PELUANG TRANSISI DAN BERTAHAN HIDUP EMPAT STATE MODEL *MULTI STATE* DENGAN MATRIKS *FORCE OF TRANSITION*

SKRIPSI

Oleh

Rosalina Dwi Kusuma Dewi

NIM 161810101020

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2020

PELUANG TRANSISI DAN BERTAHAN HIDUP EMPAT STATE MODEL *MULTI STATE* DENGAN MATRIKS *FORCE OF TRANSITION*

SKRIPSI

Diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Rosalina Dwi Kusuma Dewi

NIM 161810101020

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2020

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah Yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penulis persembahkan skripsi ini sebagai ungkapan kebahagiaan dan rasa terimakasih kepada:

1. Ayahanda Handoyo, Ibunda Sulistyowati dan Mbak Febriana Ika Listya Handini, serta seluruh keluarga yang telah mendukung dan memberikan doa, kasih sayang dan motivasi yang selalu menguatkan di setiap perjalanan hidup saya,
2. Seluruh guru dan dosen yang telah memberikan banyak ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran,
3. Sahabat saya Devita, Bibi, Tika, Rina, Novia, Gilang, Salik, Rino, Sonia, Irham, dan Abi,
4. Teman-teman MISDIRECTION, dan semua pihak yang selama ini mendukung saya sehingga skripsi ini bisa terselesaikan,
5. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, SMA Negeri 1 Besuki, SMP Negeri 1 Banyuglugur, SDN 5 Kalianget dan TK Dian Sakarin.

MOTTO

Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Maka apabila engkau telah selesai (dari sesuatu urusan), tetaplah bekerja keras (untuk urusan yang lain). Dan hanya kepada Tuhanmulah engkau berharap.*)

Learn from yesterday, live for today, hope for tomorrow.

*) QS. Al-Insyirah, 6-8

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : Rosalina Dwi Kusuma Dewi

NIM : 161810101020

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul "Peluang Transisi Dan Bertahan Hidup Empat State Model *Multi State* dengan Matriks *Force Of Transition*" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 21 Oktober 2020

Yang menyatakan,

Rosalina Dwi K.D

NIM 161810101020

SKRIPSI

PELUANG TRANSISI DAN BERTAHAN HIDUP EMPAT STATE MODEL *MULTI STATE* DENGAN MATRIKS *FORCE OF TRANSITION*

Oleh

Rosalina Dwi Kusuma Dewi

NIM 161810101020

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Dr. Mohamat Fatekurohman, S.Si., M.Si.

Dosen Pembimbing Anggota : Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Peluang Transisi Dan Bertahan Hidup Empat State Model *Multi State* dengan Matriks *Force Of Transition*" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal : 21 Oktober 2020

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,	Anggota I,
Dr. Mohamat Fatekurohman, S.Si., M.Si. NIP. 196906061998031001	Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D. NIP. 195912201985031002
Anggota II,	Anggota III,
Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si. NIP. 197407192000121001	Bagus Juliyanto, S.Si., M.Si. NIP. 198007022003121001

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Drs. Achmad Sjaifullah, M.Sc., Ph.D
NIP. 195910091986021001

RINGKASAN

Peluang Transisi Dan Bertahan Hidup Empat State Model *Multi State* dengan Matriks *Force Of Transition* ; Rosalina Dwi Kusuma Dewi, 161810101020; 2020; 57 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Empat state model merupakan tahapan-tahapan dari sehat,sakit ringan, sakit parah, dan meninggal. Model ini diasumsikan memiliki sifat Markov, dimana peluang keadaan di waktu mendatang dapat diketahui dengan syarat peluang keadaan saat ini diketahui, waktu (t) adalah parameter *space*. *Multi State* merupakan suatu model dalam proses stokastik untuk waktu kontinu yang membahas tentang perpindahan seseorang pada sejumlah status yang terbatas. *Force of transition* adalah laju peluang perubahan sesaat dari satu *state* ke *state* lainnya. Dari *force of transition* ini bisa diketahui peluang transisi perpindahan antar *state*, misalnya peluang meninggal ataupun peluang bertahan hidup seseorang. Pada metode matriks *force of transition*, penentuan peluang transisi dicari dengan menghitung nilai eigen dan vektor eigen dari sebuah matriks persegi dengan entri berupa *force of transition*. Dari peluang transisi tersebut peluang bertahan hidup dapat diperoleh dari suatu individu dengan metode matriks *force of transition* yaitu

$$\begin{aligned} &P_{11}(t) + P_{12}(t) \\ &= e^{-({\mu_{12}}^{(x)}+{\mu_{13}}^{(x)}+{\mu_{14}}^{(x)})(t)} \\ &+ \left(e^{-({\mu_{23}}^{(x)}+{\mu_{24}}^{(x)})(t)}\right. \\ &\left.- e^{-({\mu_{12}}^{(x)}+{\mu_{13}}^{(x)}+{\mu_{14}}^{(x)})(t)}\right)\left(\frac{{\mu_{12}}^{(x)}}{({\mu_{12}}^{(x)}+{\mu_{13}}^{(x)}+{\mu_{14}}^{(x)}-{\mu_{23}}^{(x)}-{\mu_{24}}^{(x)})}\right) \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$P_{22}(t) + P_{23}(t) = e^{-({\mu_{23}}^{(x)}+{\mu_{24}}^{(x)})(t)} + \left(e^{-{\mu_{34}}^{(x)}(t)} - e^{-({\mu_{23}}^{(x)}+{\mu_{24}}^{(x)})(t)}\right)\left(\frac{{\mu_{23}}^{(x)}}{({\mu_{23}}^{(x)} + {\mu_{24}}^{(x)} - {\mu_{34}}^{(x)})}\right) \quad (4.2)$$

selanjutnya dari hasil perhitungan yang telah didapat diaplikasikan pada data cav menggunakan R. Peluang bertahan hidup dari suatu individu yang berada pada state 1 ke state 2 adalah 0,9995513 dan peluang bertahan hidup dari suatu individu yang berada pada state 2 ke state 3 adalah 0,9998371.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul “Peluang Transisi Dan Bertahan Hidup Empat State Model *Multi State* dengan Matriks *Force Of Transition”.*Tugas akhir ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan tugas akhir ini tidak lepas dari bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terimakasih kepada:

1. Dr. Mohamat Fatekurohman, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan tugas akhir ini;
2. Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji I dan Bagus Juliyanto, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan tugas akhir ini;
3. Dosen dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
4. Keluarga yang telah memberikan semangat dan doa tulus ikhlas penuh kasih sayangnya;
5. Teman-teman dan semua pihak yang telah membantu dan memberi semangat.

Semoga bantuan, bimbingan dan dorongan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Penulis juga menerima kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini. Akhirnya penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat.

Jember, 21 Oktober 2020

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Beberapa masalah dalam kehidupan dapat ditampilkan dalam proses *multi state*. Salah satu proses *multi state* yaitu pada kondisi kesehatan manusia. Keadaan individu dapat berada pada suatu *state*, misalkan sehat, sakit, atau meninggal. Empat *state* model merupakan tahapan-tahapan dari sehat,sakit ringan, sakit parah, dan meninggal. Model ini diasumsikan memiliki sifat Markov, dengan peluang keadaan diwaktu mendatang dapat diketahui dengan syarat peluang keadaan saat ini diketahui, parameter spacenya adalah waktu (t).

Ruang *state* merupakan himpunan kondisi yang mungkin dilalui oleh proses stokastik yang dibicarakan. Pada proses ini, ruang *state* yang dipilih adalah ruang *state* yang berhingga, yaitu $S = \{1,2,\dots,N\}$. Sedangkan proses stokastik $\{X(t), t \geq 0\}$ merupakan proses stokastik waktu-kontinu t dengan ruang *state* S, sedangkan matriks bujur sangkar yang berukuran $N \times N$ yang berisi peluang perpindahan (transisi) dari satu *state* ke *state* yang lain dengan sifat nilainya nonnegatif dan jumlah peluang secara horizontal sama dengan satu, merupakan matriks peluang transisi $P(t)$ untuk 1-langkah yang disingkat dengan matriks peluang transisi.

Multi State merupakan suatu model dalam proses stokastik untuk waktu kontinu yang membahas tentang perpindahan seseorang pada sejumlah status yang terbatas (Meira, 2009). Status dapat berupa sehat, sakit, ataupun meninggal. Perubahan atau perpindahan status tersebut dinamakan dengan transisi atau kejadian. Kompleksitas dari model ini sangat bergantung pada sejumlah status dan juga pada probabilitas atau peluang transisi. Peluang-peluang transisi dari suatu status ke status lainnya dibentuk dari intensitas transisi. Intensitas transisi menyediakan laju perubahan dari suatu status ke status lainnya per-satuan waktu. Model Markov pada *Multi State* banyak digunakan sebagai dasar analisis dan pengembangan model peluang transisi, dengan peluang seseorang untuk bertransisi dari sehat ke status sakit atau sebaliknya pada waktu yang akan datang hanya bergantung pada keadaanya saat ini (Kusumawati, 2010).

Force of transition adalah laju peluang perubahan sesaat dari satu *state* ke *state* lainnya. Dari *force of transition* ini bisa diketahui peluang transisi perpindahan antar *state*, misalnya peluang meninggal ataupun peluang bertahan hidup seseorang.

Beberapa penelitian mengenai penentuan peluang transisi telah dilakukan antara lain Sudarmo (2015) dengan judul “Menentukan Matriks Peluang Transisi untuk Waktu Okupansi Menggunakan transformasi Laplace Dan Matriks Eksponensial”, hasil penelitian ini adalah mencari matriks peluang transisi dengan menggunakan trasformasi Laplace dan matriks eksponensial (Sudarmo, 2015). Syafriandi (1998) dengan judul “Pendugaan Matriks Peluang Transisi dari Rantai Markov dengan Prosedur Pendugaan Bayes Empiris dan Metode Kemungkinan Maksimum (Contoh Penerapan untuk Prakiraan Cuaca Harian Propinsi Sumatera Barat)”, hasil penelitian ini adalah memilih metode terbaik dalam menduga matriks peluang transisi dari suatu rantai Markov dengan waktu diskrit yang stasioner (Syarifandi, 1998). Faizal Hardi (2013) dengan judul “Penentuan Peluang Transisi Model Select Ultimate Mortality Menggunakan Metode Matriks Force of Transition”, hasil dari penelitian ini adalah metode matriks force of transition yang diaplikasikan pada model select ultimate mortality memperoleh nilai peluang bertahan hidup yang hampir mendekati nilai dari Individual Ordianary Mortality Table (Hardi, 2013).

Pada penelitian ini penghitungan peluang transisi menggunakan metode matriks *force of transition* dengan empat *state* model, ketika telah memasuki state 4 maka tidak mungkin kembali ke state 3, 2, dan 1. Pada metode matriks *force of transition*, penentuan peluang transisi dapat dilakukan dengan mencari nilai eigen dan vektor eigen dari sebuah matriks persegi dengan entri berupa *force of transition*. Dari peluang transisi, peluang bertahan hidup dengan metode matriks *force of transiton* dapat diketahui, setelah itu diaplikasikan kepada data cav dengan R.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang telah dijelaskan diperoleh rumusan masalah yaitu bagaimana menghitung peluang transisi dan peluang bertahan hidup dari model markov dapat ditentukan dengan menggunakan metode matriks *force of transition* khususnya dengan *four state* model*?*

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah menghitung peluang transisi dan peluang bertahan hidup dari model markov dapat ditentukan dengan menggunakan metode matriks *force of transition* khususnya dengan *four state* model.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yakni dapat memperdalam konsep dan teori yang berkaitan dengan analisis survival, menambah pengetahuan tentang penentuan peluang transisi multi state dengan metode matriks *force of transition* pada *four state* model.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Matriks

Matriks adalah kumpulan bilangan yng disusun secara baris atau kolom atau kedua-duanya dan di dalam suatu tanda kurung. Bilangan-bilangan yang membentuk suatu matriks disebut sebagai elemen-elemen matriks.

2.1.1 Vektor Eigen dan Nilai Eigen

Definisi 2.1

*Jika **A** adalah matriks berukuran n x n, maka sebuah vector taknol x pada* $\mathbb{R}^n$ *disebut* ***vektor eigen*** *(eigen vector) dari **A** jika **Ax** adalah sebuah kelipatan scalar dari **x**, jelasnya*

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda x \tag{2.1}$$

untuk skalar sebarang λ*. Skalar* λ *disebut* ***nilai eigen*** *(eigen value) dari **A**, dan disebut sebagai vektor eigen dari **A** yang terkait dengan* λ (Anton dan Rorres, 2004).

Vektor eigen dan nilai eigen memiliki teorema yg terkait yaitu

Teorema 2.1

Jika ***A*** adalah sebuah matriks segitiga berukuran *n x n* (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) maka nilai-nilai eigen dari ***A*** adalah entri-entri yang terletak pada diagonal utama matriks ***A*** (Imrona, 2009).

2.1.2 Diagonalisasi

Definisi 2.2

*Suatu Matriks **A** berukuran n x n dapat didiagonalisasi jika terdapat matriks **X** taksingular dan suatu matriks diagonal **D** sedemikian sehingga*

$$\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{D} \tag{2.2}$$

*dikatakan bahwa matriks **A** dapat didiagonalisasi* (Leon 1998).

Teorema berikut ini menunjukkan bahwa masalah vektor eigen dan masalah diagonalisasi adalah sama.

Teorema 2.2

Jika **A** adalah sebuah matriks berukuran *n x n*, maka kedua pernyataan berikut ini adalah ekuivalen

a. **A** dapat didiagonalisasi
b. **A** memiliki vektor eigen yang bebas linear (Anton dan Rorres, 2004).

2.1.3 Deret Taylor

Definisi 2.3

Deret Taylor untuk fungsi $f(x)$ di sekitar $x = a$ didefinisikan sebagai

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (2.3)$$

(Stewart, 2003)

Definisi 2.4 (Eksponensial Matriks Segi)

Eksponensial matriks segi (e^A) didefinisikan sebagai

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \qquad (2.4)$$

Analog dengan deret Taylor dari fungsi skalar e^x (Leon 1998).

2.2 Proses Stokastik

Definisi 2.5 (Ruang State)

Himpunan S disebut ruang state jika S memuat semua kemungkinan state dalam suatu sistem (Billingsley, 1994).

Proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ adalah himpunan variabel acak, dengan $\forall t \in T, X(t)$ adalah suatu variabel acak dengan distribusi tertentu. Pada umumnya indeks *t* menunjukkan waktu dari proses *(parameter space)*. Variabel acak $X(t)$ menunjukkan ruang keadaan *(state space)* dari proses tersebut pada waktu *t*. Secara singkat, proses stokastik adalah himpunan variabel acak yang menggambarkan dinamika dari suatu proses (Haryono, 1995).

Proses stokastik dikatakan mempunyai sifat Rantai Markov jika

$$P\{X_{t+1} = j | X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_{t-1} = s_{t-1}, X_t = i\} \\ = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\} \tag{2.5}$$

untuk dan setiap urutan. Sifat Rantai Markov ini menyatakan bahwa peluang bersyarat dari *state* mendatang, dengan *state* masa lampau dan *state* saat ini , adalah independent terhadap *state* di masa lampau dan hanya tergantung pada *state* saat ini (Hillier dan Lieberman, 2008).

Proses $\{X(t), t \geq 0\}$ adalah rantai Markov waktu kontinu jika untuk semua $s, t \geq 0$ dan merupakan bilangan bulat non negatif $i, j, x(u), 0 \leq u \leq s$

$$P\{X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u \leq s\} \\ = P\{X(t+s) = j | X(s) = i\} \tag{2.6}$$

Rantai Markov waktu kontinu adalah proses stokastik yang memiliki sifat Markov yang menyatakan bahwa distribusi bersyarat untuk $X(t+s)$ pada masa yang akan datang diberikan oleh $X(s)$ pada masa kini dan $X(u)$ yang diperoleh di masa lalu, $0 \leq u < s$, dengan syarat hanya bergantung pada masa kini dan independen dari masa lalu (Sunusi, 2014).

2.3 Peluang Transisi

2.3.1 Matriks Peluang Transisi

Jika sebuah rantai Markov $\{X_t, t = 0,1,2, \dots\}$ dengan ruang *state* $\{0,1, \dots k\}$, maka peluang sistem itu dalam *state i* pada suatu *state j* pada pengamatan sebelumnya dilambangkan dengan P_{ij} dan disebut peluang transisi dari *state i* ke *state j*. Matriks $\boldsymbol{P} = [P_{ij}]$ disebut matriks transisi rantai Markov (Anton and Rorres, 2004). Jadi,

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0k} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{k0} & P_{k1} & \dots & P_{kk} \end{bmatrix}$$

2.3.2 Peluang Transisi *n*-Langkah

Peluang transisi n-langkah $P_{ij}^{(n)}$ adalah peluang bersyarat suatu sistem yang berada pada *state* i akan berada pada *state* j setelah proses mengalami n transisi (Hillier dan Lieberman, 2008). Jadi,

$$P_{ij}^{(n)} = P\{X_{t+n} = j | X_t = i\} \tag{2.7}$$

Matriks peluang transisi n-langkah

$$\boldsymbol{P}^{(n)} = \begin{bmatrix} P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} & \dots & P_{0k}^{(n)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} & \dots & P_{1k}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{k0}^{(n)} & P_{k1}^{(n)} & \dots & P_{kk}^{(n)} \end{bmatrix}$$

2.3.3 Persamaan Chapman-Kolmogorov

Persamaan Chapman-Kolmogorov merupakan sebuah metode untuk menghitung peluang transisi n-langkah

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^{(m)} P_{kj}^{(n-m)} \tag{2.8}$$

untuk semua $i = 0,1,\dots,\infty\,; j = 0,1,\dots,\infty$ dan $m = 1,2,\dots,n-1\,; n = m+1, m+2,\dots$

Peluang transisi n-langkah dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\boldsymbol{P}^{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{(n-1)} = \boldsymbol{P}^{n} \tag{2.9}$$

oleh karena itu, matriks peluang transisi n-langkah $\boldsymbol{P}^n$ dapat diperoleh dengan menghitung pangkat ke-n dari matriks transisi satu langkah $\boldsymbol{P}$ (Hiller dan Liberman, 2008).

2.3.4 Klasifikasi *State* pada Rantai Markov

Misalkan $f_{ij}^{(n)}$ menyatakan peluang bahwa mulai dari *state i*, proses berpindah pertama kali ke *state j* terjadi pada waktu n.

Definisi 2.6

State dikatakan recurrent (berulang) apabila ketika memasuki state tertentu proses pasti akan kembali ke state itu lagi. State i dikatakan reccurent jika $f_{ii} = 1$ (Tijms, 2003).

Definisi 2.7

Suatu state i disebut state penyerap (absorbing state) jika $p_{ii} = 1$. *Jika suatu state merupakan state penyerap (absorbing state) maka tidak ada state yang bisa diakses dari state tersebut* (Tijms, 2003).

2.4 *Force of Transition*

Definisi 2.8

Misal $\{X_t\}$ rantai Markov dengan *state space* $\{1,2,3,\ldots,N\}$. *Force of transition* dari *state i* ke *state j* didefinisikan sebagai berikut

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{P_{ij}(t, t+h) - P_{ij}(t,t)}{h} \tag{2.10}$$

$i, j \in \{1,2,\ldots,N\}$

(Jones, 1994)

Lemma 2.1 (Sifat *Force of Transition*)

$$\sum_{j=1}^{N} \mu_{ij}(t) = 0 \tag{2.11}$$

untuk $i = 1,2,\ldots,N$ dan $t \geq 0$

(Jones, 1994)

Teorema 2.3 (Persamaan Kolmogorov Maju)

Pada persamaan Kolmogorov maju, laju peluang transisi di waktu yang akan datang memiliki hubungan sebagai jumlah perkalian peluang transisi dengan laju dari peluang transisi sesaat (*force of transition* saat waktu mendatang). Dalam hal ini peluang transisi $P_{ij}(s, s+t)$ didiferensialkan terhadap waktu mendatang $(s+t)$, dan hubungan diferensial ini diberikan sebagai berikut

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij}(s, s+t) = \sum_{k=1}^{N} P_{ik}(s, s+t)\mu_{kj}(s+t) \tag{2.12}$$

(Jones, 1994).

2.5 Metode Matriks *Force of Transition*

Jika nilai $\mu_{ij}(t) = \mu_{ij}$ dengan μ_{ij} adalah konstanta untuk semua nilai $t \geq 0$, maka *force of transition* dikatakan bernilai konstan. Rantai Markov yang berhubungan dengan nilai ini adalah rantai Markov homogen. Jika berlaku rantai Markov waktu homogen, maka fungsi $P_{ij}(s, s+t)$ bernilai sama untuk semua $s \geq 0$, sehingga notasi $P_{ij}(s, s+t)$ bisa ditulis sebagai $P_{ij}(t)$. Misal $\boldsymbol{P}(t)$ adalah matriks ukuran k x k dengan elemen-elemen $P_{ij}(t)$ adalah peluang transisi dimana $i, j = 1,2,3, \dots k$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{P}(t) = \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & \dots & P_{1k}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) & \dots & P_{2k}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{k1}(t) & P_{k2}(t) & \dots & P_{kk}(t) \end{bmatrix}$$

Didefinisikan $\boldsymbol{Q}$ adalah matriks berukuran k x k dengan elemen-elemen μ_{ij} adalah peluang perubahan sesaat dimana $i, j = 1,2,3, \dots k$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1k} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{k1} & \mu_{k2} & \dots & \mu_{kk} \end{bmatrix}$$

dan $\boldsymbol{P}^{(1)}(t)$ adalah matriks berukuran k x k dengan elemen-elemen $P'_{ij}(t)$ adalah peluang transisi 1-langkah dari $P_{ij}(t)$ dimana $i, j = 1,2,3, \dots k$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{P}'_{ij}(t) = \begin{bmatrix} P'_{11}(t) & P'_{12}(t) & \dots & P'_{1k}(t) \\ P'_{21}(t) & P'_{22}(t) & \dots & P'_{2k}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P'_{k1}(t) & P'_{k2}(t) & \dots & P'_{kk}(t) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan Chapman-Kolmogorov

$$\boldsymbol{P}(s, s+t+u) = \boldsymbol{P}(s, s+t)\boldsymbol{P}(s+t, s+t+u) \tag{2.13}$$

Karena rantai Markov yang digunakan adalah rantai Markov homogen, sehingga tidak bergantung pada nilai s sehingga fungsi $P_{ij}(s, s+t)$ bernilai sama untuk semua $s \geq 0$, oleh karena itu persamaan (2.13) berubah menjadi

$$\boldsymbol{P}(t+u) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(u) \tag{2.14}$$

Berdasarkan persamaan Kolmogorov Maju

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{ij}(s, s+t) = \sum_{k=1}^{N} P_{ik}(s, s+t)\mu_{kj}(s+t)$$

Maka dalam bentuk matriks dapat ditulis

$$\boldsymbol{P}^{(1)}(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} \tag{2.15}$$

Dengan nilai awal $t = 0, \boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$ persamaan di atas mempunyai solusi

$$\boldsymbol{P}(t) = e^{\boldsymbol{Q}t} \tag{2.16}$$

Bukti: Lampiran 2.

Dimana bentuk deret Taylor untuk $\boldsymbol{P}(t)$ di $t = 0$ adalah

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}(0) + \boldsymbol{P}^{(1)}(0)t + \boldsymbol{P}^{(2)}(0)t^2 + \boldsymbol{P}^{(3)}(0)t^3 \ldots$$

$$= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q}t + \frac{\boldsymbol{Q}^2 t^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{Q}^3 t^3}{3!} \ldots$$

Pencarian matriks peluang transisi membutuhkan nilai-nilai eigen yang berbeda pada matriks $\boldsymbol{Q}$**.** Hal ini bertujuan agar matriks $\boldsymbol{Q}$ dapat didiagonalkan. Jika $\boldsymbol{Q}$ mempunyai nilai-nilai eigen berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ maka matriks $\boldsymbol{Q}$ bisa dibentuk sebagai

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{ADA^{-1}} \tag{2.17}$$

dimana $\boldsymbol{D} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k)$ dan kolom ke *i* dari ***A*** adalah vektor eigen yang berhubungan dengan nilai eigen λ_i. Sehingga dari persamaan $\boldsymbol{P}(t)$ bisa diperoleh

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q}t + \frac{\boldsymbol{Q}^2 t^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{Q}^3 t^3}{3!} \ldots$$

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q}t + \frac{(\boldsymbol{Q}t)^2}{2!} + \frac{(\boldsymbol{Q}t)^3}{3!} + \cdots$$

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{ADA}^{-1}t + \frac{(\boldsymbol{ADA}^{-1})^2 t^2}{2!} + \frac{(\boldsymbol{ADA}^{-1})^3 t^3}{3!} + \cdots$$

$$= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{ADA}^{-1}t + \frac{\boldsymbol{ADA}^{-1}\boldsymbol{ADA}^{-1}t^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{ADA}^{-1}\boldsymbol{ADA}^{-1}\boldsymbol{ADA}^{-1}t^3}{3!} + \cdots$$

$$= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{ADA}^{-1}t + \frac{\boldsymbol{AD}^2\boldsymbol{A}^{-1}t^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{AD}^3\boldsymbol{A}^{-1}t^3}{3!} + \cdots$$

$$= \boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{DA}^{-1}t + \frac{\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{A}^{-1}t^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{D}^3\boldsymbol{A}^{-1}t^3}{3!} + \cdots\right]$$

$$= \boldsymbol{A}[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}t + \frac{\boldsymbol{D}^2t^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{D}^3t^3}{3!} + \cdots]\boldsymbol{A}^{-1}$$

Diketahui $\boldsymbol{D}$ adalah matriks diagonal dari nilai-nilai eigen $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k)$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}$$

maka

$$\boldsymbol{D}^2 = \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & {\lambda_k}^2 \end{bmatrix}$$

Secara umum untuk $\boldsymbol{D}^3, \boldsymbol{D}^4$ dan seterusnya, maka diperoleh bentuk

$$\boldsymbol{D}^n = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & {\lambda_k}^n \end{bmatrix}$$

Substitusikan $\boldsymbol{D}^n$ ke $\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}t + \frac{\boldsymbol{D}^2t^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{D}^3t^3}{3!} + \cdots]\boldsymbol{A}^{-1}$ diperoleh

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{{\lambda_1}^2t^2}{2!} + \frac{{\lambda_1}^3t^3}{3!} + \cdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 t + \frac{{\lambda_2}^2t^2}{2!} + \frac{{\lambda_2}^3t^3}{3!} + \cdots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \lambda_k t + \frac{{\lambda_k}^2t^2}{2!} + \frac{{\lambda_k}^3t^3}{3!} + \cdots \end{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}$$

Maka $\boldsymbol{P}(t)$ dapat ditulis

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}$$

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{D}t}\boldsymbol{A}^{-1} \qquad (2.18)$$

Dengan elemen-elemen matriks $\boldsymbol{P}(t)$ adalah

$$P_{ij}(t) = \sum_{n=1}^{k} a_{in}e^{d_n t}c_{nj}$$

Dengan k adalah banyak *state*, a_{in} adalah entri (i, j) dari matriks $\boldsymbol{A}$ dan c_{nj} adalah entri (i, j) dari matriks $\boldsymbol{A}^{-1}$. Dengan demikian, permasalahan mencari fungsi peluang transisi diganti dengan mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks *force of transition*.

BAB III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder, yaitu data cav (*coronary allograft vasculopathy*). cav adalah data komplikasi jangka panjang dari transplantasi jantung, komplikasi ini akan muncul ketika pembuluh darah yang memasok jantung yang ditransplantasi secara bertahap menyempit dan membatasi aliran darahnya, yang selanjutnya menyebabkan kerusakan otot jantung atau kematian mendadak. cav ini satu set contoh data diambil dari penerima transplantasi jantung yang disediakan dengan msm, data sudah tersedia pada program R. R adalah bahasa pemrograman dan perangkat lunak untuk analisis statistika.

3.2 Paket R

Paket R yang digunakan dalam penelitian ini adalah paket msm. msm adalah paket fungsi untuk pemodelan multi state menggunakan perangkat lunak statistik R. Fungsi msm mengimplementasikan estimasi kemungkinan maksimum untuk Markov multi-state dalam waktu terus menerus. Saya menggambarkan penggunaannya dengan serangkaian data dari pemantauan pasien transplantasi jantung. Cara untuk menginstal paket msm pada komputer yang terhubung ke Internet adalah dengan menjalankan perintah R:

install.packages(“msm”)

Ini mengunduh msm dari CRAN dari paket R dan menginstalnya ke pustaka sistem R.

3.3 Langkah-langkah Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian tentang “Peluang Transisi Dan Bertahan Hidup Empat State Model *Multi State* dengan Matriks *Force Of Transition*” sebagai berikut:

a. Studi Literatur

Langkah pertama yang dilakukan adalah mencari studi literatur. Studi literatur dilakukan untuk mendapatkan informasi dari buku, jurnal dan skripsi yang terkait.

b. Pengambilan Data

Data dalam penelitian ini menggunakan data cav.

c. Membuat matriks transisi dari empat *state* model

Dari empat *state* model dibuat bentuk perpindahan *state* yang mungkin sehingga dapat diketahui berapa transisi yang mungkin terjadi dalam model tersebut dan matriks transisi dari model tersebut.

d. Membuat Matriks *Force of Transition* untuk empat *state* model.

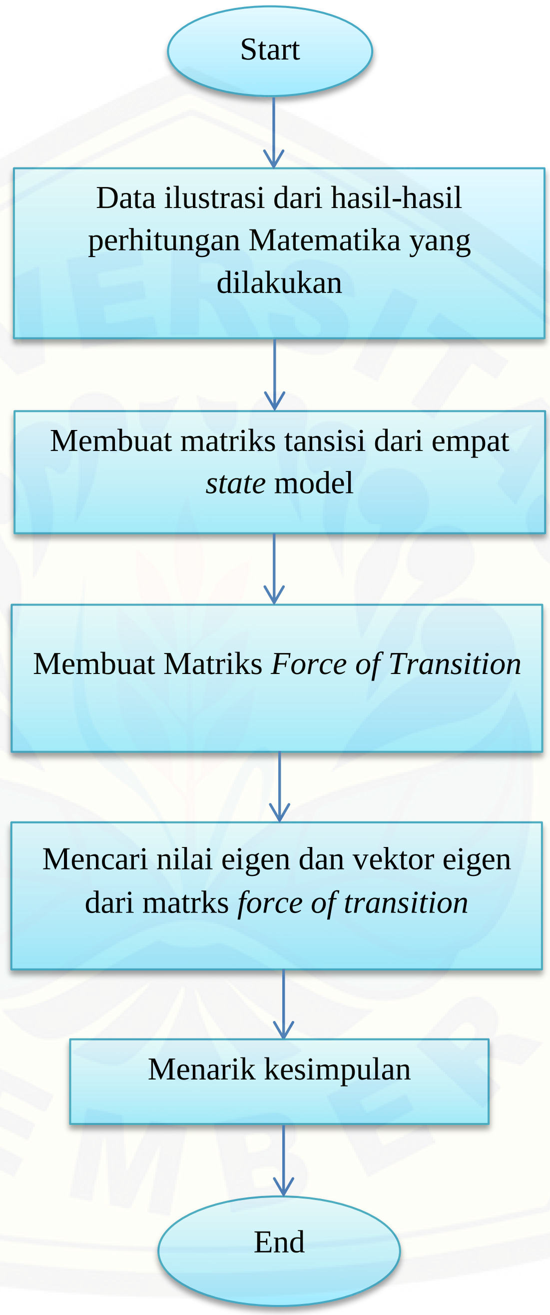
e. Mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matrks *force of transition* yang berhubungan dengan empat *state* model.

f. Dari nilai eigen dan vektor eigen yang telah diketahui dapat dicari peluang transisi dan juga peluang bertahan hidup dari empat *state* model.

g. Menarik kesimpulan tentang peluang bertahan hidup dari suatu individu pada empat *state* model dengan menggunakan metode matriks *force of transition.*

h. Selesai

3.4 Flowchart



BAB V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Dalam penelitian ini telah berhasil dihasilkan cara menghitung peluang transisi dan peluang bertahan hidup dengan menggunakan metode matriks *force of transition* khususnya dengan empat *state* model. Peluang transisi dicari dengan menggunakan metode matriks *force of transition* yang entrinya adalah nilai *force of transition* (nilai peluang perubahan sesaat) dari suatu *state* ke *state* lainnya. Peluang bertahan hidup dari suatu individu dapat ditentukan dengan menggunakan metode matriks *force of transition*, untuk menentukan peluang bertahan hidup dari suatu individu pria/wanita jika individu tersebut baru berada pada *state* 1 pindah ke *state* 2 maka nilai peluang bertahan hidup dengan metode matriks *force of transition* pada t=10 adalah 0,9995513 dan jika individu pria/wanita tersebut berada pada *state* 2 pindah ke *state* 3 maka nilai peluang bertahan hidup dengan metode matriks force of transition pada t=10 adalah 0,9998371, yang artinya peluang bertahan hidupnya tinggi.

5.2 Saran

1. Penelitian ini dapat dikembangkan lagi dengan membandingkan perbedaan antara nilai peluang bertaha hidup yang didapatkan dari metode matriks *force of transition* dengan nilai peluang bertahan hidup dari tabel data suatu penyakit yang mempunyai 4 state.
2. Penelitian ini dapat dikembangkan dengan mencari peluang transisi dan peluang bertahan hidup dari model Markov yang melibatkan lebih dari 4 state.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. and Rorres, C, 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi kedelapan Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Billingsley, P, 1994. *Probability and Measure*. New York: John Wiley and Sons.

Hadi, F, 2013. *Penentuan Peluang Transisi Model Select Ultimate Mortality Menggunakan Metode Matriks Force of Transition*. Bogor: Institut Pertanian Bogor.

Haryono, 1995. *Proses Stokastik Terapan.* Institut Teknologi Sepuluh November.

Hillier, F. S. and Lieberman, G. J, 2008. *Introduction to Operation Research* 8^{th} *Edition Jilid 2.* Yogyakarta: Penerbit Andi.

Imrona, M, 2009. *Aljabar Linear Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Jones, B, 1994. *Journal : Actuarial Calculation Using a Markov Model : Transactions of Society of Actuaries.* Volume 48: hal 227-250.

Kusumawati, R., 2010. *Model Markov Multi Status Untuk Menetukan Premi Asuransi Perawatan Jangka Panjang*. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, (Tesis).

Leon, S. J, 1998. *Aljabar Linear dan Aplikasinya* (diterjemahkan oleh: Alit Bondan). Jakarta: Erlangga.

Meira Machado, L., Una Alvarez, J., Cadarso Suarez, C., and Andersen, P.K., 2009. *NIH Public Access, Multi-state Model for the Analysis of Time-to-Event Data*, *Stat Methods Med Res*., 18:195-222.

Stewart, J, 2003. *Kalkulus Edisi Keempat Jilid 2* (diterjemahkan oleh: Susila dan Gunawan). Jakarta: Erlangga.

Sudarmo, 2015. *Menentukan Matriks Peluang Transisi untuk Waktu Okupansi Menggunakan transformasi Laplace Dan Matriks Eksponensial*. Universitas Diponegoro.

Sunusi, N, 2014. *Buku Ajar Proses Stokastik*. Universitas Hasanudin FMIPA Prodi Statistika.

Syafriandi, 1998. *Pendugaan Matriks Peluang Transisi dari Rantai Markov dengan Prosedur Pendugaan Bayes Empiris dan Metode Kemungkinan Maksimum (Contoh Penerapan untuk Prakiraan Cuaca Harian Propinsi Sumatera Barat).* Institut Pertanian Bogor.

Tijms, H, 2003. *A First Course in Stochastic Models.* England: John Wiley and Sons.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Pembuktian Lema 2.1 (Sifat *force of transition*)

Akan dibuktikan $\sum_{j=1}^{N} \mu_{ij}(t) = 0$, untuk $i = 1,2, \dots N$ dan $t \geq 0$

Bukti :

$\sum_{j=1}^{N} \mu_{ij}(t) = \mu_{i1}(t) + \mu_{i2}(t) + \mu_{ii}(t) + \cdots + \mu_{iN}(t)$

$= \lim_{h\to 0} \frac{P_{i1}(t,t+h)-P_{i1}(t,t)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{P_{i2}(t,t+h)-P_{i2}(t,t)}{h} + \cdots + \lim_{h\to 0} \frac{P_{ii}(t,t+h)-P_{ii}(t,t)}{h} + \cdots + \lim_{h\to 0} \frac{P_{iN}(t,t+h)-P_{iN}(t,t)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{P_{i1}(t,t+h)-P_{i1}(t,t)+P_{i2}(t,t+h)-P_{i2}(t,t)+\cdots}{h} + \frac{P_{ii}(t,t+h)-P_{ii}(t,t)+\cdots+P_{iN}(t,t+h)-P_{iN}(t,t)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{P_{i1}(t,t+h)+P_{i2}(t,t+h)+\cdots+P_{ii}(t,t+h)+\cdots+P_{iN}(t,t+h)}{h} - \frac{P_{i1}(t,t)+P_{i2}(t,t)+\cdots+P_{ii}(t,t)+\cdots+P_{iN}(t,t)}{h}$

Berdasarkan sifat pada Lema 2.1, maka persamaan terakhir di atas menjadi

$\sum_{j=1}^{N} \mu_{ij}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1-(0+0+\cdots+1+\cdots+0)}{h} = 0$

Terbukti

Lampiran 2 Pembuktian $\boldsymbol{P}(t) = e^{Qt}$

Diketahui persamaan Kolmogorov maju dalam bentuk matriks $\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}$ dengan nilai awal $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{I}$.

Akan dibuktikan solusi dari persamaan tersebut adalah $\boldsymbol{P}(t) = e^{Qt}$.

Misal $\boldsymbol{P}(t) = \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & P_{13}(t) & P_{14}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) & P_{23}(t) & P_{24}(t) \\ P_{31}(t) & P_{32}(t) & P_{33}(t) & P_{34}(t) \\ P_{41}(t) & P_{42}(t) & P_{43}(t) & P_{44}(t) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & P_{13}(t) & P_{14}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) & P_{23}(t) & P_{24}(t) \\ P_{31}(t) & P_{32}(t) & P_{33}(t) & P_{34}(t) \\ P_{41}(t) & P_{42}(t) & P_{43}(t) & P_{44}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a' & b' & c' & d' \\ e' & f' & g' & h' \\ i' & j' & k' & l' \\ m' & n' & o' & p' \end{bmatrix}$$

Dengan

$a' = P_{11}(t)a + P_{12}(t)e + P_{13}(t)i + P_{14}(t)m$

$b' = P_{11}(t)b + P_{12}(t)f + P_{13}(t)j + P_{14}(t)n$

$c' = P_{11}(t)c + P_{12}(t)g + P_{13}(t)k + P_{14}(t)o$

$d' = P_{11}(t)d + P_{12}(t)h + P_{13}(t)l + P_{14}(t)p$

$e' = P_{21}(t)a + P_{22}(t)e + P_{23}(t)i + P_{24}(t)m$

$f' = P_{21}(t)b + P_{22}(t)f + P_{23}(t)j + P_{24}(t)n$

$g' = P_{21}(t)c + P_{22}(t)g + P_{23}(t)k + P_{24}(t)o$

$h' = P_{21}(t)d + P_{22}(t)h + P_{23}(t)l + P_{24}(t)p$

$i' = P_{31}(t)a + P_{32}(t)e + P_{33}(t)i + P_{34}(t)m$

$j' = P_{31}(t)b + P_{32}(t)f + P_{33}(t)j + P_{34}(t)n$

$k' = P_{31}(t)c + P_{32}(t)g + P_{33}(t)k + P_{34}(t)o$

$l' = P_{31}(t)d + P_{32}(t)h + P_{33}(t)l + P_{34}(t)p$

$m' = P_{41}(t)a + P_{42}(t)e + P_{43}(t)i + P_{44}(t)m$

$n' = P_{41}(t)b + P_{42}(t)f + P_{43}(t)j + P_{44}(t)n$

$o' = P_{41}(t)c + P_{42}(t)g + P_{43}(t)k + P_{44}(t)o$

$p' = P_{41}(t)d + P_{42}(t)h + P_{43}(t)l + P_{44}(t)p$

Dari matriks diatas diperoleh

$$P'_{11}(t) = P_{11}(t)a + P_{12}(t)e + P_{13}(t)i + P_{14}(t)m = a'$$

$$P'_{12}(t) = P_{11}(t)b + P_{12}(t)f + P_{13}(t)j + P_{14}(t)n = b'$$

$$P'_{13}(t) = P_{11}(t)c + P_{12}(t)g + P_{13}(t)k + P_{14}(t)o = c'$$

$$P'_{14}(t) = P_{11}(t)d + P_{12}(t)h + P_{13}(t)l + P_{14}(t)p = d'$$

$$P'_{21}(t) = P_{21}(t)a + P_{22}(t)e + P_{23}(t)i + P_{24}(t)m = e'$$

$$P'_{22}(t) = P_{21}(t)b + P_{22}(t)f + P_{23}(t)j + P_{24}(t)n = f'$$

$$P'_{23}(t) = P_{21}(t)c + P_{22}(t)g + P_{23}(t)k + P_{24}(t)o = g'$$
$$P'_{24}(t) = P_{21}(t)d + P_{22}(t)h + P_{23}(t)l + P_{24}(t)p = h'$$
$$P'_{31}(t) = P_{31}(t)a + P_{32}(t)e + P_{33}(t)i + P_{34}(t)m = i'$$
$$P'_{32}(t) = P_{31}(t)b + P_{32}(t)f + P_{33}(t)j + P_{34}(t)n = j'$$
$$P'_{33}(t) = P_{31}(t)c + P_{32}(t)g + P_{33}(t)k + P_{34}(t)o = k'$$
$$P'_{34}(t) = P_{31}(t)d + P_{32}(t)h + P_{33}(t)l + P_{34}(t)p = l'$$
$$P'_{41}(t) = P_{41}(t)a + P_{42}(t)e + P_{43}(t)i + P_{44}(t)m = m'$$
$$P'_{42}(t) = P_{41}(t)b + P_{42}(t)f + P_{43}(t)j + P_{44}(t)n = n'$$
$$P'_{43}(t) = P_{41}(t)c + P_{42}(t)g + P_{43}(t)k + P_{44}(t)o = o'$$
$$P'_{44}(t) = P_{41}(t)d + P_{42}(t)h + P_{43}(t)l + P_{44}(t)p = p'$$

Turunan kedua dari $\boldsymbol{P}(t)$

$$P''_{11}(t) = P'_{11}(t)a + P'_{12}(t)e + P'_{13}(t)i + P'_{14}(t)m = a'a + b'e + c'i + d'm$$
$$P''_{12}(t) = P'_{11}(t)b + P'_{12}(t)f + P'_{13}(t)j + P'_{14}(t)n = a'b + b'f + c'j + d'n$$
$$P''_{13}(t) = P'_{11}(t)c + P'_{12}(t)g + P'_{13}(t)k + P'_{14}(t)o = a'c + b'g + c'k + d'o$$
$$P''_{14}(t) = P'_{11}(t)d + P'_{12}(t)h + P'_{13}(t)l + P'_{14}(t)p = a'd + b'h + c'l + d'p$$
$$P''_{21}(t) = P'_{21}(t)a + P'_{22}(t)e + P'_{23}(t)i + P'_{24}(t)m = e'a + f'e + g'i + h'm$$
$$P''_{22}(t) = P'_{21}(t)b + P'_{22}(t)f + P'_{23}(t)j + P'_{24}(t)n = e'b + f'f + g'j + h'n$$
$$P''_{23}(t) = P'_{21}(t)c + P'_{22}(t)g + P'_{23}(t)k + P'_{24}(t)o = e'c + f'g + g'k + h'o$$
$$P''_{24}(t) = P'_{21}(t)d + P'_{22}(t)h + P'_{23}(t)l + P'_{24}(t)p = e'd + f'h + g'l + h'p$$
$$P''_{31}(t) = P'_{31}(t)a + P'_{32}(t)e + P'_{33}(t)i + P'_{34}(t)m = i'a + j'e + k'i + l'm$$
$$P''_{32}(t) = P'_{31}(t)b + P'_{32}(t)f + P'_{33}(t)j + P'_{34}(t)n = i'b + j'f + k'j + l'n$$
$$P''_{33}(t) = P'_{31}(t)c + P'_{32}(t)g + P'_{33}(t)k + P'_{34}(t)o = i'c + j'g + k'k + l'o$$
$$P''_{34}(t) = P'_{31}(t)d + P'_{32}(t)h + P'_{33}(t)l + P'_{34}(t)p = i'd + j'h + k'l + l'p$$
$$P''_{41}(t) = P'_{41}(t)a + P'_{42}(t)e + P'_{43}(t)i + P'_{44}(t)m = m'a + n'e + o'i + p'm$$
$$P''_{42}(t) = P'_{41}(t)b + P'_{42}(t)f + P'_{43}(t)j + P'_{44}(t)n = m'b + n'f + o'j + p'n$$
$$P''_{43}(t) = P'_{41}(t)c + P'_{42}(t)g + P'_{43}(t)k + P'_{44}(t)o = m'c + n'g + o'k + p'o$$
$$P''_{44}(t) = P'_{41}(t)d + P'_{42}(t)h + P'_{43}(t)l + P'_{44}(t)p = m'd + n'h + o'l + p'p$$

$$\boldsymbol{P}''(t)=\begin{bmatrix} P''_{11}(t) & P''_{12}(t) & P''_{13}(t) & P''_{14}(t) \\ P''_{21}(t) & P''_{22}(t) & P''_{23}(t) & P''_{24}(t) \\ P''_{31}(t) & P''_{32}(t) & P''_{33}(t) & P''_{34}(t) \\ P''_{41}(t) & P''_{42}(t) & P''_{43}(t) & P''_{44}(t) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a'a+b'e+c'i+d'm & a'b+b'f+c'j+d'n & a'c+b'g+c'k+d'o & a'd+b'h+c'l+d'p \\ e'a+f'e+g'i+h'm & e'b+f'f+g'j+h'n & e'c+f'g+g'k+h'o & e'd+f'h+g'l+h'p \\ i'a+j'e+k'i+l'm & i'b+j'f+k'j+l'n & i'c+j'g+k'k+l'o & i'd+j'h+k'l+l'p \\ m'a+n'e+o'i+p'm & m'b+n'f+o'j+p'n & m'c+n'g+o'k+p'o & m'd+n'h+o'l+p'p \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a' & b' & c' & d' \\ e' & f' & g' & h' \\ i' & j' & k' & l' \\ m' & n' & o' & p' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{P}'(t)\boldsymbol{Q}$$

$$=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}^2$$

Dengan cara yang sama diperoleh $\boldsymbol{P}_{4\times4}{}^{(n)}(t)=\boldsymbol{P}^{(n-1)}(t)Q=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}^n$

Berdasarkan nilai awal $\boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{I}$, diperoleh $\boldsymbol{P}_{4\times4}{}^{(n)}(0)=\boldsymbol{P}(0)\boldsymbol{Q}^n=\boldsymbol{Q}^n$

Bentuk deret Taylor untuk $\boldsymbol{P}(t)$ di $t=0$ adalah

$$\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{P}(0)+\boldsymbol{P}'(0)t+\boldsymbol{P}''(0)t^2+\boldsymbol{P}'''(0)t^3+\cdots$$

$$=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}t+\frac{\boldsymbol{Q}^2t^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{Q}^3t^3}{3!}+\cdots$$

$$=e^{\boldsymbol{Q}t}$$

Terbukti.

Diketahui $\boldsymbol{P}(t)=e^{\boldsymbol{Q}t}$ dengan $e^{\boldsymbol{Q}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}t+\frac{\boldsymbol{Q}^2t^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{Q}^3t^3}{3!}+\cdots$

Akan dibuktikan $\boldsymbol{P}'(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}$

Misal $\boldsymbol{P}(t)=\begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & P_{13}(t) & P_{14}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) & P_{23}(t) & P_{24}(t) \\ P_{31}(t) & P_{32}(t) & P_{33}(t) & P_{34}(t) \\ P_{41}(t) & P_{42}(t) & P_{43}(t) & P_{44}(t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{Q}^2=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^2+be+ci+dm & ab+bf+cj+dn & ac+bg+ck+do & ad+bh+cl+dp \\ ea+fe+gi+hm & eb+ff+gj+hn & ec+fg+gk+ho & ed+fh+gl+hp \\ ia+je+ki+lm & ib+jf+kj+ln & ic+jg+kk+lo & id+jh+kl+lp \\ ma+ne+oi+pm & mb+nf+oj+pn & mc+ng+ok+po & md+nh+ol+pp \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a' & b' & c' & d' \\ e' & f' & g' & h' \\ i' & j' & k' & l' \\ m' & n' & o' & p' \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}^3=\boldsymbol{QQQ}=\boldsymbol{Q}^2\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} a' & b' & c' & d' \\ e' & f' & g' & h' \\ i' & j' & k' & l' \\ m' & n' & o' & p' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a'a+b'e+c'i+d'm & a'b+b'f+c'j+d'n & a'c+b'g+c'k+d'o & a'd+b'h+c'l+d'p \\ e'a+f'e+g'i+h'm & e'b+f'f+g'j+h'n & e'c+f'g+g'k+h'o & e'd+f'h+g'l+h'p \\ i'a+j'e+k'i+l'm & i'b+j'f+k'j+l'n & i'c+j'g+k'k+l'o & i'd+j'h+k'l+l'p \\ m'a+n'e+o'i+p'm & m'b+n'f+o'j+p'n & m'c+n'g+o'k+p'o & m'd+n'h+o'l+p'p \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}'(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}=e^{\boldsymbol{Q}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}t+\frac{\boldsymbol{Q}^2t^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{Q}^3t^3}{3!}+\cdots$$

$$\begin{bmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & P_{13}(t) & P_{14}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) & P_{23}(t) & P_{24}(t) \\ P_{31}(t) & P_{32}(t) & P_{33}(t) & P_{34}(t) \\ P_{41}(t) & P_{42}(t) & P_{43}(t) & P_{44}(t) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}t+\begin{bmatrix} a' & b' & c' & d' \\ e' & f' & g' & h' \\ i' & j' & k' & l' \\ m' & n' & o' & p' \end{bmatrix}\frac{t^2}{2!}$$

$$+\begin{bmatrix} a'a+b'e+c'i+d'm & a'b+b'f+c'j+d'n & a'c+b'g+c'k+d'o & a'd+b'h+c'l+d'p \\ e'a+f'e+g'i+h'm & e'b+f'f+g'j+h'n & e'c+f'g+g'k+h'o & e'd+f'h+g'l+h'p \\ i'a+j'e+k'i+l'm & i'b+j'f+k'j+l'n & i'c+j'g+k'k+l'o & i'd+j'h+k'l+l'p \\ m'a+n'e+o'i+p'm & m'b+n'f+o'j+p'n & m'c+n'g+o'k+p'o & m'd+n'h+o'l+p'p \end{bmatrix}\frac{t^3}{3!}$$

$$+\cdots$$

Dari persamaan matriks diatas didapat entri dari $\boldsymbol{P}(t)$ sebagai berikut

$$P_{11}(t)=1+at+a'\frac{t^2}{2!}+(a'a+b'e+c'i+d'm)\frac{t^3}{3!}+\cdots$$

$$P_{12}(t)=bt+b'\frac{t^2}{2!}+(a'b+b'f+c'j+d'n)\frac{t^3}{3!}+\cdots$$

$$P_{13}(t)=ct+c'\frac{t^2}{2!}+(a'c+b'g+c'k+d'o)\frac{t^3}{3!}+\cdots$$

$P_{14}(t) = dt + d'\frac{t^2}{2!} + (a'd + b'h + c'l + d'p)\frac{t^3}{3!} + \cdots$

$P_{21}(t) = et + e'\frac{t^2}{2!} + (e'a + f'e + g'i + h'm)\frac{t^3}{3!} + \cdots$

$P_{22}(t) = 1 + ft + f'\frac{t^2}{2!} + (e'b + f'f + g'j + h'n)\frac{t^3}{3!} + \cdots$

$P_{23}(t) = gt + g'\frac{t^2}{2!} + (e'c + f'g + g'k + h'o)\frac{t^3}{3!} + \cdots$

$P_{24}(t) = ht + h'\frac{t^2}{2!} + (e'd + f'h + g'l + h'p)\frac{t^3}{3!} + \cdots$

$P_{31}(t) = it + i'\frac{t^2}{2!} + (i'a + j'e + k'i + l'm)\frac{t^3}{3!} + \cdots$

$P_{32}(t) = jt + j'\frac{t^2}{2!} + (i'b + j'f + k'j + l'n)\frac{t^3}{3!} + \cdots$

$P_{33}(t) = 1 + kt + k'\frac{t^2}{2!} + (i'c + j'g + k'k + l'o)\frac{t^3}{3!} + \cdots$

$P_{34}(t) = lt + l'\frac{t^2}{2!} + (i'd + j'h + k'l + l'p)\frac{t^3}{3!} + \cdots$

$P_{41}(t) = mt + m'\frac{t^2}{2!} + (m'a + n'e + o'i + p'm)\frac{t^3}{3!} + \cdots$

$P_{42}(t) = nt + n'\frac{t^2}{2!} + (m'b + n'f + o'j + p'n)\frac{t^3}{3!} + \cdots$

$P_{43}(t) = ot + o'\frac{t^2}{2!} + (m'c + n'g + o'k + p'o)\frac{t^3}{3!} + \cdots$

$P_{44}(t) = 1 + pt + p'\frac{t^2}{2!} + (m'd + n'h + o'l + p'p)\frac{t^3}{3!} + \cdots$

Turunan pertama dari entri $\boldsymbol{P}(t)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} P'_{11}(t) &= a + 2a'\frac{t}{2!} + 3(a'a + b'e + c'i + d'm)\frac{t^2}{3!} + \cdots \\ &= a + a't + (a'a + b'e + c'i + d'm)\frac{t^2}{2!} + \cdots \\ P'_{12}(t) &= b + 2b'\frac{t}{2!} + 3(a'b + b'f + c'j + d'n)\frac{t^2}{3!} + \cdots \\ &= b + b't + (a'b + b'f + c'j + d'n)\frac{t^2}{2!} + \cdots \\ P'_{13}(t) &= c + 2c'\frac{t}{2!} + 3(a'c + b'g + c'k + d'o)\frac{t^2}{3!} + \cdots \\ &= c + c't + (a'c + b'g + c'k + d'o)\frac{t^2}{2!} + \cdots \end{aligned}$$

$$P'_{14}(t) = d + 2d'\frac{t}{2!} + 3(a'd + b'h + c'l + d'p)\frac{t^2}{3!} + \cdots$$

$$= d + d't + (a'd + b'h + c'l + d'p)\frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$P'_{21}(t) = e + 2e'\frac{t}{2!} + 3(e'a + f'e + g'i + h'm)\frac{t^2}{3!} + \cdots$$

$$= e + e't + (e'a + f'e + g'i + h'm)\frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$P'_{22}(t) = f + 2f'\frac{t}{2!} + 3(e'b + f'f + g'j + h'n)\frac{t^2}{3!} + \cdots$$

$$= f + f't + (e'b + f'f + g'j + h'n)\frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$P'_{23}(t) = g + 2g'\frac{t}{2!} + 3(e'c + f'g + g'k + h'o)\frac{t^2}{3!} + \cdots$$

$$= g + g't + (e'c + f'g + g'k + h'o)\frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$P'_{24}(t) = h + 2h'\frac{t}{2!} + 3(e'd + f'h + g'l + h'p)\frac{t^2}{3!} + \cdots$$

$$= h + h't + (e'd + f'h + g'l + h'p)\frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$P'_{31}(t) = i + 2i'\frac{t}{2!} + 3(i'a + j'e + k'i + l'm)\frac{t^2}{3!} + \cdots$$

$$= i + i't + (i'a + j'e + k'i + l'm)\frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$P'_{32}(t) = j + 2j'\frac{t}{2!} + 3(i'b + j'f + k'j + l'n)\frac{t^2}{3!} + \cdots$$

$$= j + j't + (i'b + j'f + k'j + l'n)\frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$P'_{33}(t) = k + 2k'\frac{t}{2!} + 3(i'c + j'g + k'k + l'o)\frac{t^2}{3!} + \cdots$$

$$= k + k't + (i'c + j'g + k'k + l'o)\frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$P'_{34}(t) = l + 2l'\frac{t}{2!} + 3(i'd + j'h + k'l + l'p)\frac{t^2}{3!} + \cdots$$

$$= l + l't + (i'd + j'h + k'l + l'p)\frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$P'_{41}(t) = m + 2m'\frac{t}{2!} + 3(m'a + n'e + o'i + p'm)\frac{t^2}{3!} + \cdots$$

$$= m + m't + (m'a + n'e + o'i + p'm)\frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$P'_{42}(t) = n + 2n'\frac{t}{2!} + 3(m'b + n'f + o'j + p'n)\frac{t^2}{3!} + \cdots$$

$$= n + n't + (m'b + n'f + o'j + p'n)\frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$P'_{43}(t) = o + 2o'\frac{t}{2!} + 3(m'c + n'g + o'k + p'o)\frac{t^2}{3!} + \cdots$$

$$= o + o't + (m'c + n'g + o'k + p'o)\frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$P'_{44}(t) = p + 2p'\frac{2}{2!} + 3(m'd + n'h + o'l + p'p)\frac{t^2}{3!} + \cdots$$

$$= p + p't + (m'd + n'h + o'l + p'p)\frac{t^2}{2!} + \cdots$$

Turunan pertama dari entri $\boldsymbol{P}(t)$ dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} P'_{11}(t) & P'_{12}(t) & P'_{13}(t) & P'_{14}(t) \\ P'_{21}(t) & P'_{22}(t) & P'_{23}(t) & P'_{24}(t) \\ P'_{31}(t) & P'_{32}(t) & P'_{33}(t) & P'_{34}(t) \\ P'_{41}(t) & P'_{42}(t) & P'_{43}(t) & P'_{44}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' & c' & d' \\ e' & f' & g' & h' \\ i' & j' & k' & l' \\ m' & n' & o' & p' \end{bmatrix} t$$

$$+ \begin{bmatrix} a'a + b'e + c'i + d'm & a'b + b'f + c'j + d'n & a'c + b'g + c'k + d'o & a'd + b'h + c'l + d'p \\ e'a + f'e + g'i + h'm & e'b + f'f + g'j + h'n & e'c + f'g + g'k + h'o & e'd + f'h + g'l + h'p \\ i'a + j'e + k'i + l'm & i'b + j'f + k'j + l'n & i'c + j'g + k'k + l'o & i'd + j'h + k'l + l'p \\ m'a + n'e + o'i + p'm & m'b + n'f + o'j + p'n & m'c + n'g + o'k + p'o & m'd + n'h + o'l + p'p \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!}$$

$$+ \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} a^2 + be + ci + dm & ab + bf + cj + dn & ac + bg + ck + do & ad + bh + cl + dp \\ ea + fe + gi + hm & eb + ff + gj + hn & ec + fg + gk + ho & ed + fh + gl + hp \\ ia + je + ki + lm & ib + jf + kj + ln & ic + jg + kk + lo & id + jh + kl + lp \\ ma + ne + oi + pm & mb + nf + oj + pn & mc + ng + ok + po & md + nh + ol + pp \end{bmatrix} t$$

$$+ \begin{bmatrix} a' & b' & c' & d' \\ e' & f' & g' & h' \\ i' & j' & k' & l' \\ m' & n' & o' & p' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$=$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} t +$$

$$\begin{bmatrix} a^2 + be + ci + dm & ab + bf + cj + dn & ac + bg + ck + do & ad + bh + cl + dp \\ ea + fe + gi + hm & eb + ff + gj + hn & ec + fg + gk + ho & ed + fh + gl + hp \\ ia + je + ki + lm & ib + jf + kj + ln & ic + jg + kk + lo & id + jh + kl + lp \\ ma + ne + oi + pm & mb + nf + oj + pn & mc + ng + ok + po & md + nh + ol + pp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} +$$

$\cdots$

$=$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} t +$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} \right.$$

$$\left. + \cdots \right\} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}'(t) = \left\{\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q}t + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}\frac{t^2}{2!}\right\}\boldsymbol{Q}$$
$$= \left\{\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q}t + \boldsymbol{Q}^2\frac{t^2}{2!}\right\}\boldsymbol{Q}$$
$$= e^{\boldsymbol{Q}t}\boldsymbol{Q}$$
$$= \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}$$

Terbukti.

Lampiran 3 R untuk penghitungan peluang dengan data cav

```
library("msm")
cav[1:21,]
statetable.msm(state, PTNUM, data=cav)
Q  <-  rbind ( c(0, 0.25, 0, 0.25),+ c(0.166, 0, 0.166, 0.166),+ c(0, 0.25, 0, 0.25),+ c(0, 0, 0, 0) )
Q.crude <- crudeinits.msm(state ~ years, PTNUM, data=cav, qmatrix=Q)
cav.msm <- msm( state ~ years, subject=PTNUM, data = cav,qmatrix = Q, deathexact = 4)
cav.msm
pmatrix.msm(cav.msm, t=10)
m12=0.09750021
m13=0.08787255
m14=0.5052207
m23=0.07794394
m24=0.6848780
m34=0.8646477
a1=m12+m13+m14
a2=m23+m24
a3=m12/(m12+m13+m14-m23-m24)
a4=m23/(m23+m24-m34)
p1=(exp((-a1)*12))+(((exp((-a2)*12))-(exp((-a1)*12))))*a3
```

```
p1
1-p1
p2=(exp((-a2)*12))+((exp((-m34)*12))-(exp((-a2)*12)))*a4
p2
1-p2
```