e-ISSN 2722-7774

CGANT

Journal of Mathematics and Applications

CGANT University of Jember

EDITORIAL TEAM

VOL 2, NO 1 (2021)

CGANT JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS

DOI: https://doi.org/10.25037/cgantjma.v2i1

Available Online Since June 2021

TABLE OF CONTENTS

ARTICLES

CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 2, No 1, 2021
DOI:
10.25037/cgantjma.v2i1.47
Journal of
MATHEMATICS AND APPLICATIONS
e-ISSN 2722-7774

Pewarnaan Sisi r-Dinamis pada Graf Khusus dan Graf Operasi Sakel

Viqedina Rizky Noviyanti[1,2], Kusbudiono[1,2], Ika Hesti A.[1,2], Dafik[1,3]
[1]CGANT - Universitas Jember
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
[3]Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
viqedina@gmail.com, kusbudiono@unej.ac.id, hestyarin@gmail.com, d.dafik@unej.ac.id

Abstract

Let $G = (V(G), E(G))$ be a nontrivial connected graph. The edge coloring is defined as $c : E(G) \to \{1, 2, ..., k\}, k \in N$, with the condition that no adjacent edges have the same color. k-color r-dynamic is an edge coloring of k-colors such that each edge in neighboring $E(G)$ is at least min $\{r, d(u)+d(v)-2\}$ has a different color. The dynamic r-edge coloring is defined as a mapping of c from $E(G)$ such that $|c(N(uv))|$ = min$\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, where $N(uv)$ is the neighbor of uv and $c(N(uv))$ is the color used by the neighboring side of uv. The minimum value of k so that the graph G satisfies the k-coloring r-dynamic edges is called the dynamic r-edge chromatic number. 1-dynamic chromatic number is denoted by $\lambda(G)$, 2-dynamic chromatic number is denoted by $\lambda_d(G)$ and for dynamic r-chromatic number is denoted by $\lambda_r(G)$. The graphs that used in this study are graph TL_n, TCL_n and the switch operation graph $shack(H_{2,2}, v, n)$.

Keywords : r-dynamic edge coloring, r-dynamic edge chromatic number, special graphs, shackle graph
Mathematics Subject Classification: 05C15

Pendahuluan

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $(G = V, E)$, yang mana V merupakan himpunan tak kosong yang anggotanya disebut titik (*vertex*) dan E merupakan himpuan yang elemen-elemennya dinamakan sisi *(edge)*. Sebuah graf G dimungkinkan tidak memiliki sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu. Sebuah graf yang tidak memiliki sisi tetapi memiliki sebuah titik saja disebut dengan graf trivial [7]. Salah satu kajian dalam teori graf adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf merupakan suatu fungsi yang memetakan unsur-unsur graf (titik dan sisi) ke suatu sembarang himpunan. Jika daerah asal adalah sebuah sisi disebut dengan pewarnaan sisi. Jika daerah asal adalah titik maka disebut dengan pewarnaan titik [6]. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf terhubung tak-trivial. Suatu pewarnaan terhadap sisi-sisi G didefinisikan sebagai $c : E(G) \to \{1, 2, ..., k\}, k \in N$, dimana dua sisi yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Penggunaan warna yang palng minimum disebut dengan bilangan kromatik, dan selalu memenuhi Teorema 1 sebagai berikut.

Teorema 1 *[1] Jika G adalah graf sederhana, maka* $\Delta(G) \leq \lambda(G) \leq \Delta(G) + 1$

Viqedina Rizky Noviyanti, Pewarnaan Sisi r-Dinamis pada Graf Khusus dan Graf Operasi Sakel, CGANT JMA Vol. 2, No. 1, 2021, pp 1-14. DOI: 10.25037/cgantjma.v2i1.47 **Received:** 12 23 2020; **Revised:** 02 03 2021; **Accepted:** 03 16 2021; **Published:** 06 22 2021

Salah satu kajian dalam teori graf adalah pewarnaan sisi *r*-dinamis yang digeneralisasikan dari pewarnaan titik *r*- dinamis.

Definisi 1. *Pewarnaan sisi r-dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari E ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:*

1. *jika $e = uv, f = vw \epsilon E(G)$ maka $c(e) \neq c(f)$, dan*
2. $\forall e = uv \epsilon E(G), \mid c(N(e)) \mid \geq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$.

[2] Untuk mendapatkan nilai kromatik *r* dinamis dirumuskan oleh Observasi 1 sebagai berikut.

Observasi 1 *[4] Misal G adalah graf terhubung dan λ merupakan bilangan kromatik dinamis maka berlaku $\lambda_r(G) \leq \lambda_{r+1}(G)$.*

Berikut beberapa definisi operasi graf yang dipakai dalam penelitian ini.

Definisi 2. [3]$Shackle$ *dari graf H dinotasikan dengan $G = shack(H, v, n)$ adalah graf G yang dibangun dari graf non trivial $H_1, H_2, ..., H_n$ sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq s, t \leq n$, H_s dan H_t tidak memiliki titik penghubung dimana $|s - t| \geq 2$ dan untuk setiap $1 \leq i \leq n - 1$, H_i dan H_{i+1} memiliki tepat satu titik bersama* v, *disebut dengan titik penghubung dan $k-1$ titik penghubung tersebut adalah berbeda. Jika $G = shack(H, v, n)$ titik penghubung digantikan dengan subgraf $K \subset H$ disebut dengan* generalized shackle, *dan dinotasikan dengan $G = gshack(H, K \subset H, n)$.*

Terdapat beberapa hasil penelitian pewarnaan sisi r dinamis sebelumnya, seperti Megangingtyas pada tesisya melakukan pewarnaan sisi *r* dinamis pada graf khusus diantaranya yaitu graf lintasan (P_n), graf sikel (C_n), graf bintang (S_n), graf roda (W_n), graf friendship (F_n), dan graf amalgamasi lintasan [5]. Pada penelitian ini, penulis akan mengangkat masalah bagaimana menemukan nilai kromatik pewarnaan sisi *r*-dinamis graf hasil operasi.

Hasil Penelitian

Dari hasil penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait pewarnaan sisi *r*-dinamis pada graf hasil operasi. Teorema yang pertama adalah nilai kromatik pada pewarnaan sisi *r*-dinamis dari graf $gshack(H_3, e, n)$ yang disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 1. *Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi r-dinamis pada graf triangular ladder (TL_n) adalah :*

$$\lambda(TL_n) = \lambda_d(TL_n) = \lambda_3(TL_n) = 4$$
$$\lambda_4(TL_n) = 5$$
$$\lambda_5(TL_n) = 7$$
$$\lambda_{r\geq 6}(TL_n) = 9$$

Bukti. Graf TL_n dengan $n \geq 3$ memiliki himpunan titik $V(TL_n) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n+1\}$ dan himpunan sisi $E(TL_n) = \{x_ix_{i+1}, y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{x_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$. $|V(TL_n)| = 2n + 2, |E(TL_n)| = 4n + 1$, serta $\triangle(TL_n) = 4$.

Kasus 1. Berdasarkan Teorema 1 bahwa $\triangle(TL_n) \leq \lambda(TL_n) \leq \triangle(TL_n) + 1$, sehingga $\lambda(TL_n) \geq 4$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda(TL_n) \leq 4$ dengan fungsi c_1. Misal $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan dari k-warna dan c_1 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D, $c_1 : E(TL_n) \to D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_1(x_iy_i) = 1, 1 \leq i \leq n+1$$

$$c_1(x_ix_{i+1}) = \begin{cases} 3, 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap} \\ 4, 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$c_1(y_iy_{i+1}) = \begin{cases} 4, 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap} \\ 3, 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$c_1(x_iy_{i+1}) = 2, 1 \leq i \leq n$$

Dari fungsi pewarnaan c_1 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi $1, 2, 3$-dinamis ada-lah $\lambda(TL_n) \leq 4$. Karena $\lambda(TL_n) \geq 4$ dan $\lambda(TL_n) \leq 4$ sehingga dapat simpulkan bahwa $\lambda(TL_n) = \lambda_d(TL_n) = \lambda_3(TL_n) = 4$.

Kasus 2. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_4(TL_n) \geq \lambda_3(TL_n)$, maka $\lambda_4(TL_n) \geq 4$. Misal $\lambda_4(TL_n) = 4$ maka pewarnaan sisinya adalah c_1. Andaikan untuk x_1x_2, $| c(N(e)) |= 3$ dan $min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = min\{4, 5\} = 4$, menurut Definisi 1 $| c(N(e)) |\geq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $| c(N(e)) | \ngeq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_4(TL_n) \geq 5$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_4(TL_n) \leq 5$ dengan fungsi c_2. Misal $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan dari k-warna dan c_2 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D, $c_2 : E(TL_n) \to D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_2(x_iy_i) = \begin{cases} 2, 1 \leq i \leq n+1, i \equiv 0 (mod\ 3) \\ 1, 1 \leq i \leq n+1, i \equiv 1 (mod\ 3) \\ 5, 1 \leq i \leq n+1, i \equiv 2 (mod\ 3) \end{cases}$$

$$c_2(x_ix_{i+1}) = \begin{cases} 3, 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap}, \\ 4, 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$c_2(y_iy_{i+1}) = \begin{cases} 4, 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap}, \\ 3, 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil}, \end{cases}$$

$$c_2(x_iy_{i+1}) = \begin{cases} 5, 1 \leq i \leq n, i \equiv 0 (mod\ 3), \\ 2, 1 \leq i \leq n, i \equiv 1 (mod\ 3), \\ 1, 1 \leq i \leq n, i \equiv 2 (mod\ 3), \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_2 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 4-dinamis adalah $\lambda_4(TL_n) \leq 5$. Karena $\lambda_4(TL_n) \geq 5$ dan $\lambda_4(TL_n) \leq 5$ sehingga dapat simpulkan bahwa $\lambda_4(TL_n) = 5$.

Kasus 3. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_5(TL_n) \geq \lambda_4(TL_n)$, maka $\lambda_5(TL_n) \geq 5$. Misal $\lambda_5(TL_n) = 5$ maka pewarnaan sisinya adalah c_2. Andaikan untuk x_1x_2, $| c(N(e)) |= 4$ dan $min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = min\{5, 5\} = 5$, menurut Definisi 1 $| c(N(e)) | \geq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $| c(N(e)) |\ngeq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_5(TL_n) \geq 6$. Misal $\lambda_5(TL_n) = 6$ maka pewarnaan sisinya pada figure 1. Andaikan untuk x_2y_2 (lihat

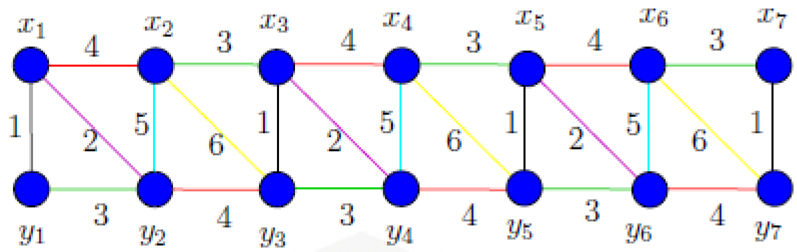

Figure 1: Pewarnaan Sisi 5-dinamis pada TL_6 dengan 6 warna

figure 1), $\mid c(N(e)) \mid = 4$ dan $min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = min\{5, 6\} = 5$, menurut Definisi 1 $\mid c(N(e)) \mid \geq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $\mid c(N(e)) \mid \ngeq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_5(TL_n) \geq 7$.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_5(TL_n) \leq 7$ dengan fungsi c_3. Misal $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan dari k-warna dan c_1 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D, $c_3 : E(TL_n) \to D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_3(x_iy_i) = \begin{cases} 5, 1 \leq i \leq n+1, \ i \text{ genap} \\ 1, 1 \leq i \leq n+1, \ i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$c_3(x_ix_{i+1}) = \begin{cases} 3, 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap} \\ 4, 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$c_3(y_iy_{i+1}) = \begin{cases} 7, 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap} \\ 3, 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$c_3(x_iy_{i+1}) = \begin{cases} 6, 1 \leq i \leq n, \ i \text{ genap,} \\ 2, 1 \leq i \leq n, \ i \text{ ganjil,} \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_3 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 5-dinamis adalah $\lambda_5(TL_n) \leq 7$. Karena $\lambda_5(TL_n) \geq 7$ dan $\lambda_5(TL_n) \leq 7$ sehingga dapat simpulkan bahwa $\lambda_5(TL_n) = 7$.

Kasus 4. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_6(TL_n) \geq \lambda_5$, maka $\lambda_6(TL_n) \geq 7$. Misal $\lambda_6(TL_n) = 7$ maka pewarnaan sisinya adalah c_3. Andaikan x_2y_2 , $\mid c(N(e)) \mid = 5$ dan $min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = min\{6, 6\} = 6$, menurut Definisi 1 $\mid C(N(e)) \mid \geq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $\mid c(N(e)) \mid \ngeq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_6(TL_n) \geq 8$. Misal $\lambda_6(TL_n) = 8$ maka pewarnaan sisinya pada figure 2. Andaikan untuk y_2y_3 (lihat figure 2), $\mid c(N(e)) \mid = 5$ dan $min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = min\{6, 6\} = 6$, menurut Definisi 1 $\mid C(N(e)) \mid \geq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $\mid c(N(e)) \mid \ngeq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_6(TL_n) \geq 9$.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_6(TL_n) \leq 9$ dengan fungsi c_4. Misal $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan dari k-warna dan c_1 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D, $c_4 : E(TL_n) \to D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_4(x_iy_i) = \begin{cases} 5, 1 \leq i \leq n+1, \ i \text{ genap} \\ 1, 1 \leq i \leq n+1, \ i \text{ ganjil} \end{cases}$$

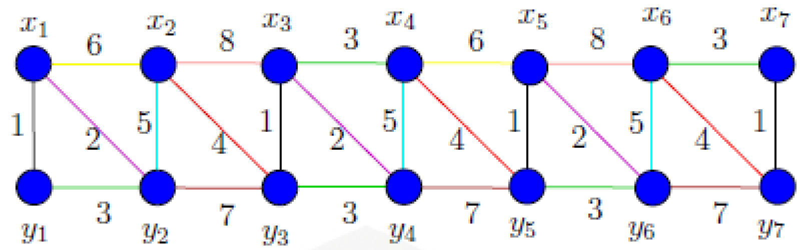

Figure 2: Pewarnaan sisi 6-dinamis dengan pada TL_6 dengan 8 warna

$$c_4(x_ix_{i+1}) = \begin{cases} 9, 1 \le i \le n, \ i \equiv 0 (mod\, 5) \\ 6, 1 \le i \le n, \ i \equiv 1 (mod\, 5) \\ 8, 1 \le i \le n, \ i \equiv 2 (mod\, 5) \\ 3, 1 \le i \le n, \ i \equiv 3 (mod\, 5) \\ 7, 1 \le i \le n, \ i \equiv 4 (mod\, 5) \end{cases}$$

$$c_4(y_iy_{i+1}) = \begin{cases} 8, 1 \le i \le n, \ i \equiv 0 (mod\, 5) \\ 3, 1 \le i \le n, \ i \equiv 1 (mod\, 5) \\ 7, 1 \le i \le n, \ i \equiv 2 (mod\, 5) \\ 9, 1 \le i \le n, \ i \equiv 3 (mod\, 5) \\ 6, 1 \le i \le n, \ i \equiv 4 (mod\, 5) \end{cases}$$

$$c_4(x_iy_{i+1}) = \begin{cases} 4, 1 \le i \le n, \ i \text{ genap}, \\ 2, 1 \le i \le n, \ i \text{ ganjil}, \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_4 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 6-dinamis adalah $\lambda_6\ (TL_n) \le 9$. Karena $\lambda_6(TL_n) \ge 9$ dan $\lambda_6(TL_n) \le 9$ sehingga dapat simpulkan bahwa $\lambda_6(TL_n) = 9$. Pada graf *triangular ladder* (TL_n) nilai dari $max\{d(u) + d(v) - 2, uv \in E(G)\} = 6$. Dengan demikian fungsi pewarnaan c_4 juga berlaku untuk r lainnya, dimana $r \ge 6$. Hal ini disebabkan pada saat $r \ge 6$ nilai $min\{r, max\ \{d(v) + d(u) - 2, uv \in E(G)\}\} = max\{d(u) + d(v) - 2, uv \in E(G\} = 6$. Oleh karena itu, nilai bilangan kromatik dinamis $\lambda_{r\ge 6}(TL_n) = \lambda_6(TL_n) = 9$. Berdasarkan uraian diatas Teorema 1 terbukti. □

Teorema 2. *Untuk $n \ge 3$, bilangan kromatik sisi r-dinamis pada graf tangga tiga siklus (TCL_n) adalah :*

$$\lambda(TCL_n) = \lambda_d(TCL_n) = \lambda_3(TCL_n) = \lambda_4(TCL_n) = 5$$
$$\lambda_5(TCL_n) = 7$$
$$\lambda_6(TCL_n) = 9$$
$$\lambda_7(TCL_n) = 11$$
$$\lambda_{r\ge 8}(TCL_n) = 12$$

Bukti. Graf TCL_n dengan $n \ge 3$ memiliki himpunan titik $V(TCL_n) = \{x_i, y_i; 1 \le i \le n+1\} \cup \{z_i; 1 \le i \le n\}$ dan himpunan sisi $E(TCL_n) = \{x_iz_i, y_iz_i; 1 \le i \le n\} \cup \{x_{i+1}z_i, y_{i+1}z_i; 1 \le i \le n\} \cup \{x_iy_i; 1 \le i \le n+1\} \cup \{y_iy_{i+1}; 1 \le i \le n$. $|V(TCL_n)| = 3n + 2, |E(TCL_n)| = 6n + 1$, serta $\triangle(TCL_n) = 5$.

Kasus 1. Berdasarkan Teorema 1 bahwa $\triangle(TCL_n) \le \lambda(TCL_n) \le \triangle(TCL_n) + 1$, sehingga $\lambda(TCL_n) \ge 5$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda(TCL_n) \le 5$ dengan fungsi

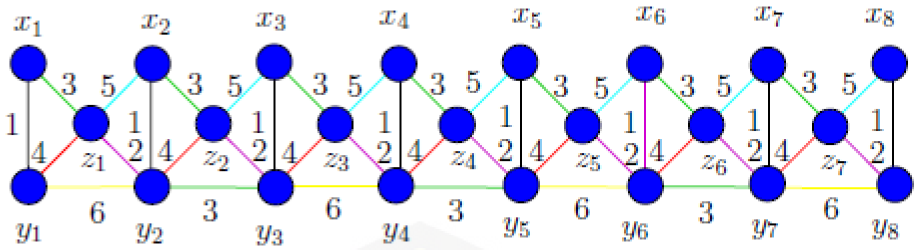

Figure 3: Pewarnaan sisi 5-dinamis pada TCL_7 dengan 6 warna

c_5. Misal $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan dari k-warna dan c_5 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D, $c_5 : E(TCL_n) \to D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_5(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n, x_{n+1}y_{n+1}) = 11 \ldots 11$$

$$c_5(x_1z_1, x_2z_2, \ldots, x_nz_n) = 33 \ldots 33$$

$$c_5(y_1z_1, y_2z_2, \ldots, y_nz_n) = 44 \ldots 44$$

$$c_5(x_2z_1, x_3z_2, \ldots, x_nz_{n-1}, x_{n+1}z_n) = \begin{cases} 52 \ldots 52, & n \text{ genap} \\ 52 \ldots 52\ 5, & n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$c_5(y_2z_1, y_3z_2, \ldots, y_nz_{n-1}, y_{n+1}z_n) = \begin{cases} 25 \ldots 25, & n \text{ genap} \\ 25 \ldots 25\ 2, & n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$c_5(y_1y_2, y_2y_3, \ldots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 53 \ldots 53, & n \text{ genap} \\ 53 \ldots 53\ 5, & n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_5 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi $1, 2, 3, 4$-dinamis adalah $\lambda(TCL_n) \leq 5$. Karena $\lambda(TCL_n) \geq 5$dan $\lambda(TCL_n) \leq 5$ sehingga dapat simpulkan bahwa $\lambda(TCL_n) = \lambda_d(TCL_n) = \lambda_3(TCL_n) = \lambda_4(TCL_n) = 5$.

Kasus 2. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_5(TCL_n) \geq \lambda_4(TCL_n)$, maka $\lambda_5\ (TCL_n) \geq 5$. Misal $\lambda_5(TCL_n) = 5$ maka pewarnaan sisinya adalah c_5. Andaikan untuk y_1z_1, $|c(N(e))| = 4$ dan $min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = min\{5, 5\} = 5$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|c(N(e))| \ngeq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_5(TCL_n) \geq 6$. Misal $\lambda_5(TL_n) = 6$ maka pewarnaan sisinya pada Figure 3. Andaikan untuk x_2z_1 (lihat Figure 3), $|c(N(e))| = 4$ dan $min\{r, d(u)+d(v)-2\} = min\{5, 5\} = 5$, menurut Definisi 1 $|c(N(e))| \geq min\{r, d(u)+d(v)-2\}$, sehingga $|c(N(e))| \ngeq min\{r, d(u)+d(v)-2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_5(TCL_n) \geq 7$.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_5(TCL_n) \leq 7$ dengan fungsi c_6. Misal $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan dari k-warna dan c_6 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D, $c_6 : E(TCL_n) \to D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_6(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n, x_{n+1}y_{n+1}) = \begin{cases} 176523 \ldots 176523, & n \equiv 5 (mod\ 6) \\ 176523 \ldots 176523\ 1, n \equiv 0 (mod\ 6) \\ 176523 \ldots 176523\ 17, n \equiv 1 (mod\ 6) \\ 176523 \ldots 176523\ 176, n \equiv 2 (mod\ 6) \\ 176523 \ldots 176523\ 1765, n \equiv 3 (mod\ 6) \\ 176523 \ldots 176523\ 17652, n \equiv 4 (mod\ 6) \end{cases}$$

$$c_6(x_1z_1, x_2z_2, \ldots, x_nz_n) = \begin{cases} 317652\ldots317652, n \equiv 0(mod\ 6) \\ 317652\ldots317652\ 3, n \equiv 1(mod\ 6) \\ 317652\ldots317652\ 31, n \equiv 2(mod\ 6) \\ 317652\ldots317652\ 317, n \equiv 3(mod\ 6) \\ 317652\ldots317652\ 3176, n \equiv 4(mod\ 6) \\ 317652\ldots317652\ 31765, n \equiv 5(mod\ 6) \end{cases}$$

$$c_6(y_1z_1, y_2z_2, \ldots, y_nz_n) = 44\ldots44$$

$$c_6(x_2z_1, x_3z_3, \ldots, x_nz_{n-1}, x_{n+1}z_n) = \begin{cases} 523176\ldots523176, n \equiv 0(mod\ 6) \\ 523176\ldots523176\ 5, n \equiv 1(mod\ 6) \\ 523176\ldots523176\ 52, n \equiv 2(mod\ 6) \\ 523176\ldots523176\ 523, n \equiv 3(mod\ 6) \\ 523176\ldots523176\ 5231, n \equiv 4(mod\ 6) \\ 523176\ldots523176\ 52317, n \equiv 5(mod\ 6) \end{cases}$$

$$c_6(y_2z_1, y_3z_2, \ldots, y_nz_{n-1}, y_{n+1}z_n) = \begin{cases} 231765\ldots231765, n \equiv 0(mod\ 6) \\ 231765\ldots231765\ 2, n \equiv 1(mod\ 6) \\ 231765\ldots231765\ 23, n \equiv 2(mod\ 6) \\ 231765\ldots231765\ 231, n \equiv 3(mod\ 6) \\ 231765\ldots231765\ 2317, n \equiv 4(mod\ 6) \\ 231765\ldots231765\ 23176, n \equiv 5(mod\ 6) \end{cases}$$

$$c_6(y_1y_2, y_2y_3, \ldots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 652317\ldots652317, n \equiv 0(mod\ 6) \\ 652317\ldots652317\ 6, n \equiv 1(mod\ 6) \\ 652317\ldots652317\ 65, n \equiv 2(mod\ 6) \\ 652317\ldots652317\ 652, n \equiv 3(mod\ 6) \\ 652317\ldots652317\ 6523, n \equiv 4(mod\ 6) \\ 652317\ldots652317\ 65231, n \equiv 5(mod\ 6) \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_6 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 5-dinamis adalah $\lambda_5(TCL_n) \leq 7$. Karena $\lambda_5(TCL_n) \geq 7$ dan $\lambda_5(TCL_n) \leq 7$ sehingga dapat simpulkan bahwa $\lambda_5(TCL_n) = 7$.

Kasus 3. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_6(TCL_n) \geq \lambda_5(TCL_n)$, maka λ_6 $(TCL_n) \geq 7$. Misal $\lambda_6(TCL_n) = 7$ maka pewarnaan sisinya adalah c_6. Andaikan untuk x_2y_2, $\mid c(N(e)) \mid = 5$ dan $min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = min\{6, 6\} = 6$, menurut Definisi 1 $\mid c(N(e)) \mid \geq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $\mid c(N(e)) \mid \ngeq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_6(TCL_n) \geq 8$. Misal $\lambda_6(TCL_n) = 8$ maka pewarnaan sisinya pada Figure 4. Andaikan untuk x_3y_3 (Figure 4), $\mid c(N(e)) \mid = 5$ dan $min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = min\{6, 6\} = 6$, menurut Definifi 1 $\mid c(N(e)) \mid \geq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $\mid c(N(e)) \mid \ngeq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_6(TCL_n) \geq 9$.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_6(TCL_n) \leq 9$ dengan fungsi c_7. Misal $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan dari k-warna dan c_7 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D, $c_7 : E(TCL_n) \to D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_7(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n, x_{n+1}y_{n+1}) = \begin{cases} 176\ldots176,\ n \equiv 2(mod\ 3) \\ 176\ldots176\ 1,\ n \equiv 0(mod\ 3) \\ 176\ldots176\ 17,\ n \equiv 1(mod\ 3) \end{cases}$$

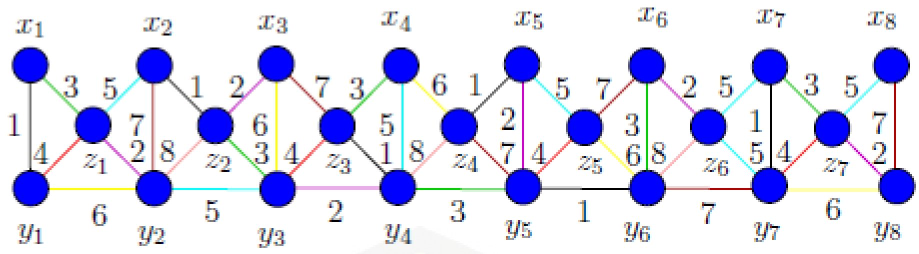

Figure 4: Pewarnaan sisi 6-dinamis pada TCL_7 dengan 8 warna

$$c_7(x_1z_1, x_2z_2, \ldots, x_nz_n) = \begin{cases} 312\ldots312, & n \equiv 0(mod\ 3) \\ 312\ldots312\ 3, & n \equiv 1(mod\ 3) \\ 312\ldots312\ 31, & n \equiv 2(mod\ 3) \end{cases}$$

$$c_7(y_1z_1, y_2z_2, \ldots, y_nz_n) = \begin{cases} 487\ldots487, & n \equiv 0(mod\ 3) \\ 487\ldots487\ 4, & n \equiv 1(mod\ 3) \\ 487\ldots487\ 48, & n \equiv 2(mod\ 3) \end{cases}$$

$$c_7(x_2z_1, x_3z_2, \ldots, x_nz_{n-1}, x_{n+1}z_n) = \begin{cases} 548\ldots548, & n \equiv 0(mod\ 3) \\ 548\ldots548\ 5, & n \equiv 1(mod\ 3) \\ 548\ldots548\ 54, & n \equiv 2(mod\ 3) \end{cases}$$

$$c_7(y_2z_1, y_3z_2, \ldots, y_nz_{n-1}, y_{n+1}z_n) = \begin{cases} 239\ldots239, & n \equiv 0(mod\ 3) \\ 239\ldots239\ 2, & n \equiv 1(mod\ 3) \\ 239\ldots239\ 23, & n \equiv 2(mod\ 3) \end{cases}$$

$$c_7(y_1y_2, y_2y_3, \ldots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 695\ldots695, & n \equiv 0(mod\ 3) \\ 695\ldots695\ 6, & n \equiv 1(mod\ 3) \\ 695\ldots695\ 69, & n \equiv 2(mod\ 3) \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_7 terlihat bahwa bialangan kromatik sisi 6-dinamis adalah $\lambda_6(TCL_n) \leq 9$. Karena $\lambda_6(TCL_n) \geq 9$ dan $\lambda_6(TCL_n) \leq 9$ sehingga dapat simpulkan bahwa $\lambda_6(G) = 9$.

Kasus 4. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_7(TCL_n) \geq \lambda_6(TCL_n)$, maka $\lambda_7\ (TCL_n) \geq 9$. Misal $\lambda_7(TCL_n) = 9$ maka pewarnaan sisinya adalah c_7. Andaikan untuk y_3z_3, $| c(N(e)) |= 6$ dan $min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = min\{7, 7\} = 7$, menurut Definisi 1 $| c(N(e)) | \geq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $| c(N(e)) | \ngeq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_7(TL_n) \geq 10$. Misal $\lambda_7(TL_n) = 10$ maka pewarnaan sisinya pada Figure 5. Andaikan untuk y_4z_3 (Figure 5), $| c(N(e)) |= 6$ dan $min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = min\{7, 7\} = 7$, menurut Definisi 1 $| c(N(e)) | \geq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $| c(N(e)) | \ngeq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_7(TCL_n) \geq 11$.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_7(TCL_n) \leq 11$ dengan mewarnai c_8. Misal $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan dari k-warna dan c_8 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D, $c_8 : E(TCL_n) \to D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_8(x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n, x_{n+1}y_{n+1}) = \begin{cases} 175\ldots175, & n \equiv 2(mod\ 3) \\ 175\ldots175\ 1, & n \equiv 0(mod\ 3) \\ 175\ldots175\ 17, & n \equiv 1(mod\ 3) \end{cases}$$

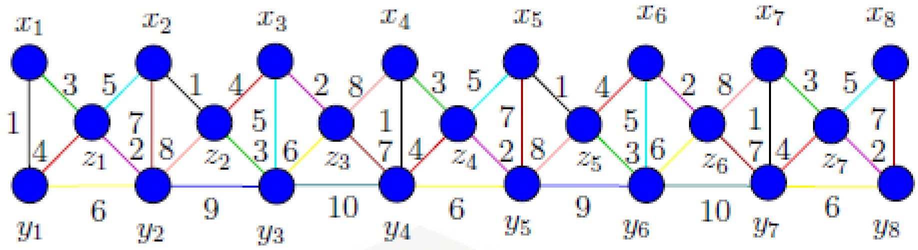

Figure 5: Pewarnaan sisi 7-dinamis pada TCL_6 dengan 10 warna

$$c_8(x_1z_1, x_2z_2, \dots, x_nz_n) = \begin{cases} 312\dots312, \ n \equiv 0(mod\,3) \\ 312\dots312\ 3, \ n \equiv 1(mod\,3) \\ 312\dots312\ 31, \ n \equiv 2(mod\,3) \end{cases}$$

$$c_8(y_1z_1, y_2z_2, \dots, y_nz_n) = \begin{cases} 486\dots486, \ n \equiv 0(mod\,3) \\ 486\dots486\ 4, \ n \equiv 1(mod\,3) \\ 486\dots486\ 48, \ n \equiv 2(mod\,3) \end{cases}$$

$$c_8(x_2z_1, x_3z_2, \dots, x_nz_{n-1}, x_{n+1}z_n) = \begin{cases} 548\dots548, \ n \equiv 0(mod\,3) \\ 548\dots548\ 5, \ n \equiv 1(mod\,3) \\ 548\dots548\ 54, \ n \equiv 2(mod\,3) \end{cases}$$

$$c_8(y_2z_1, y_3z_2, \dots, y_nz_{n-1}, y_{n+1}z_n) = \begin{cases} 23(11)\dots23(11), \ n \equiv 0(mod\,3) \\ 23(11)\dots23(11)\ 2, \ n \equiv 1(mod\,3) \\ 23(11)\dots23(11)\ 23, \ n \equiv 2(mod\,3) \end{cases}$$

$$c_8(y_1y_2, y_2y_3, \dots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 69(10)\dots69(10), \ n \equiv 0(mod\,3) \\ 69(10)\dots69(10)\ 6, \ n \equiv 1(mod\,3) \\ 69(10)\dots69(10)\ 69, \ n \equiv 2(mod\,3) \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_8 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 7-dinamis adalah $\lambda_7(TCL_n) \leq 11$. Karena $\lambda_7(TCL_n) \geq 11$ dan $\lambda_7(TCL_n) \leq 7$ sehingga dapat simpulkan bahwa $\lambda_7(TCL_n) = 11$.

Kasus 5. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_8(TCL_n) \geq \lambda_7(TCL_n)$, maka $\lambda_8\ (TCL_n) \geq 11$. Misal $\lambda_8(TCL_n) = 11$ maka pewarnaan sisinya adalah c_8. Andaikan untuk y_3y_4 (lihat Gambar 4.13), $|\ c(N(e))\ |= 7$ dan $min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = min\{8, 8\} = 8$, menurut Definisi 1 $|\ c(N(e))\ | \geq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $|\ c(N(e))\ | \ngeq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_8(TL_n) \geq 12$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_8(TCL_n) \leq 12$ dengan fungsi c_9. Misal $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ adalah himpunan dari k-warna dan c_9 adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D, $c_9 : E(TCL_n) \to D$ dengan $n \geq 3$, fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_9(x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n, x_{n+1}y_{n+1}) = \begin{cases} 175\dots175, \ n \equiv 2(mod\,3) \\ 175\dots175\ 1, \ n \equiv 0(mod\,3) \\ 175\dots175\ 17, \ n \equiv 1(mod\,3) \end{cases}$$

$$c_9(x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_nz_n) = \begin{cases} 312\dots312, \ n \equiv 0(mod\,3) \\ 312\dots312\ 3, \ n \equiv 1(mod\,3) \\ 312\dots312\ 31, \ n \equiv 2(mod\,3) \end{cases}$$

$$c_9(y_1z_1, y_2z_2, \ldots, y_nz_n) = \begin{cases} 48(12)\ldots48(12), \ n \equiv 0(mod\,3) \\ 48(12)\ldots48(12)\ 4, \ n \equiv 1(mod\,3) \\ 48(12)\ldots48(12)\ 48, \ n \equiv 2(mod\,3) \end{cases}$$

$$c_9(x_2z_1, x_3z_2, \ldots, x_nz_{n-1}, x_{n+1}z_n) = \begin{cases} 548\ldots548, \ n \equiv 0(mod\,3) \\ 548\ldots548\ 5, \ n \equiv 1(mod\,3) \\ 548\ldots548\ 54, \ n \equiv 2(mod\,3) \end{cases}$$

$$c_9(y_2z_1, y_3z_2, \ldots, y_nz_{n-1}, y_{n+1}z_n) = \begin{cases} 23(11)\ldots23(11), \ n \equiv 0(mod\,3) \\ 23(11)\ldots23(11)\ 2, \ n \equiv 1(mod\,3) \\ 23(11)\ldots23(11)\ 23, \ n \equiv 2(mod\,3) \end{cases}$$

$$c_9(y_1y_2, y_2y_3, \ldots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 69(10)\ldots69(10), \ n \equiv 0(mod\,3) \\ 69(10)\ldots69(10)\ 6, \ n \equiv 0(mod\,3) \\ 69(10)\ldots69(10)\ 69, \ n \equiv 0(mod\,3) \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_9 terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 8-dinamis adalah $\lambda_8(TCL_n) \leq 12$. Karena $\lambda_8(TCL_n) \geq 12$ dan $\lambda_8(TCL_n) \leq 12$ sehingga dapat simpulkan bahwa $\lambda_8(TCL_n) = 12$. Pada graf tangga tiga siklus (TCL_n) nilai dari $max\{d(u) + d(v) - 2, uv \in E(G)\} = 8$. Sehingga fungsi pewarnaan c_9 juga berlaku untuk r lainnya, dengan $r \geq 8$. Hal ini disebabkan pada saat $r \geq 8$ nilai $min\{r, max\{d(u) + d(v) - 2, uv \in E(G)\}\} = max\ \{d(u) + d(v) - 2, uv \in E(G)\} = 8$. Oleh karena itu, nilai bilangan kromatik dinamis $\lambda_{r\geq8}(TCL_n) = \lambda_8(TCL_n) = 12$. Berdasarkan uraian diatas Teorema 2 terbukti. $\square$

Teorema 3. *Untuk $n \geq 3$ bilangan kromatik sisi r-dinamis pada graf $G = shack\ (H_{2,2}, v, n)$ adalah :*

$$\lambda(shack(H_{2,2}, v, n)) = \lambda_d(shack(H_{2,2}, v, n)) = \lambda_3(shack(H_{2,2}, v, n)) = 4$$
$$\lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) = 6$$
$$\lambda_5(shack(H_{2,2}, v, n)) = 7$$
$$\lambda_{r\geq6}(shack(H_{2,2}, v, n)) = 8$$

Bukti. $shack(H_{2,2}, v, n)$, dengan $n \geq 3$ memiliki himpunan titik dan himpunan sisi graf $G = shack(H_{2,2}, v, n), n \geq 2$ adalah $V(shack(H2, 2, v, n)) = \{x_i, z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i;\ 1 \leq i \leq n+1\}$, $E(shack(H2, 2, v, n)) = \{y_iz_i, x_iz_i,\ x_iy_{i+1}, y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$, $|\ V(shack(H2, 2, v, n))\ | = 3n + 1$ dan $|\ E(shack\ (H2, 2, v, n))\ | = 4n$, serta $\triangle(shack(H_{2,2}, v, n)) = 4$.

Kasus 1. Berdasarkan Teorema 1 bahwa $\triangle(shack(H_{2,2}, v, n)) \leq \lambda(shack(H_{2,2}, v, n)) \leq \triangle(shack(H_{2,2}, v, n)) + 1$, sehingga $\lambda(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 4$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda(shack\ (H_{2,2}, v, n)) \leq 4$ dengan fungsi c_{12}. Misal $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan dari k-warna dan c_{12} adalah fungsi yang memeta- kan setiap sisi ke setiap himpunan warna D, $c_{10} : E(shack(H_{2,2}, v, n)) \rightarrow D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_{10}(y_1z_1, y_2z_2, \ldots, y_nz_n) = 11\ldots11,$$
$$c_{10}(y_1y_2, y_2y_3, \ldots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 23\ldots23, \ n \text{ genap}, \\ 23\ldots23\ 2, \ n \text{ ganjil}, \end{cases}$$

$$c_{10}(x_1z_1, x_2z_2, \ldots, x_nz_n) = \begin{cases} 32\ldots32, \ n \text{ genap}, \\ 32\ldots32\ 3, \ n \text{ ganjil}, \end{cases}$$

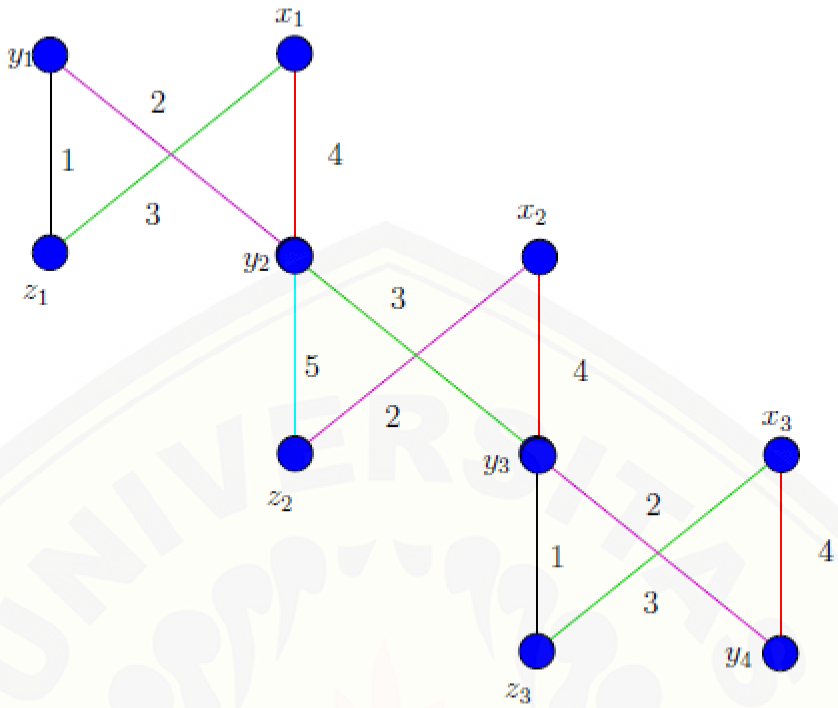

Figure 6: Pewarnaan sisi 4-dinamis pada $shack(H_{2,2}, v, 3)$ dengan 5 warna

$$c_{10}(x_1y_2, x_2y_3, \ldots, x_{n-1}y_n, x_ny_{n+1}) = 44\ldots44,$$

Dari fungsi pewarnaan c_{10} terlihat bahwa bilangan kromatik sisi $1, 2, 3$-dinamis adalah $\lambda(shack(H_{2,2}, v, n)) \leq 4$. Karena $\lambda(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 4$ dan $\lambda(shack\ (H_{2,2}, v, n)) \leq 4$ sehingga dapat simpulkan bahwa $\lambda_(shack(H_{2,2}, v, n)) = \lambda_d(shack\ \ (H_{2,2}, v, n)) = \lambda_3(shack(H_{2,2}, v, n)) = 4$.

Kasus 2. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq \lambda_3(shack(H_{2,2}, v, n))$, maka $\lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 4$. Misal $\lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) = 4$ maka pewarnaan sisinya adalah c_{12}. Andaikan untuk y_1y_2, $| c(N(e)) |= 3$ dan $min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = min\{4, 4\} = 4$, menurut Definisi 1 $| c(N(e)) | \geq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $| c(N(e)) | \ngeq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 5$. Misal $\lambda_5(shack(H_{2,2}, v, n)) = 5$ maka pewarnaan sisinya pada Figure 6. Andaikan untuk x_1y_2 (lihat Figure 6), $| c(N(e)) |= 3$ dan $min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = min\{4, 4\} = 4$, menurut Definisi 1 $| c(N(e)) | \geq min\{r, d(u)+d(v)-2\}$, sehingga $| c(N(e)) | \ngeq min\{r, d(u)+d(v)-2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 6$.

Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) \leq 6$ dengan fungsi c_{11}. Misal $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan dari k-warna dan c_{11} adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D, $c_{11} : E(shack(H_{2,2}, v, n)) \to D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_{11}(y_1z_1, y_2z_2, \ldots, y_nz_n) = \begin{cases} 153\ldots153, & n \equiv 0(mod\ 3), \\ 153\ldots153\ 1, & n \equiv 1(mod\ 3), \\ 153\ldots153\ 15, & n \equiv 2(mod\ 3), \end{cases}$$

$$c_{11}(y_1y_2, y_2y_3, \ldots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 265\ldots265, & n \equiv 0(mod\,3), \\ 265\ldots265\,2, & n \equiv 1(mod\,3), \\ 265\ldots265\,26, & n \equiv 2(mod\,3), \end{cases}$$

$$c_{11}(x_1z_1, x_2z_2, \ldots, x_nz_n) = \begin{cases} 314\ldots314, & n \equiv 0(mod\,3), \\ 314\ldots314\,3, & n \equiv 1(mod\,3), \\ 314\ldots314\,31, & n \equiv 2(mod\,3), \end{cases}$$

$$c_{11}(x_1y_2, x_2y_3, \ldots, x_{n-1}y_nx_ny_{n+1}) = \begin{cases} 426\ldots426, & n \equiv 0(mod\,3), \\ 426\ldots426\,4, & n \equiv 1(mod\,3), \\ 426\ldots426\,42, & n \equiv 2(mod\,3), \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_{11} terlihat bahwa bialngan kromatik sisi 4-dinamis adalah $\lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) \leq 6$. Karena $\lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 6$ dan $\lambda_4(shack(H_{2,2},\ v, n)) \leq 6$ maka dapat simpulkan bahwa $\lambda_4(shack(H_{2,2},\ v, n)) = 6$.

Kasus 3. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_5(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq \lambda_4(shack\ (H_{2,2}, v, n))$, maka $\lambda_5(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 6$. Misal $\lambda_5(shack(H_{2,2}, v, n)) = 6$ maka pewarnaan sisinya adalah c_{11}. Andaikan untuk y_2y_3, $\mid c(N(e)) \mid = 4$ dan $min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = min\{5, 6\} = 5$, menurut Definisi 1 $\mid c(N(e)) \mid \geq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $\mid c(N(e)) \mid \ngeq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_5(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 7$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_5(shack(H_{2,2}, v, n)) \leq 7$ dengan fungsi c_{12}. Misal $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan dari k-warna dan c_{14} adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D, $c_{12} : E(shack(H_{2,2}, v, n)) \rightarrow D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_{12}(y_1z_1, y_2z_2, \ldots, y_nz_n) = \begin{cases} 15\ldots15, & n \text{ genap}, \\ 15\ldots15\,1, & n \text{ ganjil}, \end{cases}$$

$$c_{12}(y_1y_2, y_2y_3, \ldots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 26\ldots26, & n \text{ genap}, \\ 26\ldots26\,2, & n \text{ ganjil}, \end{cases}$$

$$c_{12}(x_1z_1, x_2z_2, \ldots, x_nz_n) = 33\ldots33,$$

$$c_{12}(x_1y_2, x_2y_3, \ldots, x_{n-1}y_n, x_ny_{n+1}) = \begin{cases} 47\ldots47, & n \text{ genap}, \\ 47\ldots47\,4, & n \text{ ganjil}, \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan c_{12} terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 5-dinamis adalah $\lambda_5(shack(H_{2,2}, v, n)) \leq 7$. Karena $\lambda_5(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 7$ dan $\lambda_5(shack(H_{2,2},\ v, n)) \leq 7$ maka dapat simpulkan bahwa $\lambda_5(shack(H_{2,2}, v, n)) = 7$.

Kasus 4. Berdasarkan Observasi 1 bahwa $\lambda_6(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq \lambda_5(shack(H_{2,2}, v, n))$, maka $\lambda_6(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 7$. Misal $\lambda_6(shack(H_{2,2}, v, n)) = 7$ maka pewarnaan sisinya adalah c_{12}. Andaikan untuk y_2y_3, $\mid c(N(e)) \mid = 5$ dan $min\{r, d(u) + d(v) - 2\} = min\{6, 6\} = 6$, menurut Definisi 1 $\mid c(N(e)) \mid \geq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$, sehingga $\mid c(N(e)) \mid \ngeq min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$ tidak memenuhi definisi tersebut. Jadi batas bawah yang lebih baik yaitu $\lambda_7(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 8$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\lambda_6(shack(H_{2,2}, v, n)) \leq 8$ dengan fungsi c_{13}. Misal $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ adalah himpunan dari k-warna dan c_{13} adalah fungsi yang memetakan setiap sisi ke setiap himpunan warna D, $c_{13} : E(shack(H_{2,2}, v, n)) \rightarrow D$ dengan $n \geq 3$ fungsi pewarnaan sebagai berikut :

$$c_{13}(y_1z_1, y_2z_2, \ldots, y_nz_n) = \begin{cases} 153\ldots153, & n \equiv 0(mod\ 3), \\ 153\ldots153\ 1, & n \equiv 1(mod\ 3), \\ 153\ldots153\ 15, & n \equiv 2(mod\ 3), \end{cases}$$

$$c_{13}(y_1y_2, y_2y_3, \ldots, y_{n-1}y_n, y_ny_{n+1}) = \begin{cases} 268\ldots268, & n \equiv 0(mod\ 3), \\ 268\ldots268\ 2, & n \equiv 1(mod\ 3), \\ 268\ldots268\ 26, & n \equiv 2(mod\ 3), \end{cases}$$

$$c_{13}(x_1z_1, x_2z_2, \ldots, x_nz_n) = \begin{cases} 314\ldots314, & n \equiv 0(mod\ 3), \\ 314\ldots314\ 3, & n \equiv 1(mod\ 3), \\ 314\ldots314\ 31, & n \equiv 2(mod\ 3), \end{cases}$$

$$c_{13}(x_1y_2, x_2y_3, \ldots, x_{n-1}y_n, x_ny_{n+1}) = \begin{cases} 475\ldots475, & n \equiv 0(mod\ 3), \\ 475\ldots475\ 4, & n \equiv 1(mod\ 3), \\ 475\ldots475\ 47, & n \equiv 2(mod\ 3), \end{cases}$$

Dari pewarnaan c_{13} terlihat bahwa bilangan kromatik sisi 6-dinamis adalah $\lambda_6(shack\ (H_{2,2}, v, n)) \leq 8$. Karena $\lambda_6(shack(H_{2,2}, v, n)) \geq 8$ dan $\lambda_6(shack\ (H_{2,2}, v, n)) \leq 8$ sehingga dapat simpulkan bahwa $\lambda_6(shack(H_{2,2}, v, n)) = \lambda_r(shack(H_{2,2}, v, n)) = 8$. Pada graf operasi sakel *cocktail party* $(shack(H_{2,2}, v, n))$ nilai dari $max\{d(u) + d(v) - 2, uv \in E(G)\} = 6$. Dengan demikian fungsi pewarnaan c_{13} juga berlaku untuk r lainnya, dengan $r \geq 6$. Hal ini disebabkan pada saat $r \geq 6$ nilai $min\{r, max\ \{d(u) + d(v) - 2, uv \in E(G)\}\} = max\{d(u) + d(v) - 2, uv \in E(G)\} = 6$. Oleh karena itu, nilai bilangan kromatik dinamis $\lambda_{r\geq6}(shack(H_{2,2}, v, n)) = \lambda_6(shack(H_{2,2}, v, n)) = 8$. Berdasarkan uraian diatas Teorema 3 terbukti. $\square$

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa graf TL_n dengan $n \geq 3$ diperoleh $\lambda(TL_n) = \lambda_d(TL_n) = \lambda_3(TL_n) = 4$, $\lambda_4(TL_n) = 5$, $\lambda_5(TL_n) = 7$, $\lambda_{r\geq6}(TL_n) = 9$, dan graf TCL_n dengan $n \geq 3$ diperoleh $\lambda(TCL_n) = \lambda_d(TCL_n) = \lambda_3(TCL_n) = \lambda_4(TCL_n) = 5$, $\lambda_5(TCL_n) = 7$, $\lambda_6(TCL_n) = 9$, $\lambda_7(TCL_n) = 11$, $\lambda_{r\geq8}(TCL_n) = 12$, serta graf operasi sakel $(shack(H_{2,2}, v, n))$ dengan $n \geq 3$, $\lambda(shack(H_{2,2}, v, n)) = \lambda_d(shack(H_{2,2}, v, n)) = \lambda_3(shack(H_{2,2}, v, n)) = 4$, $\lambda_4(shack(H_{2,2}, v, n)) = 6$ $\lambda_5(shack(H_{2,2}, v, n)) = 7$, $\lambda_{r\geq6}(shack(H_{2,2}, v, n)) = 8$.

Masalah terbuka 1 Tentukan nilai kromatik pewarnaan sisi r-dinamis dari graf khusus dan graf hasil operasi sakel graf yang lain. Tentukan bilangan kromatik pewarnaan sisi r-dinamis dari graf khusus Helm (H_n) dan hasil operasi $shack(H_{m,n}, v, n)$.

Referensi

[1] Chartrand, G dan Zhang, P. 2009.*Chromatic Graph Theory*. USA: CRC Press.

[2] Dafik dan Meganingtyas. 2015. On Edge r-dynamic Coloring of Graphs. *Graph Master Workshop*. Universitas Jember.

[3] Dafik, S. Setiawani, dan K.M.F. Azizah. Generalized Shackle of Fans is a Super (a,d)-Edge Antimagic Total Graph. *Applied Mathematical Sciences*, Submitted, 2015.

[4] Kang, R., Muller, T., dan West, D. B. 2015. On r-Dynamic Coloring of Grids. *Discrete Applied Mathematics*. **186**: 286-290.

[5] Meganingtyas, Devi E. 2015."Analisis Pewarnaan r-dinamis pada graf-graf khusus". Tidak Diterbitkan. Tesis. Jember: Universitas Jember.

[6] Munir, Rinaldi. 2012. *Matematika Diskrit Edisi Kelima*. Bandung: Informatika.

[7] Slamin. 2009.*Desain Jaringan : Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.