$\begin{aligned} rac(Lo_n) &\geq \max \{rc(Lo_n), \Delta(Lo_n)\} \\ n + 1 &\geq \max \{3, n + 1\} \\ n + 1 &\geq n + 1 \end{aligned}$$

Jadi batas bawah dari *rainbow antimagic connection number* graf lotus ( $Lo_n$ ) adalah  $rac(Lo_n) \geq n + 1$ . Selanjutnya dibuktikan batas atas dari graf lotus ( $Lo_n$ ) dengan  $n \geq 2$ ,  $rac(Lo_n) \leq n + 1$ , dimisalkan  $f : V(Lo_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n + 1\}$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \\ f(y) &= 2n + 1 \\ f(x_i) &= \begin{cases} \frac{4n-i+1}{2}, & \text{untuk } i \in \text{bil. ganjil} \\ \frac{i+2}{2}, & \text{untuk } i \in \text{bil. genap} \end{cases} \end{aligned}$$

Berdasarkan fungsi titik diatas, diperoleh bobot sisi pada graf lotus ( $Lo_n$ ) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} w(xy) &= 2n + 2 \\ w(xx_i) &= \frac{4n-i+3}{2}, \text{ untuk } i \in \text{bil. ganjil} \end{aligned}$$

$$w(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 2n + 2, & \text{untuk } i \in \text{bil. ganjil} \\ 2n + 1, & \text{untuk } i \in \text{bil. genap} \end{cases}$$

Selanjutnya menganalisis himpunan bobot sisi yang berbeda. Himpunan  $w(x_i x_{i+1}), i \text{ ganjil}$  merupakan himpunan bagian dari  $w(x x_i)$ . Himpunan  $w(x_i x_{i+1}), i \text{ genap}$  merupakan himpunan bagian dari  $w(x y)$ . Sehingga himpunan bobot sisi yang berbeda yaitu himpunan  $w(x x_i)$  dan  $w(x y)$ . Berikut penjabaran dari himpunan bobot sisi yang berbeda secara berturut-turut.

$$W = \left\{ \frac{4n+2}{2}4n, \dots, \frac{5n+3}{2}, 2n + 2 \right\}$$

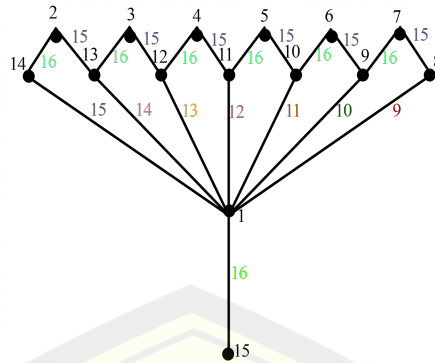
$$|W| = n + 1$$

Berdasarkan himpunan bobot sisi tersebut, diperoleh batas atas  $rac(Lo_n) \leq n + 1$ . Berdasarkan batas bawah dan batas atas, diperoleh *rainbow antimagic connection number* pada graf lotus  $Lo_n$  adalah  $rac(Lo_n) = n + 1$ . Berikut *rainbow path* dari graf lotus:

Tabel 4.9: *Rainbow Path* pada graf lotus ( $Lo_n$ )

Kasus	Syarat	$x$	$y$	<i>Rainbow Path</i>	Kondisi
1	$n = 2$	$x$	$y$	$x, y$	-
2	$n = 2$	$x$	$x_i$	$x, x_i$	$1 \leq i \leq 2n - 1, i \in \text{bil. ganjil}$
3	$n = 2$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_i, x, x_{i+1}$	$1 \leq i \leq 2n - 3, i \in \text{bil. ganjil}$
4	$n = 2$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_i, x_{i+1}$	$1 \leq i \leq 2n - 1$
5	$n = 2$	$x_i$	$x$	$x_i, x_j, x$	$1 \leq j \leq 2n - 1, i \in \text{bil. ganjil}$ $2 \leq i \leq 2n - 2, j \in \text{bil. genap}$
6	$n = 2$	$x_i$	$y$	$x_i, x_j, x, y$	$1 \leq j \leq 2n - 1, i \in \text{bil. ganjil}$ $2 \leq i \leq 2n - 2, j \in \text{bil. genap}$

Berikut gambar dari *rainbow antimagic coloring* graf lotus ( $Lo_7$ ):



Gambar 4.10 RAC graf lotus ( $Lo_7$ )

**Teorema 4.7.** *Rainbow antimagic connection number pada graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ), untuk setiap bilangan bulat  $n \geq 2$  adalah*

$$rac(Kt_n) = n + 1$$

**Bukti:** Graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ) memiliki himpunan titik  $V(Kt_n) = \{x\} \cup \{y\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$  dan himpunan sisi  $E(Kt_n) = \{xy\} \cup \{xx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ . Kardinalitas dari himpunan sisi dan himpunan titik dari graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ) berturut-turut adalah  $|V(Kt_n)| = n + 2$  dan  $|E(Kt_n)| = 2n$ . Dibuktikan  $rac(Kt_n) = n + 1$  menggunakan batas bawah dan batas atas. Pertama dibuktikan batas bawah dari graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ) dengan  $n \geq 2$ ,  $rac(Kt_n) \geq n + 1$  berdasarkan Definisi 2.7.2 diperoleh:

$$\begin{aligned} rac(Kt_n) &\geq \max \{rc(Kt_n), \Delta(Kt_n)\} \\ n + 1 &\geq \max \{3, n + 1\} \\ n + 1 &\geq n + 1 \end{aligned}$$

Jadi batas bawah dari *rainbow antimagic connection number* graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ) adalah  $rac(Kt_n) \geq n + 1$ . Selanjutnya dibuktikan batas atas dari graf kipas tangkai

$(Kt_n)$  dengan  $n \geq 2$ ,  $rac(Kt_n) \leq n + 1$ , dimisalkan  $f : V(Kt_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, n + 2\}$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \\ f(y) &= n + 2 \\ f(x_i) &= \begin{cases} \frac{2n-i+3}{2}, & \text{untuk } i \in \text{bil. ganjil} \\ \frac{i+2}{2}, & \text{untuk } i \in \text{bil. genap} \end{cases} \end{aligned}$$

Berdasarkan fungsi titik diatas, diperoleh bobot sisi pada graf kipas tangkai  $(Kt_n)$  adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} w(xy) &= n + 3 \\ w(xx_i) &= \begin{cases} \frac{2n-i+5}{2}, & \text{untuk } i \in \text{bil. ganjil} \\ \frac{i+4}{2}, & \text{untuk } i \in \text{bil. genap} \end{cases} \\ w(x_i x_{i+1}) &= \begin{cases} n + 3, & \text{untuk } i \in \text{bil. ganjil} \\ n + 2, & \text{untuk } i \in \text{bil. genap} \end{cases} \end{aligned}$$

Selanjutnya menganalisis himpunan bobot sisi yang berbeda. Himpunan  $w(x_i x_{i+1}), i \in \text{bilangangenap}$  merupakan himpunan bagian dari  $w(xx_i)$ . Himpunan  $w(x_i x_{i+1}), i \text{ ganjil}$  merupakan himpunan bagian dari  $w(xy)$ . Sehingga himpunan bobot sisi yang berbeda yaitu hmpunan  $w(xx_i)$  dan  $w(xy)$ . Berikut penjabaran dari himpunan bobot sisi yang berbeda secara berturut-turut.

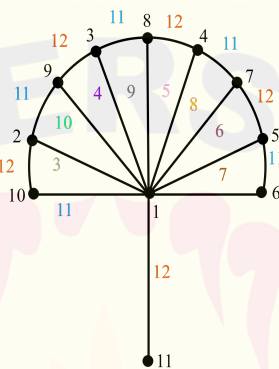
$$\begin{aligned} W &= \{3, 4, 5, \dots, n + 2, n + 3\} \\ |W| &= n + 1 \end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot sisi tersebut, diperoleh batas atas  $rac(Kt_n) \leq n + 1$ . Berdasarkan batas bawah dan batas atas, diperoleh *rainbow antimagic connection number* pada graf kipas tangkai  $Kt_n$  adalah  $rac(Kt_n) = n + 1$ . Berikut *rainbow path* dari graf kipas tangkai:

Tabel 4.10: *Rainbow Path* pada graf kipas tangkai ( $Kt_n$ )

Kasus	Syarat	$x$	$y$	<i>Rainbow Path</i>	Kondisi
1	$n \geq 2$	$x$	$y$	$x, y$	-
2	$n \geq 2$	$x_i$	$y$	$x_i, x, y$	$1 \leq i \leq n$
3	$n \geq 2$	$x_i$	$x$	$x_i, x$	$1 \leq i \leq n$
4	$n \geq 2$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_i, x_{i+1}$	$1 \leq i \leq n$
5	$n \geq 2$	$x_i$	$x_j$	$x_i, x, x_j$	$1 \leq i \leq n - 1; 2 \leq j \leq n$

Berikut gambar dari *rainbow antimagic coloring* graf kipas tangkai ( $Kt_9$ ):



Gambar 4.11 RAC graf kipas tangkai ( $Kt_9$ )

### 4.3 Algoritma Graph Neural Network dalam Menyelesaikan Masalah Arus Transportasi Udara dengan *Rainbow Antimagic Coloring*

Berikut adalah algoritma untuk mempelajari anomali kepadatan arus transportasi udara dengan menggunakan GNN sesuai *rainbow antimagic coloring*.

#### Algoritma GNN Satu Layer

- Step 0. Diberikan sebuah graf  $G(V, E)$  dari orde  $n$  dan fitur matriks  $H_{n \times m}$  dari  $n$  titik dan  $m$  fitur, dan diberikan toleransi  $\epsilon$
- Step 1. Menentukan matriks bertetangga  $A$  dari graf  $G$  dan menentukan matriks  $B = A + I$ , dimana  $I$  adalah matriks *identity*.

- Step 2. Inisialisasi bobot  $Wg$ , bias  $\beta$ , tingkat  $\alpha$ . (Untuk kesederhanaan, mengatur  $Wg_{m \times 1} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m]$ , dimana  $0 \leq w_j \leq 1$ , bias  $\beta = 0$  dan  $0 \leq \alpha \leq 1$ ).
- Step 3. Kalikan bobot matriks dengan fitur titik, dengan menetapkan fungsi *message*  $m_u^l = MSG^l(h_u^{i-1})$ . Untuk *linear layer*  $m_u^l = Wg^l(h_u^{i-1})$ .
- Step 4. Jumlahkan pesan dari titik yang bertetangga, dengan fungsi  $h_x^l = AGG^l\{m_u^{l-1}, u \in N(v)\}$  dan menerapkan fungsi **sum**( $\cdot$ ),  $h_x^l = SUM^l\{m_u^{l-1}, u \in N(v)\}$  dengan memperhatikan matriks  $B$ .
- Step 5. Menentukan *error*, dengan  $error^l = \frac{\|h_{x_i}^l - h_{x_j}^l\|_2}{|E(G)|^2}$ , dimana  $v_i, v_j$  merupakan dua titik yang berdekatan.
- Step 6. Mengamati apakah  $error \leq \epsilon$ . Jika iya berarti berhenti, jika tidak melanjutkan langkah ke 7 untuk memperbarui bobot matriks  $Wg$ .
- Step 7. Memperbarui bobot matriks dengan  $Wg^{l+1} = Wg^l + \alpha \times z_j \times e^l$  dimana  $z_j$  merupakan jumlah dari setiap kolom dalam  $H_{x_i}^l$  dan membaginya dengan angka dari *node*
- Step 8. Lakukan step 3-6 sampai  $error \leq \epsilon$ .
- Step 9. Menyimpan hasil *embedding* menjadi vektor, dengan memberi nama file vektor *embeddingdata.mat*. Data merupakan data *time series*, selanjutnya melakukan proses yang sama untuk pengamatan berikutnya.
- Step 10. Muat data *embeddingdata.mat* kemudian menggunakan *time series* dengan *machine learning* untuk *forecasting*.
- Step 11. Diperoleh hasil *training*, *testing* dan *forecasting*.

---

**Observasi 1.** Diberikan graf  $G$  dengan orde  $n$ . Misalkan himpunan titik dan sisi  $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  dan  $E(G) = \{x_i x_j | x_i x_j \in V(G)\}$  Diberikan fitur titik

sebagai berikut:  $H_{x_i} = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,m} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \cdots & s_{n,m} \end{bmatrix}$

*Embedding* pada titik dapat ditentukan menggunakan *messages passing* dari titik yang bertetangga  $h_x^l = AGG^l\{m_u^{l-1}, u \in N(v)\}$  dibawah aggregation  $\mathbf{sum}(\cdot)$ , jadi  $h_x^l = SUM^l\{m_u^{l-1}, u \in N(v)\}$  dengan memperhatikan matriks  $B = A + I$  dimana  $A, I$  masing-masing merupakan matriks *adjacency* dan matriks *Identity*.

**Bukti.** Berdasarkan graf  $G$ , didapatkan matriks *adjacency*  $A$ . Akan tetapi, harus mempertimbangkan ketetanggaan titik dari graf  $G$  pada dirinya sendiri maka perlu menambahkan  $A$  dengan matriks *Identity*  $I$  dan diperoleh matriks  $B$  sebagai berikut:

$$B = A + I = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

Menurut algoritma GNN layer satu, perlu menginisialisasi bobot  $Wg^l = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ . Bobot ini akan digunakan untuk mendapatkan nilai  $m_{xi}$  dan memperbarui bobot baru pada iterasi berikutnya. Proses *embedding* titik dari GNN dilakukan dengan dua tahap yaitu *message passing* dan *aggregation*. Pada langkah pertama melakukan *message passing*  $m_u^l = MSG^l(h_u^{i-1})$ . Untuk *linear layer*  $m_u^l = Wg^l(h_u^{i-1})$ , diperoleh:

$$\begin{aligned} m_{xi}^1 &= Wg^1 \cdot H_{xi}^0 \\ m_{xi}^1 &= [w_{1,1}w_{1,2} \cdots w_{1,m}] \cdot [s_{1,1}s_{1,2} \cdots s_{1,m}] \\ &= w_1 \times s_{1,1} + w_2 \times s_{1,2} + \cdots + w_m \times s_{1,m} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 m_{x_2}^1 &= [w_{1,1}w_{1,2} \cdots w_{1,m}] \cdot [s_{2,1}s_{2,2} \cdots s_{2,m}] \\
 &= w_{1,1} \times s_{2,1} + w_{1,2} \times s_{2,2} + \cdots + w_{1,m} \times s_{2,m} \\
 &\vdots \\
 m_{x_n}^1 &= [w_{1,1}w_{1,2} \cdots w_{1,m}] \cdot [s_{n,1}s_{n,2} \cdots s_{n,m}]
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, langkah kedua yaitu *aggregation* dengan melihat tetangga titik  $x$ . Dengan menerapkan *aggregation sum*( $\cdot$ ), untuk  $h_x^l = AGG^l\{m_u^{l-1}, u \in N(v)\}$  didapatkan  $h_x^l = SUM^l\{m_u^{l-1}, u \in N(v)\}$  dengan memperhatikan matriks  $B = A + I$ . Vektor *embedding*  $h_{x_i}$  dapat ditulis sebagai berikut:  $h_{x_i} = [m_{x_1}; m_{x_2}; \dots; m_{x_n}]$ . Kemudian, perlu menghitung nilai *error* yang menunjukkan seberapa dekat dua titik yang berdekatan di ruang *embedding*. Semakin kecil nilai *error* maka semakin dekat jarak antara kedua titik tersebut. Nilai *error* tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$error^l = \frac{\|h_{x_i}^l - h_{x_j}^l\|_{inf}}{|E(G)|^2} \text{ dimana } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Pada iterasi selanjutnya, perlu memperbarui  $H_{x_i}$  menggunakan  $H_{x_i}$  dan  $h_{x_i}$  pada iterasi sebelumnya.

$$\begin{aligned}
 H_{x_1}^2 &= \frac{\begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,m} \end{bmatrix}}{\sum \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,m} \end{bmatrix}} \times h_{x_1} \\
 &= \frac{\begin{bmatrix} (s_{1,1} \times h_{x_1}) & (s_{1,2} \times h_{x_1}) & \cdots & (s_{1,m} \times h_{x_1}) \end{bmatrix}}{\sum \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,m} \end{bmatrix}} \\
 H_{x_2}^2 &= \frac{\begin{bmatrix} s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,m} \end{bmatrix}}{\sum \begin{bmatrix} s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,m} \end{bmatrix}} \times h_{x_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{[(s_{2,1} \times h_{x2}) \quad (s_{2,2} \times h_{x2}) \quad \cdots \quad (s_{2,m} \times h_{x2})]}{\sum [s_{2,1} \quad s_{2,2} \quad \cdots \quad s_{2,m}]} \\
 &\vdots \\
 H_{x_n}^2 &= \frac{[s_{n,1} \quad s_{n,2} \quad \cdots \quad s_{n,m}]}{\sum [s_{n,1} \quad s_{n,2} \quad \cdots \quad s_{n,m}]} \times h_{x_n} \\
 &= \frac{[(s_{n,1} \times h_{x_n}) \quad (s_{n,2} \times h_{x_n}) \quad \cdots \quad (s_{n,m} \times h_{x_n})]}{\sum [s_{n,1} \quad s_{n,2} \quad \cdots \quad s_{n,m}]}
 \end{aligned}$$

$H_{xi}$  dapat ditulis sebagai berikut:

$$H_{xi} = [H_{x1}^2; H_{x2}^2; \dots; H_{xn}^2]$$

Pada iterasi ini bobot perlu diperbarui. Tujuannya adalah untuk mendapatkan model yang terbaik. Akan tetapi, sebelum memperbarui bobot perlu menemukan nilai dari  $z_k$ .

$$z_k = \frac{\sum [H_{(1,1)}^2; H_{(2,1)}^2; \dots; H_{(n,1)}^2]}{n}; \dots; \frac{\sum [H_{(1,m)}^2; H_{(2,m)}^2; \dots; H_{(n,m)}^2]}{n}$$

$z_k$  dapat ditulis sebagai berikut:

$$z_k = [z_1; \dots; z_m]$$

Menginisialisasi laju  $\alpha$ , bobot diperbarui sebagai berikut:

$$Wg^2 = Wg_1^1 + \alpha \times z_1 \times e; Wg_2^1 + \alpha \times z_2 \times e; \dots; Wg_m^1 + \alpha \times z_m \times e$$

Dengan demikian, bobot dapat diperbarui sebagai berikut:

$$Wg^2 = [Wg_1^2 \quad Wg_2^2 \quad \cdots \quad Wg_m^2]$$

Penyelesaian masalah arus transportasi udara dilakukan dengan teknik *Graph Neural Network* (GNN). Penyelesaian dilakukan dengan simulasi numerik dengan menggunakan *software* MATLAB. Perhitungan manual dilakukan terlebih dahulu sebelum simulasi numerik untuk menunjukkan pengerjaan algoritma *Graph Neural Network* (GNN). Perhitungan manual ini dilakukan jika menyelesaikan data set yang berukuran kecil.

Diberikan sebuah graf  $G$  dengan orde 8. Himpunan titik dan sisi dari graf  $G$  adalah  $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$  dan  $E(G) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_4x_5, x_1x_5, x_5x_6, x_1x_6, x_6x_7, x_1x_7, x_7x_8, x_1x_8\}$ . Diberikan fitur node sebagai berikut:

$$\mathfrak{H}_{x_i}^0 = \begin{bmatrix} 0.87 & 0.90 & 0.90 \\ 0.59 & 0.19 & 0.15 \\ 0.87 & 0.10 & 0.10 \\ 0.36 & 0.10 & 0.10 \\ 0.10 & 0.22 & 0.22 \\ 0.61 & 0.28 & 0.35 \\ 0.90 & 0.38 & 0.39 \\ 0.41 & 0.20 & 0.16 \end{bmatrix}$$

Diperoleh *nodes embedding* dengan satu *hidden layer* dengan satu *neuron*, dan dengan fungsi kerugian minimal. Dengan graf yang diperoleh, dapat menentukan

matriks *adjacency*, matriks *Identity*, dan matriks *loop-adjacency* sebagai berikut:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Perhitungan dapat dimulai dengan bobot  $Wg^1 = [0.05 \ 0.05 \ 0.05]$  dari  $(1, 3)$ -matriks. Iterasi pertama menggunakan *message passing* dapat dihitung sebagai

berikut:

$$m_{x_i}^l = Wg^l \cdot \mathfrak{H}_{x_i}^{l-1}, \text{ dimana } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

$$m_{x_1}^1 = Wg^1 \cdot \mathfrak{H}_{x_1}^0 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.87 & 0.90 & 0.90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1335 \end{bmatrix}$$

$$m_{x_2}^1 = Wg^1 \cdot \mathfrak{H}_{x_2}^0 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.59 & 0.19 & 0.15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0465 \end{bmatrix}$$

$$m_{x_3}^1 = Wg^1 \cdot \mathfrak{H}_{x_3}^0 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.87 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0535 \end{bmatrix}$$

$$m_{x_4}^1 = Wg^1 \cdot \mathfrak{H}_{x_4}^0 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.36 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.028 \end{bmatrix}$$

$$m_{x_5}^1 = Wg^1 \cdot \mathfrak{H}_{x_5}^0 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.10 & 0.22 & 0.22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.027 \end{bmatrix}$$

$$m_{x_6}^1 = Wg^1 \cdot \mathfrak{H}_{x_6}^0 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.61 & 0.28 & 0.35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.062 \end{bmatrix}$$

$$m_{x_7}^1 = Wg^1 \cdot \mathfrak{H}_{x_7}^0 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.90 & 0.38 & 0.39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0835 \end{bmatrix}$$

$$m_{x_8}^1 = Wg^1 \cdot \mathfrak{H}_{x_8}^0 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.41 & 0.20 & 0.16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0385 \end{bmatrix}$$

Jadi, diperoleh  $m_{x_i}^1$ :

$$m_{x_i}^1 = \begin{bmatrix} 0.1335 \\ 0.0465 \\ 0.0535 \\ 0.028 \\ 0.027 \\ 0.062 \\ 0.0835 \\ 0.0385 \end{bmatrix}$$

Dengan melihat matriks  $B$ , sertakan elemen yang bukan nol dari  $m_{x_i}^1$ , jadi

diperoleh:

$$m_{x_1}^1 = \begin{bmatrix} 0.1335 \\ 0.0465 \\ 0.0535 \\ 0.028 \\ 0.027 \\ 0.062 \\ 0.0835 \\ 0.0385 \end{bmatrix}, m_{x_2}^1 = \begin{bmatrix} 0.1335 \\ 0.0465 \end{bmatrix}, m_{x_3}^1 = \begin{bmatrix} 0.1335 \\ 0.0535 \end{bmatrix}, m_{x_4}^1 = \begin{bmatrix} 0.1335 \\ 0.028 \\ 0.027 \end{bmatrix},$$

$$m_{x_5}^1 = \begin{bmatrix} 0.1335 \\ 0.028 \\ 0.027 \\ 0.062 \end{bmatrix}, m_{x_6}^1 = \begin{bmatrix} 0.1335 \\ 0.027 \\ 0.062 \\ 0.0835 \end{bmatrix}, m_{x_7}^1 = \begin{bmatrix} 0.1335 \\ 0.062 \\ 0.0835 \\ 0.0385 \end{bmatrix}, m_{x_8}^1 = \begin{bmatrix} 0.1335 \\ 0.0835 \\ 0,0385 \end{bmatrix}$$

Setiap elemen pada *nodes embedding* dijumlahkan, diperoleh hasil sebagai berikut:  $h_{x_1}^1 = 0.4725, h_{x_2}^1 = 0.1800, h_{x_3}^1 = 0.1870, h_{x_4}^1 = 0.1885, h_{x_5}^1 = 0.2505, h_{x_6}^1 = 0.3060, h_{x_7}^1 = 0.3175, h_{x_8}^1 = 0.2555$ . Jadi, iterasi pertama dari

aggregation sebagai berikut:  $h_{x_i}^1 =$   $\begin{bmatrix} 0.4725 \\ 0.1800 \\ 0.1870 \\ 0.1885 \\ 0.2505 \\ 0.3060 \\ 0.3175 \\ 0.2555 \end{bmatrix}$  dimana  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ .

Dengan *error* ( $e$ ) dapat dihitung sebagai berikut:

$$e^l = \frac{\|h_{x_i}^l - h_{x_j}^l\|_{inf}}{|E(G)|^2} \text{ dimana } i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$e^1 = \frac{\|h_{x_1}^1 - h_{x_2}^1\| + \|h_{x_1}^1 - h_{x_3}^1\| + \|h_{x_1}^1 - h_{x_4}^1\| + \|h_{x_4}^1 - h_{x_5}^1\| + \|h_{x_1}^1 - h_{x_5}^1\|}{|E(G)|^2}$$

$$+ \frac{\|h_{x_5}^1 - h_{x_6}^1\| + \|h_{x_1}^1 - h_{x_6}^1\| + \|h_{x_6}^1 - h_{x_7}^1\| + \|h_{x_1}^1 - h_{x_7}^1\| + \|h_{x_7}^1 - h_{x_8}^1\|}{|E(G)|^2}$$

$$+ \frac{\|h_{x_1}^1 - h_{x_8}^1\|}{|E(G)|^2} = 0.0128$$

Pada iterasi kedua, memperbarui  $\mathfrak{H}_{v_i}^{l-1}$  terlebih dahulu. Pertama:

$$\mathfrak{H}_{x_i}^{l-1} = \frac{\mathfrak{H}_{x_i}^{l-2}}{\sum(\mathfrak{H}_{x_i}^{l-2})} \times h_{x_i}^{l-1}, \text{ dimana } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

$$\mathfrak{H}_{x_1}^1 = \frac{\begin{bmatrix} 0.87 & 0.90 & 0.90 \end{bmatrix}}{\sum \begin{bmatrix} 0.87 & 0.90 & 0.90 \end{bmatrix}} \times 0.4725 = \begin{bmatrix} 0.1539 & 0.1592 & 0.1592 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{H}_{x_2}^1 = \frac{\begin{bmatrix} 0.59 & 0.19 & 0.15 \end{bmatrix}}{\sum \begin{bmatrix} 0.59 & 0.19 & 0.15 \end{bmatrix}} \times 0.1800 = \begin{bmatrix} 0.1141 & 0.0367 & 0.0290 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{H}_{x_3}^1 = \frac{\begin{bmatrix} 0.87 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix}}{\sum \begin{bmatrix} 0.87 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix}} \times 0.1870 = \begin{bmatrix} 0.1520 & 0.0174 & 0.0174 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{H}_{x_4}^1 = \frac{\begin{bmatrix} 0.36 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix}}{\sum \begin{bmatrix} 0.36 & 0.10 & 0.10 \end{bmatrix}} \times 0.1885 = \begin{bmatrix} 0.1211 & 0.0336 & 0.0336 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{H}_{x_5}^1 = \frac{\begin{bmatrix} 0.10 & 0.22 & 0.22 \end{bmatrix}}{\sum \begin{bmatrix} 0.10 & 0.22 & 0.22 \end{bmatrix}} \times 0.2505 = \begin{bmatrix} 0.0463 & 0.1020 & 0.1020 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{H}_{x_6}^1 = \frac{\begin{bmatrix} 0.61 & 0.28 & 0.35 \end{bmatrix}}{\sum \begin{bmatrix} 0.61 & 0.28 & 0.35 \end{bmatrix}} \times 0.3060 = \begin{bmatrix} 0.1505 & 0.0690 & 0.0863 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{H}_{x_7}^1 = \frac{\begin{bmatrix} 0.90 & 0.38 & 0.39 \end{bmatrix}}{\sum \begin{bmatrix} 0.90 & 0.38 & 0.39 \end{bmatrix}} \times 0.3175 = \begin{bmatrix} 0.1711 & 0.0722 & 0.7414 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{H}_{x_8}^1 = \frac{\begin{bmatrix} 0.41 & 0.20 & 0.16 \end{bmatrix}}{\sum \begin{bmatrix} 0.41 & 0.20 & 0.16 \end{bmatrix}} \times 0.2555 = \begin{bmatrix} 0.1360 & 0.0663 & 0.0530 \end{bmatrix}$$

Jadi, didapatkan  $\mathfrak{H}_{x_i}^1$ :

$$\mathfrak{H}_{x_i}^1 = \begin{bmatrix} \mathfrak{H}_{x_1}^1 \\ \mathfrak{H}_{x_2}^1 \\ \mathfrak{H}_{x_3}^1 \\ \mathfrak{H}_{x_4}^1 \\ \mathfrak{H}_{x_5}^1 \\ \mathfrak{H}_{x_6}^1 \\ \mathfrak{H}_{x_7}^1 \\ \mathfrak{H}_{x_8}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1539 & 0.1592 & 0.1592 \\ 0.1141 & 0.0367 & 0.0290 \\ 0.1520 & 0.0174 & 0.0174 \\ 0.1211 & 0.0336 & 0.0336 \\ 0.0463 & 0.1020 & 0.1020 \\ 0.1505 & 0.0690 & 0.0863 \\ 0.1711 & 0.0722 & 0.7414 \\ 0.1360 & 0.0663 & 0.0530 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, memperbarui bobot. Sebelum itu, semua simpul  $\mathfrak{H}_{x_i}^1$  dijumlahkan dan dibagi dengan jumlah *nodes* pada kolom sebagai berikut:  $z_1 = 0.1306, z_2 = 0.0695, z_3 = 0.1527$ . Jadi, didapatkan  $z_k = \begin{bmatrix} 0.1306 & 0.0695 & 0.1527 \end{bmatrix}$  dimana  $k = 1, 2, 3$ . Diberikan laju  $\alpha$ , bobot  $Wg$  diperbarui sebagai berikut:

$$Wg^l = Wg_m^{l-1} + \alpha \times z_k \times e^{l-1}, \text{ dimana } k = 1, 2, 3$$

$$Wg^2 = Wg_m^1 + \alpha \times z_k \times e^1, \text{ for } \alpha = 0.1$$

$$Wg_1^2 = Wg_1^1 + \alpha \times z_1 \times e^1 = 0.05 + 0.1 \times 0.1306 \times 0.0128 = 0.0500$$

$$Wg_2^2 = Wg_2^1 + \alpha \times z_2 \times e^1 = 0.05 + 0.1 \times 0.0695 \times 0.0128 = 0.0500$$

$$Wg_3^2 = Wg_3^1 + \alpha \times z_3 \times e^1 = 0.05 + 0.1 \times 0.1527 \times 0.0128 = 0.0500$$



Jadi, didapatkan  $Wg^2$ :

$$Wg^2 = \begin{bmatrix} Wg_1^2 & Wg_2^2 & Wg_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0500 & 0.0500 & 0.0500 \end{bmatrix}$$

Dengan  $W^2$  yang baru, iterasi kedua dapat dihitung sebagai berikut:

$$m_{x_i}^l = Wg^l \cdot \mathfrak{H}_{x_i}^{l-1}, \text{ dimana } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

$$\begin{aligned} m_{x_1}^2 &= Wg^2 \cdot \mathfrak{H}_{x_1}^1 \\ &= \begin{bmatrix} 0.0500 & 0.0500 & 0.0500 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1539 & 0.1592 & 0.1592 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0236 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{x_2}^2 &= Wg^2 \cdot \mathfrak{H}_{x_2}^1 \\ &= \begin{bmatrix} 0.0500 & 0.0500 & 0.0500 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1141 & 0.0367 & 0.0290 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0090 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{x_3}^2 &= Wg^2 \cdot \mathfrak{H}_{x_3}^1 \\ &= \begin{bmatrix} 0.0500 & 0.0500 & 0.0500 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1520 & 0.0174 & 0.0174 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0103 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{x_4}^2 &= Wg^2 \cdot \mathfrak{H}_{x_4}^1 \\ &= \begin{bmatrix} 0.0500 & 0.0500 & 0.0500 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1211 & 0.0336 & 0.0336 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0094 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{x_5}^2 &= Wg^2 \cdot \mathfrak{H}_{x_5}^1 \\ &= \begin{bmatrix} 0.0500 & 0.0500 & 0.0500 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.0463 & 0.1020 & 0.1020 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0125 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{x_6}^2 &= Wg^2 \cdot \mathfrak{H}_{x_6}^1 \\ &= \begin{bmatrix} 0.0500 & 0.0500 & 0.0500 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1505 & 0.0690 & 0.0863 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0153 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{x_7}^2 &= Wg^2 \cdot \mathfrak{H}_{x_7}^1 \\ &= \begin{bmatrix} 0.0500 & 0.0500 & 0.0500 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1711 & 0.0722 & 0.7414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0492 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{x_8}^2 &= Wg^2 \cdot \mathfrak{H}_{x_8}^1 \\ &= \begin{bmatrix} 0.0500 & 0.0500 & 0.0500 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1360 & 0.0663 & 0.0530 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0128 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

jadi, diperoleh  $m_{v_i}^2$  :

$$m_{v_i}^2 = \begin{bmatrix} 0.0236 \\ 0.0090 \\ 0.0103 \\ 0.0094 \\ 0.0125 \\ 0.0153 \\ 0.0492 \\ 0.0128 \end{bmatrix}$$

Dengan melihat matriks  $B$ , sertakan elemen yang bukan nol dari  $m_{x_i}^2$ , jadi diperoleh:

$$m_{x_1}^2 = \begin{bmatrix} 0.0236 \\ 0.0090 \\ 0.0103 \\ 0.0094 \\ 0.0125 \\ 0.0153 \\ 0.0492 \\ 0.0128 \end{bmatrix}, m_{x_2}^2 = \begin{bmatrix} 0.0236 \\ 0.0090 \end{bmatrix}, m_{x_3}^2 = \begin{bmatrix} 0.0236 \\ 0.0103 \end{bmatrix}, m_{x_4}^2 = \begin{bmatrix} 0.0236 \\ 0.0094 \\ 0.0125 \end{bmatrix},$$

$$m_{x_5}^2 = \begin{bmatrix} 0.0236 \\ 0.0094 \\ 0.0125 \\ 0.0153 \end{bmatrix}, m_{x_6}^2 = \begin{bmatrix} 0.0236 \\ 0.0125 \\ 0.0153 \\ 0.0492 \end{bmatrix}, m_{x_7}^2 = \begin{bmatrix} 0.0236 \\ 0.0153 \\ 0.0492 \\ 0.0128 \end{bmatrix}, m_{x_8}^2 = \begin{bmatrix} 0.0236 \\ 0.0492 \\ 0.0128 \end{bmatrix}$$

Setiap elemen pada nodes embedding  
dijumlahkan, diperoleh hasil sebagai berikut:

$h_{x_1}^2 = 0.1421, h_{x_2}^2 = 0.0326, h_{x_3}^2 = 0.0339, h_{x_4}^2 = 0.0455, h_{x_5}^2 = 0.0608, h_{x_6}^2 = 0.1006$   
 $, h_{x_7}^2 = 0.1009, h_{x_8}^2 = 0.0856$ . Jadi, iterasi pertama dari *aggregation* sebagai berikut:

$$h_{v_i}^2 = \begin{bmatrix} 0.1421 \\ 0.0326 \\ 0.0339 \\ 0.0455 \\ 0.0608 \\ 0.1006 \\ 0.1009 \\ 0.0856 \end{bmatrix} \quad \text{dimana } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

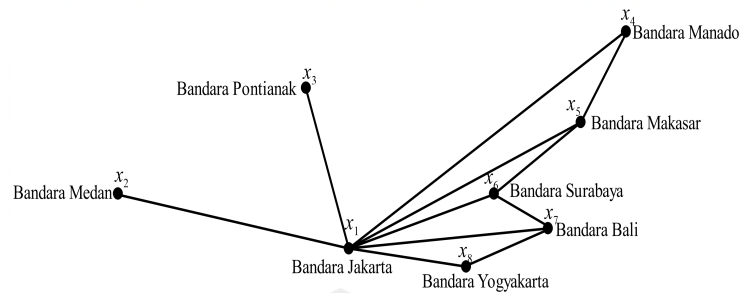
Dengan *error* ( $e$ ) dapat dihitung sebagai berikut:

$$e^2 = \frac{\|h_{v_i}^l - h_{v_j}^l\|_{inf}}{|E(G)|^2} \quad \text{dimana } i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$= 0.0040$$

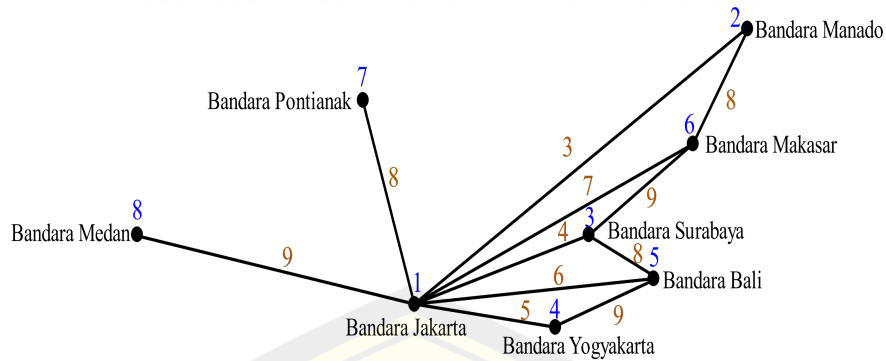
#### 4.4 Analisis Skema Aplikasi *Rainbow Antimagic Coloring* pada Masalah Arus Transportasi Udara dengan *Graph Neural Network*

Analisis *rainbow antimagic coloring* pada masalah arus transportasi udara bertujuan untuk menentukan banyaknya perusahaan dalam menempatkan *Air Traffic Controller* (ATC). *Air Traffic Controller* (ATC) untuk memandu dan mengatur lalu lintas transportasi di udara. Admin *Air Traffic Controller* (ATC) juga mempunyai peran untuk memberikan informasi penting terkait penerbangan seperti informasi cuaca, letak pesawat dan lainnya. Ilustrasi dari transportasi udara yang diambil dapat dilihat di Gambar 4.12. Selanjutnya, melabeli titik pada graf dengan pelabelan antiajaib dan mewarnai sisi sesuai dengan pewarnaan pelangi. Hasil dari *rainbow antimagic connection number* akan dijadikan sebagai jumlah admin *Air Traffic Controller* (ATC) agar minimal dan bobot yang dihasilkan dapat menentukan kepadatan *traffic*.

Gambar 4.12 Representasi graf *airport* di Indonesia

Berdasarkan Gambar 4.13 didapatkan hasil dari *rainbow antimagic connection number* yaitu tujuh warna. Dari hasil warna tersebut, maka terdapat tujuh perusahaan yang mengatur penempatan *Air Traffic Controller (ATC)*. Terdapat dua warna yang sama yaitu 8 dan 9 yang terdapat di perusahaan ke-6 yaitu PT. Angka Pura 1 dan perusahaan ke-7 yaitu PT. Angka Pura 2. PT. Angka Pura 1 dan PT. Angka Pura 2 dipantau oleh *AIRNAV* pusat. *AIRNAV* merupakan perusahaan dengan tender yang besar karena mengatur *Air Traffic Controller (ATC)* di beberapa daerah. Penempatan perusahaan dengan tender besar tersebut harus pada bandara dengan *Traffic* padat. *Traffic* padat memerlukan 4 radar darat untuk membantu *Air Traffic Controller (ATC)* dalam mengatur lalu lintas udara. Sedangkan bobot yang tidak memiliki bobot sama, maka tidak terjadi *traffic* padat. Sedangkan *Traffic* yang tidak padat hanya memerlukan 1 radar darat dan yang bertanggung jawab memberikan pelayanan disebut *Aerodrome control Tower (TWR)*. Radar yang terletak di darat diantaranya *Primary Surveillance Radar (PSR)*, *Secondary Surveillance Radar (SSR)*, *Automatic Dependent Surveillance–Broadcast (ADS-B)* dan *Mode S Transponder*. Radar di darat menerima sinyal dari GNSS untuk mendapatkan informasi yang akan dikelola oleh *Air Traffic Controller (ATC)*. GNSS (*Global Navigation Satellite System*) memberikan data penerbangan seperti posisi dan kecepatan.

Representasi graf pada gambar 4.13 akan dibagi menjadi 3 kelompok arus

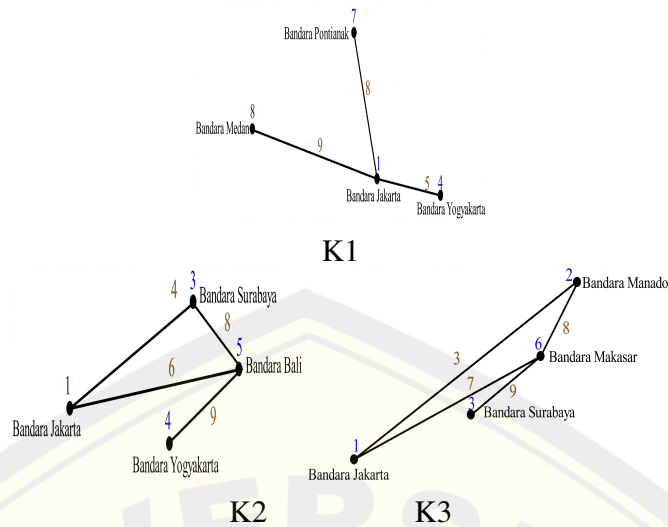


Gambar 4.13 RAC Representasi graf *airport* di Indonesia

transportasi udara untuk membantu pengawasan *AIRNAV*. Pengelompokkan berdasarkan hasil *rainbow antimagic coloring* dimana setiap kelompok tidak memiliki warna yang sama. Setiap kelompok tersebut akan dipantau oleh *AIRNAV* untuk melihat keakuratan informasi dari ATC. Terdapat tiga lokasi yang menjadi tempat *AIRNAV* pusat yaitu Jakarta, Makasar dan Bali. Pengelompokkan tiga arus lalu lintas udara terdapat pada tabel 4.12 berfungsi untuk mengidentifikasi setiap pesawat yang ada pada ruas arus tranportasi udara. Sebagai contoh, pada kelompok K1 dan kelompok K2 terdapat warna yang sama yaitu 8 dan 9. Jika terdapat pesawat di salah satu arus yang memiliki bobot sama, maka untuk mengetahui letak pesawat yaitu dengan cara melihat unsur penjumlahan yang membentuk warna tersebut.

Tabel 4.11: Pengelompokkan arus tranportasi udara

K1	K2	K3
(1,8)	(1,2)	(1,3)
(1,7)	(1,6)	(1,5)
(1,4)	(3,6)	(5,4)
	(2,6)	(3,5)



Gambar 4.14 Pengelompokan arus transportasi udara K1,K2,K3

Penelitian ini menggunakan data simulasi pada masalah transportasi udara. Untuk data yang digunakan memiliki 3 fitur yaitu intensitas cuaca, jumlah penumpang, dan jumlah pesawat. Penelitian ini menggunakan 8 *airport* di Indonesia yang dibagi menjadi 3 kelompok dan dilakukan selama 15 minggu terdapat pada lampiran 4,1 sampai 4.6. Data yang didapatkan merupakan data tanpa normalisasi selanjutnya data di normalisasikan. Dalam penelitian ini, di sisipkan grafik arus transportasi udara di Indonesia. Pada proses *embedding* dapat meminimalkan fitur yang awalnya 3 fitur menjadi 1 fitur. Hasil *embedding* didapatkan dengan memproses *message passing* dan *aggregation*. Pada proses *message passing*, setiap *node* memiliki informasi atau pesan yang dikirimkan ke *node* lain. Matriks *adjacency* dapat dilihat pada proses tersebut. Selain itu, hubungan *node* dengan dirinya sendiri juga dipertimbangkan sehingga menggunakan matriks B sebagai referensi dalam proses *message passing*. Setelah pengiriman pesan, dilakukan proses *aggregation* yaitu menjumlahkan pesan.

Selanjutnya dilakukan simulasi pada dua struktur *neural network* untuk melatih, menguji dan meramalkan data anomali kepadatan arus transportasi udara. Simulasi

ini menggunakan data *time series* yang diperoleh dari proses *embedding Graph Neural Network* (GNN) sebelumnya. Simulasi numerik menggunakan bantuan *software* MATLAB. Dalam simulasi ini menggunakan arsitektur *Neural Network* yaitu ANN-455 dan ANN-574 dengan model ANN yaitu *Feedforwardner*, *Paternet*, *Fitnet*, dan *Cascadeforwardnet*. Pada proses *training* menggunakan parameter fungsi *Lavenberg-Marquadt training*, fungsi *transfer log sigmoid* dan *tangen hiperbolik sigmoid*, jumlah epoch 750, dan laju pembelajaran 0.1. Hasil pelatihan dan pengujian disajikan pada Tabel 4.12 untuk kelompok 1, Tabel 4.13 untuk kelompok 2 dan Tabel 4.14 untuk kelompok 3.

Tabel 4.12: Indikator kinerja arsitektur dan model JST Kelompok1

ANN Model	Arsitektur	MSE Latih	Regresi	Waktu	MSE Uji
<i>Feedforwardnet</i>	ANN-(a)455	$3.2461 \times 10^{-8}$	0.3314	4.0379 s	$3.2495 \times 10^{-8}$
	ANN-(a)574	$3.5513 \times 10^{-8}$	0.23944	1.6567 s	$3.5595 \times 10^{-8}$
<i>Fitnet</i>	ANN-(a)455	$2.0401 \times 10^{-8}$	0.77139	1.8922 s	$4.9117 \times 10^{-8}$
	ANN-(a)574	$1.4568 \times 10^{-7}$	0.64796	1.8654 s	$4.2850 \times 10^{-8}$
<i>patternnet</i>	ANN-(a)455	$9.8743 \times 10^{-8}$	0.78650	2.2797 s	$7.6547 \times 10^{-8}$
	ANN-(a)574	$1.9819 \times 10^{-8}$	0.81312	2.0562 s	$2.0169 \times 10^{-8}$
<i>cascadeforwardnet</i>	ANN-(a)455	$1.4608 \times 10^{-10}$	0.99805	1.8912 s	$1.6754 \times 10^{-10}$
	ANN-(a)574	$2.3665 \times 10^{-10}$	0.89805	3.0302 s	$7.02956 \times 10^{-10}$

Tabel 4.13: Indikator kinerja arsitektur dan model JST Kelompok2

ANN Model	Arsitektur	MSE Latih	Regresi	Waktu	MSE Uji
<i>Feedforwardnet</i>	ANN-(a)455	$4.2561 \times 10^{-7}$	0.35678	3.0369 s	$4.2675 \times 10^{-9}$
	ANN-(a)574	$5.1563 \times 10^{-7}$	0.63644	6.7865 s	$8.5595 \times 10^{-7}$
<i>Fitnet</i>	ANN-(a)455	$4.02781 \times 10^{-8}$	0.65437	3.2456 s	$6.9217 \times 10^{-8}$
	ANN-(a)574	$3.7868 \times 10^{-8}$	0.54326	2.5674 s	$5.28340 \times 10^{-8}$
<i>patternnet</i>	ANN-(a)455	$4.56783 \times 10^{-10}$	0.89765	1.8912 s	$3.5467 \times 10^{-10}$
	ANN-(a)574	$1.4563 \times 10^{-10}$	0.9961	3.0302 s	$1.4325 \times 10^{-10}$
<i>cascadeforwardnet</i>	ANN-(a)455	$7.8473 \times 10^{-9}$	0.65743	2.7689 s	$7.6547 \times 10^{-9}$

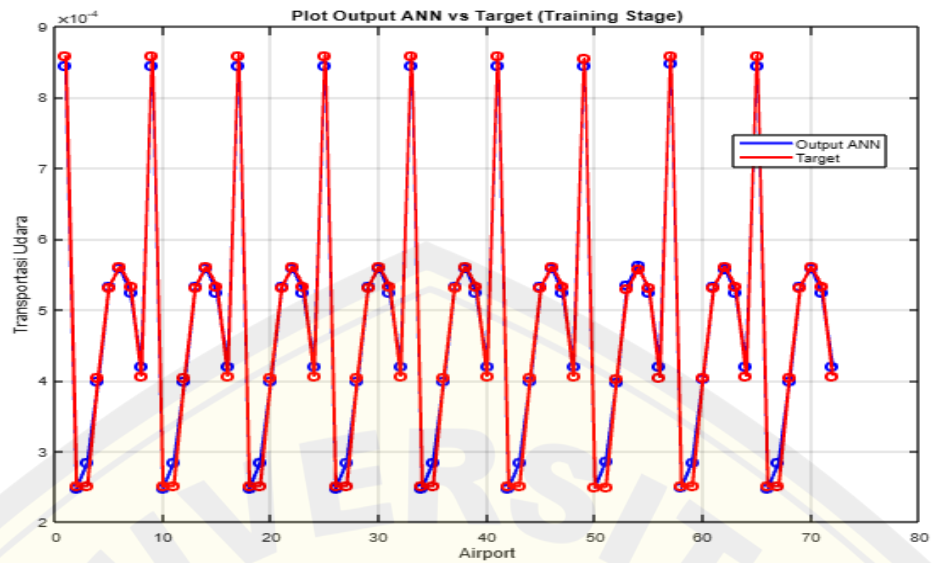
ANN Model	Arsitektur	MSE Latih	Regresi	Waktu	MSE Uji
	ANN-(a)574	$3.8765 \times 10^{-9}$	0.81312	1.5642 s	$2.0169 \times 10^{-9}$

Tabel 4.14: Indikator kinerja arsitektur dan model JST Kelompok3

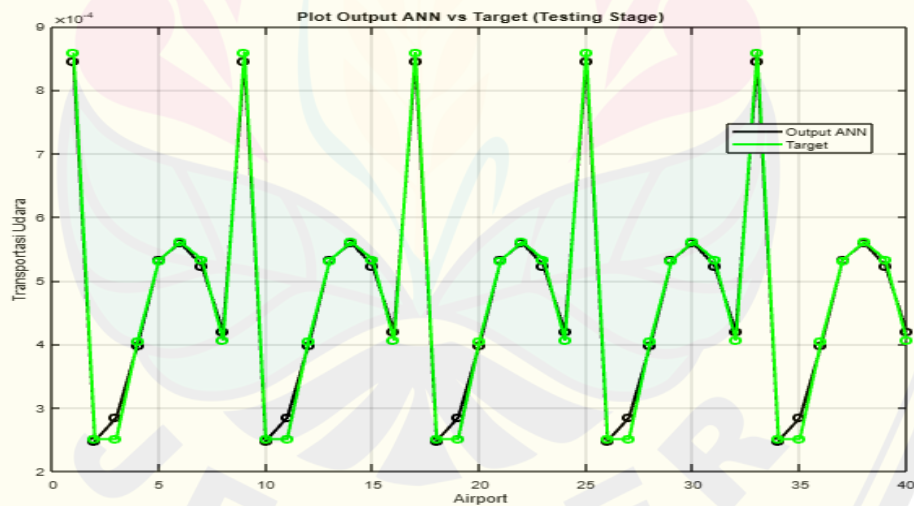
ANN Model	Arsitektur	MSE Latih	Regresi	Waktu	MSE Uji
<i>Feedforwardnet</i>	ANN-(a)455	$1.2345 \times 10^{-10}$	0.9977	1.0987 s	$1.0984 \times 10^{-10}$
	ANN-(a)574	$5.3665 \times 10^{-10}$	0.46732	2,5647 s	$3.21256 \times 10^{-10}$
<i>Fitnet</i>	ANN-(a)455	$4.5632 \times 10^{-9}$	0.68732	1.0082 s	$3.4526 \times 10^{-9}$
	ANN-(a)574	$3.5426 \times 10^{-9}$	0.75412	1.23451 s	$5.6542 \times 10^{-9}$
<i>patternnet</i>	ANN-(a)455	$1.4526 \times 10^{-9}$	0.45623	2.2797 s	$5.6287 \times 10^{-9}$
	ANN-(a)574	$1.9819 \times 10^{-9}$	0.45621	5.1562 s	$6.4567 \times 10^{-9}$
<i>cascaforwardnet</i>	ANN-(a)455	$4.3562 \times 10^{-9}$	0.2341	1.2031 s	$4.1675 \times 10^{-9}$
	ANN-(a)574	$3.2456 \times 10^{-9}$	0.3452	1.0981 s	$3.0091 \times 10^{-9}$

Model yang menghasilkan *Mean Square Error* (MSE) terkecil menjadi indikator model terbaik. Jadi berdasarkan tabel tersebut model terbaik dihasilkan oleh ANN-455 *Cascaforwardnet* dengan uji MSE sebesar  $1.6754 \times 10^{-10}$  pada kelompok 1, ANN-574 *Fitnet* dengan uji MSE sebesar  $1.4325 \times 10^{-10}$  pada kelompok 2 dan ANN-455 *Feedforwardnet* dengan uji MSE sebesar  $1.0984 \times 10^{-10}$  pada kelompok 3. Selain Indikator kinerja juga terdapat plot dari proses *training*, *testing*, dan *forecasting*. Plot ini digunakan untuk menentukan letak dari anomali. Hasil penelitian ini ditunjukkan pada Gambar 4.15 sampai Gambar 4.18. Berdasarkan Gambar 4.17, dapat diketahui bahwa pada minggu berikutnya letak anomali pada kelompok 1 berada pada *airport* pertama yaitu airport di Jakarta. Nilai yang dihasilkan mendekati angka satu yaitu 0,99805. Plot regresi dapat dilihat pada gambar 4.18.

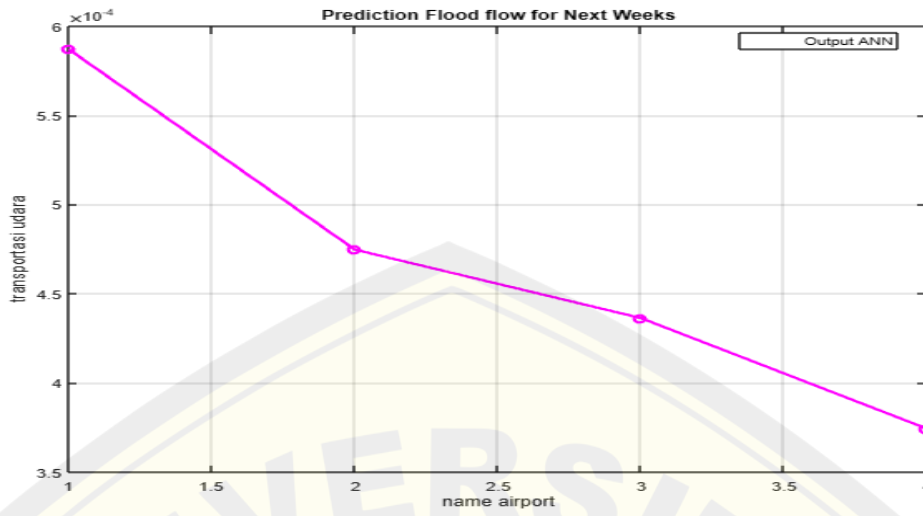




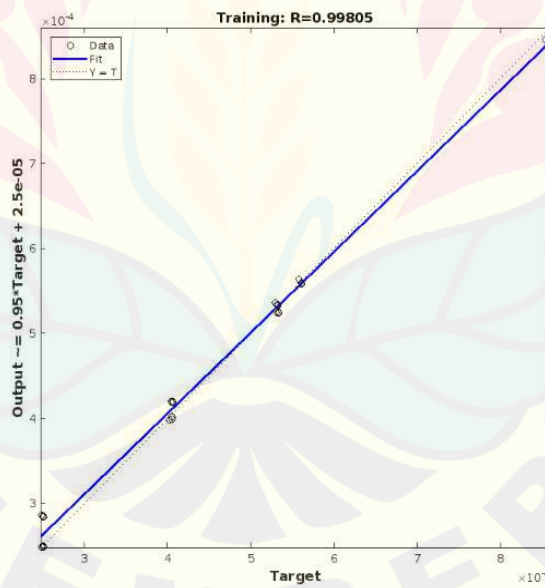
Gambar 4.15 Perbandingan *output* ANN dan data target arus transportasi *airport* pada hasil *training* kelompok 1



Gambar 4.16 Perbandingan *output* ANN dan data target arus transportasi *airport* pada hasil *testing* kelompok 1

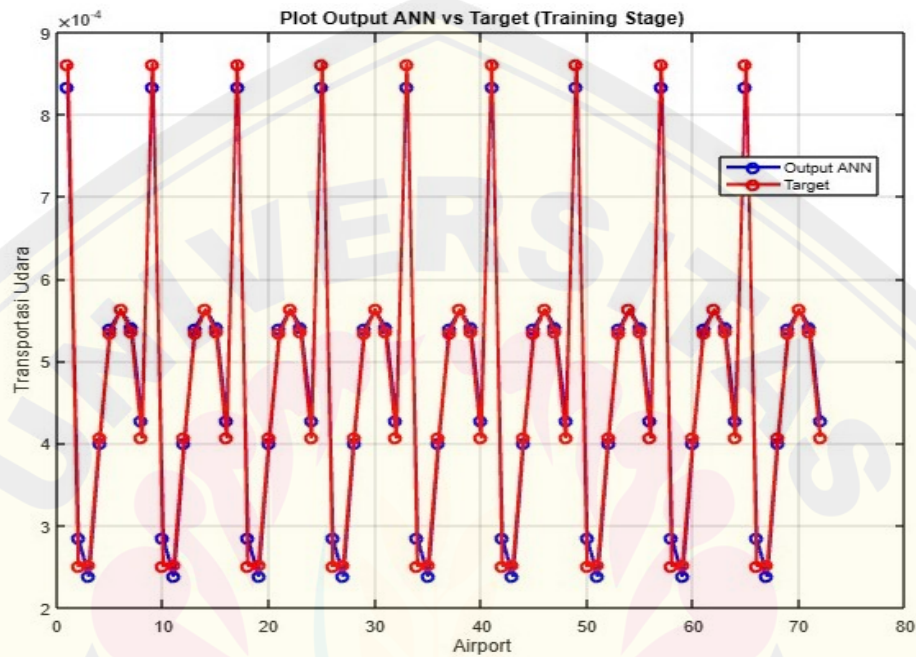


Gambar 4.17 Peramalan arus transportasi *airport* untuk menentukan kepadatan terbesar kelompok 1

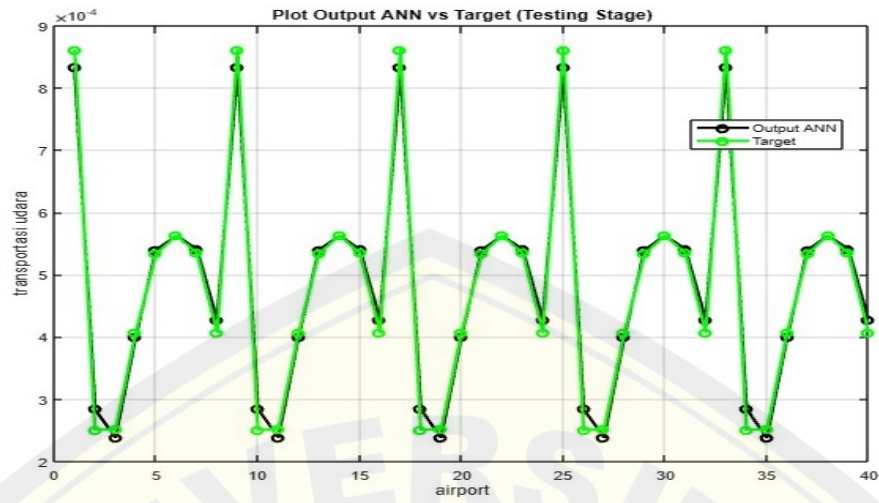


Gambar 4.18 Plot Regresi kelompok 1

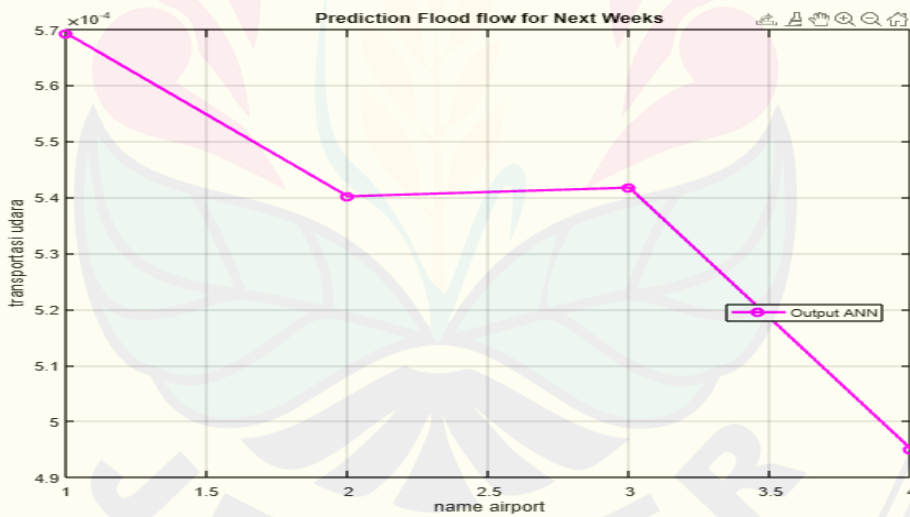
Hasil penelitian ini ditunjukkan pada Gambar 4.19 sampai Gambar 4.22. Berdasarkan Gambar 4.21, dapat diketahui bahwa pada minggu berikutnya letak anomali pada kelompok 2 berada pada *airport* pertama yaitu airport di Jakarta. Nilai yang dihasilkan mendekati angka satu yaitu 0,9961. Plot regresi dapat dilihat pada gambar 4.22.



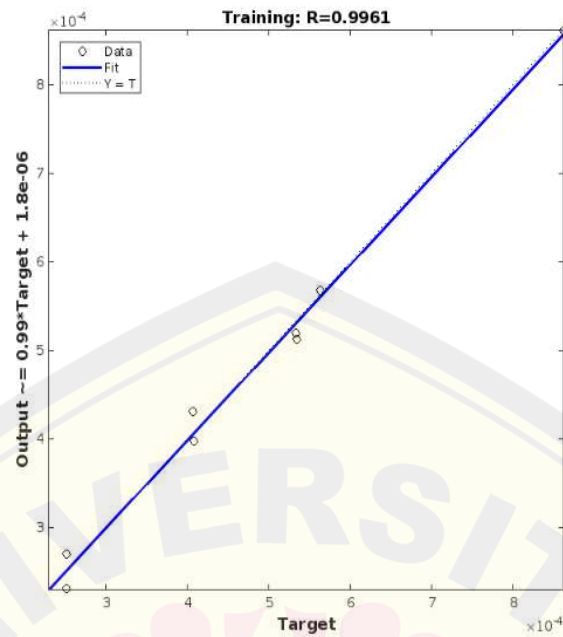
Gambar 4.19 Perbandingan *output* ANN dan data target arus transportasi *airport* pada hasil *training* kelompok 2



Gambar 4.20 Perbandingan *output* ANN dan data target arus transportasi *airport* pada hasil *testing* kelompok 2

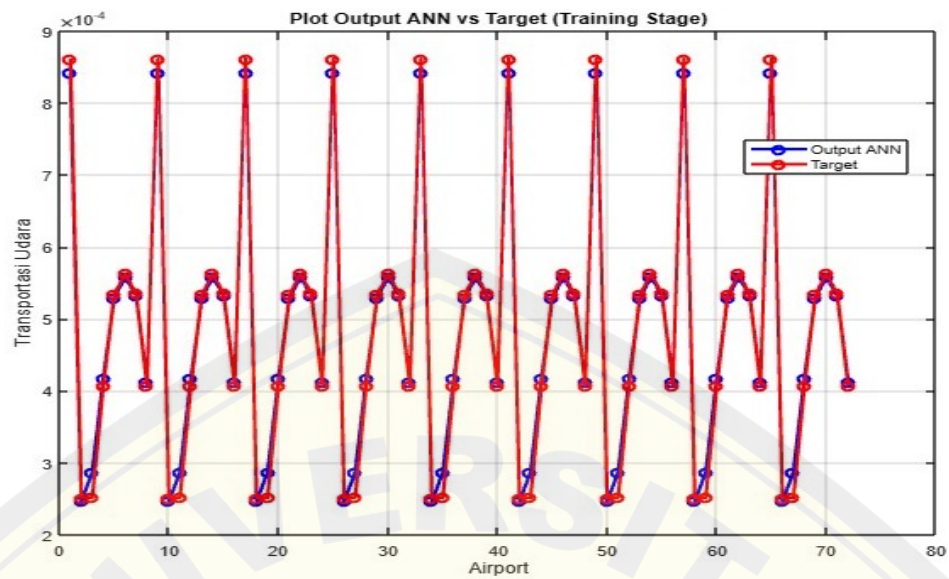


Gambar 4.21 Peramalan arus transportasi *airport* untuk menentukan kepadatan terbesar kelompok 2

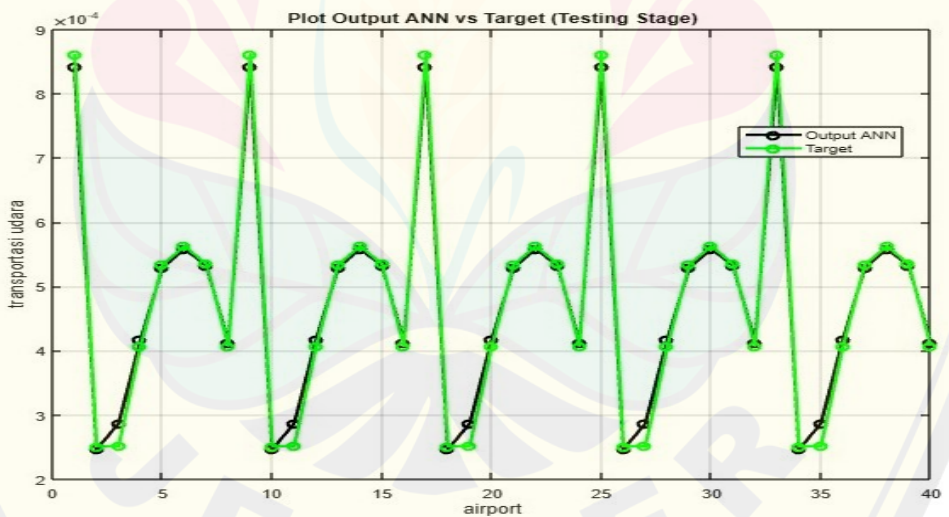


Gambar 4.22 Plot Regresi kelompok 2

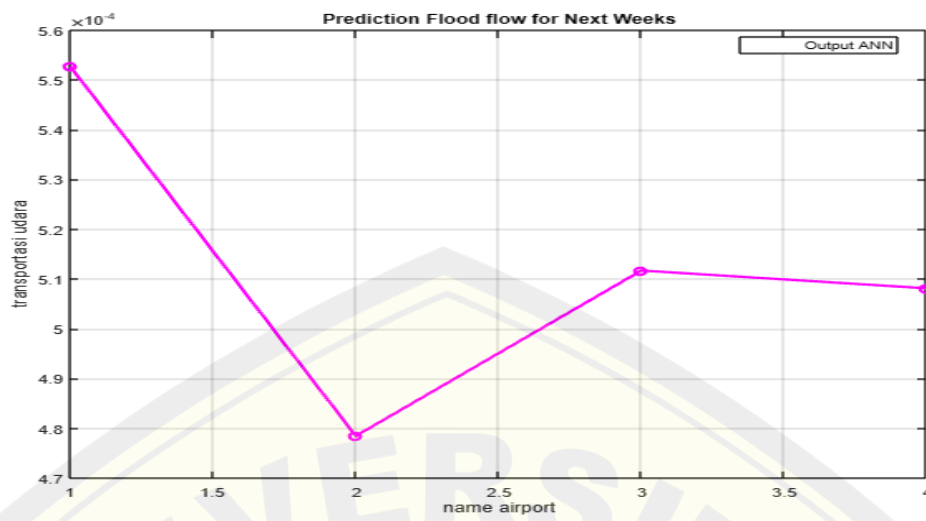
Hasil penelitian ini ditunjukkan pada Gambar 4.23 sampai Gambar 4.26. Berdasarkan Gambar 4.25, dapat diketahui bahwa pada minggu berikutnya letak anomali pada kelompok 3 berada pada *airport* pertama yaitu airport di Jakarta. Nilai yang dihasilkan mendekati angka satu yaitu 0,9977. Plot regresi dapat dilihat pada gambar 4.26.



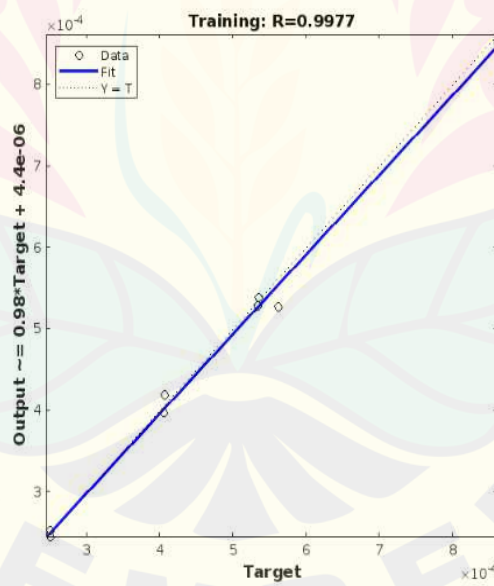
Gambar 4.23 Perbandingan *output* ANN dan data target arus transportasi *airport* pada hasil *training* kelompok 3



Gambar 4.24 Perbandingan *output* ANN dan data target arus transportasi *airport* pada hasil *testing* kelompok 3



Gambar 4.25 Peramalan arus transportasi *airport* untuk menentukan kepadatan terbesar kelompok 3



Gambar 4.26 Plot Regresi kelompok 3

Selanjutnya, menggunakan ANN untuk memperkirakan data *time series*. Pada tahap ini terdapat tiga proses yaitu *training*, *testing* dan *forecasting*. Proses *training* menggunakan empat model dan dua arsitektur ANN. Pada proses *training* jaringan, diperoleh model yang digunakan pada tahap *testing*. Pada tahap *testing* menguji model yang telah diperoleh untuk mengukur kinerja ANN. Sebagai patokan, kami menggunakan *Mean Square Error* (MSE). Berdasarkan hasil *testing*, model ANN terbaik *Cascadeforwardnet* dengan arsitektur 574 untuk kelompok 1, model ANN terbaik *Fitnet* dengan arsitektur 455 untuk kelompok 2 dan model ANN terbaik *Feedforwardnet* dengan arsitektur 455 untuk kelompok 3. Selanjutnya dengan menggunakan model *testing* akan diperoleh data kepadatan arus transportasi udara pada minggu berikutnya. Perkiraan ini ditunjukkan pada Gambar 4.18, Gambar 4.22 dan Gambar 4.26, maka titik anomali berada di airport Jakarta.



**BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN****5.1 Kesimpulan**

Berdasarkan hasil dari pembahasan dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

- a. *Rainbow connection number* pada graf siput ( $S_n$ ), graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ) dan graf lotus ( $Lo_n$ ) menghasilkan tiga teorema baru.
- b. *Rainbow antimagic connection number* pada graf siput ( $S_n$ ), graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ), graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ) dan graf lotus ( $Lo_n$ ) menghasilkan empat teorema baru, dimana semua bilangannya sama dengan batas bawahnya yaitu  $rac(G) = \{rc(G), \Delta(G)\}$ .
- c. Algoritma GNN layer tunggal terbagi menjadi tiga tahap yaitu tahap *training*, *testing* dan *forecasting*. Tahap *training* bertujuan untuk menghasilkan model pelatihan. Pada tahap *testing*, untuk mengukur keakuratan model yang didasarkan pada MSE. Model terbaik digunakan dalam tahap *forecasting* untuk mengetahui anomali kepadatan *airport*. Model ANN terbaik *Cascadeforwardnet* dengan arsitektur 455 untuk kelompok 1, model ANN terbaik *Fitnet* dengan arsitektur 574 untuk kelompok 2 dan model ANN terbaik *Feedforwardnet* dengan arsitektur 455 untuk kelompok 3.
- d. Penerapan *rainbow antimagic coloring number* dapat menentukan banyak perusahaan yang mengatur penempatan Air Traffic Controller (ATC). Pada simulasi MATLAB dengan teknik *graph neural network* menghasilkan anomali pada kelompok 1, 2 dan 3 di Jakarta. Kepadatan arus lalu lintas berada pada bandara Jakarta. Penempatan *AIRNAV* pada kelompok 1 berada di Jakarta, kelompok 2 berada di Bali dan kelompok 3 berada di Makasar.

## 5.2 Saran

Berdasarkan penelitian mengenai *rainbow antimagic coloring* dalam mencari nilai *rainbow antimagic connection number* ( $rac(G)$ ) pada graf siput ( $S_n$ ), graf tunas kelapa ( $CR_{n,m}$ ), graf kipas tangkai ( $Kt_n$ ) dan graf lotus ( $Lo_n$ ) maka peneliti memberi saran kepada peneliti lain untuk melakukan penelitian mengenai *rainbow antimagic coloring* pada graf hasil operasi. Selain itu, peneliti juga menyarankan peneliti lain untuk menerapkan *rainbow antimagic coloring* pada skema aplikasi lainnya.



DAFTAR PUSTAKA

- Fredlina, K. Q., Salman, A. N. M., Julihara, I. G. P. K., Werthi, K. T., Astawa, N. L. P. N. S. P. 2021. *Rainbow Coloring of Three New Graph Classes. Journal of Physics: Conference Series*, 1783(1)..
- Fujita, S., Liu, H., Magnant, C. 2015. *Rainbow -connection in dense graphs. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 93(1), 33–52.
- Budi, H. S., Tirta, I. M., Agustin, I. H., Kristiana, A. I. 2021. *rainbow antimagic coloring of graphs.*
- Dafik, Alfarisi, R., dan Agustin, I. H. 2019. *On Rainbow Edge Antimagic Connection Number of Graphs. Journal of Physics*, 1-5.
- Dafik, Susanto, F., Alfarisi, R., Septory, B. J., Agustin, I. H., Venkatachalam, M. 2021. *On rainbow antimagic coloring of graphs. Advanced Mathematical Models and Applications*, 6(3), 278–291.
- Jabbar, Z. L. Al, Adawiyah, R., Albirri, E. R., Agustin, I. H. 2020. *On rainbow antimagic coloring of some special graph.*
- Joedo, J. C., Dafik, Kristiana, A. I., Agustin, I. H., Nisviasari, R. 2022. *On the rainbow antimagic coloring of vertex amalgamation of graphs. Journal of Physics: Conference Series*, 2157(1), 012014.
- Septory, B. J., Utoyo, M. I., Sulistiyono, B., Agustin, I. H. 2021. *On rainbow antimagic coloring of special graphs.*
- Sulistiyono, B., Slamini, Dafik, Agustin, I. H., Alfarisi, R. 2020. *On rainbow antimagic coloring of some graphs. Journal of Physics: Conference Series*, 1465(1).

Slamin. 2009. *Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf*. Jember. Universitas Jember.

Anggraini, W., Shiddiq, M. M., dan Affandi P. 2018. *Bilangan Rainbow Connection Berdasarkan Derajat Minimum Pada Graf*. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan “epsilon”*, 52-60.

Lubis, H., Surbakti, N. M., Kasih, R. I., Silaban, D. R., dan Sugeng, K. A. 2019. *Rainbow connection and strong rainbow connection of the crystal graph and neurons graph*. *International Symposium on Current Progress in Mathematics and Sciences*, 1-5.

Mudjiyanto, B. 2018. *Exploratory Research In Communication Study*. *Jurnal Studi Komunikasi Dan Media*, 65-74.

Sudiby, N. A., dan Komsatun, S., (2018). *Pelabelan Total Tak Reguler Pada Graf Barbel*. *journal of Mathematics and Mathematics Education*, 16-18.

Irfandi, A.H., dan Taufik, M. 2013. *Penggunaan Secondary Surveillance Radar untuk Penentuan Posisi Pesawat Udara*. *Journal of GEOID*, 17-24.

## LAMPIRAN

Lampiran 4.1 Data Non-normalization Pengamatan Airport Kelompok 1

<b>Minggu ke-</b>	<b>Intensitas Cuaca (mm/minggu)</b>	<b>Jumlah Penumpang (orang/minggu)</b>	<b>Jumlah Pesawat (unit/minggu)</b>
1	53.70	20500.00	450.00
1	42.50	2900.00	113.00
1	53.70	800.00	90.00
1	35.50	3300.00	115.00
2	63.70	20510.00	460.00
2	52.50	2910.00	123.00
2	63.70	810.00	100.00
2	45.50	3310.00	125.00
3	93.70	20540.00	490.00
3	82.50	2940.00	153.00
3	93.70	840.00	130.00
3	75.50	3340.00	155.00
4	153.70	20600.00	550.00
4	142.50	3000.00	213.00
4	153.70	900.00	190.00
4	135.50	3400.00	215.00
5	113.70	20560.00	510.00
5	102.50	2960.00	173.00
5	113.70	860.00	150.00
5	95.50	3360.00	175.00
6	78.70	20525.00	475.00
6	67.50	2925.00	138.00
6	78.70	825.00	115.00
6	60.50	3325.00	140.00
7	98.70	20545.00	495.00
7	87.50	2945.00	158.00
7	98.70	845.00	135.00
7	80.50	3345.00	160.00
8	72.70	20519.00	469.00
8	61.50	2919.00	132.00
8	72.70	819.00	109.00
8	54.50	3319.00	134.00
9	163.70	20610.00	560.00
9	152.50	3010.00	223.00

<b>Minggu ke-</b>	<b><i>Intensitas Cuaca (mm/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Penumpang (orang/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Pesawat (unit/minggu)</i></b>
9	163.70	910.00	200.00
9	145.50	3410.00	225.00
10	109.70	20556.00	506.00
10	98.50	2956.00	169.00
10	109.70	856.00	146.00
10	91.50	3356.00	171.00
11	148.70	20595.00	545.00
11	137.50	2995.00	208.00
11	148.70	895.00	185.00
11	130.50	3395.00	210.00
12	90.70	20537.00	487.00
12	79.50	2937.00	150.00
12	90.70	837.00	127.00
12	72.50	3337.00	152.00
13	192.70	20639.00	589.00
13	181.50	3039.00	252.00
13	192.70	939.00	229.00
13	174.50	3439.00	254.00
14	213.70	20660.00	610.00
14	202.50	3060.00	273.00
14	213.70	960.00	250.00
14	195.50	3460.00	275.00
15	99.70	20546.00	496.00
15	88.50	2946.00	159.00
15	99.70	846.00	136.00
15	81.50	3346.00	161.00

Lampiran 4.2 Data Normalization Pengamatan Airport Kelompok 1

<b>Minggu ke-</b>	<b><i>Intensitas Cuaca (mm/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Penumpang (orang/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Pesawat (unit/minggu)</i></b>
1	0.87	0.90	0.90
1	0.59	0.19	0.15
1	0.87	0.10	0.10
1	0.41	0.20	0.16
2	0.87	0.90	0.90
2	0.59	0.19	0.15
2	0.87	0.10	0.10
2	0.41	0.20	0.16
3	0.87	0.90	0.90
3	0.59	0.19	0.15
3	0.87	0.10	0.10
3	0.41	0.20	0.16
4	0.87	0.90	0.90
4	0.59	0.19	0.15
4	0.87	0.10	0.10
4	0.41	0.20	0.16
5	0.87	0.90	0.90
5	0.59	0.19	0.15
5	0.87	0.10	0.10
5	0.41	0.20	0.16
6	0.87	0.90	0.90
6	0.59	0.19	0.15
6	0.87	0.10	0.10
6	0.41	0.20	0.16
7	0.87	0.90	0.90
7	0.59	0.19	0.15
7	0.87	0.10	0.10
7	0.41	0.20	0.16
8	0.87	0.90	0.90
8	0.59	0.19	0.15
8	0.87	0.10	0.10
8	0.41	0.20	0.16
9	0.87	0.90	0.90
9	0.59	0.19	0.15
9	0.87	0.10	0.10
9	0.41	0.20	0.16
10	0.87	0.90	0.90
10	0.59	0.19	0.15

<b>Minggu ke-</b>	<b><i>Intensitas Cuaca (mm/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Penumpang (orang/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Pesawat (unit/minggu)</i></b>
10	0.87	0.10	0.10
10	0.41	0.20	0.16
11	0.87	0.90	0.90
11	0.59	0.19	0.15
11	0.87	0.10	0.10
11	0.41	0.20	0.16
12	0.87	0.90	0.90
12	0.59	0.19	0.15
12	0.87	0.10	0.10
12	0.41	0.20	0.16
13	0.87	0.90	0.90
13	0.59	0.19	0.15
13	0.87	0.10	0.10
13	0.41	0.20	0.16
14	0.87	0.90	0.90
14	0.59	0.19	0.15
14	0.87	0.10	0.10
14	0.41	0.20	0.16
15	0.87	0.90	0.90
15	0.59	0.19	0.15
15	0.87	0.10	0.10
15	0.41	0.20	0.16



Lampiran 4.3 Data Non-normalization Pengamatan Airport Kelompok 2

<b>Minggu ke-</b>	<b>Intensitas Cuaca (mm/minggu)</b>	<b>Jumlah Penumpang (orang/minggu)</b>	<b>Jumlah Pesawat (unit/minggu)</b>
1	53.70	20500.00	450.00
1	33.50	900.00	90.00
1	44.50	5200.00	202.00
1	23.00	3800.00	145.00
2	63.70	20510.00	460.00
2	33.00	3810.00	155.00
2	43.50	910.00	100.00
2	54.50	5210.00	212.00
3	93.70	20540.00	490.00
3	73.50	940.00	130.00
3	84.50	5240.00	242.00
3	63.00	3840.00	185.00
4	153.70	20600.00	550.00
4	133.50	1000.00	190.00
4	144.50	5300.00	302.00
4	123.00	3900.00	245.00
5	113.70	20560.00	510.00
5	93.50	960.00	150.00
5	104.50	5260.00	262.00
5	83.00	3860.00	205.00
6	78.70	20525.00	475.00
6	58.50	925.00	115.00
6	69.50	5225.00	227.00
6	48.00	3825.00	170.00
7	98.70	20545.00	495.00
7	78.50	945.00	135.00
7	89.50	5245.00	247.00
7	68.00	3845.00	190.00
8	72.70	20519.00	469.00
8	52.50	919.00	109.00
8	63.50	5219.00	221.00
8	42.00	3819.00	164.00
9	163.70	20610.00	560.00
9	143.50	1010.00	200.00
9	154.50	5310.00	312.00
9	133.00	3910.00	255.00
10	109.70	20556.00	506.00
10	89.50	956.00	146.00

<b>Minggu ke-</b>	<b><i>Intensitas Cuaca (mm/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Penumpang (orang/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Pesawat (unit/minggu)</i></b>
10	100.50	5256.00	258.00
10	79.00	3856.00	201.00
11	148.70	20595.00	545.00
11	128.50	995.00	185.00
11	139.50	5295.00	297.00
11	118.00	3895.00	240.00
12	90.70	20537.00	487.00
12	70.50	937.00	127.00
12	81.50	5237.00	239.00
12	60.00	3837.00	182.00
13	192.70	20639.00	589.00
13	172.50	1039.00	229.00
13	183.50	5339.00	341.00
13	162.00	3939.00	284.00
14	213.70	20660.00	610.00
14	193.50	1060.00	250.00
14	204.50	5360.00	362.00
14	183.00	3960.00	305.00
15	99.70	20546.00	496.00
15	79.50	946.00	136.00
15	90.50	5246.00	248.00
15	69.00	3846.00	191.00

Lampiran 4.4 Data Normalization Pengamatan Airport Kelompok 2

<b>Minggu ke-</b>	<b><i>Intensitas Cuaca (mm/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Penumpang (orang/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Pesawat (unit/minggu)</i></b>
1	0.87	0.90	0.90
1	0.36	0.10	0.10
1	0.64	0.28	0.35
1	0.10	0.22	0.22
2	0.87	0.90	0.90
2	0.36	0.10	0.10
2	0.64	0.28	0.35
2	0.10	0.22	0.22
3	0.87	0.90	0.90
3	0.36	0.10	0.10
3	0.64	0.28	0.35
3	0.10	0.22	0.22
4	0.87	0.90	0.90
4	0.36	0.10	0.10
4	0.64	0.28	0.35
4	0.10	0.22	0.22
5	0.87	0.90	0.90
5	0.36	0.10	0.10
5	0.64	0.28	0.35
5	0.10	0.22	0.22
6	0.87	0.90	0.90
6	0.36	0.10	0.10
6	0.64	0.28	0.35
6	0.10	0.22	0.22
7	0.87	0.90	0.90
7	0.36	0.10	0.10
7	0.64	0.28	0.35
7	0.10	0.22	0.22
8	0.87	0.90	0.90
8	0.36	0.10	0.10
8	0.64	0.28	0.35
8	0.10	0.22	0.22
9	0.87	0.90	0.90
9	0.36	0.10	0.10
9	0.64	0.28	0.35
9	0.10	0.22	0.22
10	0.87	0.90	0.90
10	0.36	0.10	0.10

<b>Minggu ke-</b>	<b><i>Intensitas Cuaca (mm/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Penumpang (orang/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Pesawat (unit/minggu)</i></b>
10	0.64	0.28	0.35
10	0.10	0.22	0.22
11	0.87	0.90	0.90
11	0.36	0.10	0.10
11	0.64	0.28	0.35
11	0.10	0.22	0.22
12	0.87	0.90	0.90
12	0.36	0.10	0.10
12	0.64	0.28	0.35
12	0.10	0.22	0.22
13	0.87	0.90	0.90
13	0.36	0.10	0.10
13	0.64	0.28	0.35
13	0.10	0.22	0.22
14	0.87	0.90	0.90
14	0.36	0.10	0.10
14	0.64	0.28	0.35
14	0.10	0.22	0.22
15	0.87	0.90	0.90
15	0.36	0.10	0.10
15	0.64	0.28	0.35
15	0.10	0.22	0.22

Lampiran 4.5 Data Non-normalization Pengamatan Airport Kelompok 3

<b>Minggu ke-</b>	<b><i>Intensitas Cuaca (mm/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Penumpang (orang/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Pesawat (unit/minggu)</i></b>
1	53.70	20500.00	450.00
1	23.00	3800.00	145.00
1	55.00	7600.00	220.00
1	35.50	3300.00	115.00
2	63.70	20510.00	460.00
2	54.50	5210.00	212.00
2	65.00	7610.00	230.00
2	45.50	3310.00	125.00
3	93.70	20540.00	490.00
3	63.00	3840.00	185.00
3	95.00	7640.00	260.00
3	75.50	3340.00	155.00
4	153.70	20600.00	550.00
4	123.00	3900.00	245.00
4	155.00	7700.00	320.00
4	135.50	3400.00	215.00
5	113.70	20560.00	510.00
5	83.00	3860.00	205.00
5	115.00	7660.00	280.00
5	95.50	3360.00	175.00
6	78.70	20525.00	475.00
6	48.00	3825.00	170.00
6	80.00	7625.00	245.00
6	60.50	3325.00	140.00
7	98.70	20545.00	495.00
7	68.00	3845.00	190.00
7	100.00	7645.00	265.00
7	80.50	3345.00	160.00
8	72.70	20519.00	469.00
8	42.00	3819.00	164.00
8	74.00	7619.00	239.00
8	54.50	3319.00	134.00
9	163.70	20610.00	560.00
9	133.00	3910.00	255.00
9	165.00	7710.00	330.00
9	145.50	3410.00	225.00
10	109.70	20556.00	506.00

<b>Minggu ke-</b>	<b><i>Intensitas Cuaca (mm/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Penumpang (orang/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Pesawat (unit/minggu)</i></b>
10	79.00	3856.00	201.00
10	111.00	7656.00	276.00
10	91.50	3356.00	171.00
11	148.70	20595.00	545.00
11	118.00	3895.00	240.00
11	150.00	7695.00	315.00
11	130.50	3395.00	210.00
12	90.70	20537.00	487.00
12	60.00	3837.00	182.00
12	92.00	7637.00	257.00
12	72.50	3337.00	152.00
13	192.70	20639.00	589.00
13	162.00	3939.00	284.00
13	194.00	7739.00	359.00
13	174.50	3439.00	254.00
14	213.70	20660.00	610.00
14	183.00	3960.00	305.00
14	215.00	7760.00	380.00
14	195.50	3460.00	275.00
15	99.70	20546.00	496.00
15	69.00	3846.00	191.00
15	101.00	7646.00	266.00
15	81.50	3346.00	161.00

Lampiran 4.6 Data Normalization Pengamatan Airport Kelompok 3

<b>Minggu ke-</b>	<b><i>Intensitas Cuaca (mm/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Penumpang (orang/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Pesawat (unit/minggu)</i></b>
1	0.87	0.90	0.90
1	0.10	0.22	0.22
1	0.90	0.38	0.39
1	0.41	0.20	0.16
2	0.87	0.90	0.90
2	0.10	0.22	0.22
2	0.90	0.38	0.39
2	0.41	0.20	0.16
3	0.87	0.90	0.90
3	0.10	0.22	0.22
3	0.90	0.38	0.39
3	0.41	0.20	0.16
4	0.87	0.90	0.90
4	0.10	0.22	0.22
4	0.90	0.38	0.39
4	0.41	0.20	0.16
5	0.87	0.90	0.90
5	0.10	0.22	0.22
5	0.90	0.38	0.39
5	0.41	0.20	0.16
6	0.87	0.90	0.90
6	0.10	0.22	0.22
6	0.90	0.38	0.39
6	0.41	0.20	0.16
7	0.87	0.90	0.90
7	0.10	0.22	0.22
7	0.90	0.38	0.39
7	0.41	0.20	0.16
8	0.87	0.90	0.90
8	0.10	0.22	0.22
8	0.90	0.38	0.39
8	0.41	0.20	0.16
9	0.87	0.90	0.90
9	0.10	0.22	0.22
9	0.90	0.38	0.39
9	0.41	0.20	0.16
10	0.87	0.90	0.90
10	0.10	0.22	0.22

<b>Minggu ke-</b>	<b><i>Intensitas Cuaca (mm/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Penumpang (orang/minggu)</i></b>	<b><i>Jumlah Pesawat (unit/minggu)</i></b>
10	0.90	0.38	0.39
10	0.41	0.20	0.16
11	0.87	0.90	0.90
11	0.10	0.22	0.22
11	0.90	0.38	0.39
11	0.41	0.20	0.16
12	0.87	0.90	0.90
12	0.10	0.22	0.22
12	0.90	0.38	0.39
12	0.41	0.20	0.16
13	0.87	0.90	0.90
13	0.10	0.22	0.22
13	0.90	0.38	0.39
13	0.41	0.20	0.16
14	0.87	0.90	0.90
14	0.10	0.22	0.22
14	0.90	0.38	0.39
14	0.41	0.20	0.16
15	0.87	0.90	0.90
15	0.10	0.22	0.22
15	0.90	0.38	0.39
15	0.41	0.20	0.16



## Lampiran 4.3 Pemrograman MATLAB GNN dengan Satu Layer

```

% OK 95%
% Spatio Graph Temporal Neural Networks
% Study Case: Transportasi Airport di Indonesia

clear; clc; close all; warning off all;

% Membuat matriks B = Adjacency + Identitas;
data = dlmread('TSNN_Graph_Airport.txt');
maxx = max(max(data));
matrik = zeros(maxx);
for i = 1:length(data(:,1))
    matrik(data(i,1),data(i,2))=1;
end
matrik=matrik+matrik';
G = graph(matrik);
n = numnodes(G);
e = numedges(G);
Adj = adjacency(G);
A = full(Adj);
I = eye(n,n);
B = A + I; % Matriks ketetanggaan termasuk loop di setiap titiknya
F = graph(A);
plot(F, 'LineWidth',2, 'EdgeColor','k', 'NodeColor','b');
title('Representasi Graph Neural Network dari Transportasi Airport di
Indonesia');

% Membaca matriks H_vi yg ada dalam file excell
H = xlsread('Data Pesawat Normalisasi.xlsx',1,'B18:D25');
% H = xlsread('Data Pesawat.xlsx',1,'B3:D10');

% Inisialisasi parameter
jum_feat = size(H,2); % Jumlah feature
for i = 1:jum_feat
    w(1,i) = [0.1]; % Bobot awal
end
alpha = 0.5; % Learning rate (alpha)

% Proses embedding
Loss_vec = [];
weight = [];
embedding_vec = [];
iteration = input('jumlah iterasi :');
for i = 1:iteration
% Parameter m_vi
for j = 1:n
    m_vi(j,1) = dot(w,H(j,:));
end

% Menjumlahkan berdasarkan matriks B
for j = 1:n

```

```

    k = B(:,j);
    h_vi(j,1) = sum(m_vi(k==1),1); % Hasil embedding
end

% Menghitung Loss
Loss_new = 0;
for j = 1:size(B,1)
    for k = 1:size(B,1)
        if B(j,j) == 1 && A(k,j) == 1
            Loss = norm(h_vi(j,1)-h_vi(k,1),inf);
            Loss_new = Loss_new + Loss;
        else
            Loss_new = Loss_new;
        end
    end
end
Loss_new = (Loss_new/2)/e^2;

% Memperbarui matriks H_vi (Ha)
for j = 1:n
    C = sum(H,2);
    H(j,:) = H(j,:) ./ C(j) .* h_vi(j);
end

% Memperbarui bobot (learning weight)
for j = 1:size(w,2)
    w(1,j) = w(1,j) + alpha * (sum(H(:,j))/n) * Loss_new;
end

% Hasil Loss
Loss_vec = [Loss_vec, Loss_new];
weight = [weight; w];
embedding_vec = [embedding_vec, h_vi];
end

Loss_vec
size_loss = size(Loss_vec)
weight
size_bobot = size(weight)

% Menyimpan hasil embedding
% Data dirubah sesuai pengamatan dengan angka 1, 2, ..., 15
h_vi9 = h_vi;
size_embedding = size(h_vi9);
save TSNN_Pesawat_Data9 h_vi9

% Menampilkan grafik
figure
spy(B);
title('Matrik Ketetangaan Hasil Nodes Embedding');
ylabel('Nama-nama Airport');

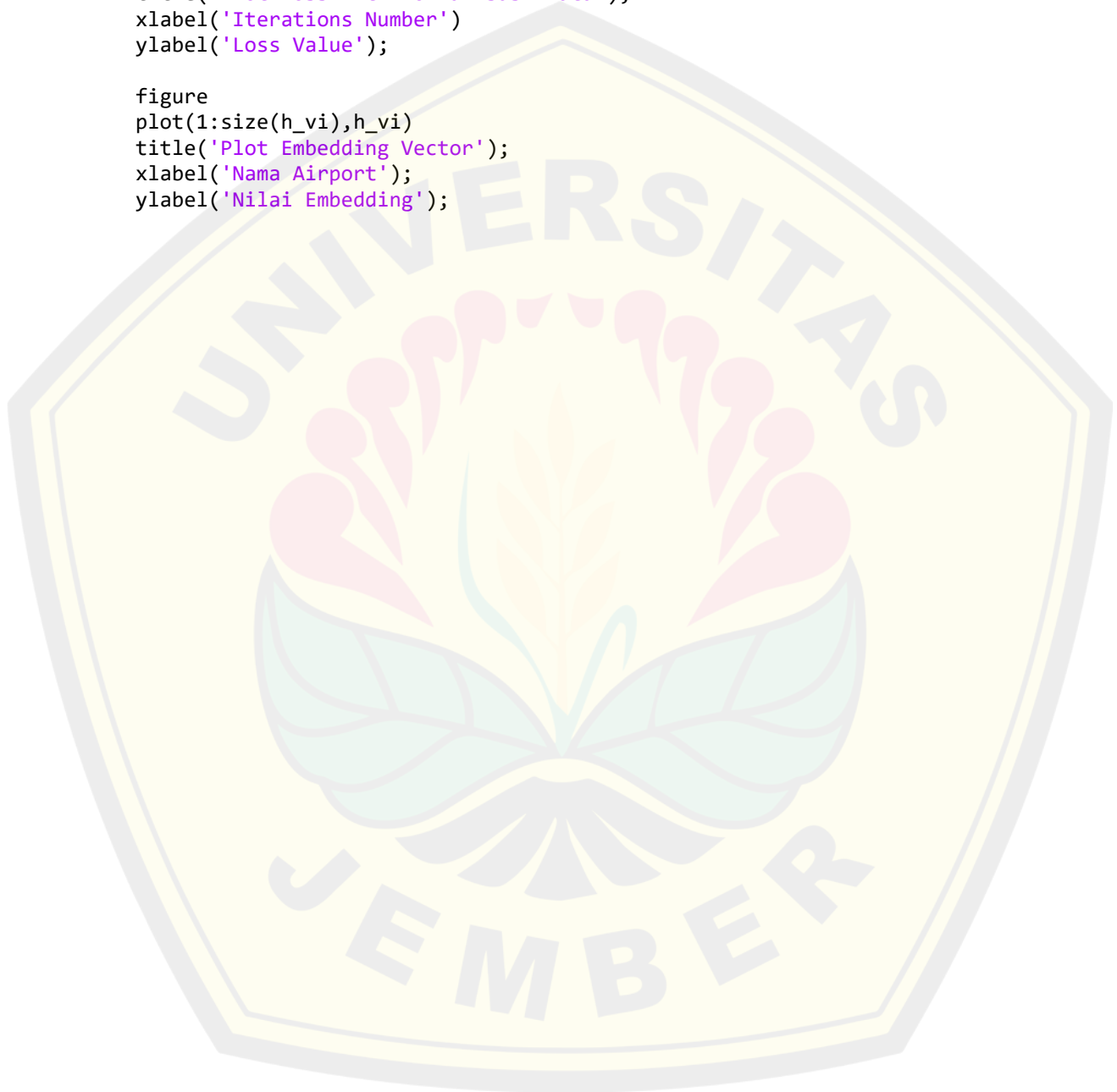
```

```
xlabel('Nama-nama Airport');

figure
heatmap(h_vi, 'colormap', summer);
title('Heatmap Hasil Nodes Embedding');
ylabel('Nama Airport');
xlabel('Time Series Data Pengamatan');

figure
% plot(1:iteration, Loss_vec);
plot(Loss_vec, 'b-', 'LineWidth', 2);
title('Plot Loss With Normalisasi Data');
xlabel('Iterations Number')
ylabel('Loss Value');

figure
plot(1:size(h_vi), h_vi)
title('Plot Embedding Vector');
xlabel('Nama Airport');
ylabel('Nilai Embedding');
```



Lampiran 4.4 Pemrograman MATLAB Tahap *Training*

```
clear; clc; close all; warning off all;

% Membaca data
load TSNN_Pesawat_Data1;
load TSNN_Pesawat_Data2;
load TSNN_Pesawat_Data3;
load TSNN_Pesawat_Data4;
load TSNN_Pesawat_Data5;
load TSNN_Pesawat_Data6;
load TSNN_Pesawat_Data7;
load TSNN_Pesawat_Data8;
load TSNN_Pesawat_Data9;
load TSNN_Pesawat_Data10;
load TSNN_Pesawat_Data11;
load TSNN_Pesawat_Data12;
load TSNN_Pesawat_Data13;
load TSNN_Pesawat_Data14;
load TSNN_Pesawat_Data15;
data_heat = [h_vi1 h_vi2 h_vi3 h_vi4 h_vi5 h_vi6 h_vi7 h_vi8 h_vi9 h_vi10
h_vi11 h_vi12 h_vi13 h_vi14 h_vi15];
data=[h_vi1; h_vi2; h_vi3; h_vi4; h_vi5; h_vi6; h_vi7; h_vi8; h_vi9;
h_vi10; h_vi11; h_vi12; h_vi13; h_vi14; h_vi15];

% figure
% heatmap(data_heat, 'colormap', summer);
% title('The Results from Nodes Embedding');
% ylabel('Airport');
% xlabel('Time Series Data Obseravations');

tic

% Menyiapkan data latih
Minggu_Latih = 10;
t = 4; % Jumlah pola data yang ingin dipelajari JST

data_latih = zeros(Minggu_Latih*t-t,t);
for m = 1:Minggu_Latih*t-t
    for n = 1:t
        data_latih(m,n) = data(m+n-1);
    end
end

% Menyiapkan target latih
target_latih = zeros(Minggu_Latih*t-t,1);
for m = 1:Minggu_Latih*t-t
    target_latih(m) = data(t+m);
end

% Melakukan transpose terhdp data latih normalisasi dan target latih
normalisasi
```

```

data_latih = data_latih';
target_latih = target_latih';

% Membangun arsitektur JST dengan hidden layer dan jumlah neuron tertentu
% JST=feedforwardnet([4 5 5]);
% JST=feedforwardnet([5 7 4]);

% JST=fitnet([4 5 5]);
% JST=fitnet([5 7 4]);

% JST=patternnet([4 5 5]);
% JST=patternnet([5 7 4]);

% JST = cascadeforwardnet([4 5 5]);
% JST = cascadeforwardnet([5 7 4]);

JST.trainFcn='trainlm';
JST.layers{1}.transferFcn='logsig'; % logsig = Log Sigmoid
JST.layers{2}.transferFcn='tansig'; % tansig = Hyperbolic Tangent Sigmoid
JST.layers{3}.transferFcn='logsig';
JST.trainParam.epochs = 750;
JST.trainParam.goal = 1e-10;
JST.trainParam.lr=0.1;
JST.divideParam.trainRatio=1;
JST.divideParam.valRatio=0;
JST.divideParam.testRatio=0;
JST.trainParam.max_fail=100;

% Proses pelatihan dengan JST
JST = train(JST,data_latih,target_latih);
% disp('bobot');
% bobot=JST.IW{1};
% disp('bias');
% bias=JST.b{1};

% Membaca hasil pelatihan
hasil_latih = sim(JST,data_latih);

% Menghitung performansi untuk local error secara manual
nilai_error_latih = hasil_latih - target_latih;
% MAE_latih = mean(abs(nilai_error_latih));
% korelasi_latih = corrcoef(hasil_latih_norm-target_latih_norm);
% korelasi_latih = abs(korelasi(2,1)*100);
MSE_latih = (1/length(target_latih))*sum(nilai_error_latih.^2)
% Performance_latih = perform(JST,hasil_latih_norm,target_latih_norm);
% RMSE_latih = sqrt(sum((nilai_error_latih).^2)/length(target_latih_norm));

Waktu = toc;
disp(['Waktu komp. pelatihan adalah : ',num2str(Waktu),' detik']);

% Menampilkan grafik hasil pelatihan
figure
plot(hasil_latih,'bo-','LineWidth',2);

```

```
hold on
plot(target_latih,'ro-','LineWidth',2);
grid on
title('Plot Output ANN vs Target (Training Stage)');
xlabel('Airport')
ylabel('Transportasi Udara');
legend('Output ANN','Target','Location','Best');
hold off

% Menyimpan model JST hasil pelatihan
save JST
```



Lampiran 4.5 Pemrograman MATLAB Tahap *Testing*

```
load TSNN_Pesawat_Data1;
load TSNN_Pesawat_Data2;
load TSNN_Pesawat_Data3;
load TSNN_Pesawat_Data4;
load TSNN_Pesawat_Data5;
load TSNN_Pesawat_Data6;
load TSNN_Pesawat_Data7;
load TSNN_Pesawat_Data8;
load TSNN_Pesawat_Data9;
load TSNN_Pesawat_Data10;
load TSNN_Pesawat_Data11;
load TSNN_Pesawat_Data12;
load TSNN_Pesawat_Data13;
load TSNN_Pesawat_Data14;
load TSNN_Pesawat_Data15;

data=[h_vi1; h_vi2; h_vi3; h_vi4; h_vi5; h_vi6; h_vi7; h_vi8; h_vi9;
h_vi10; h_vi11; h_vi12; h_vi13; h_vi14; h_vi15];

%% Tahap Pengujian JST
% Menyiapkan data uji
Minggu_Latih = 10;
Minggu_Uji = 5;
t = 4;

data_uji = zeros((Minggu_Uji+1)*t-t,t);
for m = 1:(Minggu_Uji+1)*t-t
    for n = 1:t
        data_uji(m,n) = data(m+n-1+(Minggu_Latih-1)*t);
    end
end

% Menyiapkan target uji
target_uji = zeros((Minggu_Uji+1)*t-t,1);
for m = 1:(Minggu_Uji+1)*t-t
    target_uji(m) = data(t+m+(Minggu_Latih-1)*t);
end

% Melakukan transpose terhdp data uji normalisasi dan target uji
normalisasi
data_uji = data_uji';
target_uji = target_uji';

% Memanggil model JST hasil pelatihan
load JST

% Membaca hasil pengujian
hasil_uji = sim(JST,data_uji);
```

```

% Menghitung nilai error MSE
nilai_error_uji = hasil_uji-target_uji;
% MAE_uji = mean(abs(nilai_error_uji));
% korelasi_uji = corrcoef(nilai_error_uji);
% korelasi_uji = abs(korelasi(2,1)*100);
MSE_uji = (1/length(target_uji))*sum(nilai_error_uji.^2)
% Performance_uji = perform(JST,hasil_uji_norm,target_uji_norm);
% RMSE_uji = sqrt(sum((nilai_error_uji).^2)/length(target_uji_norm));

% Menampilkan grafik hasil pengujian
figure
plot(hasil_uji,'ko-','LineWidth',2);
hold on
plot(target_uji,'go-','LineWidth',2);
grid on
title('Plot Output ANN vs Target (Testing Stage)');
xlabel('Airport');
ylabel('Transportasi Udara');
legend('Output ANN','Target','Location','Best');
hold off

%% Tahap Prediksi JST

% Menyiapkan data prediksi normalisasi
data_prediksi = hasil_uji(end-(t-1):end);

% Melakukan transpose trhdp data prediksi normalisasi
data_prediksi = data_prediksi';

% Melakukan prediksi
hasil_prediksi = sim(JST,data_prediksi); % soil moisture pd 1 minggu
kedepan

for n = 1:(t-1)
    data_prediksi = [data_prediksi(end-(t-2):end);hasil_prediksi(end)];
    hasil_prediksi = [hasil_prediksi,sim(JST,data_prediksi)];
end

% Menampilkan grafik hasil prediksi
figure
plot(hasil_prediksi,'mo-','LineWidth',2);
grid on
title('Prediction Transportasi Udara for Next Weeks');
xlabel('Name Airport');
ylabel('Transportasi Udara');
legend('Output ANN','Target','Location','Best');

```



## Lampiran 4.10 Model JST Kelompok 1

data =

Neural Network

name: 'Cascade-Forward Neural Network'

userdata: (your custom info)

dimensions:

numInputs: 1

numLayers: 4

numOutputs: 1

numInputDelays: 0

numLayerDelays: 0

numFeedbackDelays: 0

numWeightElements: 139

sampleTime: 1

connections:

biasConnect: [1; 1; 1; 1]

inputConnect: [1; 1; 1; 1]

layerConnect: [4x4 boolean]

outputConnect: [0 0 0 1]

subobjects:

input: Equivalent to inputs{1}

output: Equivalent to outputs{4}

inputs: {1x1 cell array of 1 input}

layers: {4x1 cell array of 4 layers}

outputs: {1x4 cell array of 1 output}

biases: {4x1 cell array of 4 biases}

inputWeights: {4x1 cell array of 4 weights}

layerWeights: {4x4 cell array of 6 weights}

functions:

adaptFcn: 'adaptwb'

adaptParam: (none)

derivFcn: 'defaultderiv'

divideFcn: 'dividerand'

divideParam: .trainRatio, .valRatio, .testRatio

divideMode: 'sample'

initFcn: 'initlay'

performFcn: 'mse'

performParam: .regularization, .normalization

plotFcns: {'plotperform', 'plottrainstate', 'ploterrhist',  
'plotregression'}

plotParams: {1x4 cell array of 4 params}

trainFcn: 'trainlm'

trainParam: .showWindow, .showCommandLine, .show, .epochs,  
.time, .goal, .min\_grad, .max\_fail, .mu, .mu\_dec,  
.mu\_inc, .mu\_max, .lr

weight and bias values:

IW: {4x1 cell} containing 4 input weight matrices

LW: {4x4 cell} containing 6 layer weight matrices

b: {4x1 cell} containing 4 bias vectors

methods:

adapt: Learn while in continuous use

configure: Configure inputs & outputs

gensim: Generate Simulink model

init: Initialize weights & biases

perform: Calculate performance

sim: Evaluate network outputs given inputs

train: Train network with examples

view: View diagram

unconfigure: Unconfigure inputs & outputs

## Lampiran 4.11 Model JST Kelompok 2

data =

Neural Network

name: 'Function Fitting Neural Network'

userdata: (your custom info)

dimensions:

numInputs: 1

numLayers: 4

numOutputs: 1

numInputDelays: 0

numLayerDelays: 0

numFeedbackDelays: 0

numWeightElements: 104

sampleTime: 1

connections:

biasConnect: [1; 1; 1; 1]

inputConnect: [1; 0; 0; 0]

layerConnect: [4x4 boolean]

outputConnect: [0 0 0 1]

subobjects:

input: Equivalent to inputs{1}

output: Equivalent to outputs{4}

inputs: {1x1 cell array of 1 input}

layers: {4x1 cell array of 4 layers}

outputs: {1x4 cell array of 1 output}

biases: {4x1 cell array of 4 biases}

inputWeights: {4x1 cell array of 1 weight}

layerWeights: {4x4 cell array of 3 weights}

functions:

adaptFcn: 'adaptwb'

adaptParam: (none)

derivFcn: 'defaultderiv'

divideFcn: 'dividerand'

divideParam: .trainRatio, .valRatio, .testRatio

divideMode: 'sample'

initFcn: 'initlay'

performFcn: 'mse'

performParam: .regularization, .normalization

plotFns: {'plotperform', 'plottrainstate', 'ploterrhist',  
'plotregression', 'plotfit'}

plotParams: {1x5 cell array of 5 params}

trainFcn: 'trainlm'

trainParam: .showWindow, .showCommandLine, .show, .epochs,  
.time, .goal, .min\_grad, .max\_fail, .mu, .mu\_dec,  
.mu\_inc, .mu\_max, .lr

weight and bias values:

IW: {4x1 cell} containing 1 input weight matrix

LW: {4x4 cell} containing 3 layer weight matrices

b: {4x1 cell} containing 4 bias vectors

methods:

adapt: Learn while in continuous use

configure: Configure inputs & outputs

gensim: Generate Simulink model

init: Initialize weights & biases

perform: Calculate performance

sim: Evaluate network outputs given inputs

train: Train network with examples

view: View diagram

unconfigure: Unconfigure inputs & outputs

## Lampiran 4.12 Model JST Kelompok 3

data =

Neural Network

name: 'Feed-Forward Neural Network'

userdata: (your custom info)

dimensions:

numInputs: 1

numLayers: 4

numOutputs: 1

numInputDelays: 0

numLayerDelays: 0

numFeedbackDelays: 0

numWeightElements: 81

sampleTime: 1

connections:

biasConnect: [1; 1; 1; 1]

inputConnect: [1; 0; 0; 0]

layerConnect: [4x4 boolean]

outputConnect: [0 0 0 1]

subobjects:

input: Equivalent to inputs{1}

output: Equivalent to outputs{4}

inputs: {1x1 cell array of 1 input}

layers: {4x1 cell array of 4 layers}

outputs: {1x4 cell array of 1 output}

biases: {4x1 cell array of 4 biases}

inputWeights: {4x1 cell array of 1 weight}

layerWeights: {4x4 cell array of 3 weights}

functions:

adaptFcn: 'adaptwb'

adaptParam: (none)

derivFcn: 'defaultderiv'

divideFcn: 'dividerand'

divideParam: .trainRatio, .valRatio, .testRatio

divideMode: 'sample'

initFcn: 'initlay'

performFcn: 'mse'

performParam: .regularization, .normalization

plotFns: {'plotperform', 'plottrainstate', 'ploterrhist',  
'plotregression'}

plotParams: {1x4 cell array of 4 params}

trainFcn: 'trainlm'

trainParam: .showWindow, .showCommandLine, .show, .epochs,  
.time, .goal, .min\_grad, .max\_fail, .mu, .mu\_dec,  
.mu\_inc, .mu\_max, .lr

weight and bias values:



IW: {4x1 cell} containing 1 input weight matrix

LW: {4x4 cell} containing 3 layer weight matrices

b: {4x1 cell} containing 4 bias vectors

methods:

adapt: Learn while in continuous use

configure: Configure inputs & outputs

gensim: Generate Simulink model

init: Initialize weights & biases

perform: Calculate performance

sim: Evaluate network outputs given inputs

train: Train network with examples

view: View diagram

unconfigure: Unconfigure inputs & outputs