PELABELAN KOPRIMA PADA BEBERAPA KELAS GRAF DAN HASIL AMALGAMASINYA

TESIS

Oleh

Hafif Komarullah
NIM. 201820101002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2022

DIGITAL REPOSITORY UNIVERSITAS JEMBER

PELABELAN KOPRIMA PADA BEBERAPA KELAS GRAF DAN HASIL AMALGAMASINYA

TESIS

diajukan guna memenuhi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan studi pada Program Pasca Sarjana (S2) dan mencapai gelar Magister Sains

Oleh

Hafif Komarullah
NIM. 201820101002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2022

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penulis persembahkan skripsi ini sebagai ungkapan kebahagiaan dan rasa terima kasih kepada:

1. Kedua orang tuaku Ayahanda Sumarwi dan Ibunda Ami yang telah mendukung dan memberikan doa, kasih sayang, motivasi, dan senyuman yang selalu menguatkan disetiap perjalanan hidup saya;
2. Almagfurlah KH. Yusuf Muhammad yang telah memberikan motivasi dari catatan-catatan nasehatnya;
3. Prof. Drs. Slamin, M.Comp., Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota;
4. Seluruh guru dan dosen yang telah memberikan banyak ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
5. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, SMAU BPPT Darus Sholah Jember, SMP Negeri 1 Jenggawah, dan SD Negeri 06 Jenggawah.

MOTTO

"Barangsiapa belum pernah merasakan pahitnya menuntut ilmu walau sesaat, ia akan menelan hinanya kebodohan sepanjang hidupnya"
[1]

"Engkau tak dapat meraih ilmu kecuali dengan enam hal yaitu; cerdas, selalu ingin tahu, tabah, punya bekal dalam menuntut ilmu, bimbingan dari guru, dan dalam waktu yang lama"
[2]

"Dadi opo wae ojo sampek lali mulang, mulang keluargane, lingkungane, lan masyarakat sekitare"
[3]

[1] Imam Syafi'i
[2] Ali bin Abi Thalib
[3] KH. Yusuf Muhammad

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Hafif Komarullah

NIM : 201820101002

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul "Pelabelan Koprima Pada Beberapa Kelas Graf Dan Hasil Amalgamasinya" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2022

Yang menyatakan,

Hafif Komarullah

NIM 201810101002

TESIS

PELABELAN KOPRIMA PADA BEBERAPA KELAS GRAF DAN HASIL AMALGAMASINYA

Oleh

Hafif Komarullah
NIM. 201810101002

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama	:	Prof. Drs. Slamin, M.Comp., Sc., Ph.D.
Dosen Pembimbing Anggota	:	Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Tesis berjudul ”Pelabelan Koprima Pada Beberapa Kelas Graf Dan Hasil Amalgamasinya” telah diuji dan disahkan pada:

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,	Anggota I,
Prof. Drs. Slamin, M.Comp., Sc., Ph.D.	Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.
NIP. 19670420 199201 1 001	NIP. 19740813 200003 2 004
Anggota II,	Anggota III,
Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.	Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si.
NIP. 19700606 199803 1 003	NIP. 19740719 200012 1 0001

Mengesahkan

Dekan,

Drs. Achmad Sjaifullah, M.Sc, Ph.D.

NIP. 19591009 198602 1 001

RINGKASAN

Pelabelan Koprima Pada Beberapa Kelas Graf Dan Hasil Amalgamasinya; Hafif Komarullah, 201820101002; 2022: 53 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pelabelan graf merupakan pemetaan anggota-anggota graf ke bilangan bulat non negatif dengan aturan tertentu. Sadlacek pada tahun 1963 pertama kali memperkenalkan teori pelabelan graf. Berdasarkan objek yang dilabeli, pelabelan graf terbagi menjadi pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan koprima adalah pemetaan titik graf ke bilangan bulat positif dengan syarat label titik yang bertetangga relatif prima. Misalkan diberikan graf G dan fungsi pelabelan pada graf G didefinisikan $f : V(G) \to \{1, 2, 3, ..., k\}$ sedemikian sehingga label titik yang bertetangga relatif prima. Fungsi f dikatakan pelabelan koprima jika $k \geq |V(G)|$. Jika $k = |V(G)|$ maka pelabelan koprima disebut pelabelan prima. Namun, setiap graf memiliki pelabelan koprima. Sehingga pada pelabelan koprima pada sebuah graf G terfokus kepada nilai minimal label terbesarnya atau disebut *minimum coprime number* yang dinotasikan dengan $\mathfrak{pr}(G)$.

Penelitian ini berutujuan untuk mendapatkan *minimum coprime number* pada graf amalgamasi titik dari graf roda ganjil, graf komplit dan graf berlian. Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan didapatkan batas bawah dari amalgamasi titik pada graf roda ganjil $Amal(W_n, v_0, t)$ adalah $(n + 1)t + 1$, sedangkan untuk batas atasnya peneliti membagi menjadi dua kasus yaitu $n \equiv 1 \mod 4$ dan $n \equiv 3 \mod 4$. Batas atas untuk kasus $n \equiv 1 \mod 4$ adalah $(n + 1)t + 1$, sedangkan untuk kasus $n \equiv 3 \mod 4$ dan $n \geq 23$ peneliti tidak mendapatkan fungsi pelabelan secara umum, sehingga hal tersebut masih menjadi masalah terbuka. Graf amalgamasi titik pada graf komplit $Amal(K_n, v_0, t)$ mempunyai *minimum coprime number* sebesar $p_{((n-3)t+2)}$ atau $(n - 3)t + 2$ bilangan prima pertama. *Minimum coprime number* pada graf berlian Br_n adalah $3n - 2$ untuk n ganjil dan $3n - 1$ untuk n genap. *Minimum coprime number* pada graf hasil amalgamasi titik pada graf berlian sebagai berikut. Untuk n

ganjil didapatkan *minimum coprime number* pada graf $Amal(Br_n, v_0, t)$ sebesar $(3n-3)t+1$. Sedangkan untuk kasus n genap dan $n \geq 12$ pada graf $Amal(Br_n, v_0, t)$, peneliti tidak mendapatkan fungsi pelabelan secara umum. Sehingga batas atas *minimum coprime number* pada graf $Amal(Br_n, v_0, t)$ untuk n genap dan $n \geq 12$ masih menjadi masalah terbuka.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul “Pelabelan Koprima Pada Beberapa Kelas Graf Dan Hasil Amalgamasinya”. Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan Pascasarjana (S2) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Penetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan tesis ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Ketua Prodi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Prof. Drs. Slamin, M.Comp., Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan tesis ini;
4. Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji I dan Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan tesis ini;
5. Dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
6. Ayahanda tercinta Sumarwi dan Ibunda Ami yang selalu memberikan cinta kasihnya, doa tiada henti, semangat dan motivasi untuk tetap berjuang dalam penyelesaian tesis ini;
7. Almagfurlah KH. Yusuf Muhammad yang telah memberikan motivasi dari catatan-catatan nasehatnya;
8. Kyai Ahmad Nafi’ yang senantiasa memberikan semangat;
9. Istri tercinta yang senantiasa memberikan semangat;
10. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya tesis ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tesis ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tesis ini dapat bermanfaat.

Jember, Januari 2022

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mempunyai banyak terapan dalam kehidupan sehari-hari. Dalam pengimplementasiannya, teori graf merepresentasikan objek sebagai titik dan hubungan antar objek sebagai sisi. Leonhard Euler merupakan orang pertama yang mengenalkan teori graf melalui permasalahan jembatan Konisberg yaitu membuktikan bahwa setiap orang tidak mungkin melewati jembatan tersebut hanya satu kali jika ingin melewati jembatan tersebut dan kembali ke tempat awal keberangkatan. Dalam memecahkan permasalahan tersebut Euler pada tahun 1736 merepresentasikan daratan sebagai titik dan jembatan sebagai garis. Teori graf semakin berkembang setelah Euler menyelesaikan permasalahan tersebut.

Pelabelan graf merupakan salah satu topik teori graf yang telah dikembangkan. Pelabelan graf merupakan pemetaan anggota-anggota graf ke bilangan bulat non negatif dengan aturan tertentu. Sadlacek pada tahun 1963 pertama kali memperkenalkan teori pelabelan graf. Berdasarkan objek yang dilabeli, pelabelan graf terbagi menjadi pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Salah satu pelabelan titik yang telah dikembangkan adalah pelabelan prima dan koprima.

Pelabelan koprima adalah pemetaan titik graf ke bilangan bulat positif dengan syarat label titik yang bertetangga relatif prima. Misalkan diberikan graf G dan fungsi pelabelan pada graf G didefinisikan $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., k\}$ sedemikian sehingga label titik yang bertetangga relatif prima. Fungsi f dikatakan pelabelan koprima jika $k \geq |V(G)|$. Jika $k = |V(G)|$ maka pelabelan koprima disebut pelabelan prima. Namun, setiap graf memiliki pelabelan koprima. Sehingga pada pelabelan koprima pada sebuah graf G terfokus kepada nilai minimal label terbesarnya atau disebut *minimum coprime number* yang dinotasikan dengan $\mathfrak{pr}(G)$. Konsep pelabelan prima berasal dari Entringer pada tahun 1980 dan menduga bahwa semua graf pohon adalah prima. Selanjutnya Tout, Dabboucy dan

Howalla pada tahun 1984 memperkenalkan pelabelan prima. Di antara kelas pohon yang dikenal sebagai pohon prima adalah graf lintasan, graf bintang, graf laba-laba, pohon binomial, dan semua pohon dengan ordo hingga 50.

Peneliti sebelumnya melakukan penelitian terkait pelabelan prima dan koprima pada beberapa kelas graf ataupun graf hasil operasi graf. John Asplund dan N. Bradley Fox pada tahun 2017 meneliti tentang *minimum coprime number* pada graf komplit, graf roda, graf $C_{2k+1} \cup C_{2l+1}$, graf $K_m \cup P_n$, graf P_n^2, graf C_n^2, dan graf $P_n + P_2$. John Asplund dan N. Bradley Fox pada tahun 2019 meneliti tentang *minimum coprime number* pada graf prisma dan graf petersen. Catherine Lee pada tahun 2020 meneliti tentang *minimum coprime number* pada graf $K_n \bigodot \bar{K}_2$, dan graf $P_m + P_n$. Lee Wui dan Yeh pada tahun 1988 telah menunjukkan bahwa $Amal(G, v_0, t)$ merupakan pelabelan prima ketika G adalah graf lintasan, graf *cycle*, atau graf roda genap. Mereka juga menunjukkan bahwa amalgamasi titik pada graf roda ganjil bukanlah pelabelan prima. Berdasarkan penelitian sebelumnya maka peneliti akan melakukan penelitian tentang pelabelan koprima pada graf hasil amalgamasi titik. Kelas graf tersebut adalah $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian. Graf tersebut dipilih karena masih menjadi masalah terbuka.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dapat dirumuskan masalah sebagai berikut.

a. Bagaimana pelabelan koprima dari graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian?

b. Berapa *minimum coprime number* pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

a. Mendapatkan pelabelan koprima pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian.

b. Mendapatkan *minimum coprime number* pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian.

1.4 Manfaat Penelitian

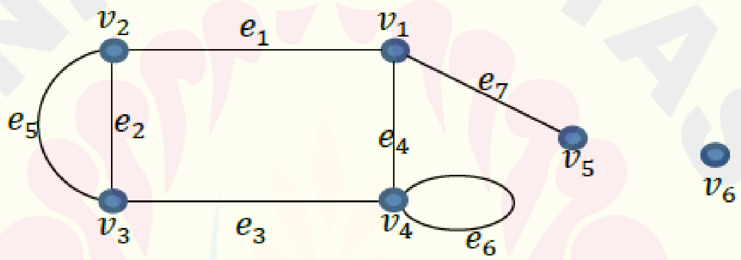
Manfaat yang diharapkan dari hasil peneletian ini adalah sebagai berikut.

a. Memberikan referensi tambahan mengenai pelabelan koprima pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian.
b. Memotivasi pembaca untuk mengembangkan topik pelabelan koprima pada kelas graf yang berbeda atau mengimplementasikan topik pelabelan prima dan koprima pada kehidupan sehari-hari.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dimana V merupakan himpunan titik-titik yang tak boleh kosong dan E adalah himpunan sisi yang boleh kosong dari pasangan tak terurut titik-titik dalam $V(G)$ (Harju, 2012). Banyak titik pada graf G disebut *order* G dan banyak sisi pada graf G disebut *size* G (Chartrand dan Lesniak, 1996). Graf yang memiliki order berhingga disebut dengan graf berhingga (Slamin, 2009). Gambar 2.1 merupakan contoh graf G dengan *order* 6 dan *size* 7.



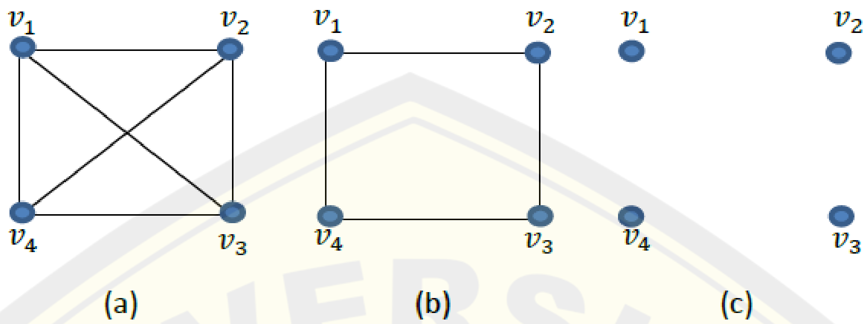
Gambar 2.1 Graf G dengan *order* 6 dan *size* 7

Misalkan $u, v \in V(G)$, titik u dan v dikatakan terhubung jika terdapat sisi uv antara u dan v. Titik yang tidak terhubung dengan titik lainnya disebut titik terisolasi. Titik u dan v dikatakan bertetangga *(adjacent)* jika kedua titik tersebut dihubungkan oleh sisi $e = (u, v)$ (Lipschuts, 2002). Titik v dikatakan bersisian *(incident)* dengan sisi e jika v adalah titik terakhir dari e. Sisi e dikatakan sisi *loop* jika menghubungkan titik v di G pada dirinya sendiri. Misalkan sisi e_1 menghubungkan titik u dan v pada G, sisi e_1 dan e_2 disebut sisi rangkap jika e_2 menghubungkan titik yang sama dengan e_1 atau secara matematis dapat ditulis $e_1 = e_2 = (u, v)$ (Munir, 2016). Banyaknya sisi yang bersisian pada titik u disebut sebagai derajat (*degree*) titik u yang dinotasikan dengan $deg(u)$. Titik disebut daun atau anting jika memiliki derajat satu (Budayasa, 2007). Graf pada Gambar 2.1 menunjukkan bahwa titik v_1 *adjacent* dengan titik v_2, v_4 dan v_5, titik v_2 *adjacent* dengan titik v_3 dan v_1, titik v_3 *adjacent* dengan titik v_2 dan v_4, titik v_4 *adjacent* dengan titik v_1 dan v_3, dan titik v_5 *adjacent* dengan titik v_1. Sisi e_1 *incident* dengan titik v_1 dan titik v_2, sisi e_2 *incident* dengan titik v_2 dan titik v_3, sisi e_3 *incident* dengan titik v_3 dan titik v_4, sisi e_4 *incident* dengan titik v_1 dan titik v_4, sisi e_5 *incident* dengan titik v_2 dan titik v_3, dan sisi e_7 *incident* dengan titik v_1 dan titik v_5, sisi e_6 merupakan loop, sisi e_5, sisi e_2 merupakan sisi rangkap, titik v_6 merupakan titik terisolasi, $deg(v_1) = 3, deg(v_2) = 2, deg(v_3) = 2, deg(v_4) = 4, deg(v_5) = 1$, dan $deg(v_6) = 0$.

Sebuah jalan *walk* merupakan sebuah barisan titik dan sisi secara bergantian berbentuk $u_0, e_1, u_1, e_2, ..., e_k, u_k$, untuk setiap sisi $e_i = u_{i-1}ui$ dengan $i \in [0, k]$. Suatu jalan dikatakan sebagai jalan tertutup jika titik awal sama dengan titik akhir $(u_0 = u_k)$. Jika pada suatu jalan semua sisinya berbeda satu sama lainnya, maka jalan tersebut disebut jejak (*trail*). Jika pada suatu jalan semua titiknya berbeda, maka jalan tersebut disebut lintasan (*path*). Sirkuit (*circuit*) adalah jejak tertutup yang tidak memiliki sisi berulang tetapi mungkin memiliki titik berulang. Jumlah sisi yang ada pada sebuah jalan disebut dengan panjang. Jarak (*distance*) dari titik u ke titik v di G adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v yang dinotasikan dengan $d(u, v)$ (Hartsfield dan Ringel, 1994).

Graf G dikatakan graf terhubung *(connected)* apabila untuk setiap dua titiknya terdapat lintasan. Graf sederhana adalah graf yang tidak memuat sisi rangkap dan *loop*. Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong disebut graf kosong atau graf $null$ (Chartrand dan Oelerman, 1993). Komplemen graf G yang dinotasikan dengan $\bar{G}$ adalah graf dengan $V(\bar{G}) = V(G)$ dan uv merupakan sisi dari $\bar{G}$ jika dan hanya jika sisi tersebut bukan sisi dari G (Chartrand dan Oellerman, 1993). Graf H dikatakan $subgraf$ dari graf G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik di G, dan himpunan sisi di H adalah $subset$ dari himpunan sisi di G. Graf pada Gambar 2.2 (a) dan Gambar 2.2 (b) merupakan contoh graf terhubung. Gambar 2.2 merupakan graf sederhana karena tidak memuat sisi rangkap dan *loop*. Gambar 2.2 (c) merupakan graf kosong karena himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf pada Gambar 2.2

(c) merupakan komplemen dari graf pada Gambar 2.2 (a) karena sisi graf pada Gambar 2.2 (a) tidak dimiliki oleh graf pada Gambar 2.2 (c). Graf pada Gambar 2.2 (b) merupakan $subgraf$ dari graf pada Gambar 2.2 (a).



Gambar 2.2 Graf Terhubung dan Graf Kosong

2.2 Operasi Amalgamasi Titik

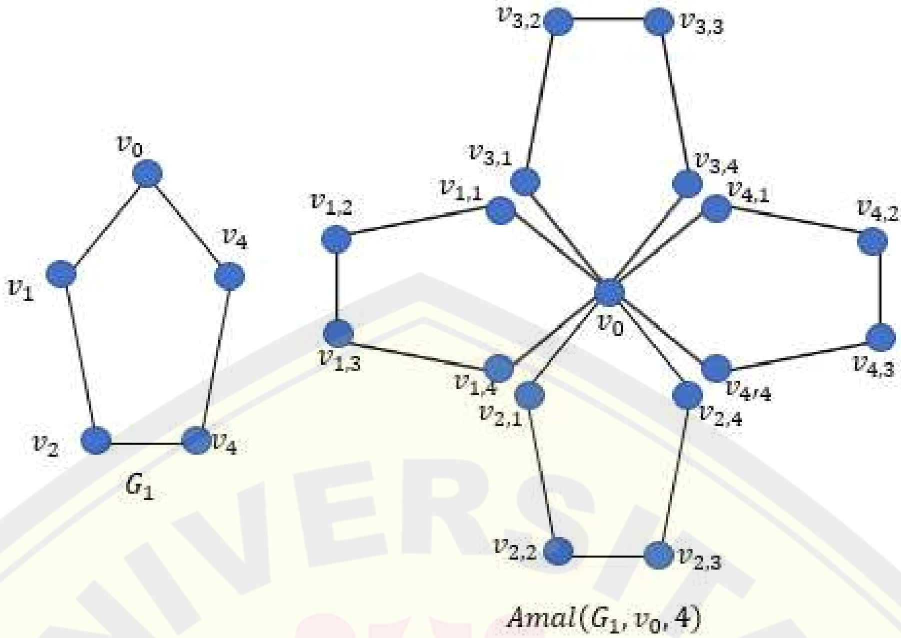
Suatu graf dapat dibentuk dengan cara menggunakan operasi-operasi tertentu dalam graf. Salah satu operasi graf yaitu amalgamasi titik. Misalkan diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G)$. Amalgamasi t salinan graf G pada titik terminal $v_0 \in V(G)$ dinotasikan dengan $Amal(G, v_0, t)$ adalah graf yang diperoleh dari t salinan G dan mengidentifikasi t salinan G pada titik terminal v_0. (Carlson, 2006). Gambar 2.3 merupakan contoh operasi amalgamasi titik pada graf G_1. Misalkan graf G_1 memiliki titik pusat pada v_0, maka graf $Amal(G_1, v_0, 4)$ dibentuk dari duplikasi graf G_1 sebanyak 4 kali dan mengidentifikasi duplikasi graf G_1 pada titik terminalnya.

2.3 Kelas-kelas Graf

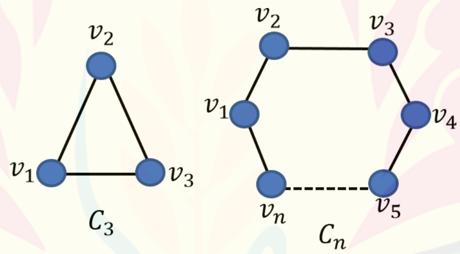
Pada subbab ini akan dijelaskan beberapa kelas graf sebagai berikut.

a. Graf Cycle

Graf *cylcle* yang dinotasikan dengan C_n untuk $n \geq 3$ adalah graf terhubung sederhana yang mempunyai n titik dan n sisi, yang setiap titiknya berderajat dua (Rosen, 2003). Gambar 2.4 merupakan contoh dari graf *cycle* C_3 dan C_n.



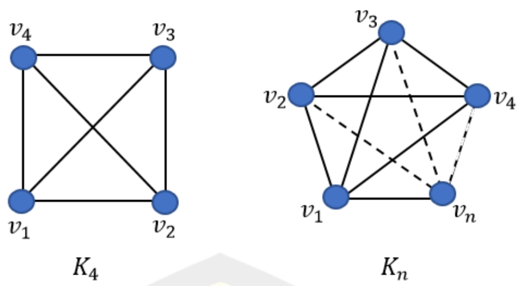
Gambar 2.3 Contoh operasi amalgamasi titik pada graf



Gambar 2.4 Graf Cycle C_3 dan C_n

b. Graf Lengkap

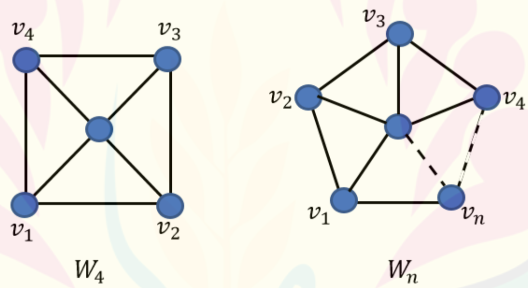
Graf lengkap adalah graf terhubung sederhana yang setiap titiknya saling *adjacent*. Graf lengkap dengan order n dinotasikan dengan K_n dan setiap titiknya berderajat $(n-1)$ (Chartrand dan Lesniak, 1996). Gambar 2.5 adalah contoh graf lengkap K_n.



Gambar 2.5 Graf lengkap K_4 dan K_n

c. Graf Roda

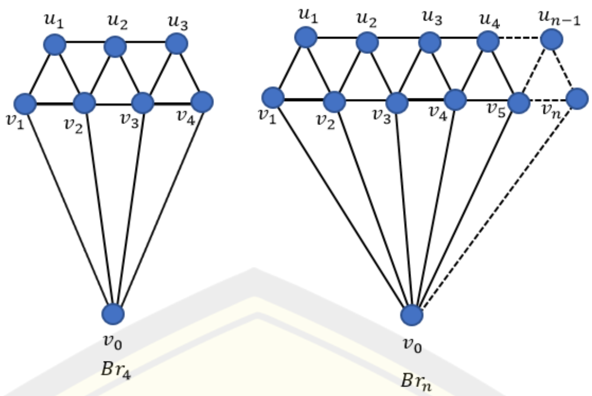
Graf roda dengan order $n+1$ dinotasikan dengan W_n merupakan graf yang diperoleh dengan menambahkan satu titik pada graf C_n dan menghubugkan titik baru tersebut tepat satu dengan setiap titik graf *cycle* C_n. Gambar 2.6 merupakan contoh graf roda.



Gambar 2.6 Graf roda W_4 dan W_n

d. Graf Berlian

Graf berlian dengan order $2n$ dinotasikan dengan Br_n adalah graf dengan himpunan titik $V(Br_n) = \{v_0\} \cup \{v_i | i \in [1,n]\} \cup \{u_i | i \in [1, n-1]\}$ dan himpunan sisi $E(Br_n) = \{v_0 v_i | i \in [1,n]\} \cup \{v_i v_{i+1}, u_i vi, u_i v_{i+1} | i \in [1, n-1]\} \cup \{u_i u_{i+1} | i \in [1, n-2]\}$. Gambar 2.7 merupakan contoh graf berlian.



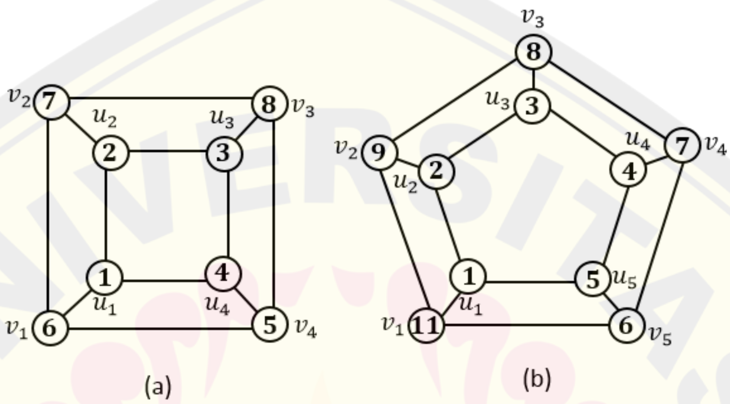
Gambar 2.7 Graf roda Br_4 dan Br_n

2.4 Pelabelan Graf

Pelabelan graf didefinisikan sebagai pemetaan anggota-anggota graf ke bilangan bulat non negatif dengan aturan tertentu. Berdasarkan domainnya, pelabelan graf terbagi menjadi 3 macam yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan total. Jika domain pelabelan adalah titik, maka pelabelan graf disebut pelabelan titik. Jika domain pelabelan adalah sisi, maka pelabelan graf disebut pelabelan sisi. Jika domain pelabelan berupa gabungan titik dan sisi, maka pelabelan graf disebut pelabelan total. Penjumlahan dari label titik atau sisi disebut dengan bobot (Wallis, 2013). Pelabelan yang telah dikembangkan yaitu pelabelan $L(2,1)$, pelabelan ajaib, pelabelan konsekutif, pelabelan *graceful*, pelabelan prima, pelabelan koprima, dan lain-lain.

2.4.1 Pelabelan Prima dan Koprima

Misalkan graf G adalah sebuah graf terhubung sederhana dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pelabelan koprima didefiniskan sebagai fungsi injektif $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, ..., k\}$ sedemikian sehingga label titik yang bertetangga relatif prima. Misalkan $|V(G)|$ merupakan jumlah titik pada graf G. Fungsi f dikatakan pelabelan koprima jika $k \geq |V(G)|$. Jika $k = |V(G)|$ maka pelabelan koprima disebut pelabelan prima. Namun, setiap graf memiliki pelabelan koprima atau dengan kata lain pelabelan prima sudah pasti koprima namun tidak berlaku sebaliknya. Sehingga permasalahan pada pelabelan koprima pada sebuah graf G adalah mencari nilai minimum label terbesarnya atau disebut *minimum coprime number* yang dinotasikan dengan $\mathfrak{pr}(G)$. Konsep pelabelan prima berasal dari Entringer dan pertama kali diperkenalkan oleh Tout, Dabboucy dan Howalla pada tahun 1984. Berdasarkan definisinya, dua bilangan a dan b yang tidak keduanya nol, dikatakan relatif prima jika $gcd(a, b) = 1$ (Burton, 2002). Contoh pelabelan prima dan koprima dapat dilihat pada Gambar 2.8 berikut.



Gambar 2.8 Pelabelan Prima dan Koprima

Gambar 2.8 (a) merupakan graf $C_4 \times P_2$ dengan $|V(C_4 \times P_2)| = 8$. Graf $C_4 \times P_2$ terdiri dari dua graf *cycle* (C_4) dimana setiap *cycle* masing-masing membutuhkan 2 label ganjil dan 2 label genap sedemikian sehingga label setiap titik yang bertetangga relatif prima. Terdapat 4 label ganjil dan 4 label genap pada himpunan $\{1, 2, ..., 8\}$, sehingga cukup label yang tersedia untuk melabeli graf $C_4 \times P_2$. Selanjutnya adalah menyusun fungsi pelabelan sedemikan sehingga label setiap titik bertetangga relatif prima. Pada Gambar 2.8 (a) dapat ditunjukkan bahwa label setiap titik yang bertetangga relatif prima. Karena minimal label terbesar pada graf $C_4 \times P_2$ adalah 8 atau sama dengan $|V(C_4 \times P_2)|$, maka contoh pelabelan pada Gambar 2.8 (a) disebut pelabelan prima.

Gambar 2.8 (b) merupakan graf $C_5 \times P_2$ dengan $|V(C_5 \times P_2)| = 10$. Graf $C_5 \times P_2$ terdiri dari dua graf *cycle* (C_5) dimana setiap *cycle* masing-masing membutuhkan 3 label ganjil dan 2 label genap sedemikian sehingga label setiap titik yang bertetangga relatif prima. Terdapat 5 label ganjil dan 5 label genap pada himpunan $\{1, 2, ..., 10\}$, sehingga tidak cukup label yang tersedia untuk melabeli graf $C_5 \times P_2$. Oleh karena itu, dibutuhkan 1 label ganjil diluar label-label $1, 2, ..., 10$. Sehingga dibutuhkan minimal label-label $1, 2, ..., 11$ untuk melabeli graf $C_5 \times P_2$. Selanjutnya adalah menyusun fungsi pelabelan sedemikan sehingga label setiap titik bertetangga relatif prima. Pada Gambar 2.8 (b) dapat ditunjukkan bahwa label setiap titik yang bertetangga relatif prima. Karena minimal label terbesar pada graf $C_5 \times P_2$ adalah 11 atau lebih dari $|V(C_5 \times P_2)|$, maka contoh pelabelan pada Gambar 2.8 (b) disebut pelabelan koprima dengan $\mathfrak{pr}(C_5 \times P_2) = 11$.

2.4.2 Hasil-hasil Pelabelan Prima dan Koprima

Pada penelitian sebelumnya didapatkan beberapa hasil tentang pelabelan prima dan koprima pada beberapa kelas graf maupun hasil operasinya. Adapun beberapa hasil penelitian pelabelan prima dapat dilihat pada Tabel 2.1 dan pelabelan koprima pada Tabel 2.2.

Tabel 2.1 Hasil Pelabelan Prima Penelitian sebelumnya

Graf	Peneliti
Amalgamasi graf *cycle*	Lee dan Yeh (1988)
Amalgamasi graf lintasan	Lee dan Yeh (1988)
Amalgamasi graf roda genap	Lee dan Yeh (1988)
Graf Pohon Biner $T_2(n)$	Hung Lin Fu dan Ku Ching Huang (1994)
Graf Persahabatan $F_{(n)}$	Ashokkumar dan Maragathavalli (2015)
Graf Bunga $Fl_{(n)}$	Ashokkumar dan Maragathavalli (2015)
Graf *Bistar* $B_{(n,n)}$	Ashokkumar dan Maragathavalli (2015)
Graf Tangga	Berliner, dkk (2016)
Graf Lengkap Tripartit	Dissanayake, dkk (2019)

Tabel 2.2 Hasil Pelabelan Koprima Penelitian sebelumnya

Graf	*Minimum Coprime Number*	Peneliti
Graf Lengkap Bipartit $K_{(n,n)}$	$\mathfrak{pr}(K_{n,n}) > 2n$	Berliner, dkk (2016)
Graf Lengkap K_n	$\mathfrak{pr}(K_n) = p_{n-1}$	John Asplund dan N.Bradley Fox (2017)
Graf Roda W_n	$\mathfrak{pr}(W_n) = n + 2$	John Asplund dan N.Bradley Fox (2017)
Graf *disjoint union of cycle*	$\mathfrak{pr}(C_{2k+1} \cup C_{2l+1}) = 2(k+l)n + 3$	John Asplund dan N.Bradley Fox (2017)
Graf Prisma $GP_{(n,1)}$	$\mathfrak{pr}(GP_{(n,1)}) = 2n + 1$	John Asplund dan N.Bradley Fox (2019)
Graf Petersen $GP_{(5m,2)}$	$\mathfrak{pr}(GP_{(5m,2)}) = 2m - 1$	John Asplund dan N.Bradley Fox (2019)
Graf Petersen $GP_{(n,2)}$	$\mathfrak{pr}(GP_{(n,2)}) = \begin{cases} 12m-1; \ n = 5m \\ 12m+3; \ n = 5m+1 \\ 12m+5; \ n = 5m+2 \\ 12m+7; \ n = 5m+3 \\ 12m+9; \ n = 5m+4 \end{cases}$	John Asplund dan N.Bradley Fox (2019)
Graf Prisma Bertumpuk $Y_{(3,n)}$	$\mathfrak{pr}(Y_{(3,n)}) = 4n - 1$	John Asplund dan N.Bradley Fox (2019)

Graf	*Minimum Coprime Number*	Peneliti
Graf $K_n \bigodot \bar{K}_m$	$\mathfrak{pr}(K_n \bigodot \bar{K}_m) = max(mn, pn-1)$	Catherine Lee (2020)
Graf P_m+P_5 ;$m \geq 5$	$\mathfrak{pr}(P_m + P_5) = \begin{cases} m+8;\ m\ ganjil \\ m+9;\ m\ genap \end{cases}$	Catherine Lee (2020)
Graf P_m+P_5; $m \geq 5$	$\mathfrak{pr}(P_m + P_5) = \begin{cases} m+8;\ m\ ganjil \\ m+9;\ m\ genap \end{cases}$	Catherine Lee (2020)
Graf $C_m + C_n$	$\mathfrak{pr}(C_m + C_n) = \begin{cases} m+2n;\ m\ ganjil \\ m+2n-1;\ m\ genap \end{cases}$	Catherine Lee (2020)
Graf $P_m + C_n$	$\mathfrak{pr}(P_m + C_n) = \begin{cases} m+2n-2;\ m\ ganjil \\ m+2n-1;\ m\ genap \end{cases}$	Catherine Lee (2020)

BAB 3. METODE PENELITIAN

Pada bab ini dibahas tentang prosedur penelitian untuk memperoleh *minimum coprime number* pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian. Penelitian ini termasuk dalam penelitian eksploratif yang bertujuan untuk menambah wawasan dan memunculkan gagasan-gagasan baru serta hasil dari penelitian ini dapat digunakan menjadi referensi tambahan.

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada penelitian ini dalam memperoleh *minimum coprime number* pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian adalah sebagai berikut.

1. Studi literatur yang disajikan dalam bentuk buku, skripsi, tesis maupun jurnal yang terkait dengan tema pembahasan untuk dikembangkan menjadi acuan mendapatkan *minimum coprime number* pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian.
2. Menentukan pelabelan prima dan rumus dalam mencari *minimum coprime number* pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian dengan menggunakan metode-metode sebagai berikut:
   a. Metode Deskriptif Aksiomatik

      Dalam metode ini akan diuraikan beberapa definisi, aksioma, atau teorema sebelumnya yang digunakan untuk menyelidiki apakah graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf roda ganjil, graf komplit dan graf berlian termasuk dalam pelabelan prima atau koprima serta berapa *minimum coprime number* pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian.

   b. Metode Pendeteksian Pola

      Setelah dilakukan pelabelan pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian sesuai kaidah pelabelan koprima, kemudian akan diteruskan ke metode pendeteksian pola. Pada metode pendeteksian pola akan dinyatakan pola pelabelan koprima pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian dan selanjutnya akan disajikan dalam sebuah teorema.

3.2 Langkah-langkah Penelitian

Langkah-langkah penelitian yang akan dilakukan untuk mendapatkan *minimum coprime number* pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian adalah sebagai berikut.

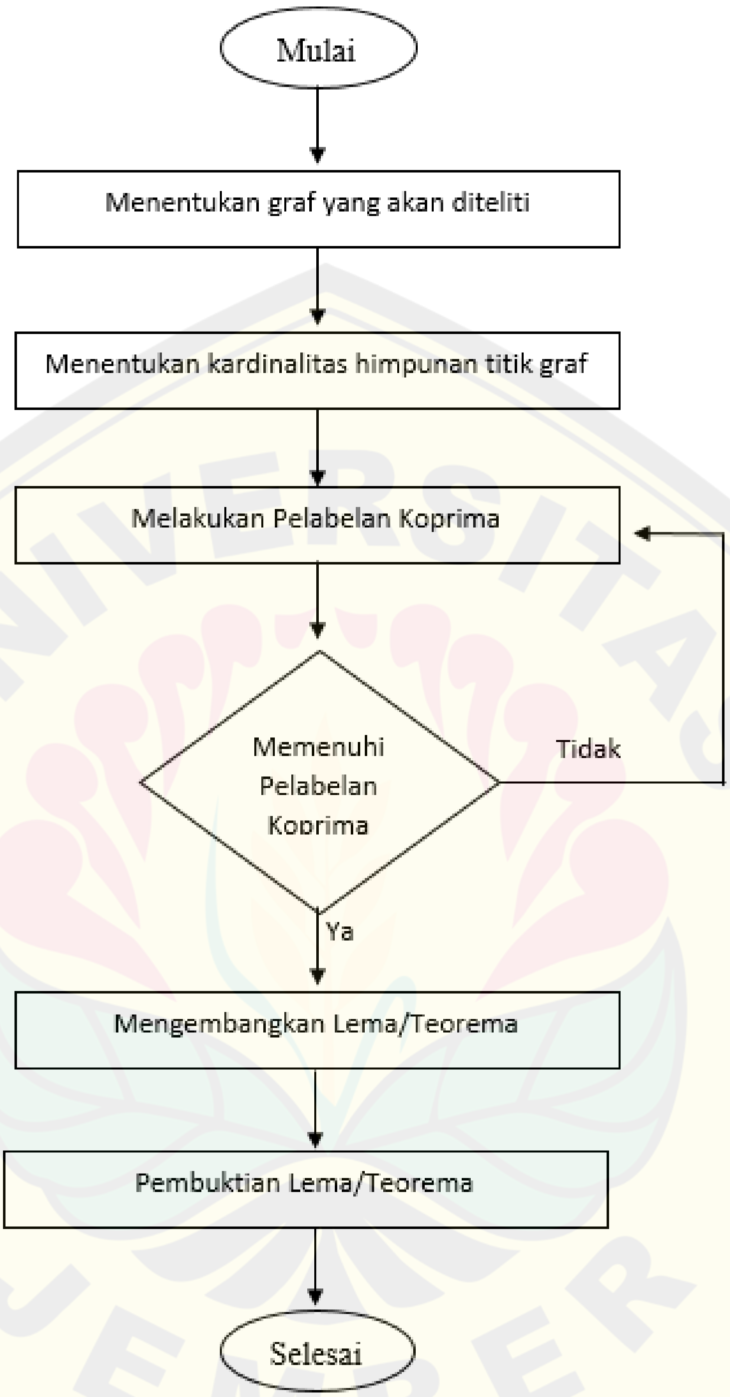
a. Menentukan kelas graf yang akan diteliti yang dalam penelitian ini adalah graf hasil amalgamasi titik pada graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian. Operasi amalgamasi titik yang dilakukan pada penelitian ini menggunakan titik v_0 sebagai titik terminalnya.
b. Penotasian titik pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian.
c. Melakukan pelabelan koprima pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian.
d. Memanfaatkan hasil pelabelan sebagai acuan untuk mendapatkan batas atas dari pelabelan koprima.
e. Menyusun teorema berlandaskan pola yang telah diperoleh dan membuktikannya.

Langkah-langkah penelitian dapat dilihat pada Gambar 3.1

Secara umum, pembuktian pelabelan *minimum coprime number* pada graf G diperoleh sebuah hipotesis dari pendeteksian pola yaitu $\mathfrak{pr}(G) = k$. Untuk membuktikan $\mathfrak{pr}(G) = k$ dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

a. Pembuktian $\mathfrak{pr}(G) \geq k$

   Untuk menentukan batas bawah *minimum coprime number* pada graf G yaitu dengan pembuktian kontradiksi dengan mengasumsikan $\mathfrak{pr}(G) = k - 1$ bernilai benar.



Gambar 3.1 Alur Penelitian

b. Pembuktian $\mathfrak{pr}(G) \leq k$

Untuk menentukan batas atas *minimum coprime number* pada graf G yaitu dengan melakukan pelabelan koprima pada graf G sehingga menemukan label terbesar dari pelabelan koprima.

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan tentang hasil penelitian yang telah dilakukan tentang *minimum coprime number* pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian. Hasil dari penelitian ini adalah teorema terkait *minimum coprime number* pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian. Penelitian ini diawali dengan memahami konsep tentang pelabelan koprima dan *minimum coprime number*, kemudian memilih graf dari hasil operasi amalgamasi. Selanjutnya melakukan pelabelan dan mencari pola pelabelan koprima pada graf yang telah dipilih, sedemikian hingga memenuhi syarat pelabelan koprima. Nilai minimal dari label terbesar pada pelabelan koprima dinamakan *minimum coprime number* ($\mathfrak{pr}$). *Minimum coprime number* tersebut selanjutnya dijadikan sebuah teorema yang dapat digunakan untuk peneliti lain.

Dalam penelitian ini didapatkan beberapa teorema baru terkait *minimum coprime number* pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf komplit, graf roda ganjil dan graf berlian beserta beberapa kasus khusus yang ditemukan secara eksperimental. Format penyajian temuan penelitian dalam bab ini diawali dengan pernyataan teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema.

4.1 Hasil Penelitian

Pada subbab ini akan dibahas pelabelan koprima pada graf hasil operasi amalgamasi. Sebelum melakukan hal tersebut, akan dibahas tentang dua bilangan bulat yang dikatakan relatif prima. Misalkan diberikan dua bilangan a dan b. Berikut adalah beberapa kemungkinan yang dapat terjadi antara bilangan a dan b terkait dengan topik relatif prima.

1. Jika a dan b bernilai genap, maka keduanya tidak relatif prima karena sudah pasti keduanya mempunyai faktor persekutuan selain 1 yaitu 2.
2. Jika a dan b bernilai ganjil, maka akan terdapat dua kemungkinan yaitu a dan

b relatif prima atau tidak relatif prima. Bilangan a tidak relatif prima dengan b dapat terjadi dikarenakan a merupakan kelipatan dari b ataupun sebaliknya. Sebagai contoh misalakan 3 dan 9 tidak relatif prima dikarenakan 9 merupakan kelipatan dari 3. Selain itu, a dan b tidak relatif prima jika keduannya merupakan kelipatan dari suatu bilangan k dengan $k \in \mathbf{N}$. Sebagai contoh misalkan 9 dan 15 tidak relatif prima karena keduanya merupakan kelipatan dari 3.

3. Jika a bernilai ganjil dan b bernilai genap ataupun sebaliknya, maka a dan b mempunyai dua kemungkinan yaitu relatif prima dan tidak relatif prima. Sama seperti poin ke-2 a dan b tidak relatif prima jika $b \equiv 0 \mod a$ atau $a \equiv 0 \mod b$. Sebagai contoh misalkan 18 dan 3 tidak relatif prima karena $18 \equiv 0 \mod 3$. Selain itu, a dan b tidak relatif prima jika keduanya merupakan kelipatan dari suatu bilangan k dengan $k \in \mathbf{N}$. Sebagai contoh 15 dan 18 tidak relatif prima karena keduanya merupakan kelipatan dari 3.

Selain poin diatas terdapat karakteristik dari bilangan relatif prima yaitu bilangan 1 relatif prima dengan semua bilangan dan 2 relatif prima dengan semua bilangan ganjil. Berdasarkan karakteristik dan beberapa kemungkinan yang dapat terjadi terkait bilangan relatif prima, maka peneliti memberikan beberapa langkah yang dapat dilakukan untuk melakukan pelabelan koprima agar label titik yang bertetangga relatif prima dan mendapatkan *minimum coprime number*. Langkah-langkah tersebut adalah sebagai berikut.

1. Melabeli titik yang mempunyai derajat terbesar dengan label 1 agar relatif prima dengan setiap titik yang bertetangga.
2. Menentukan kemungkinan minimal label ganjil dan label genap yang dibutuhkan dengan memperhatikan kemungkinan bilangan relatif prima atau dalam hal ini tidak ada label genap yang bertetangga.
3. Selanjutnya menentukan himpunan yang memuat label ganjil dan label genap yang dibutuhkan.
4. Langkah terakhir yaitu label yang tersedia dilabelkan pada titik yang belum terlabeli dengan memperhatikan bahwa setiap titik yang bertetangga harus relatif prima.

Setelah didapatkan pola label dan *minimum coprime number* dari suatu graf G, maka dilakukan pembuktian bahwa setiap label titik yang bertetangga relatif prima. Lema di bawah ini berguna untuk membuktikan bahwa dua bilangan bulat relatif prima.

Lema 4.1. *(Sukirman, 2016) Dua bilangan bulat a dan b dikatakan relatif prima, jika terdapat dua bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga $ax + by = 1$.*

Sebagai contoh akan dibuktikan bahwa bilangan 375 dan 1124 relatif prima. Untuk membuktikannya, misalkan $a = 375$ dan $b = 1124$. Substitusikan nilai a dan b kedalam persamaan $ax + by = 1$. Untuk $x = 3$ dan $y = -1$ memenuhi persamaan tersebut. Karena terdapat x dan y yang memenuhi, maka 375 dan 1124 relatif prima.

Lema 4.2. *(Sukirman, 2016) Setiap dua bilangan bulat berurutan memiliki satu pembagi persekutuan terbesar, yaitu $gcd(a, a + 1) = 1$.*

Sebagai contoh akan dibuktikan bahwa bilangan 1025 dan 1026 relatif prima. Misalkan $a = 1025$ dan $b = 1026$. Dengan menerapkan Lema 4.1 didapatkan $x = -1$ dan $y = 1$, sehingga bilangan 1025 dan 1026 relatif prima.

Lema 4.3. *Misalkan a adalah bilangan bulat positif dalam $1 \bmod 2$. Jika bilangan bulat positif r tidak memiliki faktor ganjil selain satu, maka $gcd(a, a + r) = 1$.*

Bukti. Akan ditunjukkan $gcd(a, a + r) = 1$. Misalakan $gcd(a, a + r) = k$. Dapat dituliskan $a = kx$ dan $a + r = ky$. Jadi, $k(y - x) = r$. Diketahui bahwa nilai r yang mungkin adalah genap karena tidak memiliki faktor ganjil selain satu, sehingga $a + r$ bernilai ganjil. Jadi k harus bernilai ganjil. Karena r tidak memiliki faktor ganjil selain satu, maka didapatkan $k = 1$. Terbukti, $gcd(a, a + r) = 1$. □

Sebagai contoh, akan ditunjukkan bahwa 2345 dan 2361 relatif prima. Misalkan $a = 2345$ dan $a + 16 = 2361$. Karena 16 tidak memiliki faktor ganjil selain satu, maka 2345 dan 2361 relatif prima.

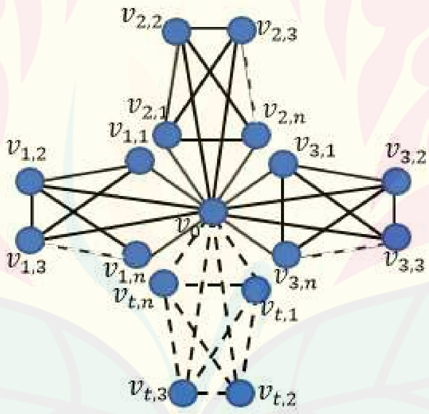
4.1.1 Pelabelan Koprima pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik pada Graf Lengkap

Pada bagian ini akan dijelaskan tentang pelabelan koprima dari graf hasil operasi amalgamasi titik pada graf lengkap $Amal(K_n, v_0, t)$. Graf hasil operasi amalgamasi titik pada graf lengkap $Amal(K_n, v_0, t)$ memiliki (nt) titik. Himpunan titik dan sisi pada graf hasil operasi amalgamasi titik pada graf lengkap $Amal(K_n, v_0, t)$ dinotasikan sebagai berikut.

$V(Amal(K_n, v_0, t)) = \{v_0\} \cup \{v_{(i,j)} | i \in [1, t], j \in [1, n]\}$.

$E(Amal(K_n, v_0, t)) = \{v_0 v_{(i,j)} | i \in [1, t], j \in [1, n]\} \cup \{v_{(i,j)} v_{(i,k)} | k \in [1, n], j \neq k\} \cup \{v_{(i,1)}, v_{(i,n)}\}$.

Gambar 4.1 merupakan ilustrasi penotasian titik dan sisi pada graf hasil operasi amalgamasi titik pada lengkap $Amal(K_n, v_0, t)$.



Gambar 4.1 Penotasian Titik dan Sisi pada Graf $Amal(K_n, v_0, t)$

Teorema 4.1. *Untuk graf $Amal(K_n, v_0, t)$, $\mathfrak{pr}(Amal(K_n, v_0, t)) = p_{((n-3)t+2)}$ dengan $p_{((n-3)t+2)}$ adalah bilangan pima ke- $(n-3)t + 2$ untuk setiap n dan t bilangan asli,*

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $\mathfrak{pr}(Amal(K_n, v_0, t) \geq p_{((n-3)t+2)}$. Setiap titik pada graf lengkap bertetangga, sehingga label setiap dua titiknya harus relatif prima. Misalkan titik terminal pada graf $Amal(K_n, v_0, t)$ dilabeli dengan label 1, maka tersisa $(n-1)t$ titik yang belum terlabeli. Setiap titik v_{ij} dapat dilabeli dengan 1 label ganjil, 1 label genap dan $p_{(n-3)}$ label prima atau $(n-3)$ bilangan prima pertama. Sehingga dibutuhkan $p_{(n-3)t}$ bilangan prima untuk melabeli titik v_{ij}. Karena label 2 dan 3 termasuk prima, maka $\mathfrak{pr}(Amal(K_n, v_0, t) \geq p_{((n-3)t+2)}$.

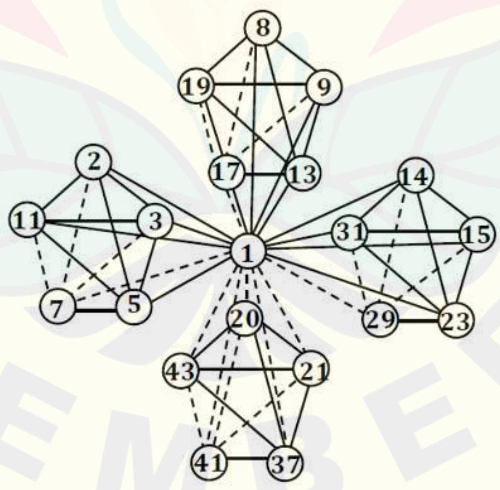
Selanjutnya akan dibuktikan $\mathfrak{pr}(Amal(K_n, v_0, t)) \leq p_{(((n-3)t+2))}$ yaitu dengan membangun pelabelan koprima pada graf $Amal(K_n, v_0, t)$. Definisikan fungsi $f : V(Amal(K_n, v_0, t)) \rightarrow \{1, 2, ..., p_{(((n-3)t+2))}\}$ sebagai berikut.

$$f(v_0) = 1$$

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 6i-4;\ j=1, \\ 6i-3;\ j=2, \\ p_{((n-2)i+2-(n-j))};\ j=3,4,...,n. \end{cases}$$

Jelas bahwa setiap titik bertetangga relatif prima, sehingga $\mathfrak{pr}(Amal(K_n, v_0, t)) \leq p_{(((n-3)t+2))}$. Jadi, $\mathfrak{pr}(Amal(K_n, v_0, t)) = p_{(((n-3)t+2))}$. $\square$

Gambar 4.2 merupakan contoh pelabelan koprima dari graf hasil operasi amalgamasi titik pada graf lengkap $Amal(K_6, v_0, 4)$ dengan $\mathfrak{pr}(Amal(K_6, v_0, 4)) = p_{14} = 43$.



Gambar 4.2 Pelabelan Korima Graf $Amal(K_6, v_0, 4)$

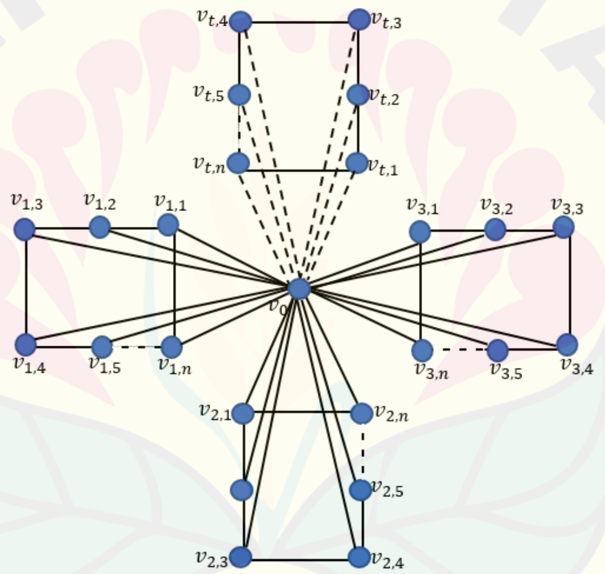
4.1.2 Pelabelan Koprima Amalgamasi Graf Roda

Pada bagian ini akan dijelaskan tentang pelabelan koprima dari graf hasil amalgamasi pada graf roda ($Amal(W_n, v_0, t)$) untuk n ganjil dan v_0 sebagai titik pusatnya. Amalgamasi graf roda ($Amal(W_n, v_0, t)$) memiliki $(nt + 1)$ titik. Himpunan titik dan sisi pada graf $Amal(W_n, v_0, t)$ dinotasikan sebagai berikut.

$V(Amal(W_n, v_0, t)) = \{v_0\} \cup \{v_{(i,j)} | i \in [1, t], j \in [1, n]\}$.

$E(Amal(W_n, v_0, t)) = \{v_0 v_{ij}, v_{i1} v_{in} | i \in [1, t], j \in [1, n]\} \cup \{v_{ij} v_{ij+1} | i \in [1, t], j \in [1, n - 1]\}$

Gambar 4.3 merupakan ilustrasi penotasian titik dan sisi pada graf $Amal(W_n, v_0, t)$.



Gambar 4.3 Penotasian Titik dan Sisi pada Graf $Amal(W_n, v_0, t)$

Batas bawah dari *minimum coprime number* untuk amalgamasi graf roda ganjil diberikan dalam lemma di bawah ini.

Lema 4.4. *Misalkan v_0 adalah titik pusat roda W_n. Untuk setiap bilangan bulat $t > 1$ dan bilangan bulat ganjil $n \geq 1$,* $\mathfrak{pr}(Amal(W_n, v_0, t)) \geq (n + 1)t + 1$.

Bukti. Misalkan $n, t \geq 1$ bilangan bulat dengan n ganjil. Graf $Amal(W_n, v_0, t)$ memiliki $(nt + 1)$ titik, dengan v_0 sebagai titik pusat dan bertetangga dengan semua titik di $Amal(W_n, v_0, t)$. Terdapat t siklus dengan panjang n dengan setiap siklus membutuhkan $\frac{n-1}{2}$ label genap dan $\frac{n+1}{2}$ label ganjil. Jadi, graf $Amal(W_n, v_0, t)$ membutuhkan $((\frac{n+1}{2})t + 1)$ label ganjil. Jelas bahwa tidak ada cukup label ganjil di himpunan $\{1, 2, , nt + 1\}$. Sehingga graf $Amal(W_n, v_0, t)$ tidak dapat diberi label hanya $\{1, 2, , nt + 1\}$ sedemikian sehingga setiap dua titik yang bertetangga memiliki label yang relatif prima. Karena ada $((\frac{n+1}{2})t + 1)$ label ganjil pada himpunan $\{1, 2, , (n + 1)t + 1\}$, maka $\mathfrak{pr}(Amal(W_n, v_0, t)) \geq (n + 1)t + 1$. □

Untuk mendapatkan *minimum coprime number* yang tepat untuk amalgamasi graf roda ganjil W_n, dibagi menjadi dua kasus, yaitu untuk $n \equiv 1 \mod 4$ dan $n \equiv 3 \mod 4$. Hal tersebut akan dijabarkan dalam beberapa teorema berikut.

Teorema 4.2. *Misalkan v_0 adalah titik pusat roda W_n. Untuk setiap bilangan bulat $t > 1$ dan $n \equiv 1 \mod 4$, $\mathfrak{pr}(Amal(W_n, v_0, t)) = (n + 1)t + 1$.*

Bukti. Misalkan n dan t bilangan bulat positif dengan $n \equiv 1 \mod 4$. Berdasarkan Lema 4.4, didapatkan $\mathfrak{pr}(Amal(W_n, v_0, t)) \geq (n + 1)t + 1$. Selanjutnya akan dibuktikan $\mathfrak{pr}(Amal(W_n, v_0, t)) \leq (n+1)t+1$ yaitu dengan membangun pelabelan koprima pada graf $Amal(W_n, v_0, t)$. Definisikan fungsi $f : V(Amal(W_n, v_0, t)) \to \{1, 2, ..., (n + 1)t + 1\}$ sebagai berikut.

$$f(v_0) = 1.$$

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} (n+1)i - (n-j);\ 1 \leq j \leq \frac{n+1}{2}, \\ (n+1)i + 1;\ j = \frac{n+3}{2}, \\ (n+1)i + (\frac{n+3}{2} - j);\ \frac{n+5}{2} \leq j \leq n. \end{cases}$$

Berdasarkan definisi pelabelan koprima setiap titik yang bertangga harus memiliki label yang saling relatif prima. Hal tersebut akan ditunjukkan sebagai berikut.

a. Label titik v_0 bernilai 1, sehingga relatif prima dengan setiap titik v_{ij}.
b. Misalkan $gcd(f(v_{i(\frac{n+1}{2})}), f(v_{i(\frac{n+3}{2})})) = gcd((n+1)i-(\frac{n-1}{2}), (n+1)i+1) = k$. Karena $n \equiv 1 \mod 4$, maka $(n+1)i-(\frac{n-1}{2}) = 1 \mod \frac{n+1}{2}$ genap, sedangkan $(n + 1)i + 1 = 1 \mod \frac{n+1}{2}$ ganjil. Jadi $k \neq \frac{n+1}{2}$ dan k pasti ganjil. Misalkan $(n + 1)i - (\frac{n-1}{2}) = kx$ dan $(n + 1)i + 1 = ky$. Maka $k(y - x) = \frac{n+1}{2}$. Jadi harus $k = 1$. Oleh karena itu label dari $v_{i(\frac{n+1}{2})}$ dan $v_{i(\frac{n+3}{2})}$ relatif prima.

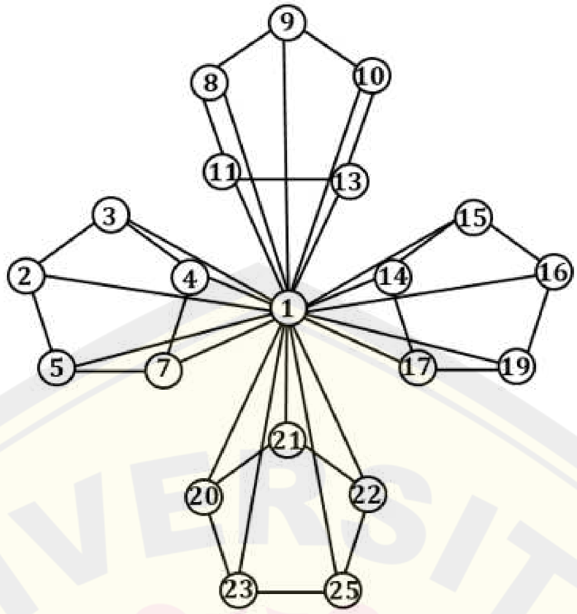
c. Akan ditunjukkan $gcd(f(v_{i(\frac{n+3}{2})}), f(v_{i(\frac{n+5}{2})})) = 1$. Misalkan $gcd(f(v_{i(\frac{n+3}{2})}), f(v_{i(\frac{n+5}{2})})) = gcd((n+1)i+1, (n+1)i-1) = k$. Karena n ganjil, $(n+1)i+1$ ganjil. Berdasarkan Lema 4.3, didapatkan $gcd((n+1)i+1, (n+1)i-1) = 1$.

d. Akan ditunjukkan label titik v_{i1} dan v_{in} relatif prima. Misalkan $gcd(f(v_{i1}), f(v_{in})) = gcd((n+1)i-(n-1), (n+1)i+(\frac{3-n}{2})) = k$. Karena $n \equiv 1 \mod 4$, $(n+1)i-(n-1)$ bernilai genap, dan $(n+1)i+(\frac{3-n}{2})$ bernilai ganjil, tetapi keduanya berada dalam $2 \equiv \mod \frac{n+1}{2}$. Oleh karena itu $k \neq \frac{n+1}{2}$ dan k pasti ganjil. Selanjutnya dapat dituliskan $(n+1)i-(n-1) = kx$ dan $(n+1)i+(\frac{3-n}{2}) = ky$. Jadi, $k(y-x) = \frac{n+1}{2}$. Oleh karena itu $k = 1$ atau $gcd(f(v_{i1}), f(v_{in})) = 1$.

Dapat ditunjukkan bahwa setiap label dari dua titik yang bertetangga relatif prima. Oleh karena itu, fungsi f memenuhi kaidah pelabelan koprima minimum sehingga $\mathfrak{pr}(Amal(W_n, v_0, t)) \leq (n+1)t+1$. Jadi, $\mathfrak{pr}(Amal(W_n, v_0, t)) = (n+1)t+1$. $\square$

Untuk memperjelas Teorema 4.2 dapat dilihat pada Gambar 4.4 yang merupakan contoh pelabelan koprima pada graf $Amal(W_5, v_0, 4)$ dengan $\mathfrak{pr}(Amal(W_5, v_0, 4)) = 25$.

Untuk kasus $n \equiv 3 \mod 4$ peneliti tidak mendapatkan *minimum coprime number* secara umum karena terjadi inkonsistensi pertukaran label titik untuk memenuhi syarat pelabelan koprima. Oleh karena itu, pada hasil penelitian ini diberikan beberapa kasus untuk bilangan bulat postif $n \equiv 3 \mod 4$.



Gambar 4.4 Pelabelan Koprima pada Graf $Amal(W_5, v_0, 4)$

Proposisi 4.1. *Misalkan v_0 adalah titik pusat roda W_7. Untuk setiap bilangan bulat $t \leq 47$, $\mathfrak{pr}(Amal(W_7, v_0, t)) = 8t + 1$.*

Bukti. Berdasarkan Lema 4.4, didapatkan $\mathfrak{pr}(Amal(W_7, v_0, t)) \geq 8t + 1$. Misalkan t bilangan bulat positif dan $t \leq 47$. Tentukan $f : V(Amal(W_7, v_0, t)) \rightarrow \{1, 2, ..., 8t + 1\}$, dengan $f(v_0) = 1$ dan untuk $i = 1, 2, .., 47$, akan dibagi menjadi dua kasus sebagai berikut.

i. Untuk $i \neq 6 \mod 7$

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 8i + j - 7; \ j = 1, 2, ..., 6, \\ 8i + 1; \ j = 7. \end{cases}$$

ii. Untuk $i = 6 \mod 7$

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 8(\frac{i+1}{7}); \ j = 1, \\ 8i + j - 7; \ j = 2, 3, ..., 6, \\ 8i + 1; \ j = 7. \end{cases}$$

Berdasarkan definisi pelabelan koprima, dua bilangan yang *adjacent* harus relatif prima. Hal tersebut ditunjukkan sebagai berikut.

a. Berdasarkan Lema 4.3 didapatkan $gcd(f(v_{i6}), f(v_{i7})) = gcd(8i-1, 8i+1) = 1$.

b. Akan ditunjukkan label titik v_{i1} dan v_{i7} relatif prima. Untuk $i \equiv 6 \mod 7$, yaitu $i = 6, 13, 20, 27, 34, 41$, $gcd(f(v_{i1}), f(v_{i7})) = gcd(8(\frac{8i+1}{7}), 8i+1) = 1$. Untuk $i \neq 6 \mod 7$, misalkan $gcd(f(v_{i1}), f(v_{i7})) = gcd(8i-6, 8i+1) = k \neq 1$. Diketahui bahwa $8i - 6 = 2 \mod 4$ genap dan $8i + 1 = 1 \mod 4$. Jadi k pasti ganjil. Misal $8i - 6 = kx$ dan $8i + 1 = ky$. Didapatkan $k(y - x) = 7$. Oleh karena itu $k = 7$. Akibatnya, $i = 6 \mod 7$, kontradiksi. Jadi $gcd(8i-6, 8i+1) = 1$.

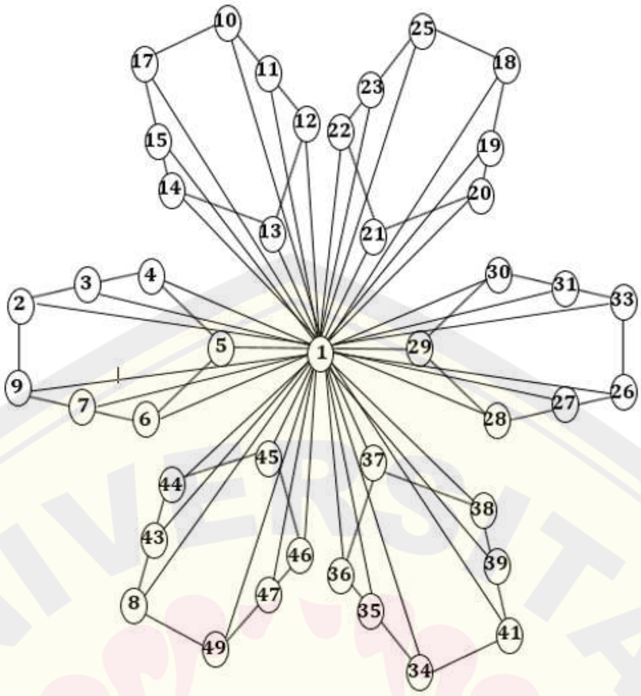
c. Untuk $i \equiv 6 \mod 7$, yaitu $i = 6, 13, 20, 27, 34, 41$, dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $gcd(f(v_{i1}), f(v_{i2})) = gcd(8(\frac{i+1}{7}), 8i-5) = 1$

Dengan demikian, setiap label dari dua titik yang bertetangga relatif prima. Jadi untuk sembarang bilangan bulat $t \leq 47$, graf $Amal(W_7, v_0, t)$ memiliki pelabelan koprima dengan minimum label terbesar adalah $\mathfrak{pr}(Amal(W_7, v_0, t)) = 8t + 1$. $\square$

Gambar 4.5 merupakan contoh pelabelan koprima pada graf $Amal(W_7, v_0, 6)$ dengan $\mathfrak{pr}(Amal(W_7, v_0, 6)) = 49$.

Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa untuk $t \geq 48$ terdapat label titik yang bertetangga tidak relatif prima apabila menggunakan fungsi pelabelan di atas. Hal tersebut akan ditunjukkan menggunakan bantuan aplikasi *microsoft excel* yang disajikan pada Gambar 4.6. Pada Gambar 4.6 dapat dilihat bahwa $gcd(v_7, v_1)$ untuk $i = 48$ tidak relatif prima karena $gcd(v_{48,7}, v_{48,1}) = 7$. Sehingga perlu dilakukan pertukaran label yang berbeda dengan algoritma sebelumnya. Untuk graf $Amal(W_7, v_0, 6)$ peneliti belum menemukan pola pelabelan atau fungsi pelabelan yang berlaku secara umum.

Selanjutnya misalkan pola pelabelan pada graf $Amal(W_7, v_0, t)$ diterapkan pada graf $Amal(W_{11}, v_0, t)$. Hal tersebut akan ditunjukkan pada Gambar 4.7. Berdasarkan Gambar 4.7 diketahui bahwa label titik v_1 dan v_2 untuk $i = 10$ tidak relatif prima. Sehingga pola label pada graf $Amal(W_7, v_0, t)$ tidak dapat diterapkan pada graf $Amal(W_{11}, v_0, t)$. Agar syarat pelabelan koprima terpenuhi dan mendapat *minimum coprime number* pada graf $Amal(W_{11}, v_0, t)$, maka



Gambar 4.5 Pelabelan Koprima pada Graf $Amal(W_7, v_0, 6)$

disajikan Proposisi 4.2 sebagai berikut.

								GCD						
	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5	j_6	j_7	v1v2	v2v3	v3v4	v4v5	v5v6	v6v7	v7v1
i_46	362	363	364	365	366	367	369	1	1	1	1	1	1	1
i_47	370	371	372	373	374	375	377	1	1	1	1	1	1	1
i_48	56	379	380	381	382	383	385	1	1	1	1	1	1	7
i_49	386	387	388	389	390	391	393	1	1	1	1	1	1	1
i_50	394	395	396	397	398	399	401	1	1	1	1	1	1	1
i_51	402	403	404	405	406	407	409	1	1	1	1	1	1	1
i_52	410	411	412	413	414	415	417	1	1	1	1	1	1	1
i_53	418	419	420	421	422	423	425	1	1	1	1	1	1	1
i_54	426	427	428	429	430	431	433	1	1	1	1	1	1	1
i_55	434	435	436	437	438	439	441	1	1	1	1	1	1	7
i_56	442	443	444	445	446	447	449	1	1	1	1	1	1	1

Gambar 4.6 Pelabelan Koprima pada Graf $Amal(W_7, v_0, t)$ Menggunakan Microsoft Excel

Proposisi 4.2. *Misalkan v_0 adalah titik pusat roda W_{11}. Untuk setiap bilangan bulat $t > 1$, $\mathfrak{pr}(Amal(W_{11}, v_0, t)) = 12t + 1$.*

Bukti. Berdasarkan Lema 4.4, didapatkan $\mathfrak{pr}(Amal(W_{11}, v_0, t)) \geq 12t + 1$. Selanjutnya akan dibuktikan $\mathfrak{pr}(Amal(W_{11}, v_0, t)) \leq 12t + 1$ yaitu dengan

												GCD										
	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5	j_6	j_7	j_8	j_9	j_10	j_11	v1v2	v2v3	v3v4	v4v5	v5v6	v6v7	v7v8	v8v9	v9v10	v10v11	v11v
i_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_2	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_3	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_4	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	49	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	61	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_6	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	73	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_7	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	85	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_8	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	97	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_9	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	109	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_10	12	111	112	113	114	115	116	117	118	119	121	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Gambar 4.7 Pelabelan Koprima pada Graf $Amal(W_{11}, v_0, t)$ Menggunakan Pola Label Graf $Amal(W_7, v_0, t)$

membangun pelabelan koprima pada graf $Amal(W_{11}, v_0, t)$. Definisikan fungsi $f : V(Amal(W_{11}, v_0, t)) \to \{1, 2, ..., 12t + 1\}$ sebagai berikut.

$$f(v_0) = 1$$

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 12i - (11 - j);\ j = 1, 2, ..., 9, \\ 12i + 1;\ j = 10, \\ 12i - 1;\ j = 11. \end{cases}$$

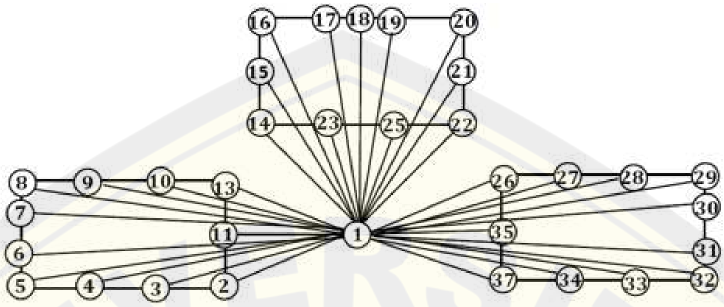
Berdasarkan definisi pelabelan koprima, dua bilangan yang *adjacent* harus relatif prima. Hal tersebut ditunjukkan sebagai berikut.

a. Misalkan $gcd(f(v_{i9}), f(v_{i10})) = gcd(12i - 2, 12i + 1) = k$. Diketahui bahwa $12i - 2$ genap, $12i + 1$ ganjil, tetapi keduanya terdapat di $1 \mod 3$. Jadi $k \neq 3$. Misal $12i - 2 = kx$ dan $12i + 1 = ky$. Maka $k(y - x) = 3 = 13$. Oleh karena itu $k = 1$. Sehingga, $gcd(f(v_{i9}), f(v_{i10})) = 1$.
b. Berdasarkan Lema 4.3, diperoleh $gcd(f(v_{i10}), f(v_{i11})) = gcd(12i + 1, 12i - 1) = 1$.
c. Misalkan $gcd(f(v_{i1}), f(v_{i11})) = gcd(12i - 10, 12i - 1) = k$. Diketahui bahwa $12i - 10$ genap, dan $12i - 1$ ganjil, tapi keduanya terletak $2 \mod 3$. Jadi, $k \neq 3$. Misalkan $12i - 10 = kx$ dan $12i - 1 = ky$. Maka $k(y - x) = 9 = (1)9$. Karena baik $12i - 10$ maupun $12i - 1$ tidak berada dalam $0 \mod 9$, maka haruslah $k = 1$. Dengan demikian $gcd(f(v_{i1}), f(v_{i11})) = 1$.

Dapat ditunjukkan bahwa setiap label dari dua titik yang bertetangga relatif prima. Oleh karena itu, fungsi f memenuhi kaidah pelabelan koprima minimum dengan

$\mathfrak{pr}(Amal(W_{11}, v_0, t)) = 12t + 1.$ □

Untuk memperjelas Proposisi 4.2 dapat dilihat pada Gambar 4.8 yang merupakan contoh pelabelan koprima pada graf $Amal(W_{11}, v_0, 3)$ dengan $\mathfrak{pr}(Amal(W_{11}, v_0, 3)) = 37$.



Gambar 4.8 Pelabelan Koprima pada Graf $Amal(W_{11}, v_0, 3)$

Dengan cara yang sama misalkan akan ditunjukkan bahwa pola label pada graf $Amal(W_{15}, v_0, t)$ berbeda dengan pola label graf $Amal(W_7, v_0, t)$ ataupun pola label $Amal(W_{11}, v_0, t)$. Misalkan pola pelabelan pada graf $Amal(W_7, v_0, t)$ diterapkan pada graf $Amal(W_{15}, v_0, t)$. Hal tersebut akan diperlihatkan pada Gambar 4.9 menggunakan *microsoft excel*. Berdasarkan Gambar 4.9 didapatkan bahwa terdapat label titik yang tidak relatif prima jika menggunakan pola pelabelan pada graf $Amal(W_7, v_0, t)$. Dengan cara yang sama misalkan pola pelabelan pada graf $Amal(W_{11}, v_0, t)$ diterapkan pada graf $Amal(W_{15}, v_0, t)$. Hasil pelabelan tersebut akan ditunjukkan pada Gambar 4.10. Berdasarkan Gambar 4.10 dapat dilihat bahwa pola label $Amal(W_{11}, v_0, t)$ tidak dapat diterapkan pada graf $Amal(W_{15}, v_0, t)$. Sehingga untuk mendapatkan *minimum coprime number* pada graf $Amal(W_{15}, v_0, t)$ diperlukan sebuah pola pelabelan baru yang disajikan pada Proposisi 4.3.

Proposisi 4.3. *Misalkan v_0 adalah titik pusat roda W_{15}. Untuk setiap bilangan bulat $t \leq 90$, $\mathfrak{pr}(Amal(W_{15}, v_0, t)) = 16t + 1$.*

Bukti. Berdasarkan Lema 4.4, didapatkan $\mathfrak{pr}(Amal(W_{15}, v_0, t)) \geq 16t + 1$. Misalkan t bilangan bulat positif dan $t \leq 90$. Tentukan

	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5	j_6	j_7	j_8	j_9	j_10	j_11	j_12	j_13	j_14	j_15
i_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17
i_2	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	33
i_3	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	49
i_4	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	65
i_5	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	81
i_6	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	97
i_7	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	113
i_8	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	129
i_9	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	145
i_10	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	161
i_11	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	177

	v1v2	v2v3	v3v4	v4v5	v5v6	v6v7	v7v8	v8v9	v9v10	v10v11	v11v12	v12v13	v13v14	v14v15	v15v1
i_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3
i_3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5
i_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3
i_6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3
i_9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5
i_10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3

Gambar 4.9 Pelabelan Koprima pada Graf $Amal(W_{15}, v_0, t)$ Menggunakan Pola Label Graf $Amal(W_7, v_0, t)$

	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5	j_6	j_7	j_8	j_9	j_10	j_11	j_12	j_13	j_14	j_15
i_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	17	15
i_2	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	33	31
i_3	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	49	47
i_4	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	65	63
i_5	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	81	79
i_6	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	97	95
i_7	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	113	111
i_8	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	129	127
i_9	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	145	143

	v1v2	v2v3	v3v4	v4v5	v5v6	v6v7	v7v8	v8v9	v9v10	v10v11	v11v12	v12v13	v13v14	v14v15	v15v1
i_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1
i_3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1
i_6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i_8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1
i_9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13

Gambar 4.10 Pelabelan Koprima pada Graf $Amal(W_{15}, v_0, t)$ Menggunakan Pola Label Graf $Amal(W_{11}, v_0, t)$

$f : V(Amal(W_{15}, v_0, t)) \rightarrow \{1, 2, ..., 16t + 1\}$, dengan $f(v_0) = 1$ dan untuk $i = 1, 2, .., 90$ sebagai berikut.

i. Untuk $j = 1$

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2; \ i = 13, \\ 34; \ i = 26, \\ 68; \ i = 39, \\ 52; \ i = 52, \\ 65; \ i = 65, \\ 78; \ i = 78, \\ 16i; \ i \neq 0 \mod 13. \end{cases}$$

ii. Untuk $j \geq 2$

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 16i + j - 15; \ j = 2, 3, ..., n - 1 \\ 16i + 1; \ j = n. \end{cases}$$

Berdasarkan definisi pelabelan koprima, dua bilangan yang *adjacent* harus relatif prima. Hal tersebut ditunjukkan sebagai berikut.

a. Berdasarkan Lema 4.3, $gcd(f(v_{i4}), f(v_{i5})) = gcd(16i - 1, 16i + 1) = 1$.

b. Label titik v_{i1} dan v_{i15} untuk $i \neq \mod 13$ relatif prima karena konsekutif.

d. Untuk $i \equiv 0 \mod 13$, yaitu $i = 13, 26, 39, 52, 65, 78$, dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $gcd(f(v_{i1}), f(v_{in})) = 1$

c. Akan ditunjukkan $gcd(f(v_{1j}), f(v_{2j})) = 1$ untuk $i \neq 0 \mod 13$. Misalkan $gcd(f(v_{1j}), f(v_{2j})) = gcd(16i - 13, 16i) = k$. Nilai $|(16i - 13) - 16i| = 13$. Misalkan $16i - 13 = kx$ dan $16i = ky$ dan dapat dituliskan $k(y - x) = 13$. Karena $16i - 13$ ganjil dan $16i - 13$ maupun $16i$ tidak dalam $0 \mod 13$. Sehingga, $k = 1$.

Dengan demikian, setiap label dari dua titik yang bertetangga relatif prima. Jadi untuk sembarang bilangan bulat $t \leq 90$, $Amal(W_{15}, v_0, t)$ memiliki pelabelan koprima minimum dengan label terbesar adalah $\mathfrak{pr}(Amal(W_{15}, v_0, t)) = 16t + 1$. □

Pola pelabelan pada graf $Amal(W_{15}, v_0, t)$ belum diperumum karena label titik $f(v_{i1})$ untuk $i = 0 \mod 13$ memiliki pertukaran label yang inkonsisten.

Selanjutnya akan diperlihatkan pola pelabelan koprima pada graf $Amal(W_{19}, v_0, t)$ menggunakan pola label graf $Amal(W_7, v_0, t)$. Hal tersebut akan ditunjukkan pada Gambar 4.11. Pada Gambar 4.11 didapatkan bahwa label titik $v_{18,1}$ tidak relatif prima dengan label $v_{18,19}$. Sehingga graf $Amal(W_{19}, v_0, t)$ tidak dapat dilabeli dengan pola label sama dengan graf $Amal(W_7, v_0, t)$.

16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		gcd(v_1,v_19)
17	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	341		1
18	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	361		19
19	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	381		1
20	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	401		1
21	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	421		1
22	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	441		1

Gambar 4.11 Pelabelan Koprima pada Graf $Amal(W_{19}, v_0, t)$ Menggunakan Pola Label Graf $Amal(W_7, v_0, t)$

Misalkan pola label pada graf $Amal(W_{11}, v_0, t)$ diterapkan pada graf $Amal(W_{19}, v_0, t)$. Hal tersebut akan ditunjukkan pada Gambar 4.12. Kemudian Gambar 4.13 merupakan penerapan pola label graf $Amal(W_{15}, v_0, t)$ pada graf $Amal(W_{19}, v_0, t)$. Pada Gambar 4.12 dapat dilihat bahwa terdapat label titik yang bertetangga tidak relatif prima. Pada Gambar 4.13 dapat dilihat bahwa

$gcd(f(v_{17,1}), f(v_{17,2}) = 17$ sehingga tidak memenuhi kaidah pelabelan Koprima. Sehingga dapat disimpulkan bahwa graf $Amal(W_{19}, v_0, t)$ memiliki pola label berbeda dengan graf $Amal(W_{11}, v_0, t)$ maupun graf $Amal(W_{15}, v_0, t)$. Pola label pada graf $Amal(W_{19}, v_0, t)$ akan dijabarkan pada Proposisi 4.4.

	j1	j2	j3	j4	j5	j6	j7	j8	j9	j10	j11	j12	j13	j14	j15	j16	j17	j18	j19	gcd v_17,v_18	gcd v_18,v_19	gcd v_1,v_19
i1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	21	19	3	1	1
i2	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	41	39	1	1	1
i3	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	61	59	1	1	1
i4	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	81	79	3	1	1
i5	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	101	99	1	1	1
i6	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	121	119	1	1	17

Gambar 4.12 Pelabelan Koprima pada Graf $Amal(W_{19}, v_0, t)$ Menggunakan Pola Label Graf $Amal(W_{11}, v_0, t)$

	j1	j2	j3	j4	j5	j6	j7	j8	j9	j10	j11	j12	j13	j14	j15	j16	j17	j18	j19	v_1,v_2
i13	260	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	261	1
i14	280	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	281	1
i15	300	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	301	1
i16	320	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	321	1
i17	340	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	341	17

Gambar 4.13 Pelabelan Koprima pada Graf $Amal(W_{19}, v_0, t)$ Menggunakan Pola Label Graf $Amal(W_{15}, v_0, t)$

Proposisi 4.4. *Misalkan v_0 adalah titik pusat roda W_{19}. Untuk setiap bilangan bulat $t \leq 169$, $\mathfrak{pr}(Amal(W_{19}, v_0, t)) = 20t + 1$.*

Bukti. Berdasarkan Lema 4.4, didapatkan $\mathfrak{pr}(Amal(W_{19}, v_0, t)) \geq 20t + 1$. Misalkan t bilangan bulat positif dan $t \leq 169$. Tentukan $f : V(Amal(W_{19}, v_0, t)) \rightarrow \{1, 2, ..., 20t + 1\}$, dengan $f(v_0) = 1$ dan untuk $i = 1, 2, .., 169$ sebagai berikut.

i. Untuk $i \neq 18 \mod 19$

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 20i + j - 19; \; j = 1, 2, ..., n - 1, \\ 20i + 1; \; j = n, \end{cases}$$

ii. Untuk $i = 18 \mod 19$

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 20i;\ j = 1, \\ 20i + j - 19;\ j = 2, 3, ..., n - 1, \\ 20i + 1;\ j = n, \end{cases}$$

Dengan cara yang sama dengan Proposisi 4.3 dapat ditunjukkan bahwa label setiap titik relatif prima. Sehingga, $\mathfrak{pr}(Amal(W_{19}, v_0, t)) \geq 20t + 1$. □

Berdasarkan uraian di atas, peneliti tidak mendapatkan pola pelabelan atau fungsi pelabelan secara umum untuk mendapatkan *minimum coprime number* untuk graf $Amal(W_n, v_0, t)$ dengan $n \equiv 3 \mod 4$. Hal tersebut diakibatkan pola label untuk setiap nilai n berbeda. Sebagai contoh pola label graf $Amal(W_n, v_0, t)$ dengan $n = 7$, $n = 11$, $n = 15$, dan $n = 19$. Oleh karena itu, batas atas dari pelabelan koprima pada graf $Amal(W_n, v_0, t)$ dengan $n \equiv 3 \mod 4$ dan $n \geq 23$ masih menjadi masalah terbuka.

4.1.3 Pelabelan Koprima Graf Berlian

Pada bagian ini akan dijelaskan tentang pelabelan koprima dari graf berlian (Br_n). Graf berlian (Br_n) memiliki $(2n)$ titik. Himpunan titik dan sisi pada graf berlian (Br_n) dinotasikan sebagai berikut.

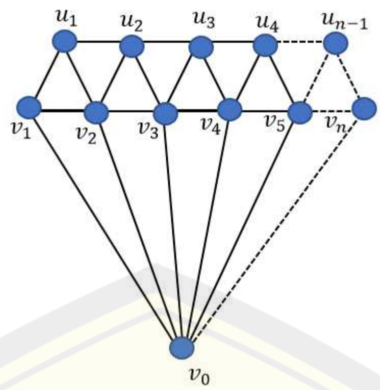
$V(Br_n) = \{v_0\} \cup \{v_{(i)} | i \in [1, n]\} \cup \{u_{(i)} | i \in [1, n-1]\}$.

$E(Br_n) = \{v_0 v_i | i \in [1, n]\} \cup \{v_i v_{i+1} | i \in [1, n-1]\} \cup \{u_i u_{i+1} | i \in [1, n-2]\} \cup \{u_i v_i | i \in [1, n-1]\} \cup \{u_i v_{i+1} | i \in [1, n-1]\}$.

Gambar 4.14 merupakan ilustrasi penotasian titik dan sisi pada graf berlian (Br_n).

Teorema 4.3. *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$, Nilai minimum coprime number graf berlian adalah* $\mathfrak{pr}(Br_n) = \begin{cases} 3n - 2; \text{ untuk } n \text{ ganjil}, \\ 3n - 1; \text{ untuk } n \text{ genap}. \end{cases}$

Bukti. Untuk membuktikan Teorema 4.3 akan dibagi menjadi dua kasus sebagai berikut.



Gambar 4.14 Penotasian Titik dan Sisi pada Graf Berlian (Br_n)

1. Kasus n ganjil.

Akan ditunjukkan $\mathfrak{pr}(Br_n) \geq 3n-2$. Misalkan titik v_0 dilabeli dengan label 1 sehingga relatif prima dengan setiap label titik v_i. Titik v_i membutuhkan $\frac{n-1}{2}$ label ganjil dan $\frac{n+1}{2}$ label genap. Titik u_i memerlukan $n-1$ label ganjil. Sehingga graf berlian (Br_n) memerlukan $\frac{3n-1}{2}$ label ganjil. Jelas bahwa graf berlian (Br_n) tidak dapat dilabeli hanya dengan label $1, 2, ..., 2n$ sedemikian sehingga setiap titik yang bertetangga relatif prima. Karena terdapat $\frac{3n-1}{2}$ label ganjil pada himpunan $1, 2, ..., 3n-2$, sehingga $\mathfrak{pr}(Br_n) \geq 3n-2$.

Selanjutnya akan dibuktikan $\mathfrak{pr}(Br_n) \leq 3n-2$ yaitu dengan membangun pelabelan koprima pada graf berlian (Br_n). Definisikan fungsi $f : V(Br_n) \rightarrow \{1, 2, ..., 3n-2\}$ sebagai berikut.

$$f(v_0) = 1.$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 3i-1; \ i = 1, 2, ..., n-1, \\ 3n-3; \ i = n. \end{cases}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} 3i; \ untuk \ i \ ganjil, \\ 3i+1; \ untuk \ i \ genap. \end{cases}$$

Berdasarkan definisi pelabelan koprima setiap titik yang bertetangga harus relatif prima. Hal tersebut akan ditunjukkan sebagai berikut.

a. Label titik v_i dan v_{i+1} untuk $i = 1, 2, ..., n - 2$. Misalkan $gcd(f(v_i), f(v_{i+1})) = gcd(3i - 1, 3i + 2) = k$. Diketahui bahwa $3i - 1$ ganjil, dan baik $3i - 1$ atau $3i + 2$ terletak pada $2 \mod 3$. Jadi, $k \neq 3$. Misalkan $3i - 1 = kx$ dan $3i + 2 = ky$, maka $k(y - x) = 3$. Karena $k \neq 3$, maka harus $k = 1$. Dengan demikian $gcd(f(v_i), f(v_{i+1})) = 1$.
b. $Gcd(f(v_{n-1}), f(v_n)) = gcd(3n-4, 3n-3) = 1$ karena merupakan bilangan konsekutif. Jadi label titik v_{n-1} dan v_n relatif prima.
c. Label titik u_i dan u_{i+1} untuk i genap. Misalkan $gcd(f(u_i), f(u_{i+1})) = gcd(3i+1, 3i+3) = k$. Karena $3i+3$ bernilai ganjil dan $|(3i+1)-(3i+3)| = 2$, berdasarkan Lema 4.3 didapatkan $gcd(f(u_i), f(u_{i+1})) = 1$.
d. Label titik u_i dan u_{i+1} untuk i ganjil. Misalkan $gcd(f(u_i), f(u_{i+1})) = gcd(3i, 3i + 4) = k$. Karena $3i$ bernilai ganjil dan $|(3i + 1) - (3i + 3)| = 4$, berdasarkan Lema 4.3 didapatkan $gcd(f(u_i), f(u_{i+1})) = 1$.
e. Label titik u_i dan v_i untuk i ganjil. Misalkan $gcd(f(u_i), f(v_i)) = gcd(3i, 3i - 1) = 1$ karena konsekutif.
f. Label titik u_i dan v_{i+1} untuk i ganjil. Misalkan $gcd(f(u_i), f(u_{i+1})) = gcd(3i, 3i+2) = k$. Karena $3i$ dan $3i+2$ bernilai ganjil dan $|3i-(3i+2)| = 2$, berdasarkan Lema 4.3 didapatkan $gcd(f(u_i), f(u_{i+1})) = 1$.
g. Label titik u_i dan v_i untuk i genap. Misalkan $gcd(f(u_i), f(v_i)) = gcd(3i + 1, 3i - 1) = k$. Karena $3i + 1$ dan $3i - 1$ bernilai ganjil serta $|(3i + 1) - (3i - 1)| = 2$, berdasarkan Lema 4.3 didapatkan $gcd(f(u_i), f(v_i)) = 1$.
h. Label titik u_i dan v_{i+1} untuk i genap. Misalkan $gcd(f(u_i), f(v_{i+1})) = gcd(3i + 1, 3i + 2) = 1$ karena konsekutif.
i. Label titik u_{n-1} dan v_n relatif prima karena konsekutif.

Dapat ditunjukkan bahwa setiap label dari dua titik yang bertetangga relatif prima. Oleh karena itu, fungsi f memenuhi kaidah pelabelan koprima, sehingga $\mathfrak{pr}(Br_n) \leq 3n - 2$. Jadi, $\mathfrak{pr}(Br_n) = 3n - 2$. □

2. Kasus n genap.

Akan ditunjukkan $\mathfrak{pr}(Br_n) \geq 3n - 1$. Dengan cara yang sama didapatkan bahwa graf berlian (Br_n) untuk n genap memerlukan $\frac{3n}{2}$ label ganjil. Jelas bahwa graf berlian (Br_n) tidak dapat dilabeli hanya dengan label $1, 2, ..., 2n$ sedemikian sehingga setiap titik yang bertetangga relatif prima. Karena terdapat $\frac{3n}{2}$ label ganjil pada himpunan $1, 2, ..., 3n - 1$, sehingga $\mathfrak{pr}(Br_n) \geq 3n - 1$.

Selanjutnya akan dibuktikan $\mathfrak{pr}(Br_n) \leq 3n - 1$ yaitu dengan membangun pelabelan koprima pada graf berlian (Br_n). Definisikan fungsi $f : V(Br_n) \to \{1, 2, ..., 3n - 1\}$ sebagai berikut.

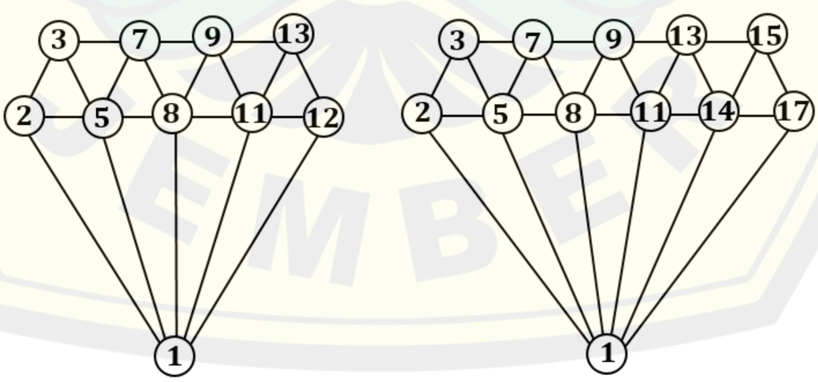
$$f(v_0) = 1.$$

$$f(v_i) = 3i - 1; i = 1, 2, ..., n.$$

$$f(u_i) = \begin{cases} 3i;\ untuk\ i\ ganjil, \\ 3i + 1;\ untuk\ i\ genap. \end{cases}$$

Misalkan $gcd(f(u_{n-1}), f(v_n)) = gcd(3n - 3, 3n - 1) = k$. Karena $3n - 3$ dan $3n - 1$ bernilai ganjil serta $|(3n - 3) - (3n - 1)| = 2$. Dengan menerapkan Lema 4.3 didapatkan bahwa $gcd(f(u_{n-1}), f(v_n)) = 1$. Dengan cara yang sama dengan Kasus 1, dapat ditunjukkan bahwa setiap titik yang bertetangga relatif prima. Oleh karena itu, fungsi f memenuhi kaidah pelabelan koprima, sehingga $\mathfrak{pr}(Br_n) \leq 3n - 1$. Jadi, $\mathfrak{pr}(Br_n) = 3n - 1$. □

Gambar 4.15 merupakan ilustrasi dari Teorema 4.3 yaitu pelabelan koprima pada graf berlian Br_5 dan Br_6 dengan $\mathfrak{pr}(Br_5) = 13$ dan $\mathfrak{pr}(Br_6) = 17$.



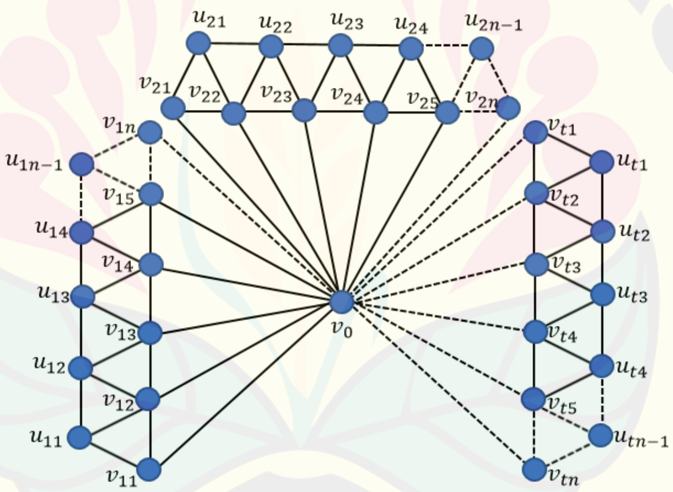
Gambar 4.15 Pelabelan Koprima pada Graf Br_5 dan Br_6

4.1.4 Pelabelan Koprima Amalgamasi Graf Berlian

Pada bagian ini akan dijelaskan tentang pelabelan koprima dari amalgamasi graf berlian $Amal(Br_n, v_0, t)$. Amalgamasi graf berlian $Amal(Br_n, v_0, t)$ memiliki $(2n-1)t+1$ titik. Himpunan titik dan sisi pada amalgamasi graf berlian $Amal(Br_n, v_0, t)$ dinotasikan sebagai berikut.

$V(Amal(Br_n, v_0, t)) = \{v_0\} \cup \{v_{(ij)} | i \in [1,t], j \in [1,n]\} \cup \{u_{(ij)} | i \in [1,t], j \in [1,n-1]\}$ $E(Amal(Br_n, v_0, t)) = \{v_0 v_{ij} | i \in [1,t], j \in [1,n]\} \cup \{v_{ij} v_{i(j+1)} | i \in [1,t], j \in [1,n-1]\} \cup \{u_{ij} u_{i(j+1)} | i \in [1,t], j \in [1,n-2]\} \cup \{u_{ij} v_{ij} | i \in [1,t], j \in [1,n-1]\} \cup \{u_{ij} v_{i(j+1)} | i \in [1,t], j \in [1,n-1]\}$

Gambar 4.16 merupakan ilustrasi penotasian titik dan sisi pada amalgamasi graf berlian $Amal(Br_n, v_0, t)$.



Gambar 4.16 Penotasian Titik dan Sisi pada Graf $Amal(Br_n, v_0, t)$

Teorema 4.4. *Misalkan v_0 adalah titik pusat Br_n. Untuk setiap bilangan bulat $t \geq 1$ dan n ganjil,* $\mathfrak{pr}(Amal(Br_n, v, t)) = (3n-3)t+1$

Bukti. Akan ditunjukkan $\mathfrak{pr}(Amal(Br_n, v_0, t)) \geq (3n-3)t+1$. Dengan cara yang sama dengan Teorema 4.3, graf $Amal(Br_n, v_0, t)$ membutuhkan $\frac{(3n-1)t+2}{2}$ label ganjil dan $\frac{nt-t}{2}$ label genap. Jelas bahwa tidak cukup label dari $1, 2, ..., (2n-1)t+1$ untuk melabeli graf $Amal(Br_n, v_0, t)$ sedemikian sehingga dua titik yang bertetangga relatif prima. Karena terdapat $\frac{(3n-1)t+2}{2}$ label ganjil pada himpunan $1, 2, ..., (3n-3)t+1$, sehingga $\mathfrak{pr}(Amal(Br_n, v_0, t)) \geq (3n-3)t+1$.

Selanjutnya akan dibuktikan $\mathfrak{pr}(Amal(Br_n, v_0, t)) \leq (3n-3)t+1$ yaitu dengan membangun pelabelan koprima pada amalgamasi graf berlian $(Amal(Br_n, v_0, t))$. Definisikan fungsi $f : V(Amal(Br_n, v_0, t)) \rightarrow \{1, 2, ..., (3n-3)t+1\}$ sebagai berikut.

$$f(v_0) = 1.$$

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 3(ni-i-n+j)+2; \ j = 1, 2, ..., n-1, \\ 3(ni-i); \ j = n. \end{cases}$$

$$f(u_{ij}) = \begin{cases} 3(ni-i-n+j)+3; \ untuk \ j \ ganjil, \\ 3(ni-i-n+j)+4; \ \ untuk \ j \ genap. \end{cases}$$

Berdasarkan definisi pelabelan koprima setiap titik yang bertetangga harus relatif prima. Hal tersebut akan ditunjukkan sebagai berikut.

a. Label titik v_{ij} dan v_{ij+1} untuk $j = 1, 2, ..., n-2$. Misalkan $gcd(f(v_{ij}), f(v_{ij+1})) = gcd(3(ni-i-n+j)+2, 3(ni-i-n+j)+5) = k$. Diketahui bahwa $3(ni-i-n+j)+5$ ganjil, dan baik $3(ni-i-n+j)+2$ atau $3(ni-i-n+j)+5$ terletak pada $2 \mod 3$. Jadi, $k \neq 3$. Misalkan $3(ni-i-n+j)+2 = kx$ dan $3(ni-i-n+j)+5 = ky$, maka $k(y-x) = 3$. Karena $k \neq 3$, maka harus $k = 1$. Dengan demikian $gcd(f(v_{ij}), f(v_{ij+1})) = 1$.
b. $Gcd(f(v_{in-1}), f(v_{in})) = gcd(3(ni-i)-1, 3(ni-3)) = 1$ karena merupakan bilangan konsekutif.
c. Label titik u_{ij} dan u_{ij+1} untuk j genap. Misalkan $gcd(f(u_{ij}), f(u_{ij+1})) = gcd(3(ni-i-n+j)+4, 3(ni-i-n+j)+6) = k$. Karena $3(ni-i-n+j)+4$ bernilai ganjil dan $|(3(ni-i-n+j)+4)-(3(ni-i-n+j)+6)| = 2$, berdasarkan Lema 4.3 didapatkan $gcd(f(u_{ij}), f(u_{j+1})) = 1$.
d. Label titik u_{ij} dan u_{ij+1} untuk j ganjil. Misalkan $gcd(f(u_{ij}), f(u_{ij+1})) = gcd(3(ni-i-n+j)+3, 3(ni-i-n+j)+7) = k$. Karena $3(ni-i-n+j)+3$

bernilai ganjil dan $|(3(ni-i-n+j)+3)-(3(ni-i-n+j)+3)|=4$, berdasarkan Lema 4.3 didapatkan $gcd(f(u_{ij}),f(u_{ij+1}))=1$.

e. Label titik u_{ij} dan v_{ij} untuk j ganjil. $Gcd(f(u_{ij}),f(v_{ij}))=gcd(3(ni-i-n+j)+3,3(ni-i-n+j)+3)=1$ karena konsekutif.

f. Label titik u_{ij} dan v_{ij+1} untuk j ganjil. Misalkan $gcd(f(u_{ij}),f(u_{ij+1})) = gcd(3(ni-i-n+j)+3,3(ni-i-n+j)+5)=k$. Karena $3(ni-i-n+j)+3$ dan $3(ni-i-n+j)+5$ bernilai ganjil dan $|(3(ni-i-n+j)+3)-(3(ni-i-n+j)+5)|=2$, berdasarkan Lema 4.3 didapatkan $gcd(f(u_{ij}),f(v_{ij+1}))=1$.

g. Label titik u_{ij} dan v_{ij} untuk j genap. Misalkan $gcd(f(u_{ij}),f(v_{ij}))=gcd(3(ni-i-n+j)+4,3(ni-i-n+j)+2)=k$. Karena $3(ni-i-n+j)+4$ dan $3(ni-i-n+j)+2$ bernilai ganjil serta $|(3(ni-i-n+j)+4)-(3(ni-i-n+j)+3)|=2$, berdasarkan Lema 4.3 didapatkan $gcd(f(u_{ij}),f(v_{ij}))=1$.

h. Label titik u_{ij} dan v_{ij+1} untuk j genap. Misalkan $gcd(f(u_{ij}),f(v_{ij+1})) = gcd(3(ni-i-n+j)+4,3(ni-i-n+j)+5)=1$ karena konsekutif.

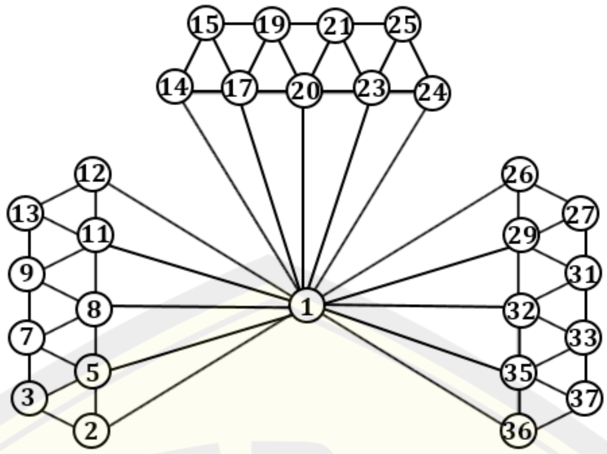
i. Label titik u_{in-1} dan v_{in} relatif prima karena konsekutif.

Dapat ditunjukkan bahwa setiap label dari dua titik yang bertetangga relatif prima. Oleh karena itu, fungsi f memenuhi kaidah pelabelan koprima, sehingga $\mathfrak{pr}(Amal(Br_n,v_0,t)) \leq (3n-3)t+1$. Jadi, $\mathfrak{pr}(Amal(Br_n,v_0,t))=(3n-3)t+1$. □

Gambar 4.17 merupakan contoh pelabelan koprima pada graf $Amal(Br_5,v_0,3)$ dengan $\mathfrak{pr}(Amal(Br_5,v_0,3))=37$.

Lema 4.5. *Misalkan v_0 adalah titik pusat Br_n. Untuk setiap bilangan bulat $t\geq 1$ dan n genap, $\mathfrak{pr}(Amal(Br_n,v_0,t))\geq(3n-2)t+1$.*

Bukti. Dengan cara yang sama dengan Teorema 4.3, graf $Amal(Br_n,v_0,t)$ membutuhkan $\frac{(3n-2)t+2}{2}$ label ganjil dan $\frac{nt-4t}{2}$ label genap. Jelas bahwa tidak cukup label dari $1,2,...,(2n-1)t+1$ untuk melabeli graf $Amal(Br_n,v_0,t)$ sedemikian sehingga dua titik yang bertetangga relatif prima. Karena terdapat $\frac{(3n-2)t+2}{2}$ label ganjil pada himpunan $1,2,...,(3n-2)t+1$, sehingga



Gambar 4.17 Pelabelan Koprima pada Graf $Amal(Br_5, v_0, 3)$

$\mathfrak{pr}(Amal(Br_n, v_0, t)) \geq (3n - 2)t + 1$. $\square$

Peneliti tidak mendapatkan nilai *minimum coprime number* pada graf $Amal(Br_n, v_0, t)$ dengan n genap secara umum karena terjadi inkonsistensi pertukaran label sedemikian sehingga titik yang bertetangga relatif prima. Oleh karena itu, pada hasil penelitian ini akan diberikan beberapa kasus untuk n genap yang disajikan pada beberapa proposisi berikut.

Proposisi 4.5. *Misalkan v_0 adalah titik pusat Br_4. Untuk setiap bilangan bulat $t > 1$, $\mathfrak{pr}(Amal(Br_4, v_0, t)) = 10t + 1$.*

Bukti. Berdasarkan Lema 4.5 didapatkan $\mathfrak{pr}(Amal(Br_4, v_0, t)) \geq 10t + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan $\mathfrak{pr}(Amal(Br_4, v_0, t)) \leq 10t + 1$ yaitu dengan membangun pelabelan koprima pada graf $Amal(Br_4, v_0, t)$. Definisikan fungsi $f : V(Amal(Br_4, v, t)) \rightarrow \{1, 2, ..., 10t + 1\}$ sebagai berikut.

$$f(v_0) = 1.$$

$$f(u_{ij}) = \begin{cases} 10(i-1) + 3j; & untuk\ j\ ganjil, \\ 10i - 3(3-j); & untuk\ j\ genap. \end{cases}$$

Untuk label titik v_{ij} akan dibedakan menjadi dua kasus sebagai berikut.

a. Kasus $i \equiv 2 \mod 3$

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 10i + j - 7; \ untuk \ j = 1, 2, 3, \\ 10i + 1; \ \ untuk \ j = 4. \end{cases}$$

b. Kasus $i \neq 2 \mod 3$

$f(v_{ij}) = 10i + 3j - 11.$

Berdasarkan definisi pelabelan koprima setiap titik yang bertetangga harus relatif prima. Hal tersebut akan ditunjukkan sebagai berikut.

a. Label titik v_{ij} dan v_{ij+1} untuk $i \equiv 2 \mod 3$ dan $j = 1, 2$ relatif prima karena konsekutif.

b. Label titik v_{i3} dan v_{i4} untuk $i \equiv 2 \mod 3$. Misalkan $gcd(f(v_{i3}), f(v_{i4})) = gcd(10i - 4, 10i + 1) = k$. Karena $10i + 1$ ganjil maka k harus ganjil. Karena $10i - 1$ dan $10i + 4$ berada dalam $1 \mod 5$, maka $k \neq 5$. Misalkan $10i - 1 = kx$ dan $10i + 4 = ky$ dan dapat dituliskan $k(y - x) = 5$. Karena $k \neq 5$, maka $k = 1$.

c. Label titik v_{ij} dan v_{ij+1} untuk $i \neq 2 \mod 3$. Misalkan $gcd(f(v_{ij}), f(v_{ij+1})) = gcd(10i + 3j - 11, 10i + 3j - 8) = k$. Diketahui bahwa $|(10i + 3j - 11) - (10i + 3j - 8)| = 3$ dan keduanya tidak dalam $0 \mod 3$. Sehingga terbukti bahwa $k = 1$.

d. Label titik u_{ij} dan v_{ij} untuk $i \neq 2 \mod 3$ dan j ganjil relatif prima karena konsekutif.

e. Label titik u_{ij} dan v_{ij+1} untuk $i \neq 2 \mod 3$ dan j ganjil. Misalkan $gcd(f(u_{ij}), f(u_{ij+1})) = gcd(10i + 3j - 10, 10i + 3j - 8) = k$. Diketahui bahwa $|(10i + 3j - 10) - (10i + 3j - 8)| = 2$. Berdasarkan Lema 4.3 didapatkan bahwa $k = 1$.

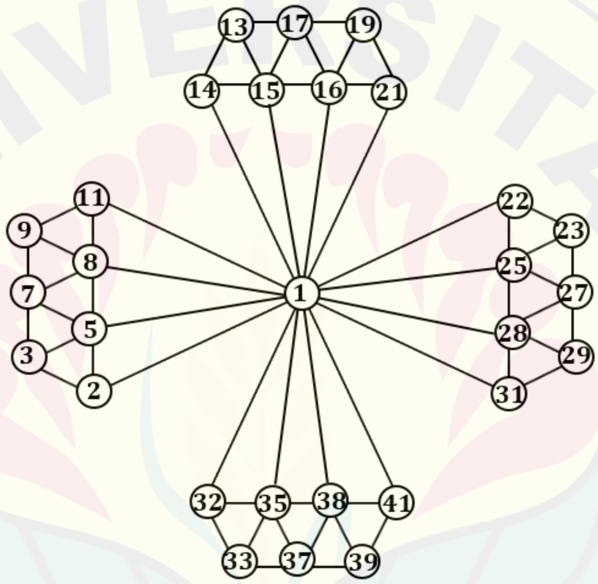
e. Label titik u_{ij} dan v_{ij} untuk $i \neq 2 \mod 3$ dan j genap relatif prima berdasarkan Lema 4.3.

f. Label titik u_{ij} dan v_{ij+1} untuk $i \neq 2 \mod 3$ dan j genap relatif prima karena konsekutif.

g. Label titik u_{i3} dan v_{i4} untuk $i = 2 \mod 3$. Misalkan $gcd(f(u_{i3}), f(v_{i4})) = gcd(10i - 1, 10i + 1) = k$. Diketahui bahwa $|(10i - 1) - (10i + 1)| = 2$ dan keduanya ganjil. Berdasarkan Lema 4.3 didapatkan bahwa $k = 1$.

Jelas bahwa setiap titik yang bertetangga relatif prima. Sehingga didapatkan bahwa $\mathfrak{pr}(Amal(Br_4, v_0, t)) \leq 10t + 1$. Terbukti bahwa, $\mathfrak{pr}(Amal(Br_4, v_0, t)) = 10t + 1$. □

Gambar 4.18 merupakan contoh pelabelan koprima pada graf $Amal(Br_4, v_0, t)$ dengan $\mathfrak{pr}(Amal(Br_4, v_0, 4)) = 41$.



Gambar 4.18 Pelabelan Koprima pada Graf $Amal(Br_4, v_0, 4)$

Selanjutnya misalkan pola pelabelan pada graf $Amal(Br_4, v_0, t)$ diterapkan pada graf $Amal(Br_6, v_0, t)$. Hal tersebut akan ditunjukkan pada Gambar 4.19. Berdasarkan Gambar 4.19 diketahui bahwa terdapat label titik yang bertetangga untuk $i = 2$ tidak relatif prima. Sehingga pola label pada graf $Amal(Br_4, v_0, t)$ tidak dapat diterapkan pada graf $Amal(Br_6, v_0, t)$. Agar syarat pelabelan koprima terpenuhi dan mendapat *minimum coprime number* pada graf $Amal(Br_4, v_0, t)$, maka disajikan Proposisi 4.6.

Proposisi 4.6. *Misalkan v_0 adalah titik pusat Br_6. Untuk setiap bilangan bulat $t > 1$,* $\mathfrak{pr}(Amal(Br_6, v_0, t)) = 16t + 1$.

i					
1					
gcd(vi,vi+1)	j	v	u	gcd(vi,ui)	gcd(uivi+1)
1	1	2	3	1	1
1	2	5	7	1	1
1	3	8	9	1	1
1	4	11	13	1	1
1	5	14	15	1	1
	6	17			

i					
2					
gcd(vi,vi+1)	j	v	u	gcd(vi,ui)	gcd(uivi+1)
1	1	20	19	1	1
3	2	21	23	1	1
1	3	24	25	1	1
1	4	29	27	1	3
3	5	30	31	1	1
	6	33			

Gambar 4.19 Pelabelan Koprima pada Graf $Amal(Br_6, v_0, t)$ Menggunakan Pola Label Graf $Amal(Br_4, v_0, t)$

Bukti. Berdasarkan Lema 4.5 didapatkan $\mathfrak{pr}(Amal(Br_6, v_0, t)) \geq 16t + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan $\mathfrak{pr}(Amal(Br_6, v_0, t)) \leq 16t + 1$ yaitu dengan membangun pelabelan koprima pada graf $Amal(Br_6, v_0, t)$. Definisikan fungsi $f : V(Amal(Br_6, v, t)) \rightarrow \{1, 2, ..., 16t + 1\}$ sebagai berikut.

$$f(v_0) = 1.$$

$$f(u_{ij}) = \begin{cases} 16i + 3j - 16; & untuk\ j\ ganjil, \\ 16i + 3j - 15; & untuk\ j\ genap. \end{cases}$$

Untuk label titik v_{ij} akan dibedakan menjadi empat kasus sebagai berikut.

a. Kasus $i \neq 2 \mod 3$

$f(v_{ij}) = 16i + 3j - 17.$

b. Kasus $i \equiv 2 \mod 3$ dan $i \neq 0 \mod 5$ serta $i \neq 1 \mod 5$

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 16i + 3j - 15; & untuk\ j\ ganjil \\ 16i + 3j - 17; & untuk\ j\ genap. \end{cases}$$

c. Kasus $i \equiv 2 \mod 3$ dan $i = 0 \mod 5$

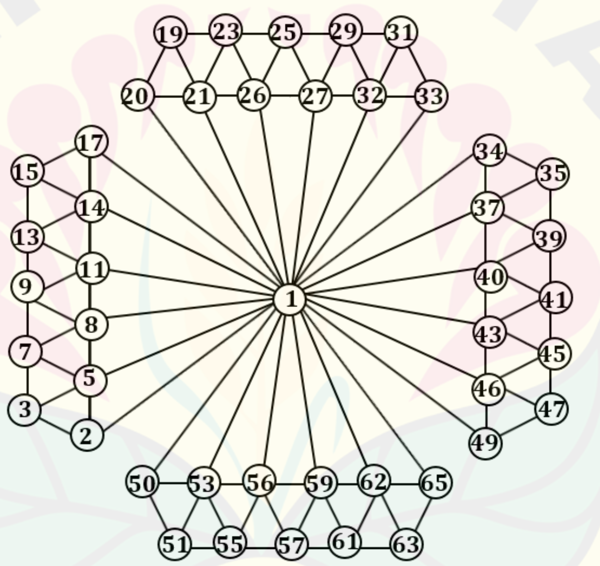
$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 16i + 3j - 15; & untuk\ j = 1, 3, \\ 16i + 3j - 17; & untuk\ j\ genap, \\ 16i + 3j - 19; & untuk\ j = 5. \end{cases}$$

d. Kasus $i \equiv 2 \mod 3$ dan $i = 1 \mod 5$

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 16i + 3j - 15; \; untuk\ j = 1, 5, \\ 16i + 3j - 17; \; untuk\ j\ genap, \\ 16i + 3j - 19; \; untuk\ j = 3. \end{cases}$$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa setiap titik yang bertetangga relatif prima. Sehingga didapatkan bahwa $\mathfrak{pr}(Amal(Br_6, v_0, t)) \leq 16t + 1$. Terbukti bahwa, $\mathfrak{pr}(Amal(Br_6, v_0, t)) = 16t + 1$. □

Gambar 4.20 merupakan contoh pelabelan koprima pada graf $Amal(Br_6, v_0, 4)$ dengan $\mathfrak{pr}(Amal(Br_4, v_0, 4)) = 65$.



Gambar 4.20 Pelabelan Koprima pada Graf $Amal(Br_6, v_0, 4)$

Selanjutnya misalkan pola pelabelan pada graf $Amal(Br_4, v_0, t)$ diterapkan pada graf $Amal(Br_8, v_0, t)$. Hal tersebut akan diperlihatkan pada Gambar 4.21 menggunakan *microsoft excel*. Berdasarkan Gambar 4.21 didapatkan bahwa terdapat label titik yang tidak relatif prima jika menggunakan pola pelabelan pada graf $Amal(Br_4, v_0, t)$. Dengan cara yang sama misalkan pola pelabelan pada graf $Amal(W_6, v_0, t)$ diterapkan pada graf $Amal(W_8, v_0, t)$. Hasil pelabelan tersebut akan ditunjukkan pada Gambar 4.22. Berdasarkan Gambar 4.22 dapat dilihat bahwa pola label $Amal(Br_6, v_0, t)$ tidak dapat diterapkan pada graf $Amal(Br_8, v_0, t)$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa pola label $Amal(Br_n, v_0, t)$ untuk $n = 4$, $n = 6$, dan $n = 8$ berbeda. Untuk mendapatkan *minimum coprime number* pada graf $Amal(Br_8, v_0, t)$ akan dijabarkan pada Proposisi 4.7.

i						
1						
gcd(vi,vi+1)	j	v	u	gcd(vi,ui)	gcd(uivi+1)	
1	1	2	3	1	1	1
1	2	5	7	1	1	0
1	3	8	9	1	1	1
1	4	11	13	1	1	0
1	5	14	15	1	1	1
1	6	17	19			0
1	7	20	21			1
	8	23				0

i					
2					
gcd(vi,vi+1)	j	v	u	gcd(vi,ui)	gcd(uivi+1)
1	1	26	25	1	1
3	2	27	29	1	1
3	3	30	31	1	1
3	4	33	35	1	1
3	5	36	37	1	1
3	6	39	41	1	1
3	7	42	43	1	1
	8	45			

Gambar 4.21 Pelabelan Koprima pada Graf $Amal(Br_8, v_0, t)$ Menggunakan Pola Label Graf $Amal(Br_4, v_0, t)$

i					
1					
gcd(vi,vi+1)	j	v	u	gcd(vi,ui)	gcd(uivi+1)
1	1	2	3	1	1
1	2	5	7	1	1
1	3	8	9	1	1
1	4	11	13	1	1
1	5	14	15	1	1
1	6	17	19		
1	7	20	21		
	8	23			

i					
2					
gcd(vi,vi+1)	j	v	u	gcd(vi,ui)	gcd(uivi+1)
3	1	24	25	1	1
3	2	27	29	1	1
3	3	30	31	1	1
3	4	33	35	1	1
3	5	36	37	1	1
3	6	39	41	1	
3	7	42	43	1	
	8	45			

Gambar 4.22 Pelabelan Koprima pada Graf $Amal(Br_8, v_0, t)$ Menggunakan Pola Label Graf $Amal(Br_6, v_0, t)$

Proposisi 4.7. *Misalkan* v_0 *adalah titik pusat* Br_8*. Untuk setiap bilangan bulat* $t > 1$, $\mathfrak{pr}(Amal(Br_8, v_0, t)) = 22t + 1$.

Bukti. Berdasarkan Lema 4.5 didapatkan $\mathfrak{pr}(Amal(Br_8, v_0, t)) \geq 22t + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan $\mathfrak{pr}(Amal(Br_8, v_0, t)) \leq 22t + 1$ yaitu dengan membangun pelabelan koprima pada graf $Amal(Br_8, v_0, t)$. Definisikan fungsi $f : V(Amal(Br_8, v, t)) \rightarrow \{1, 2, ..., 22t + 1\}$ sebagai berikut.

$$f(v_0) = 1.$$

$$f(u_{ij}) = \begin{cases} 22i + 3j - 22; & untuk\ j\ ganjil, \\ 22i + 3j - 21; & untuk\ j\ genap. \end{cases}$$

Untuk label titik v_{ij} akan dibedakan menjadi empat kasus sebagai berikut.

1. Untuk $i \neq 2 \mod 3$.

   $f(v_{ij}) = 22i + 3j - 23$

2. Untuk $i \equiv 2 \mod 3$. dan $i \neq 0 \mod 5$ serta $i \neq 3 \mod 5$

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 22i + 3j - 21; \; untuk \; j = 1, 5, 7, \\ 22i + 3j - 23; \; \; untuk \; j \; genap, \\ 22i + 3j - 25; \; untuk \; j = 3. \end{cases}$$

3. Untuk $i \equiv 2 \mod 3$. dan $i = 0 \mod 5$

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 22i + 3j - 21; \; untuk \; j = 1, 5, \\ 22i + 3j - 23; \; \; untuk \; j \; genap, \\ 22i + 3j - 25; \; untuk \; j = 3, 7. \end{cases}$$

4. Untuk $i \equiv 2 \mod 3$. dan $i = 3 \mod 5$

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 22i + 3j - 21; \; untuk \; j = 1, 3, 7, \\ 22i + 3j - 23; \; \; untuk \; j \; genap, \\ 22i + 3j - 25; \; untuk \; j = 5. \end{cases}$$

Dengan cara yang sama didapatkan bahwa setiap titik yang bertetangga relatif prima. Sehingga $\mathfrak{pr}(Amal(Br_8, v_0, t)) \leq 22t + 1$. Jadi, $\mathfrak{pr}(Amal(Br_8, v_0, t)) = 22t + 1$. $\square$

Dengan cara yang sama graf $Amal(Br_{10}, v_0, t)$ tidak dapat dilabeli dengan pola label yang sama untuk graf $Amal(Br_n, v_0, t)$ dengan $n = 4$,$n = 6$,dan $n = 8$. Untuk mendapatkan *minimum coprime number* pada graf $Amal(Br_{10}, v_0, t)$ akan disajikan pada Proposisi 4.8.

Proposisi 4.8. *Misalkan v_0 adalah titik pusat Br_{10}. Untuk setiap bilangan bulat $t > 1$, $\mathfrak{pr}(Amal(Br_{10}, v_0, t)) = 28t + 1$.*

Bukti. Berdasarkan Lema 4.5 didapatkan $\mathfrak{pr}(Amal(Br_{10}, v_0, t)) \geq 28t + 1$. Selanjutnya akan ditunjukkan $\mathfrak{pr}(Amal(Br_{10}, v_0, t)) \leq 28t + 1$ yaitu dengan membangun pelabelan koprima pada graf $Amal(Br_{10}, v_0, t)$. Definisikan fungsi $f : V(Amal(Br_{10}, v, t)) \to \{1, 2, ..., 28t + 1\}$ sebagai berikut.

$$f(v_0) = 1.$$

$$f(u_{ij}) = \begin{cases} 28i + 3j - 28; & untuk\ j\ ganjil, \\ 28i + 3j - 27; & untuk\ j\ genap. \end{cases}$$

Untuk label titik v_{ij} akan dibedakan menjadi empat kasus sebagai berikut.

1. Untuk $i \neq 2 \mod 3$.

   $f(v_{ij}) = 28i + 3j - 29$

2. Untuk $i \equiv 2 \mod 3$ dan $i \neq 0 \mod 5$ serta $i \neq 4 \mod 5$

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 28i + 3j - 27; & untuk\ j = 1, 5, 9, \\ 28i + 3j - 29; & untuk\ j\ genap, \\ 22i + 3j - 31; & untuk\ j = 3, 7. \end{cases}$$

3. Untuk $i \equiv 2 \mod 3$ dan $i = 0 \mod 5$

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 28i + 3j - 27; & untuk\ j = 1, 5, 7, \\ 28i + 3j - 29; & untuk\ j\ genap, \\ 22i + 3j - 31; & untuk\ j = 3, 9. \end{cases}$$

4. Untuk $i \equiv 2 \mod 3$ dan $i = 4 \mod 5$

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 28i + 3j - 27; & untuk\ j = 1, 3, 7, \\ 28i + 3j - 29; & untuk\ j\ genap, \\ 22i + 3j - 31; & untuk\ j = 5, 9. \end{cases}$$

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwah label setiap titik bertetangga relatif prima, sehingga $\mathfrak{pr}(Amal(Br_{10}, v_0, t)) \leq 28t + 1$. Jadi, $\mathfrak{pr}(Amal(Br_{10}, v_0, t)) = 28t + 1$. $\square$

Berdasarkan uraian di atas, peneliti tidak mendapatkan pola pelabelan atau fungsi pelabelan secara umum untuk mendapatkan *minimum coprime number* untuk graf $Amal(Br_n, v_0, t)$ dengan $0 \equiv \mod 2$. Hal tersebut dapat dilihat pola pelabelan untuk graf $Amal(Br_n, v_0, t)$ dengan n genap berbeda untuk setiap nilai n. Sebagai Contoh pola pelabelan graf $Amal(Br_n, v_0, t)$ dengan $n = 4$, $n = 6$, $n = 8$, dan $n = 10$ berbeda. Oleh karena itu, batas atas dari pelabelan koprima pada graf $Amal(Br_n, v_0, t)$ dengan $n \equiv 0 \mod 2$ dan $n \geq 12$ masih menjadi masalah terbuka.

4.2 Pembahasan

Penelitian ini bertujuan untuk mencari *minimum coprime number* dari graf hasil amalgamasi titik pada graf roda ganjil, graf komplit dan graf berlian. Operasi amalgamasi yang dilakukan adalah dengan memilih titik v_0 sebagai titik terminal dari graf yang dipilih. Lee Wui dan Yeh telah melakukan penelitian serupa pada tahun 1988 terkait pelabelan prima pada graf hasil amalgamasi. Lee Wui dan Yeh menunjukkan bahwa $Amal(G, v_0, t)$ merupakan pelabelan prima ketika G adalah graf lintasan, graf *cycle*, atau graf roda genap. Sehingga pada penelitian ini dipilih amalgamasi titik pada graf roda ganjil. Batas bawah dari amalgamasi titik pada graf roda ganjil $Amal(W_n, v_0, t)$ adalah $(n + 1)t + 1$, sedangkan untuk batas atasnya peneliti membagi menjadi dua kasus yaitu $n \equiv 1 \mod 4$ dan $n \equiv 3 \mod 4$. Batas atas untuk kasus $n \equiv 1 \mod 4$ adalah $(n + 1)t + 1$, sedangkan untuk kasus $n \equiv 3 \mod 4$ dan $n \geq 23$ peneliti tidak mendapatkan fungsi pelabelan secara umum, sehingga hal tersebut masih menjadi masalah terbuka.

John Asplund dan N. Bradley Fox pada tahun 2017 telah menunjukkan bahwa graf komplit K_n termasuk pelabelan koprima dengan *minimum coprime number* sebesar p_{n-1} atau $(n - 1)$ bilangan prima pertama. Hal tersebut menarik peneliti melakukan penelitian terhadap graf amalgamasi titik pada graf komplit. Graf amalgamasi titik pada graf komplit $Amal(K_n, v_0, t)$ mempunyai *minimum coprime number* sebesar $p_{((n-3)t+2)}$ atau $(n - 3)t + 2$ bilangan prima pertama.

Graf berlian Br_n dipilih sebagai objek penelitian karena selain masih menjadi masalah terbuka, namun graf berlian juga memiliki *minimum coprime number* yang berbeda saat n ganjil dan n genap. *Minimum coprime number* pada graf Br_n bernilai $3n-2$ untuk n ganjil dan $3n-1$ untuk n genap. Selain itu, peneliti juga mendapatkan *minimum coprime number* pada graf hasil amalgamasi titik pada graf berlian. Untuk n ganjil didapatkan *minimum coprime number* pada graf $Amal(Br_n, v_0, t)$ sebesar $(3n-3)t+1$. Sedangkan untuk kasus n genap dan $n \geq 12$ pada graf $Amal(Br_n, v_0, t)$, peneliti tidak mendapatkan fungsi pelabelan secara umum. Sehingga batas atas *minimum coprime number* pada graf $Amal(Br_n, v_0, t)$ untuk n genap masih menjadi masalah terbuka. Secara umum peneletian ini masih menyisahkan beberapa masalah terbuka sebagai berikut.

Masalah terbuka 4.1. *Bagaimanakah batas atas minimum coprime number pada graf* $Amal(W_n, v_0, t)$ *untuk* $n \equiv 3 \mod 4$ *dan* $n \geq 23$ *?*

Masalah terbuka 4.2. *Bagaimanakah batas atas minimum coprime number pada graf* $Amal(Br_n, v_0, t)$ *untuk* n *genap dan* $n \geq 12$ *?*

Masalah terbuka 4.3. *Bagaimanakah* $\mathfrak{pr}(Amal(W_n, v, t))$ *jika titik* v *bukan merupakan titik pusat dari graf roda* W_n *?*

Masalah terbuka 4.4. *Bagaimanakah* $\mathfrak{pr}(Amal(Br_n, v, t))$ *jika titik* v *bukan merupakan titik pusat dari graf berlian* Br_n *?*

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa *minimum coprime number* pada graf $Amal(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf roda ganjil, graf komplit dan graf berlian didapatkan 4 teorema, 2 lema dan 8 proposisi sebagai berikut.

1. $\mathfrak{pr}(Amal(W_n, v, t)) \geq (n+1)t + 1$, dengan n ganjil.
2. $\mathfrak{pr}(Amal(W_n, v, t)) = (n+1)t + 1$, dengan $n \equiv 1(mod4)$.
3. $\mathfrak{pr}(Amal(W_n, v, t)) = \begin{cases} 8t+1, n = 7 \text{ dan } t \leq 47, \\ 12t+1, n = 11. \\ 16t+1, n = 15 \text{ dan } t \leq 90, \\ 20t+1, n = 19 \text{ dan } t \leq 169. \end{cases}$
4. $\mathfrak{pr}(Amal(K_n, v, t)) = p_{((n-3)t+2)}$.
5. $\mathfrak{pr}(Br_n) = \begin{cases} 3n-2, \text{untuk } n \text{ ganjil}, \\ 3n-1, \text{untuk } n \text{ genap}. \end{cases}$
6. $\mathfrak{pr}(Amal(Br_n, v, t)) = (3n-3)t + 1$, dengan n ganjil.
7. $\mathfrak{pr}(Amal(Br_n, v, t)) \geq (3n-2)t + 1$, dengan n genap.
8. $\mathfrak{pr}(Amal(Br_n, v, t)) = \begin{cases} 10t+1, n = 4, \\ 16t+1, n = 6, \\ 22t+1, n = 8, \\ 28t+1, n = 10. \end{cases}$

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian, peneliti memberikan saran kepada peneliti lain untuk melanjutkan dugaan penelitian ini dan mengembangkan pelabelan koprima pada kelas graf atau operasi graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Asplund, John dan N. B. Fox. 2017. Minimum Coprime Labelings for Operations on Graphs. *Integers*, 17, 1-20.

Asplund, John dan N. B. Fox. 2019. Minimum Coprime Labelings of Generalized Petersen and Prism Graphs. *Integers*, 19, 1-17.

A. Tout, A. N. Dabboucy, dan K. Howalla. 1982. Prime labeling of graphs. *Nat. Acad. Sci. Letters*, 11:365-368.

Berliner, Adam H., Nathaniel Dean, Jonelle Hook, Alison Marr, Aba Mbirika, dan Cayla D. McBee.. 2016. Coprime and prime labelings of graphs. *Journal of integer sequence*. 19. 1-14.

Budayasa, K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.

Burton, D. M. 2002. *Elementary Number Theory Fifth Edition*. New York: McGraw-Hill

Carlson, K. 2006. Generalized Books and C_m-snakes Are Prime Graphs. *Jurnal: Ars Combinatoria* 80, 215-221.

Chartrand, G. dan L. Lesniak. 1996. *Graphs and Digraphs. Thrid Edition*. California: Chapman and Hall.

Chartrand, G., dan Oellerman, O. R. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory.*. New York : McGraw-Hill, Inc.

Dissanayake, D M T B, R A S T Abeysekara, K D E Dhananjaya, A A I Perera, dan P G R S Ranasinghe.. 2019. Prime Labeling of Complete Tripartite Graphs of the Form $K_{1,m,n}$. *Elixir International Journal*, 130, 53092-53094.

Harju, Tero. 2012. *Graph Theory*. Finland: Department of Mathematics University of Turku.

Hartsfield, N. dan G. Ringel. 1994. *Pearls in Graph Theory*. USA: Academic Press, Inc.

Hung-Lin Fu dan Kuo-Ching Huang. 1994. On Prime Labellings. *Elsevier*, 127, 181-186.

Lee, Catherine. 2020. Minimum Coprime Graphs. *Integers*, 20, 1-11.

Lipschutz, S. d. M. L. 2002. *Matematika Diskrit 2*, Salemba Teknika, Jakarta.

Rinaldi. 2016. . *Matematika Diskrit*. Bandung : Informatika.

Rosen, Kennet H.2003. *Discrete Mathematics and Its Applications 5th Ed.* Singapore : McGraw-Hill

S.Ashokkumar dan S.Maragathavalli. 2015. Prime Labelling Of Some Special Graphs. *IOSR Journal of Mathematics*, 11(1), 1-5.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan : Pendekatan Teori Graf*. Jember:Jember University Press.

Sukirman, M.P. 1997. *Ilmu Bilangan*. Universitas Terbuka. Jakarta.

Wallis, W. D. dan A. M. Marr. 2013. *Magic Graphs Second Edition*. Boston: Birkhauser.