



MODUL
TRANSFORMASI GEOMETRI

Dr. Erfan Yudianto, S.Pd., M.Pd.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2021

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunianya sehingga Modul Transformasi Geometri sekolah sebagai pengantar matakuliah Kapita Selekta dapat diselesaikan. Modul ini berisi tentang informasi dan tata cara bagaimana cara seorang guru menyampaikan materi transformasi untuk siswa di sekolah.

Kami menyadari masih terdapat banyak kekurangan dalam modul singkat ini. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun demi penyempurnaan buku ini sangat diharapkan. Semoga modul ini dapat memberikan maanfaat bagi guru, pendidik, dan bagi semua pihak dari segala kalangan yang membutuhkan.

Jember, 15 Juli 2021

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	ii
DAFTAR ISI	iii
DAFTAR GAMBAR	iv
TRANSFORMASI GEOMETRI	1
1.1. Translasi	1
1.1.1. Sifat-sifat Translasi	2
1.1.2. Konsep Translasi	3
1.1.3. Contoh Soal	5
1.2. Refleksi.....	7
1.2.1. Sifat-sifat Refleksi	7
1.2.2. Konsep Refleksi.....	8
1.2.3. Contoh Soal	13
1.3. Rotasi.....	15
1.3.1. Sifat-sifat Rotasi	15
1.3.2. Konsep Rotasi.....	16
1.3.3. Contoh Soal	17
1.4. Dilatasi	19
1.4.1. Sifat-sifat Dilatasi	20
1.4.2. Konsep Dilatasi	22
1.4.3. Contoh Soal	23
1.5. Komposisi Transformasi	25
1.5.1. Komposisi Dua Translasi Berurutan.....	25
1.5.2. Komposisi Dua Refleksi Berurutan	26
1.5.3. Komposisi Dua Rotasi Sepusat yang Berurutan.....	31
1.5.4. Contoh Soal	32
DAFTAR PUSTAKA.....	34

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. Pergeseran (Translasi)	2
Gambar 2. Translasi sebuah titik.....	3
Gambar 3. Translasi sebuah garis	4
Gambar 4. Pencerminan (Refleksi)	7
Gambar 5. Refleksi titik terhadap titik $O(0,0)$	8
Gambar 6. Refleksi titik terhadap sumbu X.....	9
Gambar 7. Refleksi titik terhadap sumbu Y.....	10
Gambar 8. Refleksi titik terhadap garis $x = h$ dan $y = k$	10
Gambar 9. Refleksi titik terhadap garis $y = x$	12
Gambar 10. Refleksi titik terhadap garis $y = -x$	13
Gambar 11. Perputaran (Rotasi).....	15
Gambar 12. Rotasi titik pada pusat $O(0,0)$	16
Gambar 13. Rotasi titik pada pusat $A(a,b)$	17
Gambar 14. Dilatasi	20
Gambar 15 Bayangan objek dengan faktor skala $k > 1$	20
Gambar 16. Bayangan objek dengan faktor skala $k = 1$	21
Gambar 17 Bayangan objek dengan faktor skala $0 < k < 1$	21
Gambar 18. Bayangan objek dengan faktor skala $-1 < k < 0$	21
Gambar 19 Bayangan objek dengan faktor skala $k < -1$	22
Gambar 20 Dilatasi terhadap titik pusat $O(0,0)$	22
Gambar 21. Dilatasi terhadap titik $A(a, b)$	23
Gambar 22. Komposisi Dua Translasi Berurutan	25
Gambar 23 Komposisi dua refleksi berurutan terhadap dua sumbu sejajar.....	26
Gambar 24 Komposisi dua refleksi berurutan terhadap dua sumbu saling tegak lurus	28
Gambar 25 Komposisi dua refleksi berurutan terhadap dua sumbu saling berpotongan.....	30
Gambar 26. Komposisi dua rotasi sepusat	31

TRANSFORMASI GEOMETRI

Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI), transformasi berarti perubahan rupa (bentuk, sifat, fungsi, dan sebagainya). Dalam bidang matematika khususnya geometri, transformasi adalah suatu pemetaan setiap koordinat titik (titik-titik dari suatu bangun) menjadi koordinat lainnya pada bidang (bidang Cartesius). Suatu transformasi biasanya disimbolkan dengan T . Sebagai contoh, suatu transformasi T memetakan titik $P(x, y)$ yang disebut titik asal ke titik $P'(x', y')$ yang disebut titik bayangan. Operasi tersebut dapat kita tulis sebagai $P(x, y) \xrightarrow{T} P'(x', y')$.

Untuk menentukan bayangan hasil transformasi biasanya dipergunakan bantuan matriks. Misalkan suatu transformasi T memetakan titik $P(x, y)$ menjadi $P'(x', y')$. Hubungan antara titik dan bayangannya dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = px + qy \\ \text{dan dalam bentuk lain menjadi } \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ y' = rx + sy \end{array} \right.$$

Bentuk dari $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ disebut dengan istilah matriks transformasi.

Terdapat dua macam transformasi, yaitu: (1) transformasi isometri, yaitu suatu transformasi yang tidak merubah ukuran bangun semula yakni pergeseran (translasi), pencerminan (refleksi) dan pemutaran (rotasi); (2) Transformasi non-isometri, yaitu suatu transformasi yang merubah ukuran bangun semula yakni perkalian (dilatasi).

1.1. Translasi

Translasi adalah suatu transformasi yang memindahkan setiap titik pada bidang menurut jarak dan arah tertentu. Jarak dan arah suatu translasi dapat ditentukan dengan:

Penyelesaian

1. Diketahui : segitiga ABC

$$\begin{aligned} A(6,4) &\xrightarrow{T\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}} B \\ A(6,4) &\xrightarrow{M_{y=x}} C \\ \Delta ABC &\xrightarrow{R\left[\begin{pmatrix} 0,2 \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\right]} \Delta A' B' C' \\ \overline{A' B'} &\xrightarrow{D[(1,1),k=2]} \overline{A'' B''} \end{aligned}$$

Ditanya : $|\overline{A'' B''}| = ?$

Jawab :

$$A(6,4) \xrightarrow{R\left[\begin{pmatrix} 0,2 \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\right]} A'(x', y') \xrightarrow{D[(1,1),k=2]} A''(x'', y'')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6-0 \\ 4-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2+4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh $A'(2\sqrt{2}, 2+4\sqrt{2})$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}-1 \\ 2+4\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+2\sqrt{2} \\ 1+4\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2+4\sqrt{2} \\ 2+8\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 4\sqrt{2} \\ 3 + 8\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh $A''(-1 + 4\sqrt{2}, 3 + 8\sqrt{2})$

$$A(6,4) \xrightarrow{T \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}} B(p, q)$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh $B(1,6)$

$$B(1,6) \xrightarrow{R \begin{bmatrix} (0,2), \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}} B'(p', q') \xrightarrow{D[(1,1), k=2]} B''(p'', q'')$$

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 6-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \frac{5}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{2} \\ 2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh $B' \left(-\frac{3}{2}\sqrt{2}, 2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \right)$

$$\begin{pmatrix} p'' \\ q'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{2} - 1 \\ 2 + \frac{5}{2}\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 + \frac{-3}{2}\sqrt{2} \\ 1 + \frac{5}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 - 3\sqrt{2} \\ 2 + 5\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p'' \\ q'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3\sqrt{2} \\ 3 + 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh $B''(-1 - 3\sqrt{2}, 3 + 5\sqrt{2})$

Berdasarkan perhitungan diatas, diperoleh

$$A''(-1 + 4\sqrt{2}, 3 + 8\sqrt{2}) \text{ dan } B''(-1 - 3\sqrt{2}, 3 + 5\sqrt{2})$$

Menggunakan rumus jarak diperoleh:

$$\begin{aligned} |A''B''|^2 &= [(-1 - 3\sqrt{2}) - (-1 + 4\sqrt{2})]^2 + [(3 + 5\sqrt{2}) - (3 + 8\sqrt{2})]^2 \\ &= [-7\sqrt{2}]^2 + [-3\sqrt{2}]^2 \\ &= 98 + 18 \end{aligned}$$

$$|A''B''|^2 = 116$$

$$|A''B''| = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

2. Diketahui :

Misal:

$$T_1 = D[(1,3), k = -2]$$

$$T_2 = M_y = -x$$

$$T_3 = M_x$$

$$T_4 = R\left[(0,0), \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$$

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \xrightarrow{T} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$$

Ditanya : Persamaan Lingkaran awal?

Jawab : misalkan titik $P(x,y)$ terletak pada lingkaran awal, sehingga

$$P(x, y) \xrightarrow{T} P'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= T_4 \circ T_3 \circ T_2 \left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= T_4 \circ T_3 \circ T_2 \left[\begin{pmatrix} -2x+2 \\ -2y+6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= T_4 \circ T_3 \circ T_2 \begin{pmatrix} -2x+3 \\ -2y+9 \end{pmatrix}$$

$$= T_4 \circ T_3 \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x+3 \\ -2y+9 \end{pmatrix} \right]$$

$$= T_4 \circ T_3 \begin{pmatrix} -2y+9 \\ -2x+3 \end{pmatrix}$$

$$= T_4 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2y+9 \\ -2x+3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{3}{4}\pi & -\sin \frac{3}{4}\pi \\ \sin \frac{3}{4}\pi & \cos \frac{3}{4}\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2y+9 \\ -2x+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2y+9 \\ -2x+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -y\sqrt{2} + \frac{9}{2}\sqrt{2} + x\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ y\sqrt{2} - \frac{9}{2}\sqrt{2} + x\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\ x\sqrt{2} + y\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Sehingga $x' = x\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \sqrt{2}(x - y + 3)$ dan

$$y' = x\sqrt{2} + y\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = \sqrt{2}(x + y - 6)$$

$P'(x', y')$ terletak pada lingkaran hasil transformasi dengan

$$\text{persamaan } x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0,$$

Sehingga

$$x'^2 + y'^2 - 2x' - 4y' - 20 = 0$$

$$x'^2 - 2x' + y'^2 - 4y' = 20$$

$$(x'-1)^2 + (y'-2)^2 = 20 + 1 + 4$$

$$(x'-1)^2 + (y'-2)^2 = 25$$

Kemudian substitusikan persamaan x' dan y' ke dalam persamaan lingkaran diatas sehingga diperoleh :

$$(\sqrt{2}(x-y+3)-1)^2 + (\sqrt{2}(x+y-6)-2)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 2(x-y+3)^2 - 2\sqrt{2}(x-y+3) + 1 + 2(x+y-6)^2 - 4\sqrt{2}(x+y-6) + 4 = 25$$

$$\Leftrightarrow 2((x-y)^2 + 6(x-y) + 9) - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 6\sqrt{2} + 2((x+y)^2 - 12(x+y) + 36) - 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 24\sqrt{2} = 20$$

$$\Leftrightarrow 2((x-y)^2 + (x+y)^2) + 12((x-y) - 2(x+y)) + (-2\sqrt{2} - 4\sqrt{2})x + (2\sqrt{2} - 4\sqrt{2})y = -70 + 18\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(2x^2 + 2y^2) + 12(-x + 3y) - 6\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = -70 + 18\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(2x^2 + 2y^2) + 12(-x + 3y) - 6\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = -70 + 18\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + (-12 - 6\sqrt{2})x + (-36 - 2\sqrt{2})y = -70 + 18\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x - \left(9 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)y = \frac{-35 + 9\sqrt{2}}{2}$$

Jadi, Persamaan Lingkaran awalnya adalah

$$x^2 + y^2 - \left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x - \left(9 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)y = \frac{-35 + 9\sqrt{2}}{2}$$