MODUL

TRANSFORMASI GEOMETRI

Dr. Erfan Yudianto, S.Pd., M.Pd.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2021

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunianya sehingga Modul Transformasi Geometri sekolah sebagai pengantar matakuliah Kapita Selekta dapat diselesaikan. Modul ini berisi tentang informasi dan tata cara bagaimana cara seorang guru menyampaikan materi transformasi untuk siswa di sekolah.

Kami menyadari masih terdapat banyak kekurangan dalam modul singkat ini. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun demi penyempurnaan buku ini sangat diharapkan. Semoga modul ini dapat memberikan maanfaat bagi guru, pendidik, dan bagi semua pihak dari segala kalangan yang membutuhkan.

Jember, 15 Juli 2021

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

TRANSFORMASI GEOMETRI

Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia (KBBI), transformasi berarti perubahan rupa (bentuk, sifat, fungsi, dan sebagainya). Dalam bidang matematika khususnya geometri, transformasi adalah suatu pemetaan setiap koordinat titik (titik-titik dari suatu bangun) menjadi koordinat lainnya pada bidang (bidang Cartesius). Suatu transformasi biasanya disimbolkan dengan T. Sebagai contoh, suatu transformasi T memetakan titik $P(x, y)$ yang disebut titik asal ke titik $P'(x', y')$ yang disebut titik bayangan. Operasi tersebut dapat kita tulis sebagai $P(x, y) \xrightarrow{T} P'(x', y')$.

Untuk menentukan bayangan hasil transformasi biasanya dipergunakan bantuan matriks. Misalkan suatu transformasi T memetakan titik $P(x, y)$ menjadi $P'(x', y')$. Hubungan antara titik dan bayangannya dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan

$$\begin{cases} x' = px + qy \\ y' = rx + sy \end{cases}$$

dan dalam bentuk lain menjadi $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Bentuk dari $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ disebut dengan istilah matriks transformasi .

Terdapat dua macam transformasi, yaitu: (1) transformasi isometri, yaitu suatu transformasi yang tidak merubah ukuran bangun semula yakni pergeseran (translasi), pencerminan (refleksi) dan pemutaran (rotasi); (2) Transformasi non-isometri, yaitu suatu transformasi yang merubah ukuran bangun semula yakni perkalian (dilatasi).

1.1. Translasi

Translasi adalah suatu transformasi yang memindahkan setiap titik pada bidang menurut jarak dan arah tertentu. Jarak dan arah suatu translasi dapat ditentukan dengan:

Penyelesaian

1. Diketahui : segitiga ABC

$$A(6,4)\xrightarrow{T\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}} B$$
$$A(6,4)\xrightarrow{M_{y=x}} C$$
$$\Delta ABC\xrightarrow{R\left[(0,2),\frac{\pi}{4}\right]} \Delta A'B'C'$$
$$\overline{A'B'}\xrightarrow{D[(1,1),k=2]} \overline{A''B''}$$

Ditanya : $\left|\overline{A''B''}\right| = ?$

Jawab :

$$A(6,4)\xrightarrow{R\left[(0,2),\frac{\pi}{4}\right]} A'(x',y')\xrightarrow{D[(1,1),k=2]} A''(x'',y'')$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6-0\\4-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\4\sqrt{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\2+4\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh $A'(2\sqrt{2},2+4\sqrt{2})$

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}-1\\2+4\sqrt{2}-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1+2\sqrt{2}\\1+4\sqrt{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2+4\sqrt{2}\\2+8\sqrt{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4\sqrt{2} \\ 3+8\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh $A''(-1+4\sqrt{2}, 3+8\sqrt{2})$

$$A(6,4) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}} B(p,q)$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh $B(1,6)$

$$B(1,6) \xrightarrow{R\left[(0,2),\frac{\pi}{4}\right]} B'(p',q') \xrightarrow{D[(1,1),k=2]} B''(p'',q'')$$

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 6-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{2} \\ \frac{5}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2}\sqrt{2} \\ 2+\frac{5}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh $B'\left(\frac{-3}{2}\sqrt{2}, 2+\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$

$$\begin{pmatrix} p'' \\ q'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-3}{2}\sqrt{2}-1 \\ 2+\frac{5}{2}\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+\frac{-3}{2}\sqrt{2} \\ 1+\frac{5}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2-3\sqrt{2} \\ 2+5\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p'' \\ q'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3\sqrt{2} \\ 3+5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh $B''\left(-1-3\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}\right)$

Berdasarkan perhitungan diatas, diperoleh

$A''(-1+4\sqrt{2}, 3+8\sqrt{2})$ dan $B''\left(-1-3\sqrt{2}, 3+5\sqrt{2}\right)$

Menggunakan rumus jarak diperoleh:

$$|A''B''|^2 = \left[\left(-1-3\sqrt{2}\right)-\left(-1+4\sqrt{2}\right)\right]^2 + \left[\left(3+5\sqrt{2}\right)-\left(3+8\sqrt{2}\right)\right]^2$$

$$= \left[-7\sqrt{2}\right]^2 + \left[-3\sqrt{2}\right]^2$$

$$= 98 + 18$$

$$|A''B''|^2 = 116$$

$$|A''B''|^2 = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

2. Diketahui :

Misal:

$T_1 = D[(1,3), k = -2]$

$T_2 = M_y = -x$

$T_3 = M_x$

$T_4 = R\left[(0,0), \frac{3\pi}{4}\right]$

$T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \xrightarrow{T} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$$

Ditanya : Persamaan Lingkaran awal?

Jawab : misalkan titik P(x,y) terletak pada lingkaran awal, sehingga

$$P(x,y) \xrightarrow{T} P'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= T_4 \circ T_3 \circ T_2 \left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= T_4 \circ T_3 \circ T_2 \left[\begin{pmatrix} -2x+2 \\ -2y+6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= T_4 \circ T_3 \circ T_2 \begin{pmatrix} -2x+3 \\ -2y+9 \end{pmatrix}$$

$$= T_4 \circ T_3 \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x+3 \\ -2y+9 \end{pmatrix} \right]$$

$$= T_4 \circ T_3 \begin{pmatrix} -2y+9 \\ -2x+3 \end{pmatrix}$$

$$= T_4 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2y+9 \\ -2x+3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{3}{4}\pi & -\sin\frac{3}{4}\pi \\ \sin\frac{3}{4}\pi & \cos\frac{3}{4}\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2y+9 \\ -2x+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2y+9 \\ -2x+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -y\sqrt{2} + \frac{9}{2}\sqrt{2} + x\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ y\sqrt{2} - \frac{9}{2}\sqrt{2} + x\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\ x\sqrt{2} + y\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Sehingga $x' = x\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \sqrt{2}(x - y + 3)$ dan

$y' = x\sqrt{2} + y\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = \sqrt{2}(x + y - 6)$

$P'(x', y')$ terletak pada lingakaran hasil transformasi dengan persamaan $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$,

Sehingga

$$x'^2 + y'^2 - 2x' - 4y' - 20 = 0$$
$$x'^2 - 2x' + y'^2 - 4y' = 20$$
$$(x'-1)^2 + (y'-2)^2 = 20 + 1 + 4$$
$$(x'-1)^2 + (y'-2)^2 = 25$$

Kemudian substitusikan persamaan x' dan y' ke dalam persamaan lingkaran diatas sehingga diperoleh :

$$(\sqrt{2}(x - y + 3) - 1)^2 + (\sqrt{2}(x + y - 6) - 2)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 2(x - y + 3)^2 - 2\sqrt{2}(x - y + 3) + 1 + 2(x + y - 6)^2 - 4\sqrt{2}(x + y - 6) + 4 = 25$$

$$\Leftrightarrow 2\left((x - y)^2 + 6(x - y) + 9\right) - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 6\sqrt{2} + 2\left((x + y)^2 - 12(x + y) + 36\right)$$
$$- 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 24\sqrt{2}) = 20$$

$$\Leftrightarrow 2\left((x - y)^2 + (x + y)^2\right) + 12\left((x - y) - 2(x + y)\right) + \left(-2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right)x +$$
$$\left(2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right)y = -70 + 18\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(2x^2 + 2y^2\right) + 12\left(-x + 3y\right) - 6\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = -70 + 18\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(2x^2 + 2y^2\right) + 12\left(-x + 3y\right) - 6\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y = -70 + 18\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + \left(-12 - 6\sqrt{2}\right)x + \left(-36 - 2\sqrt{2}\right)y = -70 + 18\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x - \left(9 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)y = \frac{-35 + 9\sqrt{2}}{2}$$

Jadi, Persamaan Lingkaran awalnya adalah

$$x^2 + y^2 - \left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x - \left(9 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)y = \frac{-35 + 9\sqrt{2}}{2}$$