# MODUL PROGRAM LINEAR & MATRIKS

**Dr. Erfan Yudianto, S.Pd., M.Pd.**

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2021

# KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang mana atas berkat dan rahmatnya penyusun dapat menyelesaikan modul Program Linear & Matriks untuk mata kuliah Matematika Dasar IPA dengan bobot 3 SKS, sebagai sarana untuk mendampingi langkah-demi langkah konsep integral kepada mahasiswa termasuk ide-ide kreatif yang mungkin muncul melalui masalah-masalah yang ada dalam modul ini. Penyusun sangat sadar bahwa modul ini masih banyak sekali kekurangan. Oleh karena itu penyusun sangat terbuka sekali bagi berbagai kritikan dan saran demi perbaikan di masa yang akan datang.

Akhirnya penyusun mohon maaf atas segala kekurangan dan mengucapkan banyak terima kasih kepada pihak-pihak yang telah membantu dalam penyusunan modul ini.

Jember, September 2020

Dr. Erfan Yudianto, M.Pd.

# DAFTAR ISI

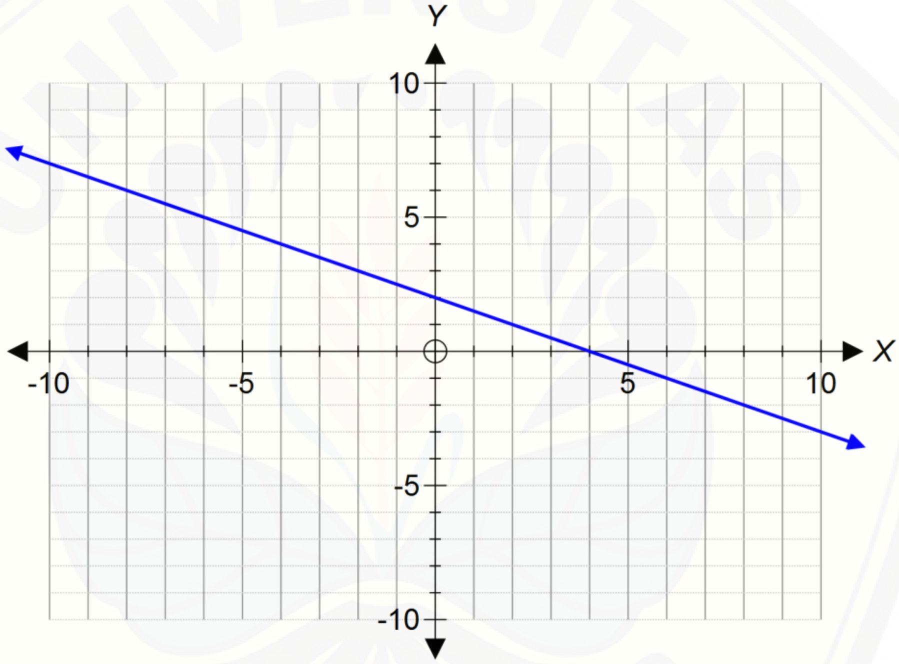
# DAFTAR GAMBAR

# BAB 1. PROGRAM LINEAR

## A. Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Suatu persamaan linear dua variabel dapat dinyatakan dalam bentuk: $a_1x + a_2y = c$. Apabila terdapat lebih dari satu persamaan, maka dinamakan sistem persamaan linear. Untuk pertidaksamaan linear, tanda "=" diganti dengan "<",">","≤","≥".

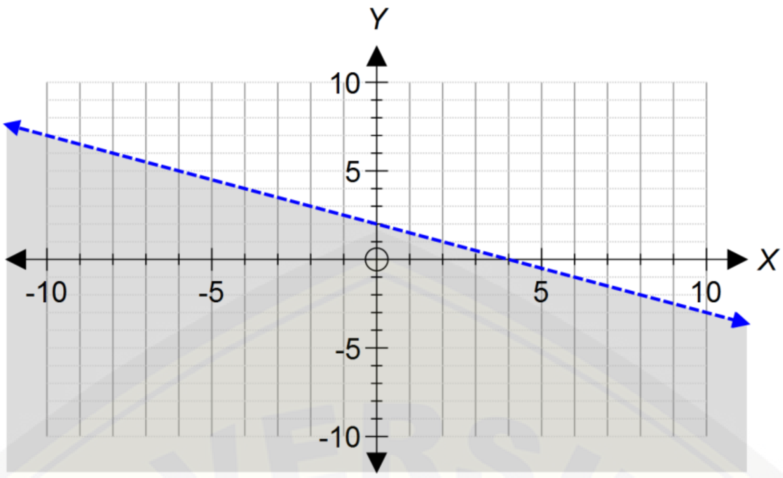
Perhatikan garis $x + 2y = 4$ di bawah ini :




Gambar 1. Grafik garis $x + 2y = 4$

Garis $x + 2y = 4$ membagi bidang kartesius menjadi dua bagian, yaitu daerah $x + 2y < 4$ dan daerah $x + 2y > 4$. Subtitusikan sembarang titik, misalkan titik $O(0,0)$ ke persamaan garis $x + 2y = 4$ sehingga didapat $0 + 0 = 0 < 4$. Hal ini menunjukkan bahwa titik $O(0,0)$ berada pada daerah $x + 2y < 4$.

Daerah $x + 2y < 4$ diarsir seperti pada gambar dibawah ini:

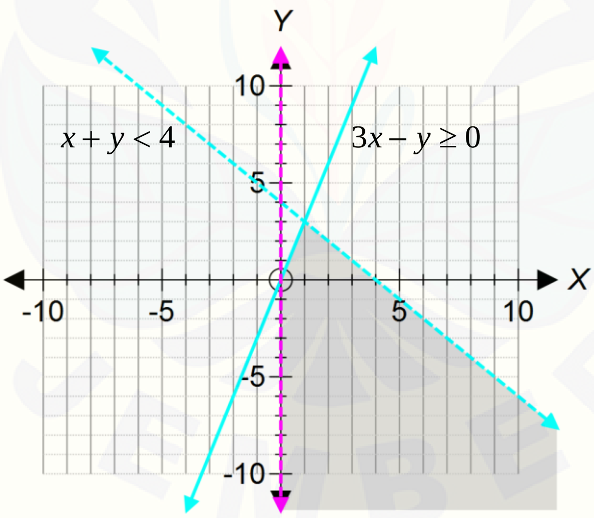



Gambar 2. Daerah penyelesaian $x + 2y < 4$

**Contoh Soal**

1. Gambarlah daerah penyelesaian pertidaksamaan dengan $x + y < 4$, $3x - y \geq 0$ dan $x \geq 0$.

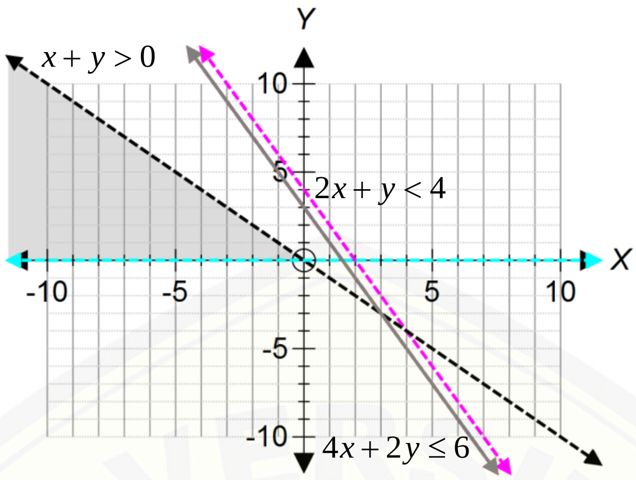
   Jawab:




Gambar 3 Daerah penyelesaian yang memenuhi $x + y < 4$, $3x - y \geq 0$ dan $x \geq 0$

2. Gambarlah daerah penyelesaian pertidaksamaan dengan $2x + y < 4$, $4x + 2y \leq 6$, $x + y > 0$ dan $y \geq 0$.

   Jawab:




Gambar 4 Daerah penyelesaian yang memenuhi
$2x+y<4,\ 4x+2y\le 6,\ x+y>0$ dan $y\ge 0$.

**B. Model Matematika**

Model matematika merupakan cara sederhana menerjemahkan suatu masalah sehari-hari ke dalam bahasa matematika dengan menggunakan persamaan, pertidaksamaan, atau fungsi.

Perhatikan contoh berikut. Sebuah perusahaan sandal akan memproduksi sandal laki-laki dan perempuan. Proses pembuatan sandal laki-laki melalui dua mesin, yaitu 3 menit pada mesin I dan 4 menit pada mesin II. Adapun proses pembuatan sandal perempuan juga diproses melalui dua mesin, yaitu 6 menit pada mesin I dan 2 menit pada mesin II. Mesin I dapat beroperasi selama 1500 menit per hari dan mesin II dapat beroperasi selama 1040 menit perhari. Untuk mendapatkan keuntungan maksimal, perusahaan ini berencana untuk menjual sandal laki-laki seharga $Rp35.000,00$ dan sandal perempuan seharga $Rp45.000,00$. Berdasarkan keuntungan maksimal yang ingin dicapai, maka perusahaan membuat model matematika untuk mengetahui berapa banyak sandal laki-laki dan perempuan yang harus di produksi.

Perusahaan tersebut memisalkan sandal laki-laki dan perempuan sebagai $x$ dan $y$ dimana $x$ dan $y$ adalah bilangan asli. Berdasarkan variabel $x$ dan $y$ tersebut, perusahaan membuat rumusan kendala-kendala sebagai berikut:

$3x + 6y \leq 1500$ ....(1)

$4x + 2y \leq 1040$ ....(2)

$x \geq 0, y \geq 0$ ....(3)

Fungsi tujuan yang digunakan untuk memaksimalkan keuntungan adalah $f(x, y) = 35.000x + 45.000y$.

**Contoh soal**

1. Dina ingin membeli buku dengan harga $Rp.\,3.000{,}00$ per buah dan bulpen dengan harga $Rp.\,2.000{,}00$, per buah. Ia hanya membawa uang $Rp.\,65.000{,}00$ dan tas belanja yang ia bawa hanya mempunyai kapasitas maksimal 25 barang untuk buku dan pulpen. Buatlah model matematika dari permasalahan tersebut !

   Jawab :

   Misalkan buku sebagai $x$ dan bulpen sebagai $y$. Berdasarkan variabel $x$ dan $y$ dapat dibuat model matematika sebagai berikut:

   $3000x + 2000y \leq 65000$ ....(1)

   $x + y \leq 30$ ....(2)

   $x \leq 0,\ y \leq 0,$ ....(5)

2. Seorang pedagang buah menjual jeruk dengan harga $Rp.\,8.000{,}00$ per kg dan apel dengan harga $Rp.\,10.000{,}00$ per kg. Modal yang dimiliki adalah $Rp.\,640.000{,}00$ dan keranjang buah hanya bisa menampung 35 kg buah. Apabila dengan keuntungan dari penjualan setiap kg jeruk adalah $Rp.\,3.000{,}00$ dan apel $Rp.\,2.000{,}00$ pedagang tersebut ingin mendapatkan keuntungan maksimum, tentukan model matematika dari permasalahan tersebut!

   Jawab:

   Misalkan jeruk dan apel sebagai $x$ dan. Berdasarkan variabel $x$ dan $y$ tersebut, dapat dibuat rumusan kendala-kendala sebagai berikut:

| Buah | Harga |
|---|---|
| Jeruk $(x)$ | 8000 |

| | |
|---|---|
| Apel $(y)$ | 10.000 |
| 1 keranjang = 35 buah | 640.000 |

$8000x + 10000y \leq 640000$ ....(1)

$x + y \leq 35$ ....(2)

$x \geq 0, y \geq 0$ ....(3)

Fungsi tujuan yang digunakan untuk memaksimalkan keuntungan adalah $f(x, y) = 3.000x + 2.000y$.

## C. Nilai Maksimal Suatu Fungsi Tujuan (Objektif)

### 1. Metode Uji Titik Pojok

Langkah-langkah menentukan nilai maksimal fungsi objektif dengan metode uji titik pojok adalah sebagai berikut:

a. Gambarlah daerah penyelesaian dari kendala-kendala yang telah dibuat berdasarkan permasalahan yang ada.

b. Tentukan titik-titik pojok dari daerah penyelesaian tersebut (perpotongan antara dua garis atau lebih).

c. Subtitusikan koordinat dari tiap-tiap titik pojok tersebut ke fungsi objektif.

d. Nilai terbesar dari sungsi objektif menunjukkan nilai maksimum dan nilai terkecil menunjukkan nilai minimum.

### 2. Metode Garis Selidik

Langkah-langkah menentukan nilai maksimal fungsi objektif dengan metode garis selidik adalah sebagai berikut:

a. Buatlah model matematika dari permasalahan yang ada

b. Gambarlah grafik dan daerah penyelesaian

c. Tentukan persamaan garis selidik yakni berasal dari fungsi objektif ( $ax + by = k, a > 0, b > 0,$ dan $k \in R$)

d. Gambarlah garis selidik tersebut pada koordinat Cartesius.

e. Nilai maksimum fungsi objektif adalah garis selidik yang mempunyai jarak terbesar terhadap titik pusat dan nilai minimum fungsi objektif adalah garis selidikyang mempunyai jarak terkecil terhadapa titik pusat.

**Contoh soal**

1. Tentukanlah nilai maksimum dan minimum dari fungsi tujuannya dengan metode uji titik pojok dan nilai maksimum dengan metode garis selidik dari sistem pertidaksamaan berikut.

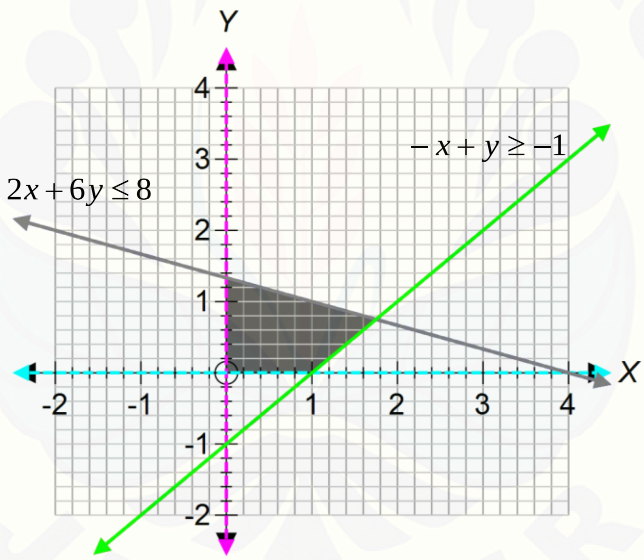
$2x + 6y \leq 8$

$-x + y \geq -1$

$x \geq 0,\ y \geq 0$

$f(x, y) = 7x + 9y$

Jawab:




Gambar 5. Daerah penyelesaian yang memenuhi $2x + 6y \leq 8, -x + y \geq -1,$

$x \geq 0,\ y \geq 0$

a. Metode uji titik pojok

- Perpotongan garis $2x + 6y \leq 8$ dengan sumbu $-y$

Subtitusikan $x = 0$ ke persamaan $2x + 6y \leq 8$

$$
\begin{aligned}
2x+6y &= 8\\
\leftrightarrow 2(0)+6y &= 8\\
\leftrightarrow 6y &= 8\\
\rightarrow y &= \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Jadi, perpotongan garis $2x+6y \le 8$ dengan sumbu $-y$ adalah $\left(0,\frac{4}{3}\right)$

- Perpotongan garis $-x+y \ge -1$ dengan sumbu $x$

Subtitusikan $y=0$ ke persamaan $-x+y \ge -1$

$$
\begin{aligned}
-x+y &= -1\\
\leftrightarrow -x+0 &= -1\\
\rightarrow x &= 1
\end{aligned}
$$

Jadi, perpotongan garis $-x+y \ge 7$ dengan sumbu $-x$ adalah $(1,0)$

- Perpotongan garis $-x+y \ge -1$ dengan garis $2x+6y \le 8$

Dari $-x+y=-1$ didapat $y=x-1$

Subtitusikan nilai $y=x-1$ ke persamaan $2x+6y \le 8$

$$
\begin{aligned}
2x+6y &= 8\\
\leftrightarrow 2x+6(x-1) &= 8\\
\leftrightarrow 2x+6x+-6 &= 8\\
\leftrightarrow 8x &= 14\\
\leftrightarrow x &= \frac{14}{8}\\
\rightarrow x &= \frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

Subtitusikan nilai $x=\frac{7}{4}$ ke persamaan $y=x-1$

$$
\begin{aligned}
y &= x-1\\
\leftrightarrow y &= \frac{7}{4}-1\\
\rightarrow y &= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Jadi, perpotongan garis $-x + y \geq 7$ dengan garis $2x + 6y \leq 8$ adalah

$$\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

- Uji titik pojok

| $(x, y)$ | $f(x, y)$ |
|---|---|
| $(0,0)$ | 0 |
| $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ | 12 |
| $(1,0)$ | 7 |
| $\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right)$ | 19 |

Berdasarkan tabel di atas diperoleh nilai maksimum dan minimum dari fungsi objektif $f(x, y) = 7x + 9y$ adalah $f\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{4}\right) = 19$ dan $f(0,0) = 0$

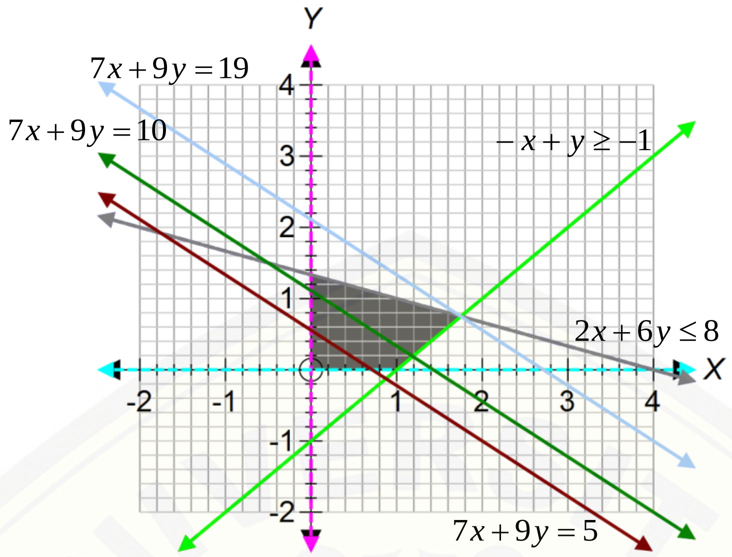
b. Metode garis selidik

Garis selidik dari $f(x, y) = 7x + 9y$ adalah $7x + 9y = k$

Ambil $k = 5 \rightarrow 7x + 9y = 5$

Ambil $k = 10 \rightarrow 7x + 9y = 10$

Ambil $k = 19 \rightarrow 7x + 9y = 19$




Gambar 6 Garis-garis selidik yang memenuhi $2x+6y\leq 8, -x+y\geq -1$, $x\geq 0,\ y\geq 0$

Berdasarkan gambar di atas didapatkan bahwa garis selidik yang menyebabkan nilai maksimum adalah $7x+9y=19$ melalui titik $\left(\frac{7}{4},\frac{3}{4}\right)$ .

2. Sebuah perusahaan sandal akan memproduksi sandal laki-laki dan perempuan. Proses pembuatan sandal laki-laki melalui dua mesin, yaitu 3 menit pada mesin I dan 6 menit pada mesin II. Adapun proses pembuatan sandal perempuan juga diproses melalui dua mesin, yaitu 4 menit pada mesin I dan 2 menit pada mesin II. Mesin I dapat beroperasi selama 1500 menit per hari dan mesin II dapat beroperasi selama 1040 menit perhari. Berapa banyak sandal laki-laki dan perempuan yang harus di produksi untuk mencapai keuntungan maksimal jika perusahaan ini berencana untuk menjual sandal laki-laki seharga $Rp.35.000,00$ dan sandal perempuan seharga $Rp.45.000,00$?

   Jawab:

Perusahaan tersebut memisalkan sandal laki-laki dan perempuan sebagai $x$ dan $y$ dimana $x$ dan $y$ adalah bilangan asli. Berdasarkan variabel $x$ dan $y$ tersebut, perusahaan membuat rumusan kendala-kendala sebagai berikut:

$3x+6y \le 1500$ ....(1)

$4x+2y \le 1040$ ....(2)

$x \ge 0, y \ge 0$ ....(3)

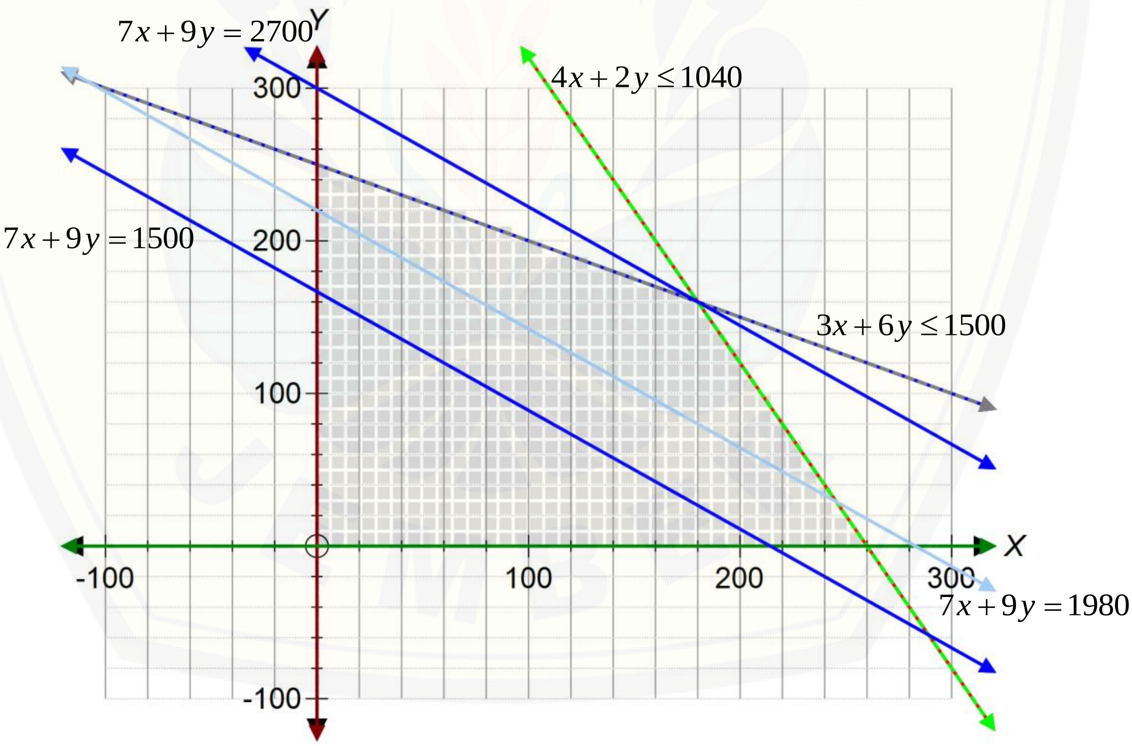
Fungsi tujuan yang digunakan untuk memaksimalkan keuntungan adalah $f(x,y)=35.000x+45.000y$.

Garis selidik dari $f(x,y)=35000x+45000y$ adalah $7x+9y=k$

Ambil $k=1500 \rightarrow 7x+9y=1500$

Ambil $k=1980 \rightarrow 7x+9y=1980$

Ambil $k=2700 \rightarrow 7x+9y=2700$




*Gambar 7* Garis-garis selidik yang memenuhi $3x+6y \le 1500$, $4x+2y \le 1040$, $x \ge 0,\ y \ge 0$

Berdasarkan gambar di atas didapatkan bahwa garis selidik yang menyebakan nilai maksimum adalah $7x+9y=2700$ melalui titik $(180,160)$, sehingga sandal laki-laki dan perempuan yang harus diproduksi adalah 180 buah dan 160 buah.

# BAB 2. MATRIKS

## A. Pengertian Matriks

Matriks adalah kumpulan bilangan yang disusun dalam bentuk persegi panjang yang diatur menurut kolom dan baris dengan menggunakan kurung siku/kurung biasa. Baris sebuah matriks merupakan susunan bilangan yang mendatar dalam matriks dan kolom sebuah matriks adalah susunan bilangan yang tegak dalam matriks. Penamaan matriks menggunakan huruf kapital. Secara umum, matriks berordo $i \times j$ dengan $i$ dan $j$ adalah bilangan asli dapat ditulis sebagai berikut:

$$M_{i \times j} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{23} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{i1} & m_{i2} & \dots & m_{ij} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Baris pertama} \\ \rightarrow \text{Baris kedua} \\ \\ \rightarrow \text{Baris ke} - i \end{array}$$

Kolom pertama

Kolom kedua

Kolom ke $- i$

Jenis-jenis matriks berdasarkan ordo dan elemen-elemen matriks:

a. Matriks Baris

Matriks yang terdiri dari satu baris. Contoh: $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

b. Matriks Kolom

Matriks yang terdiri dari satu kolom. Contoh:

$$N = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c. Matriks Persegi

Matriks yang mempunyai baris dan kolom sama banyak. Contoh:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

d. Matriks Nol

Matriks yang semua elemennya nol. Contoh:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e. Matriks Identitas

Matriks yang elemen diagonal-diagonal utamanya sama dengan 1, sedangkan elemen-elemen lainnya adalah 0. Contoh:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

f. Matriks Skalar

Matriks yang elemen diagonal-diagonal utamanya sama, sedangkan elemen-elemen lainnya adalah 0. Contoh:

$$I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

g. Matriks Diagonal

Matriks persegi yang elemen diluar diagonal utamanya bernilai 0, Contoh:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

h. Matriks Segitiga Atas

Matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utamanya bernilai 0. Contoh:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

i. Matriks Segitiga Bawah

Matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utamanya bernilai 0. Contoh:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

j. Transpose Matriks

Sebuah matriks yang cara penulisannya adalah dengan merubah baris ke $-i$ menjadi kolom ke $-i$ dan sebaliknya. Contoh:

$$\text{Jika } T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ maka } T' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Adapun sifat-sifat matriks adalah sebagai berikut:

a. $(A+B)^T = A^T + B^T$

b. $(A^T)^T = A$

**Contoh soal**

1. Diketahui matriks sebagai berikut:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Tentukanlah:

a. Banyaknya baris dan kolom

b. Elemen pada setiap baris dan kolom

c. Transpose matriks tersebut

Jawab:

a. Ada 4 baris dan 4 kolom

b. Baris pertama 1, 2, 3

Baris kedua 1, 2, 3

Baris ketiga 2, 3, 4

Baris keempat 1, 2, 3, 4

Kolom pertama 1, 2, 3, 4

Kolom kedua 1, 2, 3,

Kolom ketiga 1, 2, 3

Kolom keempat 2, 3, 4

c. Tranpose dari matriks $T$ adalah

$$T^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Tentukanlah jenis matriks dari setiap matriks berikut:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ b. $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ d. $D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Jawab:

a. Matriks kolom
b. Matriks baris dan matriks nol
c. Matriks persegi dan matriks segitiga atas
d. Matriks persegi

## B. Operasi Hitung Bilangan Bulat

### 1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Sani dan Tito mewakili sekolahnya untuk mengikuti lomba Cerdas Cermat se-Kabupaten dalam peringatan Maulid Nabi Muhammad SAW. Lomba ini terdiri dari dua babak yaitu tulis dan cepat tepat. Hasil lomba yang mereka ikuti tampak pada tabel di bawah ini.

| Nama | Nilai tes | | Nilai Total |
|---|---|---|---|
| | Tulis | Cepat tepat | |
| Sani | 7 | 5 | 12 |
| Tito | 6 | 7 | 13 |

Penjumlahan nilai total tersebut dapat juga dilakukan dengan menggunakan matriks, yaitu sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Kedua matriks yang dijumlahkan memiliki ordo yang sama. Matriks yang dihasilkan adalah matriks yang berordo sama, yang elemennya merupakan hasil penjumlahan dari elemen-elemen yang seletak.

Untuk pengurangan matriks juga dapat dilakukan jika ordo matriks yang akan dikurangkan sama. Matriks yang dihasilkan adalah matriks yang berordo sama, yang elemennya merupakan hasil pengurangan dari elemen-elemen yang seletak.

**Contoh Soal**

1. Hasil penjumlahan dari dua matriks berikut adalah

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Jawab:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 4+1 \\ 5+2 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Tentukan matriks yang dihasilkan dari $(A+B)-C$!

Jawab:

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+(-1) & -3+5 & -1+7 \\ 2+2 & 3+1 & 1+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)-C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-1 & 2-(-1) & 6-4 \\ 4-3 & 4-2 & 4-5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Jadi, $(A+B)-C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

**2. Perkalian Bilangan Real dengan Matriks**

Setelah mempelajari penjumlahan dua dan tiga matriks. Sekarang lakukan penjumlahan matriks $A$ berordo $i \times j$ secara berulang sebanyak $n$ kali.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix}$$

maka:

$$A + A + \cdots + A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix}$$

$$nA = \begin{pmatrix} \underbrace{a_{11}+a_{11}+\cdots+a_{11}}_{n} & \underbrace{a_{12}+a_{12}+\cdots+a_{12}}_{n} & \cdots & \underbrace{a_{1j}+a_{1j}+\cdots+a_{1j}}_{n} \\ \underbrace{a_{21}+a_{21}+\cdots+a_{21}}_{n} & \underbrace{a_{22}+a_{22}+\cdots+a_{22}}_{n} & \cdots & \underbrace{a_{2j}+a_{2j}+\cdots+a_{2j}}_{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underbrace{a_{i1}+a_{i1}+\cdots+a_{i1}}_{n} & \underbrace{a_{i2}+a_{i2}+\cdots+a_{i2}}_{n} & \cdots & \underbrace{a_{ij}+a_{ij}+\cdots+a_{ij}}_{n} \end{pmatrix}$$

$$nA = \begin{pmatrix} na_{11} & na_{12} & \cdots & na_{1j} \\ na_{21} & na_{22} & \cdots & na_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ na_{i1} & na_{i2} & \cdots & na_{ij} \end{pmatrix}$$

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa jika $A$ sebuah matriks dan $n$ bilangan real maka hasil kali $nA$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing elemen matriks A dengan $n$.

**Contoh soal**

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } Y = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah:

a. $3X$

b. $2Y$

c. $3X - 2Y$

Jawab:

a. $3X = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 12 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Jadi, $3X = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 12 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$

b. $2Y = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Jadi, $2Y = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

c. $3X - 2Y = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 12 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

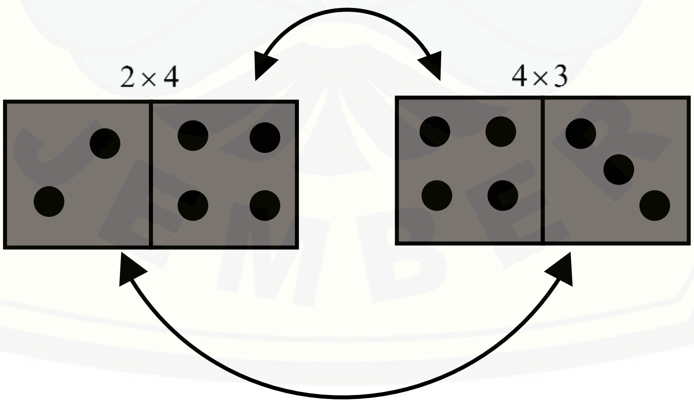
$$= \begin{pmatrix} 6-8 & 3-4 \\ -3-2 & 12-6 \\ 9-4 & 6-10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Jadi, $3X - 2Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

**3. Perkalian Dua Matriks**

Apakah kalian pernah bermain domino? Bagaimanakah memasang kartu-kartu dalam permainan domino? Agar selembar kartu domino dapat dipasangkan dengan kartu domino lain, jumlah mata bagian kanan kartu tersebut harus sama dengan jumlah mata bagian kiri kartu pasangannya.




Prinsip pemasangan kartu domino ini dapat kita gunakan untuk memahami perkalian dua matriks, yaitu sebuah matriks $A$ dapat dikalikan dengan matriks $B$ jika banyak kolom matriks $A$ sama dengan banyak baris matriks $B$. Elemen-elemen matriks hasil kali ini adalah jumlah dari hasil kali elemen-elemen pada baris matriks A dengan elemen-elemen pada kolom matriks $B$.

$$A_{m\times p}\times B_{p\times n}=C_{m\times n}$$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$$A\times B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

**Contoh soal**

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$X=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, Z=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah:

a. $XY$

b. $YZ$

Jawab:

a. $XY=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+5\cdot(-3) & 2\cdot 4+5\cdot 2 & 2\cdot(-2)+5\cdot(-1) \\ 3\cdot 1+4\cdot(-3) & 3\cdot 4+4\cdot 2 & 3\cdot(-2)+4\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -13 & 18 & -9 \\ -9 & 20 & -10 \end{pmatrix}$$

Jadi, $XY=\begin{pmatrix} -13 & 18 & -9 \\ -9 & 20 & -10 \end{pmatrix}$

b. $YZ=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \\ -3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & -3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Jadi, $YZ = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

Adapun sifat-sifat operasi hitung matriks yaitu sebagai berikut.

Jika setiap matriks berikut dapat dioperasikan dimana $a$ adalah konstanta, maka berlaku sifat-sifat berikut.

- $P + Q = Q + P$
- $(P + Q) + R = P + (Q + R)$
- $P(Q + R) = PQ + PR$
- $(P + Q)R = PR + QR$
- $P(Q - R) = PQ - PR$
- $(P - Q)R = PR - QR$
- $a(P + Q) = aP + aQ$
- $a(P - Q) = aP - aQ$
- $(a + b)P = aP + bP$
- $(a - b)P = aP - bP$
- $(ab)P = a(bP)$
- $a(PQ) = (aP)Q = P(aQ)$
- $(PQ)R = P(QR)$

## C. Determinan dan Invers Matriks

### 1. Determinan

Suatu matriks persegi selalu dapat dikaitkan dengan suatu bilangan yang disebut determinan. Determinan dari matriks persegi $A$ dinotasikan dengan $|A|$.

Untuk matriks $A$ berordo $2 \times 2$, determinan matriks $A$ didefinisikan sebagai berikut.

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan matriks $A$ adalah $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

$$- \qquad +$$

Untuk matriks $B$ berordo $3 \times 3$, dengan menggunakan kaidah Sarrus determinan matriks $B$ didefinisikan sebagai berikut.

Jika $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, maka determinan matriks $B$ adalah

$$|B| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

**Contoh soal**

Diketahui matriks $U = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ dan $V = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Tentukanlah:

a. $|U|$

b. $|V|$

Jawab.

a. $|U| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 7 = 8 - 7 = 1$

Jadi, $|U| = 1.$

b. $|V| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$

$= 3 \cdot (-1) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-2) \cdot 5$

$= -15 + 12 - 8 + 2 - 18 + 40$

$= 13$

Jadi, $|V| = 13.$

**2. Invers Matriks**

Matriks persegi $A$ mempunyai invers, jika ada matriks $B$ sedemikian hingga $AB = BA = I_{n \times n}$ dengan $I$ matriks identitas. Pada persamaan $AB = BA = I_{n \times n}$, $A$ dan $B$ disebut saling invers. Syarat-syarat matriks $A$ mempunyai invers sebagai berikut.

- Jika $|A| = 0,$ maka matriks $A$ tidak mempunyai invers. Oleh karena itu, dikatakan matriks $A$ sebagai matriks singular.
- Jika $|A| \neq 0,$ maka matriks $A$ mempunyai invers. Oleh karena itu, dikatakan matriks $A$ sebagai matriks nonsingular.

**Contoh soal**

Tunjukkan bahwa $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ saling invers!

Jawab:

Untuk membuktikan kedua matriks tersebut saling invers, kita harus membuktikan bahwa $AB = BA = I_{2\times 2}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\cdot 3 + 4\cdot(-5) & 7\cdot(-4) + 4\cdot 7 \\ 5\cdot 3 + 3\cdot(-5) & 5\cdot(-4) + 3\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 7 + (-4)\cdot 5 & 3\cdot 4 + (-4)\cdot 3 \\ (-5)\cdot 7 + 7\cdot 5 & (-5)\cdot 4 + 7\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dari perhitungan di atas, didapat bahwa $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dimana $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2}$ sehingga didapat $AB = BA = I_{2\times 2}$. Jadi, dapat dikatakan bahwa $A$ dan $B$ saling invers.

Untuk matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ berordo $2\times 2$ ini, kita dapat menentukan inversnya sebagai berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot Adj\ A$$

$$= \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan invers suatu matriks dengan ordo $3\times 3$, kita harus memahami tentang matriks minor, kofaktor, dan adjoint.

a. Matriks Minor

Matriks minor $M_{ij}$ diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ matriks $A$ berordo $3\times 3$, sehingga didapat matriks baru dengan ordo $2\times 2$. Determinan dari matriks tersebut disebut minor dari determinan matriks $A$, ditulis dengan $|M_{ij}|$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Minor-minor dari matriks $A$ adalah sebagai berikut.

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{32}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad |M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad |M_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

b. Kofaktor

Kofaktor dari baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$ dituliskan dengan $A_{ij}$. Untuk menentukannya ditentukan dengan rumus $A_{ij} = (-1)^{i+j} \, |M_{ij}|$.

Kofaktor-kofaktor dari matriks $A$ adalah sebagai berikut.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = |M_{11}|$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}|$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = |M_{13}|$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -|M_{21}|$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = |M_{22}|$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = -|M_{23}|$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = |M_{31}|$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = -|M_{32}|$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = |M_{33}|$$

c. Adjoint

Misalkan suatu matriks $A$ berordo $n \times n$ dengan $A_{ij}$ kofaktor dari matriks $A$, maka

$$\text{Adjoint } A\,(Adj\ A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Untuk matriks $A$ berordo $3 \times 3$, maka

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Untuk menentukan determinan dari matriks berordo $3 \times 3$, selain dengan kaidah Sarrus, dapat juga digunakan matriks minor dan kofaktor.

$$\text{Misalkan matriks } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Determinan matriks $A\,(\det A)$ dapat ditentukan menggunakan rumus:

(i) $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

$$= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(ii) $|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$

$$= -a_{21}|M_{21}| + a_{22}|M_{22}| - a_{23}|M_{23}|$$

$$= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(iii) $|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$

$$= a_{31}|M_{31}| - a_{32}|M_{32}| + a_{33}|M_{33}|$$

$$= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

**Contoh soal**

1. Diketahui matriks $S = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Tentukan:

a. Determinan

b. Invers

Jawab:

a. Kita dapat menggunakan salah satu dari ketiga rumus di atas untuk menentukan determinan matriks $S$.

$$|S| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4\cdot(6-2) - 3\cdot(9-4) + 1\cdot(3-4)$$

$$= 16 - 15 - 1$$

$$= 0$$

b. Karena determinan dari matriks $S$ adalah 0, maka matriks $S$ tidak mempunyai invers. Sehingga matriks $S$ merupakan matriks singular.

2. Tentukan invers dari matriks berikut!

$$W = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ dan } Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab:

$$W^{-1} = \frac{1}{\det W} \cdot Adj\ W$$

$$= \frac{1}{4\cdot(-1)-2\cdot(-3)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Jadi, $W^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|Z| = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$$= 2+1+18-3-3-4$$

$$= 11$$

$$Z_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2-3 = -1$$

$$Z_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-1) = -3$$

$$Z_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6-1 = 5$$

$$Z_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(6-9) = -1$$

$$Z_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-3 = -1$$

$$Z_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3-1) = -2$$

$$Z_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-3 = -2$$

$$Z_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-6) = 5$$

$$Z_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1$$

$$Adj\ Z = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Z^{-1} = \frac{Adj\ Z}{|Z|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}}{11} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Jadi, $Z^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$

## D. Penerapan Matriks dalam Sistem Persamaan Linear

Pada bab sebelumnya telah dibahas tentang penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan metode grafik, metode eliminasi, dan metode substitusi. Pada bab ini, kita akan menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut dengan menggunakan matriks.

Misalkan, sistem persamaan linear berikut.

$ax + by = e$

$cx + dy = f$

Sistem persamaan linear tersebut dapat kita tuliskan dalam persamaan matriks berikut.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Persamaan matriks ini dapat kita selesaikan dengan menggunakan sifat berikut.

1. Jika $AX = B,$ maka $X = A^{-1}B,$ dengan $|A| \neq 0$

2. Jika $X = AB,$ maka $X = BA^{-1}$ dengan $|A| \neq 0$

**Contoh soal**

Tentukanlah penyelesaian sistem persamaan linear berikut!

1. $5x - 2y = 4$ dan $2x + 4y = 8$

2. $x + 2y - z = 3, 3x - y + z = 2, 2x + y + z = -1$

Jawab:

1. Ubah sistem persamaan linear tersebut menjadi persamaan matriks seperti berikut.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}\underset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}}$$

Selanjutnya, tentukan determinan matriks $A$, yaitu:

$$|A| = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 20 - (-4) = 24$$

Penyelesaian sistem persamaan linear tersebut dapat kita tentukan dengan cara berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \frac{1}{24}\underset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}}\underset{B}{\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Jadi, $x = \frac{4}{3}$ dan $y = \frac{4}{3}$.

2. $x + 2y - z = 3, 3x - y + z = 2, 2x + y + z = -1$

Ubah sistem persamaan linear tersebut menjadi persamaan matriks seperti berikut.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}\underset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Selanjutnya, tentukan determinan matriks $A$, yaitu:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$= -1 + 4 + (-3) - 2 - 1 - 6$$

$$= -9$$

Invers dari matriks $A$, yaitu:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3 - 2) = -1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-2) = 5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - (-1)) = -3$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 4) = 3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - (-3)) = -4$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\ A}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}}{-9} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ -\frac{5}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

Penyelesaian sistem persamaan linear tersebut dapat kita tentukan dengan cara berikut.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ -\frac{5}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} \frac{13}{9} \\ -\frac{7}{9} \\ -\frac{28}{9} \end{pmatrix}$$

Jadi, $x = \frac{13}{9}$, $y = -\frac{7}{9}$, dan $z = -\frac{28}{9}$.

Selain dengan cara di atas, sistem persamaan linear dapat juga diselesaikan dengan menggunakan aturan Cramer berikut.

Jika $AX = B$, maka $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \cdots, x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$.

$A_j$ adalah matriks yang didapat dengan mengganti elemen-elemen pada kolom- $j$ dari matriks $A$ dengan elemen-elemen matriks $B$.

**Contoh soal**

Tentukanlah penyelesaian sistem persamaan linear berikut dengan aturan Cramer!

1. $5x - 2y = 4$ dan $2x + 4y = 8$

2. $x+2y-z=3, 3x-y+z=2, 2x+y+z=-1$

Jawab:

1. Tentukan $|A|, |A_1|, |A_2|$ terlebih dahulu.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20-(-4) = 24$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 16-(-16) = 32$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 40-8 = 32$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$$

Jadi, penyelesaian sistem persamaan linear tersebut adalah $x = \frac{4}{3}$ dan $y = \frac{4}{3}$.

2. Ubah sistem persamaan linear tersebut menjadi persamaan matriks seperti berikut.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Tentukan $|A|, |A_1|, |A_2|, |A_3|$ terlebih dahulu.

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right. = -1+4-3-2-1-6 = -9$$

$$|A_1| = \begin{array}{|ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} = -3-2-2+1-3-4 = -13$$

$$|A_2| = \begin{array}{|ccc|cc} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{array} = 2+6+3+4+1-9 = 7$$

$$|A_3| = \begin{array}{|ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} = 1+8+9+6-2+6 = 28$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-13}{-9} = \frac{13}{9}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{7}{-9} = -\frac{7}{9}$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{28}{-9} = -\frac{28}{9}$$

Jadi, $x = \frac{13}{9}$, $y = -\frac{7}{9}$, dan $z = -\frac{28}{9}$.

# DAFTAR PUSTAKA


Courant, R., Robbins, H., & Stewart, I. (1996). What is mathematics?: an elementary approach to ideas and methods. In *American Mathematical Monthly*. https://doi.org/10.1038/150673a0

Crane, K., & Wardetzky, M. (2017). A Glimpse into Discrete Differential Geometry. *Notices of the American Mathematical Society*. https://doi.org/10.1090/noti1578

Mutakin, T. Z. (2013). Analisis kesulitan belajar kalkulus I mahasiswa teknik informatika. *Jurnal Formatif*, *3*(1), 49–60.

Purcell, E. J., Rigdon, S. E., & Varberg, D. (2003). *Calculus* (8th ed.). Prentice-Hall, Inc.

Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2004). *Kalkulus* (H. W. Hardani & Santika (Eds.); Delapan). Erlangga.

Thomas, G., Weir, M., & Hass, J. (2009). Thomas' Calculus. In *Math.Utoledo.Edu*. https://doi.org/10.1073/pnas.0703993104