KARAKTERISTIK PELABELAN HARMONIS, HARMONIS GANJIL DAN HARMONIS GENAP

SKRIPSI

Oleh

Ahmad Lasim

NIM 161810101070

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2022

KARAKTERISTIK PELABELAN HARMONIS, HARMONIS GANJIL DAN HARMONIS GENAP

SKRIPSI

disusun guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh
Ahmad Lasim
NIM 161810101070

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2022

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam yang selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penulis persembahkan skripsi ini sebagai ungkapan kebahagiaan dan rasa terima kasih kepada:

1. Kedua orang tua saya Bapak Hadi Ahlan dan Ibu Khoiriyah Hasanah yang telah mendukung, memberikan doa, kasih sayang, dan motivasi yang selalu menguatkan di setiap perjalanan hidup saya;
2. Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota;
3. Seluruh guru dan dosen yang telah memberikan banyak ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. Almamater Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember, SMAN 1 Lumajang, SMP Negeri 2 Lumajang, dan SDN Wonorejo 2.
5. Organisasi tempat saya berproses yang telah menjadi rumah kedua bagi saya yaitu UKM Pecinta Alam Mahasiswa MIPA (PALAPA) FMIPA Universitas Jember dan UKM Gerakan Pramuka Universitas Jember.

MOTO

"Jadilah seperti crayon, walaupun patah tetap bisa memberikan warna"[1]

[1] Fu Carrin.2019.*The Philosophy of Crayon*.Jakarta:Transmedia

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama : Ahmad Lasim

NIM : 161810101070

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul "Karakteristik Pelabelan Harmonis, Harmonis Ganjil dan Harmonis Genap" adalah benar-benar hasil karya ilmiah sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya dan belum pernah diajukan pada institusi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 31 Januari 2022

Yang menyatakan,

Ahmad Lasim

NIM 161810101070

SKRIPSI

KARAKTERISTIK PELABELAN HARMONIS, HARMONIS GANJIL DAN HARMONIS GENAP

Oleh

Ahmad Lasim

NIM 161810101070

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.

Dosen Pembimbing Anggota : Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul “Karakteristik Pelabelan Harmonis, Harmonis ganjil dan Harmonis Genap”, telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Tim Penguji:

Ketua,	Anggota I,
Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.	Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si.
NIP. 197408132000032004	NIP.198610142014041001
Anggota II,	Anggota III,
Dr. Mohamat Fatekurohman, S.Si., M.Si.	Kusbudiono, S.Si., M.Si.
NIP. 196906061998031001	NIP.197704302005011001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember

Drs. Achmad Sjaifullah, M.Sc., Ph.D.

NIP. 195910091986021001

RINGKASAN

Karakteristik Pelabelan Harmonis, Harmonis Ganjil dan Harmonis Genap; Ahmad Lasim, 161810101070; 2022; 36 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memetakan himpunan titik atau sisi dari suatu graf ke suatu bilangan bulat non-negatif. Terdapat beberapa jenis pelabelan graf, tiga diantaranya yaitu pelabelan harmonis, pelabelan harmonis ganjil dan pelabelan harmonis genap. Pelabelan harmonis pada graf G merupakan fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, q-1\}$ sedemikian sehingga menghasilkan fungsi bijektif $f^*: E(G) \rightarrow \{0,1, 2, \dots, q-1\}$ dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v)\ (mod\ q)$, untuk setiap $uv \in E(G)$. Pelabelan harmonis ganjil pada graf G merupakan fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, 2q-1\}$ sedemikian sehingga terdapat fungsi $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ dengan $f^*(uv) \in \{1, 3, 5, \dots, 2q-1\}$ untuk setiap $uv \in E(G)$. Sedangkan pelabelan harmonis genap pada graf G merupakan fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 2q\}$ sedemikian sehingga terdapat fungsi bijektif $f^*: E(G) \rightarrow \{0,2,4, \dots, 2q-2\}$ dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v)\ (mod\ 2q)$ untuk setiap $uv \in E(G)$.

Metode yang digunakan pada penelitian ini yaitu penelitian eksploratif yang bertujuan menemukan karakteristik dari pelabelan harmonis, harmonis ganjil dan harmonis genap. Penelitian diawali dengan menganalisis graf sederhana tanpa lintasan tertutup kemudian menganalisis graf sederhana dengan lintasan tertutup. Kemudian menganalisis ciri-ciri umum dan altermatif dari pelabelan harmonis, harmonis ganjil dan harmonis genap. Langkah terakhir, dilakukan pendataan kembali karakteristik pelabelan harmonis, harmonis ganjil dan harmonis genap berdasarkan hasil analisis pada metode pertama hingga ketiga. Adapun hasil dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Jika $G(p, q)$ merupakan graf terhubung sederhana dengan p titik dan q sisi dan merupakan graf harmonis, maka berlaku:
   a. Sedikitnya terdapat satu lintasan tertutup yang termuat di G.

b. Apabila G sebuah *cycle*, maka p ganjil.

2. Misalkan G graf dengan p titik dan q sisi. Diberikan fungsi f merupakan pelabelan harmonis pada suatu graf G. Jika fungsi $g_f : V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, q-1\}$ dengan $g_f(u) = q - f(u)(mod\ q)$ untuk setiap $u \in V(G)$. Maka g_f merupakan pelabelan harmonis pada graf G.
3. Misalkan sebuah fungsi injektif f merupakan pelabelan harmonis pada sebuah graf G dengan q sisi. Jika fungsi $g_f : V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, q-1\}$ dengan $g_f(u) = f(u) + k \pmod q$ untuk setiap $u \in V(G)$ dan $k \in \{1, 2, 3, \dots, q-1\}$. Maka g_f merupakan pelabelan harmonis pada graf G.
4. Jika G merupakan graf harmonis ganjil, maka graf G tidak akan memuat C_{2n+1}, untuk suatu $n \in N$.
5. Misalkan fungsi f adalah pelabelan harmonis ganjil pada sebuah graf G. Jika fungsi g_f adalah fungsi lain yang merupakan pelabelan harmonis ganjil pada graf G, maka g_f akan selalu mengawetkan ketetanggaan antara label titik 0 dan label titik 1.
6. Misalkan G graf dengan p titik dan q sisi. Diberikan fungsi f merupakan pelabelan harmonis ganjil pada suatu graf G. Jika fungsi $g_f : V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, 2q-1\}$ didefinisikan sebagai berikut.

$$g_f(u) = \begin{cases} f(u) - 1 & jika\ f(u)\ adalah\ bilangan\ ganjil \\ f(u) + 1 & jika\ f(u)\ adalah\ bilangan\ genap \end{cases}$$

   untuk setiap $u \in V(G)$. Maka g_f juga merupakan pelabelan harmonis ganjil pada graf G.
7. Misalkan G sebuah graf harmonis genap dengan p titik. Maka semua label titiknya adalah genap, jika tidak maka semua label titiknya ganjil.
8. Misalkan G sebuah graf harmonis genap dengan p titik dan q sisi. Jika $p > q$, maka seluruh label titik haruslah genap.
9. Misalkan sebuah fungsi injektif f merupakan pelabelan harmonis genap pada sebuah graf G dengan q sisi. Jika fungsi $g_f : V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, 2q\}$ dengan $g_f(u) = f(u) + q \pmod{2q}$ untuk setiap $u \in V(G)$. Maka g_f merupakan pelabelan harmonis genap pada graf G.

PRAKATA

Puji Syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul “Karakteristik Pelabelan Harmonis, Harmonis Ganjil dan Harmonis Genap”. Tugas akhir ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak, oleh karena itu penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, serta perhatian dalam penulisan skripsi ini.
2. Dr. Mohamat Fatekurohman, S.Si., M.Si. dan Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran demi perbaikan tugas akhir ini;
3. Teman–teman Jurusan Matematika Universitas Jember yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu;
4. Semua pihak yang telah memberikan sumbangan tenaga, semangat, dan pikiran yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu.

Penulis juga menerima kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2022

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang merepresentasikan kumpulan objek diskrit dan hubungan antar objek-objek tersebut. Objek yang direpretasikan yaitu titik (*vertex*) dan sisi (*edge*). Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 yang ditandai dengan terpecahkannya masalah jembatan Königsberg. Seiring waktu teori graf mengalami perkembangan yang pesat dengan munculnya topik baru yang berkaitan dengan teori graf, salah satunya adalah pelabelan graf yang untuk pertama kalinya diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1963.

Pelabelan graf merupakan fungsi komponen titik ataupun sisi pada suatu graf ke bilangan bulat tak negatif yang memenuhi aturan tertentu. Pelabelan graf dapat berupa pelabelan titik, apabila unsur yang dipetakan merupakan elemen dari himpunan titik suatu graf, disebut pelabelan sisi apabila unsur yang dipetakan merupakan elemen himpunan sisi suatu graf dan disebut pelabelan total apabila unsur yang dipetakan merupakan elemen dari himpunan titik dan sisi suatu graf. Terdapat beberapa macam jenis pelabelan pada graf, tiga diantaranya yaitu pelabelan harmonis, pelabelan harmonis ganjil dan pelabelan harmonis genap.

Pelabelan harmonis pertama kali diperkenalkan oleh R.L. Graham dan N.J.A. Slone pada tahun 1980. Pelabelan harmonis pada suatu graf G dengan q sisi didefinisikan sebagai suatu pemetaan satu-satu f dari himpunan titik pada graf G ke Z_q, sedemikian sehingga terdapat korespondensi satu-satu f^* dari himpunan sisi graf G ke himpunan bilangan bulat modulo q sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in V(G)$ akan berlaku $f^*(xy) = f(x) + f(y) (\mathrm{mod}\, q)$ dengan f^* merupakan fungsi label sisi pada graf G dan xy merupakan sisi yang menghubungkan titik x dan y. Sebuah graf G dikatakan graf harmonis jika dapat dilabeli dengan aturan pelabelan harmonis.

Pelabelan harmonis yang diperkenalkan oleh R.L. Graham dan N.J.A. Slone menginspirasi pelabelan harmonis ganjil yang diperkenalkan oleh Zhi He Liang dan Zhan Li Bai pada tahun 2009. Pelabelan harmonis ganjil merupakan aturan pelabelan yang didefinisikan sebagai pemetaan satu-satu $f: V(G) \rightarrow Z_{2q}$, sedemikian sehingga terdapat korespondensi satu-satu $f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, 7, \dots 2q - 1\}$ dengan $f^*(xy) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $xy \in E(G)$. Graf yang dapat dilabeli secara harmonis ganjil disebut dengan graf harmonis ganjil.

Pelabelan harmonis dan harmonis ganjil menginspirasi pelabelan harmonis genap yang dikenalkan oleh P.B.Sarasija dan R.Binthiya pada tahun 2011. Pelabelan harmonis genap dapat didefinisikan sebagai pemetaan satu-satu dari $V(G)$ ke himpunan $\{0,1, 2, \dots 2q\}$ sedemikian sehingga terdapat korespondensi satu-satu $f^*: E(G) \rightarrow \{0, 2, 4, \dots 2(q - 1)\}$. Graf yang dapat dilabeli secara harmonis genap disebut graf harmonis genap.

Seiring waktu, penelitian tentang graf harmonis, harmonis ganjil maupun harmonis genap mengalami perkembangan yang pesat serta memunculkan karya karya ilmiah terbaru tentang pelabelan graf. Munculnya teorema-teorema terbaru tentang pelabelan harmonis , harmonis ganjil maupun harmonis genap belum cukup untuk memudahkan peneliti dalam mengindentifikasi graf-graf yang dapat dilabeli dengan pelabelan tersebut. Hal ini tentunya menjadi kendala tersendiri bagi peneliti, sehingga sangat diperlukan sebuah penelitian yang berkaitan dengan karakteristik suatu pelabelan harmonis, harmonis ganjil, maupun harmonis genap. Pada penelitian ini akan dibahas tentang sifat-sifat dari pelabelan harmonis, harmonis ganjil, dan harmonis genap.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dikaji pada penelitian ini yaitu menganalisis karakteristik dari pelabelan harmonis, harmonis ganjil dan harmonis genap.

1.3 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui karakteristik dari pelabelan harmonis, harmonis ganjil dan harmonis genap.

1.4 Batasan Masalah

Adapun objek yang akan dikaji pada penelitian ini terbatas pada ruang lingkup pelabelan pada graf terhubung sederhana.

1.5 Manfaat

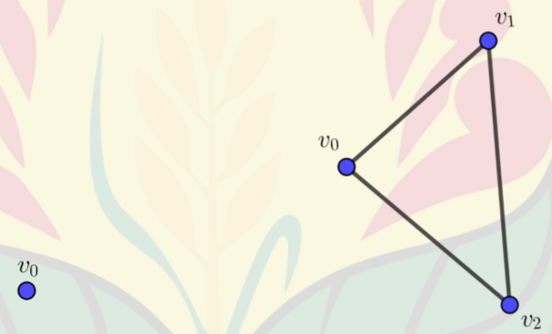
Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. Memberi wawasan lebih mendalam mengenai karakteristik pelabelan harmonis, harmonis ganjil dan harmonis genap.
b. Menambah referensi serta memudahkan peneliti lain dalam melakukan penelitian tentang pelabelan harmonis, harmonis ganjil ataupun harmonis genap.
c. Memberikan motivasi kepada pembaca dan peneliti dalam mengembangkan penelitian tentang pelabelan harmonis, harmonis ganjil ataupun harmonis genap.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi dan Konsep Dasar Graf

Menurut Slamin (2019), graf tak berarah G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V merupakan himpunan tak kosong dari elemen-elemen titik dan E merupakan himpunan (boleh kosong) pasangan tak terurut dari titik yang disebut dengan sisi. Berdasarkan definisi graf tersebut dapat disimpulkan bahwa suatu graf dimungkinkan tidak memiliki suatu sisi, namun diharuskan terdapat minimal satu titik pada suatu graf. Banyaknya titik pada graf disebut *order* dan banyaknya sisi pada graf disebut *size* .Graf yang tidak mempunyai sisi disebut dengan graf kosong sedangkan graf kosong yang hanya memiliki satu titik disebut *graf trivial* (Munir, 2010). Graf trivial dan graf tak kosong yang dibangun dari tiga titik dapat dilihat pada Gambar 2.1.



(a) Graf trivial (b) Graf tak kosong

Gambar 2.1 Graf trivial dan graf tak kosong

Suatu titik $u \in V$ dikatakan *bertetangga* (*adjacent*) dengan titik $v \in V$, apabila terdapat sisi $uv \in E$. Kedua titik u dan v dikatakan *bersisian* (*incident*) dengan sisi uv. Notasi $N(u)$ digunakan untuk mewakili himpunan semua tetangga pada titik u. Banyak sisi yang bersisian dengan titik u disebut dengan derajat u atau dapat kita notasikan $deg(u)$ (Harris *et al*., 2008).

Apabila terdapat titik yang memiliki derajat nol, maka titik itu disebut dengan *titik terisolasi* (*isolated vertex*), sedangkan titik dengan derajat 1 disebut dengan *titik ujung* (*pendant*) atau *daun* (*leaf*). *Loop* pada suatu graf didefinisikan sebagai sisi yang menghubungkan suatu titik ke dirinya sendiri, atau dengan kata lain suatu sisi $e \in E$ dikatakan *loop* apabila $e = (v, v)$. Pada *loop* suatu titik berinsiden dua kali sehingga $deg(v) = 2$ jika v merupakan titik yang memiliki *loop*. Pada suatu graf dapat pula terdapat pasangan titik (u, v) yang dihubungkan dengan lebih dari satu sisi, dan dalam hal ini sisi-sisi yang menghubungkan kedua titik kita sebut dengan *sisi rangkap* (*multiple edge*). Graf yang tidak memuat *loop* dan sisi rangkap disebut dengan *graf sederhana* (Rosen, 2007).

Graf terhubung sederhana dengan p titik dan $p - 1$ sisi disebut *graf pohon*. Oleh karena graf pohon merupakan graf terhubung dan jumlah titik yang dimiliki lebih banyak dari pada jumlah sisi sehingga tidak dimungkinkan terdapat lintasan tertutup pada pohon. Selain itu pada graf pohon selalu memiliki minimal 2 titik yang berderajat 1 yang disebut daun (Harris *et al*., 2008).

2.2 Fungsi

Menurut Purcel dan Verberg (1987) sebuah fungsi f merupakan suatu aturan padanan yang menghubungkan setiap objek x yang merupakan elemen dari suatu himpunan yang disebut *daerah asal* (*domain*) dengan sebuah objek tunggal $f(x)$ yang merupakan elemen dari suatu himpunan yang disebut *daerah kawan* (*kodomain*). Himpunan dari semua objek $f(x)$ disebut dengan *daerah hasil fungsi* (*range*). Berdasarkan sifatnya fungsi dibagi menjadi tiga yaitu fungsi injektif, surjektif dan bijektif. Misalkan $f: A \to B$ adalah suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B dengan *range* R_f, maka ketiga jenis fungsi dapat didefinisikan sebagai berikut :

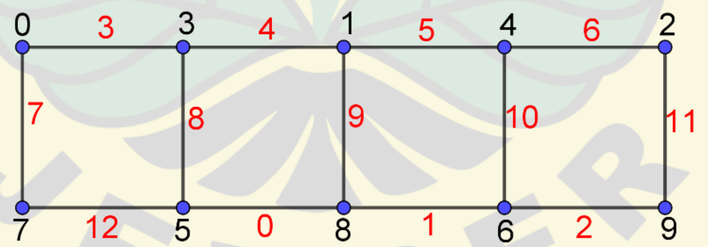
a. Fungsi f dikatakan injektif jika setiap $x_1 \neq x_2$, maka berlaku $f(x_1) \neq f(x_2)$.
b. Fungsi f dikatakan surjektif jika $R_f = B$.
c. Fungsi f dikatakan bijektif jika f bersifat injektif sekaligus bersifat surjektif.

2.3 Pelabelan Graf

Menurut Wallis (2001), pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memetakan himpunan titik atau sisi dari suatu graf ke suatu bilangan bulat non-negatif. Yang memenuhi aturan tertentu. Pelabelan graf dibagi menjadi tiga berdasarkan unsur yang dilabeli yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan graf merupakan pelabelan titik (*vertex labelling*) apabila daerah asal dari fungsi merupakan himpunan titik, dan disebut pelabelan sisi (*edge labelling*) apabila daerah asal dari fungsi merupakan himpunan sisi, dan disebut pelabelan total (*total labelling*) apabila daerah asal fungsi merupakan gabungan dari himpunan titik dan sisi. Terdapat beberapa pelabelan graf, beberapa diantaranya yaitu pelabelan harmonis, pelabelan harmonis ganjil dan pelabelan harmonis genap.

2.3.1 Pelabelan Harmonis

Menurut R.L. Graham dan N.J.A. Slone (1980), suatu graf G dengan q sisi dikatakan harmonis jika terdapat fungsi injektif $f: V(G) \to \{0, 1, 2, 3, \ldots, q-1\}$ sedemikian sehingga menghasilkan fungsi bijektif $f^*: E(G) \to \{0,1, 2, \ldots, q-1\}$ dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v)\ (mod\ q)$, untuk setiap $uv \in E(G)$. Salah satu jenis graf yang harmonis adalah graf tangga L_n $(n \geq 2)$, yang memiliki $2n$ titik dan $3n-2$ sisi. Berikut diperlihatkan pelabelan harmonis dari graf tangga L_5 pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Pelabelan harmonis pada graf tangga L_5

2.3.2 Pelabelan Harmonis Ganjil

Pelabelan harmonis ganjil pertama kali diperkenalkan oleh Liang dan Bai pada tahun 2009. Sebuah graf G dengan q sisi dikatakan harmonis ganjil jika terdapat fungsi injektif f yang memetakan setiap elemen di $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat non-negatif yang kurang dari $2q - 1$ atau dapat kita tuliskan $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \ldots, 2q - 1\}$ sedemikian sehingga terdapat fungsi $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ dengan $f^*(uv) \in \{1, 3, 5, \ldots, 2q - 1\}$ untuk setiap $uv \in E(G)$. Salah satu teorema tentang pelabelan harmonis ganjil pada suatu graf adalah sebagai berikut.

Teorema 2.1. (Liang dan Bai, 2009)

a. Jika G adalah graf harmonis ganjil, maka G merupakan graf bipartit.
b. Jika graf G dengan p titik dan q sisi merupakan harmonis ganjil, maka berlaku $2\sqrt{q} \leq p \leq 2q - 1$.

Pujiwati et al. (2020) menyatakan bahwa salah satu jenis graf yang merupakan graf harmonis ganjil adalah graf bintang ganda $S_{n,m}$. Graf bintang ganda $S_{n,m}$ memiliki $n + m + 2$ titik dan $n + m + 1$ sisi. Berikut diperlihatkan pelabelan harmonis ganjil dari graf bintang ganda $S_{4,4}$ pada Gambar 2.3.

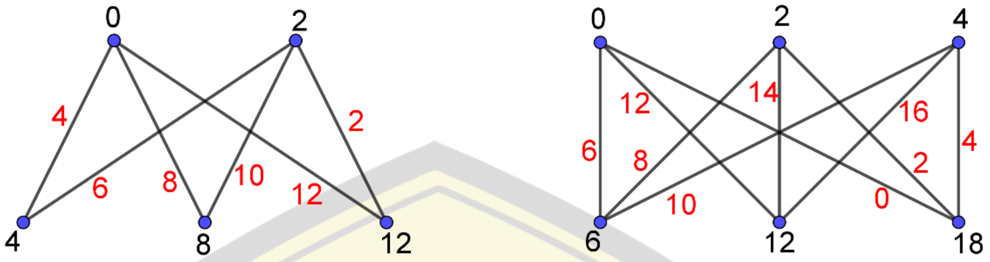
Gambar 2.3 Pelabelan harmonis ganjil pada graf bintang ganda $S_{4,4}$

2.3.3 Pelabelan Harmonis Genap

Graf $G(p, q)$ didefinisikan sebagai sebuah graf sederhana yang memiliki p titik dan q sisi. Graf $G(p, q)$ dikatakan harmonis genap, apabila terdapat fungsi injektif $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots, 2q\}$ sedemikian sehingga terdapat fungsi bijektif $f^*: E(G) \rightarrow \{0,2,4, \ldots, 2q - 2\}$ dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v) \pmod{2q}$ untuk setiap $uv \in E(G)$ (Sarasija dan Binthiya, 2011).

Salah satu jenis graf yang merupakan harmonis genap adalah graf bipartit lengkap $K_{m,n}$. Graf bipartit lengkap $K_{m,n}$ memiliki $m + n$ titik dan mn sisi.

Berikut diperlihatkan pelabelan harmonis genap dari graf bipartit lengkap $K_{2,3}$ dan $K_{3,3}$ pada Gambar 2.4.



(a) graf bipartit lengkap $K_{2,3}$ (b) graf bipartit lengkap $K_{3,3}$

Gambar 2.4 Pelabelan harmonis genap pada graf $K_{2,3}$ dan $K_{3,3}$

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada penelitian ini yaitu penelitian eksploratif yang bertujuan menemukan permasalahan baru ataupun hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti. Selain itu dilakukan juga studi literatur terkait pelabelan harmonis, harmonis ganjil dan pelabelan harmonis genap. Dalam penelitian ini, peneliti ingin menemukan karakteristik dari pelabelan harmonis, harmonis ganjil dan harmonis genap.

3.2 Rancangan Penelitian

Adapun rancangan penelitian yang akan dilakukan adalah sebagai berikut :

a. Menganalisis graf sederhana tanpa lintasan tertutup
b. Menganalisis graf sederhana dengan lintasan tertutup
c. Menganalisis ciri-ciri umum dan altermatif dari pelabelan harmonis, harmonis ganjil dan harmonis genap
d. Mendata kembali karakteristik pelabelan harmonis, harmonis ganjil dan harmonis genap berdasarkan hasil analisis pada metode pertama hingga ketiga.

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Karakteristik suatu pelabelan graf dapat ditinjau dari sifat fungsi pelabelan yang dikaitkan dengan karakteristik graf yang sesuai. Penulis melakukan eksplorasi terhadap sifat pelabelan harmonis, harmonis ganjil dan harmonis genap yang berkaitan dengan sifat graf yang bersesuaian. Berdasarkan hasil ekplorasi diperoleh beberapa teorema yang berkaitan dengan karakteristik pelabelan harmonis, harmonis ganjil dan harmonis genap.

4.1 Karakteristik Pelabelan Harmonis

Sebuah graf dikatakan harmonis apabila dapat dilabeli dengan aturan pelabelan harmonis. Terdapat beberapa teorema yang berkaitan dengan pelabelan harmonis yang akan dijelaskan pada bagian ini. Berikut merupakan teorema-teorema pelabelan harmonis.

Teorema 4.1. Jika $G(p,q)$ merupakan graf terhubung sederhana dengan p titik dan dan q sisi dan merupakan graf harmonis, maka berlaku:

a. Sedikitnya terdapat satu lintasan tertutup yang termuat di G.
b. Apabila G sebuah *cycle*, maka p ganjil.

Bukti :

a. Andaikan graf G graf terhubung dan tidak memiliki lintasan tertutup maka G merupakan graf pohon, sehingga akan terdapat q sisi dan $p = q + 1$ titik. Oleh karena G graf harmonis, maka akan selalu terdapat fungsi injektif $f: V(G) \to \{0, 1, 2, 3, \dots, q-1\}$ yang memiliki kardinalitas $|K_f| = q$. Oleh karena banyak titik dari graf G adalah $p = q + 1 > q = |K_f|$, maka akan selalu ada satu titik yang tidak terpetakan sehingga tidak dimungkinkan terdapat fungsi injektif f. Hal ini kontradiksi dengan G graf harmonis yang selalu memiliki fungsi injektif $f: V(G) \to \{0, 1, 2, 3, \dots, q-1\}$. Sehingga haruslah terdapat sedikitnya satu lintasan tertutup pada graf G.

b. Misalkan $G = C_p$ graf *cycle*. Andaikan p genap, maka $p = 2n$ untuk suatu n bilangan bulat. Karena $f^*: E(C_p) \to \{0, 1, 2, \dots, 2n-1\}$ merupakan fungsi bijektif, maka jumlah dari semua label sisi adalah $0 + 1 + 2 + \dots + 2n - 1 = \frac{(2n-1)(2n)}{2} \equiv -n \pmod{2n} \equiv n \pmod{2n}$. Jika jumlahan semua label sisi pada C_{2n} adalah m maka $m \equiv n \pmod{2n}$. Oleh karena label sisi diperoleh dari penjumlahan label titik yang *incident* dengan sisi tersebut, maka tanpa mengurangi keumuman dari pemberian label titik – tiiknya, dengan memisalkan label titik – titiknya adalah $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$ diperoleh $m = (a_0 + a_1) + (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2n-1} + a_0) = 2(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2n-1}) = 2(0 + 1 + 2 + \dots + 2n - 1) = (2n-1) \cdot (2n) \equiv 0 \pmod{2n}$. Hal ini kontradiksi dengan $m \equiv n \pmod{2n}$ sehingga haruslah p ganjil.

Teorema 4.2. Misalkan G graf dengan p titik dan q sisi. Diberikan fungsi f merupakan pelabelan harmonis pada suatu graf G. Jika fungsi $g_f: V(G) \to \{0, 1, \dots, q-1\}$ dengan $g_f(u) = q - f(u) \pmod q$ untuk setiap $u \in V(G)$. Maka g_f merupakan pelabelan harmonis pada graf G.

Bukti. Misalkan fungsi f merupakan pelabelan harmonis pada suatu graf G. Maka f merupakan fungsi injektif dari $V(G)$ *ke* $\{0, 1, 2, \dots, q-1\}$. Untuk membuktikan bahwa g_f adalah pelabelan harmonis pada graf G, maka akan ditunjukkan bahwa g_f adalah fungsi injektif dari himpunan $V(G)$ ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ sedemikian sehingga label sisinya memenuhi himpunan $\{0, 1, 2, \dots, q-1\}$.
Pertama, ambil sembarang $u, v \in V(G)$ yang memenuhi

$$g_f(u) = g_f(v)$$
$$q - f(u) \pmod q = q - f(v) \pmod q$$
$$f(u) \pmod q = f(v) \pmod q$$

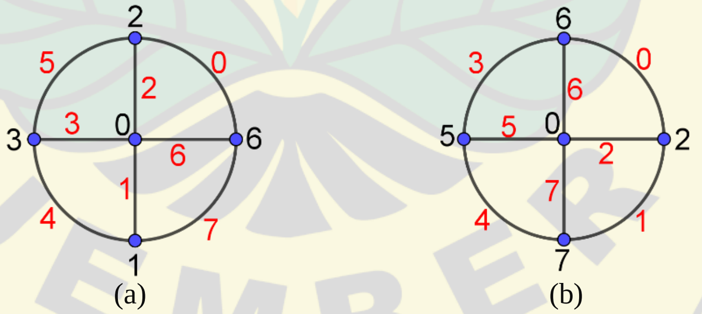
Karena $f(u), f(v) < q$, maka $f(u) = f(v)$. Karena f fungsi injektif maka $u = v$, sehingga terbukti bahwa g_f adalah fungsi injektif.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa untuk setiap sisi $uv \in E(G)$ mendapatkan label yang berbeda dari $\{0,1,2,\dots,q-1\}$ dengan aturan $g_f^*(uv) = g_f(u) + g_f(v) \pmod q$.

$$
\begin{aligned}
g_f^*(uv) &= g_f(u) + g_f(v) \pmod q \\
&= \Big(\big(q - f(u) \pmod q\big) + \big(q - f(v) \pmod q\big)\Big) \pmod q \\
&= \big(q - f(u)\big) + \big(q - f(v)\big) \pmod q \\
&= 2q - \big(f(u) + f(v)\big) \pmod q \\
&= 2q - f^*(uv) \pmod q \\
&= -f^*(uv) \pmod q
\end{aligned}
$$

Bentuk akhir dari persamaan menyatakan bahwa g_f^* merupakan invers penjumlahan dari f^* pada himpunan bilangan bulat modulo q. Hal tersebut menunjukkan bahwa setiap sisi $uv \in E(G)$ mendapatkan label yang berbeda dari $\{0,1,2,\dots,q-1\}$. Karena g_f adalah fungsi injektif dan terdapat fungsi bijektif $g_f^*: E(G) \to \{0,1,2,\dots,q-1\}$ dengan $g_f^*(uv) = g_f(u) + g_f(v) \pmod q$, maka terbukti bahwa g_f merupakan pelabelan harmonis pada graf G.

Sebagai contoh, pada Gambar 4.1 (a) diberikan pelabelan harmonis pada graf roda W_4. Selanjutnya jika graf roda W_4 pada Gambar 4.1 (a) menggunakan pelabelan harmonis dengan fungsi $g_f(u) = q - f(u) \pmod q$, maka akan berlaku pola seperti pada Gambar 4.1 (b).



Gambar 4.1 Pelabelan harmonis dengan fungsi f dan $g_f(u) = q - f(u) \pmod q$ pada graf roda W_4

Teorema 4.3. Misalkan sebuah fungsi injektif f merupakan pelabelan harmonis pada sebuah graf G dengan q sisi. Jika fungsi $g_f: V(G) \to \{0, 1, \dots, q-1\}$ dengan $g_f(u) = f(u) + k \pmod q$ untuk setiap $u \in V(G)$ dan $k \in \{1, 2, 3, \dots, q-1\}$. Maka g_f merupakan pelabelan harmonis pada graf G.

Bukti. Terlebih dahulu akan dibuktikan bahwa g_f adalah fungsi injektif dari himpunan $V(G)$ ke himpunan $\{0, 1, 2, \dots, q-1\}$

Ambil sembarang $u, v \in V(G)$ dan sembarang $k \in \{1, 2, 3, \dots, q-1\}$ yang memenuhi

$$g_f(u) = g_f(v)$$
$$f(u) + k \pmod q = f(v) + k \pmod q$$
$$f(u) (\text{mod } q) = f(v) \pmod q$$

Karena $f(u), f(v) < q$, maka $f(u) = f(v)$. Karena f fungsi injektif maka $u = v$, sehingga terbukti bahwa g_f adalah fungsi injektif.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa fungsi $g_f^*: E(G) \to \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ dengan $g_f^*(uv) = g_f(u) + g_f(v) \pmod q$ untuk setiap sisi $uv \in E(G)$ merupakan fungsi bijektif.

Terlebih dahulu akan dibuktikan bahwa g_f^* merupakan fungsi injektif. Ambil sembarang $uv, u_0v_0 \in E(G)$ dan sembarang $k \in \{1, 2, 3, \dots, q-1\}$ yang memenuhi

$$g_f^*(uv) = g_f^*(u_0v_0) \dots . (i)$$

Berikut akan dijabarkan fungsi pada ruas kiri dari persamaan (i).

$$\begin{aligned} g_f^*(uv) &= g_f(u) + g_f(v) \pmod q \\ &= \Big(\big(f(u) + k \pmod q\big) + \big(f(v) + k \pmod q\big)\Big) \pmod q \\ &= (f(u) + k + f(v) + k\,)(\text{mod } q) \\ &= \Big(\big(f(u) + f(v)\big) + 2k\,\Big) \pmod q \\ &= \big(f(u) + f(v)\big)(\text{mod } q) + 2k \pmod q \\ &= f^*(uv) + 2k \pmod q \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dijabarkan fungsi pada ruas kanan dari persamaan (i).

$$g_f^*(u_0v_0) = g_f(u_0) + g_f(v_0) \text{ (mod } q)$$
$$= \big(f(u_0) + k \text{ (mod } q)\big) + \big(f(v_0) + k \text{ (mod } q)\big)(\text{mod } q)$$
$$= (f(u_0) + k + f(v_0) + k\,)(\text{mod } q)$$
$$= \Big(\big(f(u_0) + f(v_0)\big) + 2k\,\Big)\,(\text{mod } q)$$
$$= \big(f(u_0) + f(v_0)\big)(\text{mod } q) + 2k \text{ (mod } q)$$
$$= f^*(u_0v_0) + 2k \text{ (mod } q)$$

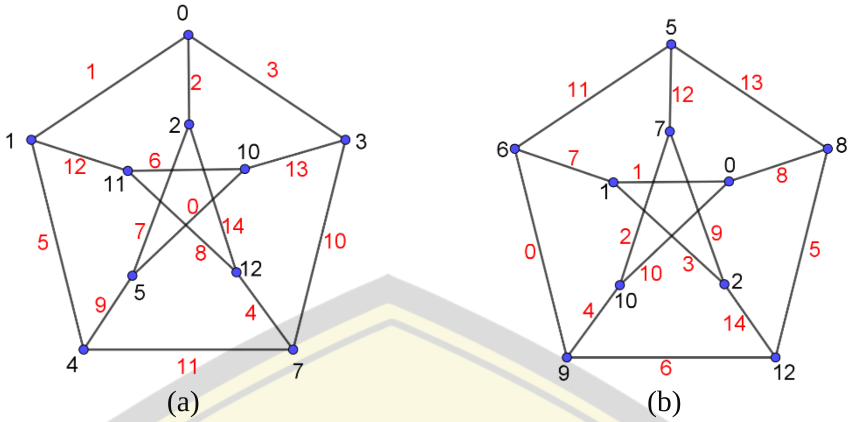
Berdasarkan hasil penjabaran untuk ruas kiri dan kanan dari persamaan (i), diperoleh bentuk persamaan sebagai berikut.

$$f^*(uv) + 2k \text{ (mod } q) = f^*(u_0v_0) + 2k \text{ (mod } q)$$
$$f^*(uv)(\text{mod } q) = f^*(u_0v_0) \text{ (mod } q)$$

Karena $f^*(uv), f^*(u_0v_0) < q$, maka $f^*(uv) = f^*(u_0v_0)$. Karena f^* fungsi injektif maka $uv = u_0v_0$, sehingga terbukti bahwa g_f^* adalah fungsi injektif. Karena f^* juga merupakan fungsi surjektif maka $f^*\big(E(G)\big) = \{\,0,1,2,\dots,q-1\}$. Selanjutnya karena g_f^* merupakan fungsi yang bersesuaian dengan fungsi f^*, maka fungsi g_f^* juga merupakan fungsi surjektif. Berdasarkan pernyataan bahwa g_f^* adalah fungsi injektif sekaligus fungsi surjektif, maka disimpulkan g_f^* adalah fungsi bijektif.

Karena g_f adalah fungsi injektif dan terdapat fungsi bijektif $g_f^*: E(G) \rightarrow \{\,0,1,2,\dots,q-1\}$ dengan $g_f^*(uv) = g_f(u) + g_f(v)$ (mod q), maka terbukti bahwa g_f merupakan pelabelan harmonis pada graf G.

Sebagai contoh, pada Gambar 4.2 (a) diberikan pelabelan harmonis dengan fungsi f pada graf petersen dengan 10 titik dan 15 sisi. Selanjutnya jika graf Petersen pada Gambar 4.2 (a) menggunakan pelabelan harmonis dengan fungsi $g_f(u) = q - f(u)(\text{mod } q)$ dengan fungsi $g_f(u) = f(u) + k$ (mod q), maka akan berlaku pola seperti pada Gambar 4.2 (b).



Gambar 4.2 Pelabelan harmonis dengan fungsi f dan fungsi $g_f(u) = f(u) + k \pmod q$ untuk $k = 5$ pada graf petersen dengan 10 titik dan 15 sisi

4.2 Karakteristik Pelabelan Harmonis Ganjil

Suatu graf harmonis ganjil merupakan graf bipartit yang dapat dilabeli dengan aturan pelabelan harmonis ganjil. Berikut merupakan beberapa teorema karakteristik pelabelan harmonis ganjil.

Teorema 4.4. Jika G merupakan graf harmonis ganjil, maka graf G tidak akan memuat C_{2n+1}, untuk suatu $n \in N$.

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.1 tentang graf harmonis ganjil, maka G merupakan graf bipartit. Andaikan G memuat C_{2n+1}, karena G merupakan graf bipartit maka titik – titik pada graf dapat dipartisi menjadi 2 himpunan berbeda yang saling berelasi. Selanjutnya akan dipartisi pada bagian yang memuat C_{2n+1}. Misalkan titik – titik yang membatasi C_{2n+1} adalah $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2n+1}$. Tanpa mengurangi keumuman titik $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2n+1}$ akan dipartisi menjadi 2 himpunan yang berbeda yaitu $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $B = \{v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{2n+1}\}$. Tanpa mengurangi keumuman pula, misalkan v_1 berelasi dengan v_{n+1} dan v_{n+2}, v_2 berelasi dengan v_{n+2} dan v_{n+3} begitu seterusnya sedemikian sehingga v_n berelasi dengan v_{2n} dan v_{2n+1}. Terlihat bahwa v_{n+1} dan v_{2n+1} hanya akan berelasi dengan satu buah titik. Karena C_{2n+1} merupakan lintasan tertutup, maka v_{n+1} akan berelasi dengan v_{2n+1}. Hal ini kontradiksi karena v_{n+1} dan v_{2n+1} berada pada himpunan yang sama. Jadi haruslah graf G tidak akan memuat C_{2n+1}.

Lemma 4.1. Misalkan fungsi f adalah pelabelan harmonis ganjil pada sebuah graf G. Jika fungsi g_f adalah fungsi lain yang merupakan pelabelan harmonis ganjil pada graf G, maka g_f akan selalu mengawetkan ketetanggaan antara label titik 0 dan label titik 1.

Bukti. Pelabelan harmonis ganjil pada graf G tentunya memiliki label 1 pada salah satu sisi pada graf. Karena g_f adalah fungsi lain yang merupakan pelabelan harmonis ganjil pada graf G, maka g_f juga akan menghasilkan label 1 pada salah satu sisi pada graf tersebut. Karena sifat pelabelan dari graf harmonis ganjil tidak menggunakan bilangan modulo, maka label 1 hanya akan diperoleh dari penjumlahan 0 dan 1. Hal ini menunjukkan bahwa haruslah fungsi g_f mengawetkan ketetanggan antara label titik 0 dan label titik 1 pada graf G.

Teorema 4.5. Misalkan G graf dengan p titik dan q sisi. Diberikan fungsi f merupakan pelabelan harmonis ganjil pada suatu graf G. Jika fungsi $g_f: V(G) \to \{0, 1, \ldots, 2q-1\}$ didefinisikan sebagai berikut.

$$g_f(u) = \begin{cases} f(u) - 1 & jika\ f(u)\ adalah\ bilangan\ ganjil \\ f(u) + 1 & jika\ f(u)\ adalah\ bilangan\ genap \end{cases}$$

untuk setiap $u \in V(G)$. Maka g_f juga merupakan pelabelan harmonis ganjil pada graf G.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa g_f adalah pelabelan harmonis ganjil pada graf G, akan ditunjukkan bahwa g_f adalah fungsi injektif dari $V(G)$ *ke* $\{0, 1, \ldots, 2q-1\}$. Berdasakan definisi fungsi g_f, nilai $g_f(u)$ adalah ganjil jika dan hanya jika $f(u)$ benilai genap dan sebaliknya $g_f(u)$ bernilai genap jika dan hanya jika $f(u)$ benilai ganjil.

Pertama, ambil sembarang $u, v \in V(G)$ yang memenuhi $g_f(u) = g_f(v)$. Misalkan $f(u)$ ganjil sedemikian sehingga $g_f(u)$ bernilai genap. Karena $g_f(u)$ bernilai genap, maka $g_f(v)$ juga genap sehingga $f(v)$ bernilai ganjil. Selanjutnya akan dilanjutkan pembuktian apakah g_f merupakan fungsi injektif.

$$g_f(u) = g_f(v)$$
$$f(u) - 1 = f(v) - 1$$
$$f(u) = f(v)$$

Jika $f(u)$ genap sedemikian sehingga $g_f(u)$ bernilai ganjil. Karena $g_f(u)$ bernilai ganjil, maka $g_f(v)$ juga ganjil sehingga $f(v)$ bernilai genap. Selanjutnya akan dilanjutkan pembuktian apakah g_f merupakan fungsi injektif.

$$g_f(u) = g_f(v)$$
$$f(u) + 1 = f(v) + 1$$
$$f(u) = f(v)$$

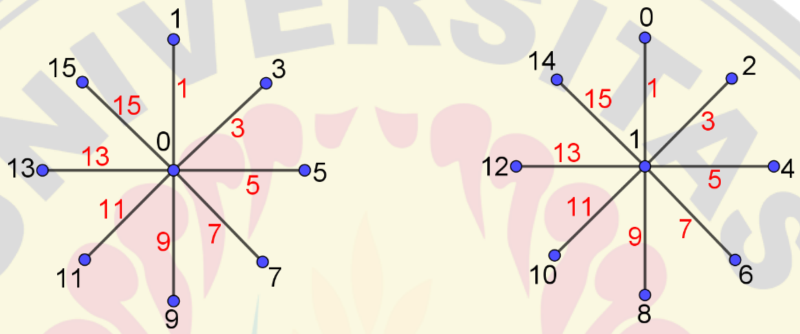
Karena f adalah fungsi injektif, maka $u = v$. Karena untuk $g_f(u) = g_f(v)$ diperoleh $u = v$, maka dapat disimpulkan bahwa g_f bersifat injektif.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa fungsi $g_f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, \dots, 2q - 1\}$ dengan $g_f^*(uv) = g_f(u) + g_f(v)$ untuk setiap sisi $uv \in E(G)$ merupakan fungsi bijektif. Karena $g_f^*(uv)$ akan dipetakan ke himpunan bilangan ganjil, maka salah satu dari $g_f(u)$ atau $g_f(v)$ merupakan bilangan ganjil dan yang lain merupakan bilangan genap. Berdasakan definisi fungsi g_f, nilai $g_f(u)$ adalah ganjil jika dan hanya jika $f(u)$ benilai genap dan sebaliknya $g_f(u)$ bernilai genap jika dan hanya jika $f(u)$ benilai ganjil. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $g_f(u)$ bilangan ganjil dan $g_f(v)$ bilangan genap, sedemikian sehingga nilai $f(u)$ dan $f(v)$ masing – masing merupakan bilangan genap dan bilangan ganjil.

$$\begin{aligned} g_f^*(uv) &= g_f(u) + g_f(v) \\ &= (f(u) - 1) + (f(v) + 1) \\ &= f(u) - 1 + f(v) + 1 \\ &= f(u) + f(v) \\ &= f^*(uv) \end{aligned}$$

Karena f^* merupakan fungsi bijektif yang memetakan setiap $uv \in E(G)$ ke himpunan $\{1, 3, \dots, 2q-1\}$, maka g_f^* juga merupakan fungsi bijektif. Berdasarkan pernyataan bahwa g_f adalah fungsi injektif dan terdapat fungsi $g_f^*: E(G) \rightarrow \{1, 3, \dots, 2q-1\}$ yang merupakan fungsi bijektif, maka terbukti g_f merupakan pelabelan harmonis ganjil pada graf G.

Sebagai contoh, pada Gambar 4.3 (a) diberikan pelabelan harmonis ganjil pada graf bintang S_8. Selanjutnya jika graf bintang S_8 pada Gambar 4.3 (a) menggunakan pelabelan harmonis ganjil dengan fungsi $g_f(u)$, maka akan berlaku pola seperti pada Gambar 4.3 (b).



(a) (b)

Gambar 4.3 Pelabelan harmonis ganjil dengan fungsi f dan g_f pada graf bintang S_8

4.3 Karakteristik Pelabelan Harmonis Genap

Sebuah graf G dikatakan harmonis genap apabila himpunan titik dan sisi pada graf dapat dilabeli dengan aturan pelabelan harmonis genap.

Lemma 4.2. Misalkan G sebuah graf harmonis genap dengan p titik. Maka semua label titiknya adalah genap, jika tidak maka semua label titiknya ganjil.

Bukti. Andaikan pada graf G memiliki $p-k$ titik berlabel ganjil dan k–buah titik berlabel genap. Karena graf G merupakan graf terhubung, maka akan terdapat titik berlabel ganjil yang bertetangga dengan titik berlabel genap sehingga menyebabkan label sisi yang ber–*incident* dengan kedua titik tersebut berlabel ganjil. Begitu pula apabila graf G memiliki $p-k$ titik berlabel genap dan k–buah titik berlabel ganjil, akan didapatkan setidaknya satu sisi berlabel ganjil. Hal ini kontradiksi dengan definisi pelabelan harmonis genap, sehingga haruslah p titik pada graf G semuanya berlabel ganjil atau semuanya berlabel genap.

Corollary 4.1. Misalkan G sebuah graf harmonis genap dengan p titik dan q sisi. Jika $p > q$, maka seluruh label titik haruslah genap.

Bukti. Karena $p > q$ dan graf G merupakan graf terhubung, maka $p = q + 1$. Misalkan fungsi injektif $f: V(G) \to \{0, 1, \ldots, 2q\}$ merupakan pelabelan harmonis genap pada graf G. Berdasarkan definisi fungsi f, diperoleh bahwa label ganjil pada kodomain ada sebanyak q sedangkan label genap ada sebanyak $q + 1$. Karena f adalah fungsi injektif dan akibat dari Lemma 4.2, maka haruslah semua label titik pada graf G adalah genap.

Teorema 4.6. Misalkan sebuah fungsi injektif f merupakan pelabelan harmonis genap pada sebuah graf G dengan q sisi. Jika fungsi $g_f: V(G) \to \{0, 1, \ldots, 2q\}$ dengan $g_f(u) = f(u) + q \pmod{2q}$ untuk setiap $u \in V(G)$. Maka g_f merupakan pelabelan harmonis genap pada graf G.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa g_f merupakan pelabelan harmonis genap pada graf G, terlebih dahulu akan dibuktikan bahwa g_f adalah fungsi injektif.

Ambil sembarang $u, v \in V(G)$ yang memenuhi

$$g_f(u) = g_f(v)$$
$$f(u) + q \pmod{2q} = f(v) + q \pmod{2q}$$
$$f(u) \pmod{2q} = f(v) \pmod{2q}$$

Karena $f(u), f(v) < 2q$, maka $f(u) = f(v)$. Hal ini menunjukkan bahwa $u = v$, sehingga terbukti bahwa g_f adalah fungsi injektif.

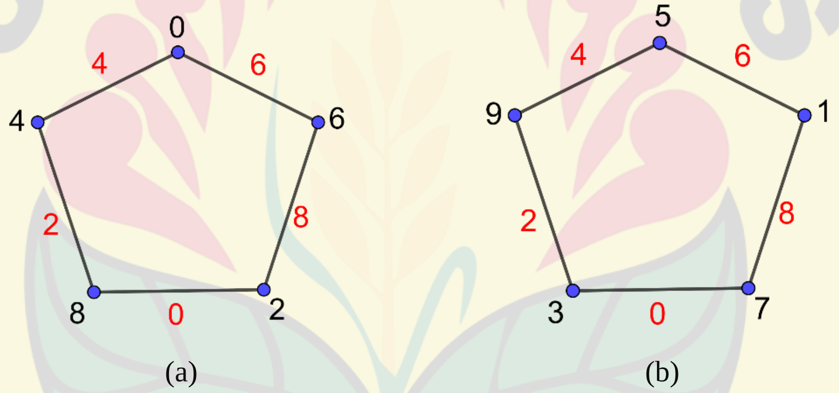
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa terdapat fungsi bijektif $g_f^*: E(G) \to \{0, 2, \ldots, 2q - 2\}$ dengan $g_f^*(uv) = g_f(u) + g_f(v) \pmod{2q}$ untuk setiap sisi $uv \in E(G)$.

$$g_f^*(uv) = g_f(u) + g_f(v) \pmod{2q}$$

$$= \big(f(u) + q \ (\text{mod } 2\text{q})\big) + \big(f(v) + q(\text{mod } 2q)\big)(\text{mod } 2q)$$
$$= (f(u) + q + f(v) + q)(\text{mod } 2q)$$
$$= (f(u) + f(v) + 2q) \ (\text{mod } 2q)$$
$$= f(u) + f(v) \ (\text{mod } 2q)$$
$$= f^*(uv)$$

Karena f^* merupakan fungsi bijektif yang memetakan setiap $uv \in E(G)$ ke himpunan $\{ 0, 2, \dots, 2q - 2\}$, maka g_f^* juga merupakan fungsi bijektif. Berdasarkan pernyataan bahwa g_f adalah fungsi injektif sedemikian sehingga terdapat fungsi bijektif g_f^*, maka terbukti g_f merupakan pelabelan harmonis genap pada graf G.

Sebagai contoh, pada Gambar 4.4 (a) diberikan pelabelan haramonis genap dengan fungsi f pada graf *cycle* C_5. Selanjutnya jika graf *cycle* C_5 pada Gambar 4.4 (a) menggunakan pelabelan harmonis genap dengan fungsi $g_f(u)$, maka akan berlaku pola seperti pada Gambar 4.4 (b).



Gambar 4.4 Pelabelan haramonis genap dengan fungsi f dan fungsi g_f pada graf *cycle* C_5

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Adapun yang dapat disimpulkan pada penelitian ini yaitu, pada graf harmonis memiliki karakter sedikitnya memuat satu kintasan tertutup. Pada graf harmonis ganjil memiliki karakter tidak memuat *cycle* ganjil. Sedangkan pada graf harmonis genap memiliki karakter semua titiknya akan berlabel ganjil atau semua titiknya berlabel genap. Selain itu pada graf harmonis genap akan berlaku semua titik harus berlabel genap apabila pada graf $G(p,q)$ berlaku $p > q$.

Pelabelan harmonis, harmonis ganjil dan harmonis genap tidaklah unik, sehingga akan terdapat fungsi lain yang juga berlaku pada graf yang sama. Adapun pada graf harmonis didapat dua buah fungsi lain yang merupakan pelabelan harmonis dan berlaku pada suatu graf yang sama. Fungsi tersebut adalah $g_f(u) = q - f(u) \pmod q$ dan $g_f(u) = f(u) + k \pmod q$ untuk setiap titik $u \in V(G)$ dan $k \in \{1, 2, 3, \dots, q-1\}$. Graf harmonis ganjil juga memiliki fungsi pelabelan selain fungsi f dengan syarat utama mengawetkan ketetanggan label titik 0 dan 1. Pada graf harmonis ganjil didapatkan satu alternatif fungsi pelabelan yaitu fungsi sepotong–sepotong $g_f(v) = f(v) - 1$ untuk titik berlabel ganjil dan $g_f(v) = f(v) + 1$ untuk titik berlabel genap. Sedangkan pada graf harmonis genap juga diperoleh sebuah alternatif fungsi pelabelan harmonis genap yaitu $g_f(v) = f(v) + q \pmod{2q}$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian pada bab sebelumnya, penulis memberi saran pada peneliti selanjutnya untuk mengembangkan penelitian ini dengan menggunakan teorema terbaru pada hasil penelitian ini. Hal ini disarankan agar mempermudah dalam menganalisis graf yang akan ditentukan dalam penelitian pelabelan harmonis, harmonis ganjil dan harmonis genap. Penulis juga menyarankan supaya peneliti selanjutnya lebih berfokus pada sifat dasar yang dimiliki dari suatu graf dan juga fungsi pelabelan yang digunakan.

DAFTAR PUSTAKA

Diestell, R. 2005. *Graph Theory Electronic Edition.* Third Edition. New York: Graduate Texts in Mathematics.

Gallian, J.A., L.A.Schoenhard, dan S.Arumugam. 2020. Properly Even Harmonious Labelings of Diconnected Graphs. *AKCE International Journal of Graps and Combinatorics.*12(1) 4: 204–215.

Gayathri, K., dan C. Sekar.2016. Even Harmonious Labeling of the Graph $H(2n, 2t + 1)$. *International Journal of Mathematics and Statistics Invention (IJMSI).*4(6):44 – 53.

Graham, R.L. dan N. J. A. Slone.1980. On Additive Bases and Harmonious Graphs.*SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods.*1(4):382 – 404.

Harris, J.M., Jefry L.H dan Michael J.M.2008.*Combinatorics and Graphs Theory*.Second Edition.Springer:New York.

Jeyanthi, P., S. Philo, dan K.A. Sugeng. 2015. Odd harmonious labeling of some new families of graphs. *SUT Journal of Mathematics*.51(2):181–193.

Kurniawan. 2019. Pelabelan Harmonis Gabungan Graf Tangga Segitiga LS_n Dengan Graf Tangga Segitiga Variasi X_n. *Jurnal Rekayasa Informasi*.4(1):46 – 51.

Liang, Z., dan Z. Bai. 2009. On The Odd Harmonious Graphs with Aplications. *Journal of Applied Mathematics and Computing*.(29):105 – 116.

Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit.* Edisi Ketiga . Bandung : Informatika Bandung.

Pujiwati, D.A., I. Halikin, and K. Wijaya. 2020. Odd Harmonious Labeling of Two Graphs Containing Star. *AIP Conference Proceeding*.

Purcel, E.J., dan D. Verberg.1987. *Calculus with Analytic Geometry*. fifth Edition: Prentice-Hall, Inc. Terjemahan Oleh I.N. Susila dan B.Kartasasmita. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid I*. Bandung: Penerbit Erlangga.

Rosen, K. H. 2007. *Discrete Mathematics and Its Aplications*. Seven edition. NewYork : Connect Learn Succed.

Sarasija, P.B. dan R. Binthiya. 2011. Even Harmonious Graphs with Applications. *International Journal of Computer Science and Information Security (IJCSIS).* 9: 161-163.

Slamin. 2019. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Malang : Dream litera Buana.

Wallis, W. D., dan A. M. Marr. 2013. *Magic Graph Second Edition*. Boston : Birkhauser.