PEWARNAAN *PACKING* PADA FAMILI GRAF POHON DAN GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI TITIK

SKRIPSI

Oleh

Sri Moeliyana Citra
NIM 170210101072

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2021

PEWARNAAN *PACKING* PADA FAMILI GRAF POHON DAN GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI TITIK

SKRIPSI

Oleh

Sri Moeliyana Citra
NIM 170210101072

Dosen Pembimbing 1	: Dr.Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.
Dosen Pembimbing 2	: Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si.
Dosen Penguji 1	: Prof. Drs.Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D.
Dosen Penguji 2	: Ermita Rizki Albirri, S.Pd., M.Si.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2021

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, atas kebesaran itu kupersembahkan skripsi ini sebagai ungkapan kebahagiaan dan rasa terima kasih kepada:

1. Ayahanda Mulyadi dan Ibunda Siti Rofiko telah membesarkanku dengan penuh kasih sayang, kesabaran dan perhatian. Terimakasih telah mendukung dan memberikan doa, usaha dan segala yang selalu diberikan untuk putrimu ini hingga detik ini dan detik-detik berikutnya;
2. Seluruh keluarga besar dan kerabat yang senantiasa mendukung segala usaha yang telah dilakukan serta selalu mendoakan segala hal yang terbaik;
3. Ibu Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ibu Robiatul Adawiyah,S.Pd, M.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota yang senantiasa meluangkan waktu dalam memberikan pengarahan dan bimbingan hingga terselesaikannya penulisan skripsi ini;
4. Bapak Prof.Drs.Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D. selaku Dosen Penguji I dan Ibu Ermita Rizki Albirri, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
5. Para guru dan seluruh Bapak/Ibu dosen yang telah membimbing, memotivasi, dan segala usaha yang telah dilakukan dalam penyelesaian skripsi ini beserta almamater sekolah yang telah memberikan banyak ilmu dan suasana kekeluargaan di setiap masanya;
6. Teman-teman pejuang graf dan para pecinta graf lain yang tergabung dalam CGANT yang telah membagikan ilmu dan pengalaman berharga serta mengajarkan bahwa sebuah perbedaan bukanlah alasan untuk tidak saling membantu;
7. Seluruh keluarga besar Mathematic Students Club (MSC), terutama keluarga besar Calculus angkatan 2017 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember yang senantiasa mendukung dan berjuang bersama dalam segala usaha dan doa yang telah dilalui. Semoga selalu dalam lindungan Tuhan dan semoga tercapai kesuksesan dunia dan akhirat;
8. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

HALAMAN MOTTO

"Keinginan merupakan kekuatan besar yang mampu mengalahkan rasa takut dan sifat malas untuk meraih sukses"
(Slamin)

"Pada prinsipnya kita bisa melakukan apapun yang orang lain bisa, hanya beda tingkatannya. Resepnya suka, biasa, dan bisa"
(Slamin)

"Jika nasib adalah titik, dan usaha adalah sisi; maka hidup adalah sebuah graf. Tantangan kita adalah bagaimana merangkai titik dan sisi tersebut agar tercipta sebuah graf yang keindahannya dapat dinikmati bersama"
(Slamin)

"Ubah pikiranmu dan kau dapat mengubah duniamu"
(Norman Vincent Peale)

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Sri Moeliyana Citra

NIM : 170210101072

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul ”Pewarnaan *Packing* pada Famili Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 15 Januari 2021

Yang menyatakan,

Sri Moeliyana Citra

NIM. 170210101072

HALAMAN PEMBIMBINGAN

SKRIPSI

PEWARNAAN *PACKING* PADA FAMILI GRAF POHON DAN GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI TITIK

Oleh

Sri Moeliyana Citra
NIM 170210101072

Pembimbing

Dosen Pembimbing 1 : Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.
Dosen Pembimbing 2 : Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MIPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS JEMBER
2021

HALAMAN PENGAJUAN

PEWARNAAN *PACKING* PADA FAMILI GRAF POHON DAN GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI TITIK

Diajukan untuk dipertahankan di depan Tim Penguji sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaikan Program Pendidikan Sarjana Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Oleh:

Nama : Sri Moeliyana Citra
NIM : 170210101072
Tempat dan Tanggal Lahir : Situbondo, 21 Maret 1999
Jurusan / Program Studi : Pendidikan MIPA / P. Matematika

Disetujui oleh:

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr.Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.	Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si.
NIP. 19760502 200604 2 001	NIP. 19920731 201903 2 015

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi berjudul : ”**Pewarnaan *Packing* pada Famili Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik**” telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan pada:

Hari : Jumat

Tanggal : 15 Januari 2021

Fasilitas : Link Aplikasi Zoom Meeting

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Dr.Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd. NIP. 19760502 200604 2 001	Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si. NIP. 19920731 201903 2 015
Anggota I,	Anggota II,
Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D. NIP. 19670420 199201 1 001	Ermita Rizki Albirri, S.Pd., M.Si. NIP. 760017209

Mengetahui,
Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan
Universitas Jember

Prof. Dr. Bambang Soepeno, M.Pd.
NIP. 19600612 198702 1 001

RINGKASAN

Pewarnaan *Packing* pada Famili Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik; Sri Moeliyana Citra, 170210101072; 2021: 56 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Topik graf pada penelitian ini adalah pewarnaan titik. Pewarnaan titik merupakan pemberian warna pada setiap titik dimana titik yang bertetangga harus mendapatkan warna yang berbeda. Bilangan asli seperti $\{1, 2, 3, ..., k\}$ menunjukkan warna seminimal mungkin pada pewarnaan titik suatu graf G yang disebut sebagai bilangan kromatik *chromatic number* dan dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Pada penelitian ini menggunakan salah satu jenis pewarnaan titik yaitu pewarnaan *packing*. Pewarnaan *packing* merupakan pemberian warna pada titik misal terdapat dua buah titik yang tidak bertetangga yaitu titik x dan y diperoleh $c(x) = c(y) = i$ dan $d(x, y) \geq i + 1$. Bilangan asli yang menunjukkan warna seminimal mungkin pada pewarnaan *packing* suatu graf G disebut bilangan kromatik *packing* dan dinotasikan dengan $\chi_\rho(G)$.

Kemudian jenis penelitian ini adalah penelitian eksploratif. Latar belakang digunakannya jenis penelitian eksploratif adalah proses dari awal hingga akhir bertujuan untuk menemukan hal baru yang harapannya dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya sedangkan metode penelitian yang digunakan adalah metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksi pola. Kedua metode tersebut mendukung proses penelitian ini karena untuk mendapatkan bilangan kromatik *packing* dibutuhkan proses pencarian pola pewarnaan *packing* setelah diperoleh bilangan kromatik *packing* maka membuat dan membuktikan teorema bilangan kromatik *packing*.

Penelitian ini menghasilkan lima teorema tentang bilangan kromatik *packing* pada famili graf pohon dan tiga teorema tentang bilangan kromatik *packing* pada graf hasil operasi amalgamasi titik. Berikut teorema yang dihasilkan pada penelitian ini:

Teorema 1 Bilangan kromatik *packing* pada graf *centipede* Cp_n untuk $n \geq 2$ adalah

$$\chi_\rho(Cp_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 2,3 \\ 4, & \text{untuk } 4 \leq n \leq 7 \\ 5, & \text{untuk } n \geq 8 \end{cases}$$

Teorema 2 Bilangan kromatik *packing* pada graf kembang api $F_{m,n}$ untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ adalah

$$\chi_\rho(F_{m,n}) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } m = 2,3 \\ 4, & \text{untuk } 4 \leq m \leq 7 \\ 5, & \text{untuk } m \geq 8 \end{cases}$$

Teorema 3 Bilangan kromatik *packing* pada graf sapu B_d^n untuk $d \geq 3$ dan $n - d \geq 2$ adalah 3.

Teorema 4 Bilangan kromatik *packing* pada graf bintang ganda $S_{m,n}$ untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ adalah 3.

Teorema 5 Bilangan kromatik *packing* pada graf pohon pisang $B_{m,n}$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah 3.

Teorema 6 Bilangan kromatik *packing* pada graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $amal(P_n, v, m)$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ adalah

$$\chi_\rho(amal(P_n, v, m)) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } n = 2 \text{ dan } m \geq 2 \\ 3, & \text{untuk } n > 2 \text{ dan } m \geq 2 \end{cases}$$

Teorema 7 Bilangan kromatik *packing* pada graf hasil operasi amalgamasi titik graf sapu $amal(B_d^n, v, m)$ untuk $d \geq 3, n - d \geq 2$ dan $m \geq 2$ adalah 3.

Teorema 8 Bilangan kromatik *packing* pada graf hasil operasi amalgamasi titik graf bintang $amal(S_n, v, m)$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah

$$\chi_\rho(amal(S_n, v, m)) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m \geq 2 \text{ dan } n = 3 \\ m+1, & \text{untuk } m \geq 2 \text{ dan } n > 3 \end{cases}$$

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ”Pewarnaan *Packing* pada Famili Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA FKIP Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember;
4. Ketua Laboratorium Matematika Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan MIPA FKIP Universitas Jember;
5. Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing dan memberikan ilmu;
6. Dosen Pembimbing dan Dosen Penguji yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian serta memberikan perbaikan dalam penulisan skripsi ini;
7. Dosen dan Karyawan FKIP Universitas Jember;
8. Teman seperjuangan riset grup graf (Q. A’yun., Indah L.M., M. Yusuf R., dan Umi A. A.);
9. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, 15 Januari 2021

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$V(G)$	=	Himpunan titik pada graf G
$E(G)$	=	Himpunan sisi pada graf G
$\|V(G)\|$	=	*Order* pada graf G
$\|E(G)\|$	=	*Size* pada graf G
$d(v)$	=	Derajat titik v pada graf G
(u, v)	=	Sisi yang dihubungkan oleh titik u dan v
diam(G)	=	Diameter dari graf G
Cp_n	=	Graf *centipede* dengan $2n$ titik
$F_{m,n}$	=	Graf kembang api dengan m salinan graf bintang S_n
B_d^n	=	Graf sapu dengan n titik dan d titik graf lintasan
$S_{m,n}$	=	Graf bintang ganda dengan $m+1$ dan $n+1$ titik
$B_{m,n}$	=	Graf pohon pisang dengan m salinan graf bintang S_n terhadap titik baru y
P_n	=	Graf lintasan dengan n titik
S_n	=	Graf bintang dengan $n+1$ titik
$amal(G, v_o, n)$	=	Graf hasil operasi amalgamasi titik graf G
$amal(P_n, v, m)$	=	Graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan P_n
$amal(B_d^n, v, m)$	=	Graf hasil operasi amalgamasi titik graf sapu B_d^n
$amal(S_n, v, m)$	=	Graf hasil operasi amalgamasi titik graf bintang S_n
$\chi(G)$	=	Bilangan kromatik dari pewarnaan pada graf G
$\chi_\rho(G)$	=	Bilangan kromatik dari pewarnaan graf *packing* pada graf G

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada kehidupan sehari-hari tidak terlepas dari adanya masalah. Permasalahan yang kompleks dapat diselesaikan menggunakan kajian pada matematika diskrit yaitu teori graf. Teori graf merepresentasi visual suatu objek diskrit sebagai titik dan hubungan objek diskrit direpresentasikan sebagai sisi.

Salah satu contoh permasalahan di kehidupan sehari-hari yaitu, pembuatan jadwal ujian beberapa mahasiswa dan dosen yang optimal, sedemikian sehingga tidak terdapat waktu yang berbenturan satu sama lainnya. Penyelesaian dari masalah tersebut memerlukan kajian teori graf. Berdasarkan permasalahan tersebut diperoleh bahwa himpunan dosen dan mahasiswa direpresentasikan sebagai titik dan hubungan mahasiswa dengan dosen direpresentasikan sebagai sisi. Kajian teori graf yang dapat menyelesaikan permasalahan tersebut adalah pewarnaan graf.

Pewarnaan graf adalah salah satu bentuk pelabelan graf dengan memberikan warna pada elemen-elemen graf dengan syarat elemen yang bertetangga tersebut harus memiliki warna yang berbeda (Chartrand dkk, 2019:3). Bentuk penyelesaian permasalahan pembuatan jadwal tersebut yaitu memberikan warna pada sisi sedemikian sehingga tidak ada dua sisi yang terkait dengan satu titik yang sama berwarna sama (Dafik, 2015:18-19). Maksud dua sisi saling terkait yaitu dua sisi saling bertetangga karena dua sisi tersebut dihubungkan oleh sebuah titik.

Pada pewarnaan graf terdapat pewarnaan titik. Pewarnaan titik adalah pemberian warna pada titik untuk setiap titik yang bertetangga mendapatkan warna yang berbeda (Levin, 2019:268). Bilangan asli yang menunjukkan warna seminimal mungkin pada pewarnaan titik suatu graf yang disebut sebagai bilangan kromatik atau *chromatic number* dan dinotasikan dengan $\chi(G)$ (Balakrishnan dan Ranganathan, 2012:144).

Berdasarkan definisi tersebut diperoleh dua titik yang bertetangga atau berjarak satu memiliki warna titik yang berbeda.

Jarak (*radius*) adalah panjang lintasan terpendek antara titik u dan titik v yang dinotasikan dengan $d(u, v)$ (Bondy dan Murty, 1976:16). Jadi, jarak merupakan panjang dari suatu barisan berselang-seling antara titik dan sisi pada suatu graf serta tidak terdapat pengulangan sisi. Jenis pewarnaan titik yang memiliki keunikan dengan jarak yaitu pewarnaan *packing*. Keunikan yang dimaksud merupakan adanya aturan mengenai jarak saat melakukan pewarnaan titik.

Berikut contoh tentang penerapan pewarnaan *packing* yaitu, pembuatan alur penerimaan CPNS pada tahap seleksi kemampuan bidang (SKB) di empat kabupaten dengan syarat hanya satu peserta yang lolos tes SKB di setiap kabupaten. Terdapat tiga objek yaitu calon peserta lulus SKB, tempat tes dan tempat bagi peserta lolos SKB direpresentasikan sebagai titik dan tahapan antar objek direpresentasikan sebagai sisi. Kemudian calon peserta lulus SKB diwarnai dengan warna 1 untuk jarak setiap peserta adalah 2, tempat tes diwarnai dengan warna 2 untuk jarak setiap tempat tes adalah 4 dan tempat bagi peserta lolos SKB diwarnai dengan warna 3.

Selain contoh diatas terdapat contoh lain tentang penerapan pewarnaan *packing* yaitu, pemasangan *Wi-Fi* di empat daerah untuk masing-masing daerah hanya dua rumah yang memasang *Wi-Fi* dengan kecepatan berbeda dan masing-masing daerah memiliki satu gardu. Permasalahan tersebut dapat dibentuk empat objek yaitu pusat pemasangan *Wi-Fi*, gardu, rumah dengan kecepatan 10 *mbps* dan rumah dengan kecepatan lebih dari 10 *mbps* dan direpresentasikan sebagai titik sedangkan kabel penghubung antar objek direpresentasikan sebagai sisi. Kemudian pusat pemasangan *Wi-Fi* yang diletakkan diantara keempat gardu diwarnai dengan warna 4, gardu diwarnai dengan warna 1 untuk jarak setiap gardu adalah 2 dan rumah dengan kecepatan 10 *mbps* diwarnai dengan warna 2 untuk jarak setiap rumah dengan kecepatan 10 *mbps* adalah 4 dan rumah dengan kecepatan lebih dari 10 *mbps* diwarnai dengan warna 3 untuk jarak setiap rumah dengan kecepatan 10 *mbps* adalah 4. Berdasarkan dua ilustrasi permasalahan tersebut diperoleh bahwa pewarnaan *packing* merupakan pemberian warna pada titik, misal terdapat dua buah titik yang tidak bertetangga diperoleh warna yang sama pada dua titik tersebut dan jarak dari kedua titik tersebut lebih besar sama dengan warna ditambah satu.

Berikut hasil penelitian tentang pewarnaan *packing* yang telah diteliti antara lain yaitu, Goddard dkk (2008) menjelaskan konsep pewarnaan *packing* melalui bilangan kromatik *broadcast* dari suatu graf, Brešar dkk (2007) menjelaskan bilangan kromatik *packing* pada graf hasil operasi kartesian, lattice heksagonal dan pohon, Finbow dan Rall (2010) membuktikan bilangan kromatik *packing* graf lattice segitiga planar. William dan Roy (2013) menemukan bilangan kromatik *packing* dari graf – graf tertentu diantaranya yaitu graf hasil operasi *comb*, graf tangga sirkular, graf kincir dan graf H. Roy (2017) mendapatkan bilangan kromatik *packing* dari graf kipas tertentu dan keluarga graf roda. Kemudian Rajalakshmi dan Venkatachalam (2018) menemukan bilangan kromatik *packing* untuk *middle*, *line*, *total* dan *central* dari graf roda ganda. Dafik dkk (*preprint*) meneliti pewarnaan *packing* pada graf buku beserta operasinya, Alfarisi dkk (*preprint*) menemukan bilangan kromatik *packing* pada graf jahangir, Joedo dkk (2019) menemukan bilangan kromatik *packing* pada graf hasil operasi *edge corona* kemudian Ariningtyas dkk (2020) menemukan bilangan kromatik *packing* pada famili graf *unicyclic*.

Selain topik pewarnaan graf, pada teori graf terdapat pula topik mengenai operasi graf. Operasi graf merupakan cara untuk mendapatkan graf-graf baru atau graf yang berbeda dari graf asalnya. Pada penelitian ini, operasi yang digunakan adalah operasi amalgamasi titik. Graf hasil operasi amalgamasi titik merupakan graf yang diperoleh dari beberapa salinan suatu graf dan setiap graf tersebut dipilih masing-masing satu titik yang ditempelkan pada titik tertentu yang disebut titik tetap.

Berikut hasil penelitian tentang operasi amalgamasi titik yang telah diteliti antara lain yaitu, Fitriani dan Salman (2016) meneliti tentang bilangan koneksi pelangi pada graf hasil operasi amalgamasi beberapa graf yaitu graf komplit, graf roda dan graf kipas. Asmiati dkk (2011) menemukan bilangan kromatik lokasi pada operasi amalgamasi graf bintang. Minarti dkk (2019) meneliti tentang pewarnaan r-dinamis pada graf hasil operasi amalgamasi titik keluarga graf pohon dan kaitannya dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi. Demikian juga Pancahayani (2017) meneliti tentang dekomposisi super ajaib berbentuk lintasan dari amalgamasi graf siklus.

Berdasarkan hasil dari penelitian sebelumnya, diperoleh ide untuk mengkaji lebih lanjut perihal pewarnaan *packing* pada famili graf pohon dan graf hasil operasi amalgamasi titik. Latar belakang dipilihnya graf dari famili graf pohon yaitu berdasarkan *literatur review* memberikan hasil bahwa belum sepenuhnya dari famili graf pohon diteliti menggunakan pewarnaan *packing* dan latar belakang dipilihnya operasi amalgamasi titik yaitu untuk menggeneralisasikan pengetahuan baru pada topik pewarnaan *packing* sedangkan latar belakang dipilihnya topik pewarnaan *packing* yaitu terdapat keunikan antara pewarnaan titik dan jarak pada suatu graf. Penelitian ini dilakukan hingga diperoleh bilangan kromatik *packing* dalam bentuk teorema dan pembuktiannya. Berdasarkan latar belakang tersebut penelitian ini diberi judul **"Pewarnaan *Packing* pada Famili Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, dapat dirumuskan masalah pada penelitian ini yaitu, bagaimana bilangan kromatik *packing* pada famili graf pohon dan graf hasil operasi amalgamasi titik ?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang dipecahkan, penelitian ini dibatasi pada graf yang diteliti yaitu:

1. Famili graf pohon meliputi; graf *centipede*, graf kembang api, graf sapu, graf bintang ganda dan graf pohon pisang;
2. Graf hasil operasi amalgamasi titik meliputi; graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan, graf hasil operasi amalgamasi titik graf sapu dan graf hasil operasi amalgamasi titik graf bintang.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang diatas diperoleh tujuan dari penelitian ini yaitu, menentukan bilangan kromatik *packing* pada famili graf pohon dan graf hasil operasi amalgamasi titik.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini antara lain:

1. Meningkatkan pemahaman mengenai famili graf pohon, graf hasil operasi amalgamasi titik dan pewarnaan *packing*;
2. Memberikan motivasi kepada penelitian berikutnya untuk melakukan penelitian tentang pewarnaan *packing* pada keluarga graf lain;
3. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap perkembangan pengetahuan baru pada permasalahan pewarnaan *packing*;
4. Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat menjadi pedoman untuk penelitian berikutnya.

1.6 Kebaruan Penelitian

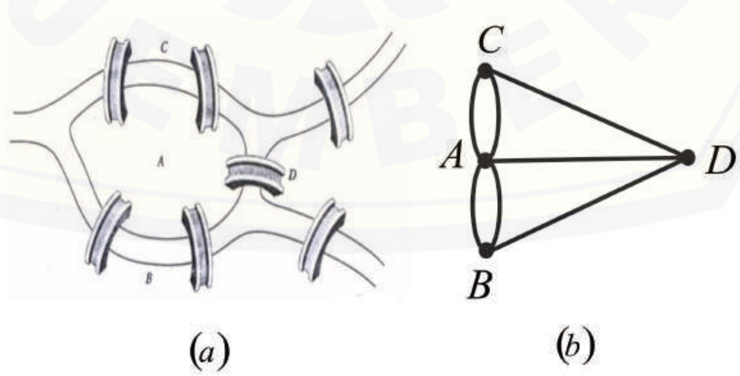
Kebaruan dari penelitian ini yaitu pengembangan topik mengenai bilangan kromatik *packing* meliputi penggunaan graf pada famili graf pohon dan operasi amalgamasi titik yang belum diteliti. Penelitian ini dilakukan hingga diperoleh teorema bilangan kromatik *packing* dan pembuktiannya sehingga nantinya diharapkan melalui penelitian ini diperoleh pembaharuan pada topik bilangan kromatik *packing*. Pada penelitian ini dibatasi pada famili graf pohon dan graf hasil operasi amalgamasi titik. Berikut jenis graf yang diteliti yaitu, graf *centipede*, graf kembang api, graf sapu, graf bintang ganda, graf pohon pisang, graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan, graf hasil operasi amalgamasi titik graf sapu dan graf hasil operasi amalgamasi titik graf bintang.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Teori graf sangat berperan dalam dunia matematika terapan modern. Tokoh yang pertama kali memperkenalkan teori graf adalah Leonhard Euler pada tahun 1736. Tokoh tersebut merupakan ahli matematika berkebangsaan Swiss dan dikenal sebagai bapak Teori Graf melalui tulisannya yang berisi solusi dari permasalahan yang sangat sulit untuk dipecahkan pada masa itu yaitu permasalahan jembatan Königsberg (Gambar 2.1 (a)).

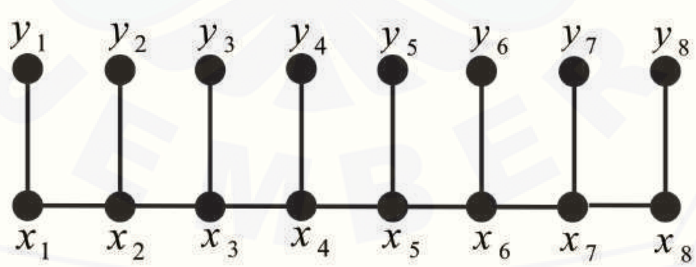
Königsberg merupakan nama kota yang berada di sebelah timur negara bagian Prussia, Jerman dan saat ini bernama kota Kaliningrad. Terdapat sungai Pregal yang mengitari pulau Kneiphof kemudian sungai tersebut bercabang menjadi dua buah anak sungai. Jembatan tersebut menghubungkan empat wilayah yang dikelilingi oleh Sungai Pregal, Eropa. Permasalahan jembatan KönIgberg adalah menentukan cara agar seseorang dapat melintasi tujuh jembatan dengan ketentuan jembatan tersebut dilintasi tepat satu kali dan seseorang tersebut dapat kembali ke tempat awal keberangkatan.



Gambar 2.1 (a) Jembatan Königberg (b) Representasi Euler

Euler berpendapat bahwa tidak terdapat jalan untuk memecahkan permasalahan tersebut karena bentuk susunan dari jembatan. Kemudian Euler merepresentasikan setiap wilayah sebagai titik dan setiap jembatan sebagai sisi yang menghubungkan titik yang bersesuaian seperti pada Gambar 2.1 (b). Menurut Euler solusi dari permasalahan tersebut adalah dengan memberikan kriteria dimana setiap titik terhubung dan titik tersebut bersisian dengan sisi yang banyaknya genap maka semua sisi dari graf tersebut dapat dilalui tepat satu kali. Hal ini memberikan jawaban dari permasalahan jembatan Königberg yaitu seluruh jembatan tidak dapat dilalui hanya dengan tepat satu kali (Munir, 2010:354-355).

Berdasarkan hasil penemuan teori graf, graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ untuk elemen $V(G)$ disebut titik dan elemen $E(G)$ disebut pasangan tak terurut dari $V(G)$. $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ merupakan himpunan titik tak kosong berhingga sedangkan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_m\}$ merupakan himpunan sisi boleh kosong berhingga (Hartsfield dan Ringel, 1990:7). Berdasarkan definisi tersebut dapat dikatakan bahwa graf dapat terbentuk dengan minimal satu titik namun tidak harus memiliki sisi. Kardinalitas dari himpunan titik suatu graf G disebut *order* dari graf G dan disimbolkan dengan $|V(G)|$ sedangkan kardinalitas dari himpunan sisi pada graf G disebut *size* dari G dan disimbolkan dengan $|E(G)|$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:1). Contoh graf dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Graf *Centipede* Cp_8

Pada Gambar 2.2 merupakan contoh dari graf *centipede* Cp_8. Berdasarkan gambar tersebut diperoleh bahwa graf Cp_8 memiliki himpunan titik $V(Cp_8) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8\}$ dan himpunan sisi $E(Cp_8) =$

$\{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_5\}, \{x_5, x_6\}, \{x_6, x_7\}, \{x_7, x_8\}, \{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}, \{x_4, y_4\}, \{x_5, y_5\}, \{x_6, y_6\}, \{x_7, y_7\}, \{x_8, y_8\}\}$. *Order* dan *size* pada graf *centipede* Cp_8 masing-masing yaitu, $|V(Cp_8)| = 16$ dan $|E(Cp_8)| = 15$.

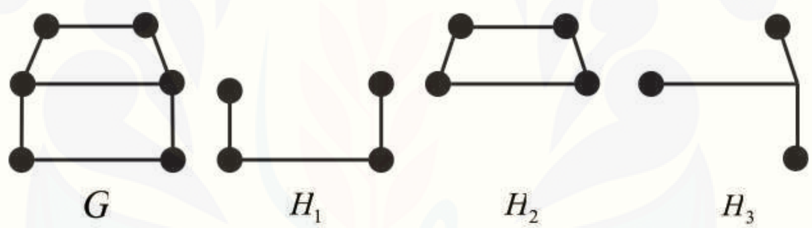
Suatu sisi $e = \{u, v\}$ menghubungkan titik u dan titik v untuk titik u merupakan titik awal dari sisi e yang disebut ekor dan titik v disebut titik akhir dari sisi e yang disebut kepala. Jika $e = \{u, v\}$ adalah sisi pada graf G maka titik u dan titik v disebut bertetangga atau *adjacent* karena terdapat sebuah sisi yang menghubungkan titik u dan v. Jika $e = \{u, v\}$ maka titik u dengan sisi $e = \{u, v\}$ atau titik v dengan sisi $e = \{u, v\}$ disebut bersisian atau *incident* karena titik u merupakan titik awal dari sisi $e = \{u, v\}$ atau titik v merupakan titik akhir dari sisi $e = \{u, v\}$ (Jensen dan Gutin, 2007:2-3). Pada Gambar 2.2 titik x_1 dan x_2 merupakan titik yang saling bertetangga sedangkan sisi $\{x_1, y_1\}$ dan $\{x_1, x_2\}$ merupakan sisi yang saling bertetangga. Kemudian titik x_2 dengan sisi $\{x_2, x_3\}$ atau titik x_3 dengan sisi $\{x_2, x_3\}$ merupakan titik yang bersisian dengan sisi $\{x_2, x_3\}$.

Berikutnya pada graf terdapat istilah lainnya seperti derajat suatu titik pada graf. Menurut (Munir, 2010:366) derajat *(degree)* suatu titik pada graf adalah banyaknya titik yang bertetangga dengan titik tersebut. Derajat titik v dinotasikan sebagai $d(v)$. Titik yang berderajat satu disebut *pendant vertex* (Balakrishnan dan Ranganathan, 2012:10-11).

Pada graf juga terdapat istilah jalan. Jalan *(walk)* adalah barisan bergantian berhingga antara titik dan sisi untuk titik dan sisi yang sama boleh muncul lebih dari satu kali. Panjang dari jalan adalah banyaknya sisi pada jalan tersebut. Jalan yang tidak memiliki pengulangan sisi disebut jalur *(trail)* sedangkan jalan yang titik - titik yang dilaluinya berbeda disebut lintasan *(path)*. Namun, jalan yang titik awal dan titik akhirnya sama disebut sirkuit. Panjang lintasan adalah banyaknya sisi pada lintasan tersebut. Oleh karena hal tersebut *path* pasti sebuah *trail* (Jungnickel, 2008:5-6). Pada Gambar 2.2 terdapat jalan $y_1 - y_3$ yaitu $y_1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_3, y_3$ dengan panjang jalan 5 sedangkan lintasan $y_1 - y_8$ yaitu $y_1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, y_8$ memiliki panjang lintasan 9.

Selain jalan, jalur dan lintasan, pada suatu graf G terdapat jarak. Jarak (*radius*) adalah panjang lintasan terpendek antara titik u dan titik v yang dinotasikan dengan $d(u, v)$ (Bondy dan Murty, 1976:16). Diameter dari graf G dinotasikan dengan *diam*(G) yang merupakan jarak terbesar diantara sebarang dua titik pada graf G (Chartrand dan Lesniak, 1996:30). Berdasarkan Gambar 2.2 diperoleh jarak antara titik y_1 dan y_3 yaitu $d(y_1, y_3) = 4$ sedangkan diameter pada graf *centipede* Cp_8 yaitu *diam*$(Cp_8) = 9$.

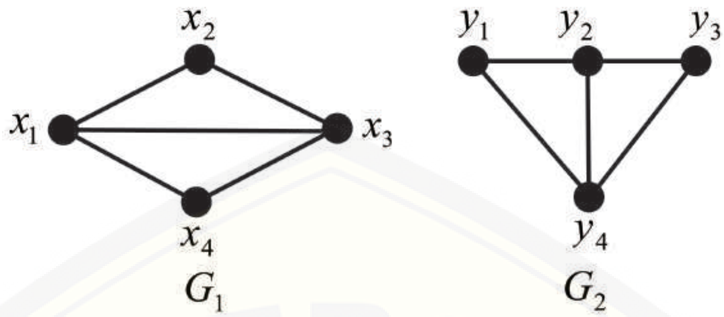
Istilah lain pada graf yang memiliki peranan tidak kalah pentingnya yaitu subgraf. Graf H merupakan subgraf dari graf G apabila setiap titik pada graf H termasuk titik dari graf G dan setiap sisi pada graf H termasuk sisi dari graf G atau dapat dituliskan sebagai $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ (Hartsfield dan Ringel, 1990:13). Contoh dari subgraf dapat dilihat pada Gambar 2.3



Gambar 2.3 Contoh graf G dan Subgrafnya

Pada Gambar 2.3, graf H_1, H_2 dan H_3 merupakan subgraf dari graf G. Setiap titik pada graf H_1, H_2 dan H_3 merupakan titik dari graf G begitu pula sisi pada graf H_1, H_2 dan H_3 merupakan sisi dari graf G.

Selain subgraf, terdapat pula istilah isomorfis pada suatu graf. Isomorfis diantara dua buah graf G_1 dan G_2 adalah sebuah fungsi bijektif $f : V_1 \to V_2$ antara titik dari graf sedemikian hingga $\{a, b\}$ merupakan sisi graf G_1 jika dan hanya jika $\{f(a), f(b)\}$ merupakan sisi graf G_2 dan isomorfis dua graf dinotasikan dengan $G_1 \cong G_2$ (Levin, 2019:236-237) atau dapat diartikan dua buah graf isomorfis apabila ada suatu korespondensi satu-satu antaran himpunan titik maupun himpunan sisi dari kedua graf sedemikian sehingga terdapat sisi-sisi bersesuaian antara kedua graf dan terdapat titik-titik bersesuaian antara kedua graf (Bondy dan Murty, 1976:4). Berikut contoh dua graf yang isomorfis.



Gambar 2.4 Contoh Isomorfis

Berdasarkan Gambar 2.4, graf G_1 dan G_2 saling isomorfis diperoleh $f(x_1) = y_2, f(x_2) = y_1, f(x_3) = y_4$ dan $f(x_4) = y_3$.

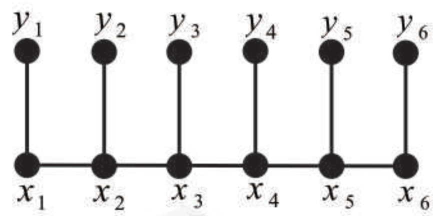
2.2 Famili Graf Pohon

Famili graf pohon adalah keluarga graf terhubung yang tidak memiliki sirkuit, memiliki n titik dan $n - 1$ sisi (Munir, 2010:444). Jadi, graf pohon yaitu graf untuk setiap pasang titiknya dihubungkan oleh lintasan, tidak memiliki titik awal maupun titik akhir yang sama.

Diantara banyak sekali konsep graf, konsep pohon berperan penting dalam kehidupan. Pada kehidupan sehari – hari orang telah lama menggunakan pohon untuk menggambarkan silsilah keluarga, struktur organisasi dan lain-lain sesungguhnya pohon telah digunakan sejak tahun 1857 oleh Arthur Cayley seorang matematikawan Inggris dimana Cayley menggunakan konsep pohon untuk menghitung jumlah senyawa kimia (Munir, 2010:443). Contoh famili graf pohon sebagai berikut:

a. Graf *Centipede*

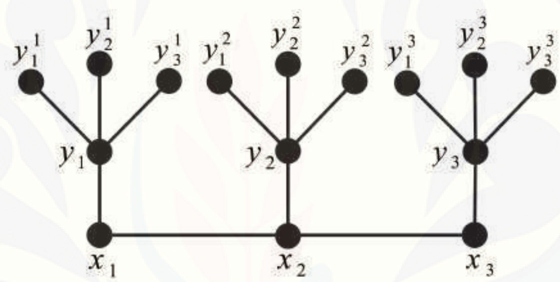
Graf *centipede* adalah graf hasil gabungan dari n titik yang terhubung melalui sebuah sisi masing-masing terhadap titik pada graf P_2 sehingga membentuk sebuah graf yang menyerupai hewan kaki seribu (Purnapraja dkk, 2014:228). Contoh dari graf *centipede* dapat dilihat pada Gambar 2.5



Gambar 2.5 Contoh Graf *Centipede* Cp_6

b. Graf Kembang Api (*Firecricker Graph*)

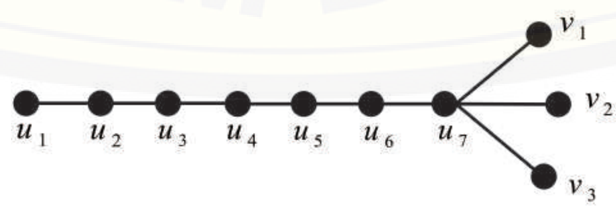
Graf kembang api adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan m buah graf bintang dan menghubungkan salah satu daun pada masing-masing graf bintang (Chen dkk, 1997). Contoh dari graf kembang api dapat dilihat pada Gambar 2.6



Gambar 2.6 Contoh Graf Kembang Api $F_{3,4}$

c. Graf Sapu (*Broom Graph*)

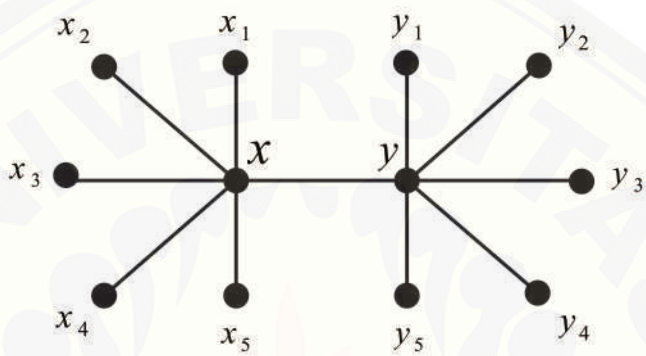
Graf sapu adalah graf dengan n titik yang memuat graf lintasan dengan d titik dan $n - d$ titik daun yang semuanya bertetangga dengan salah satu titik ujung dari graf lintasan. Graf sapu dinotasikan dengan B_d^n untuk $d \geq 3$ dan $n - d \geq 2$ (Sriram dkk, 2014:147). Contoh dari graf sapu dapat dilihat pada Gambar 2.7



Gambar 2.7 Contoh Graf Sapu B_7^{10}

d. Graf Bintang Ganda (*Double Star Graph*)

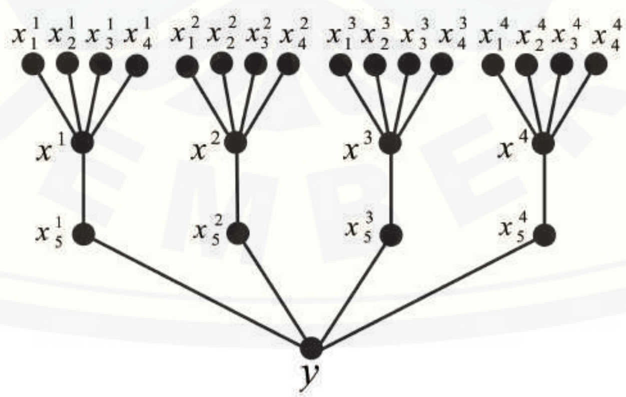
Graf bintang ganda adalah graf yang memiliki dua titik sebagai titik *central* sekaligus bukan sebagai titik akhir dan graf bintang ganda memiliki diameter tiga. Graf bintang ganda dinotasikan dengan $S_{m,n}$ untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ (Chartrand dkk, 2019:16). Contoh dari graf bintang ganda dapat dilihat pada Gambar 2.8



Gambar 2.8 Contoh Graf Bintang Ganda $S_{5,5}$

e. Graf Pohon Pisang (*Banana Tree Graph*)

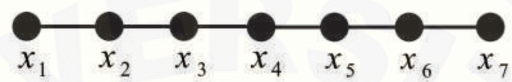
Graf pohon pisang adalah sebuah graf yang memuat titik y dan dihubungkan dengan salah satu daun pada m salinan graf bintang (Maowa, 2016:37). Contoh dari graf pohon pisang dapat dilihat pada Gambar 2.9



Gambar 2.9 Contoh Graf Pohon Pisang $B_{4,5}$

f. Graf Lintasan(*Path Graph*)

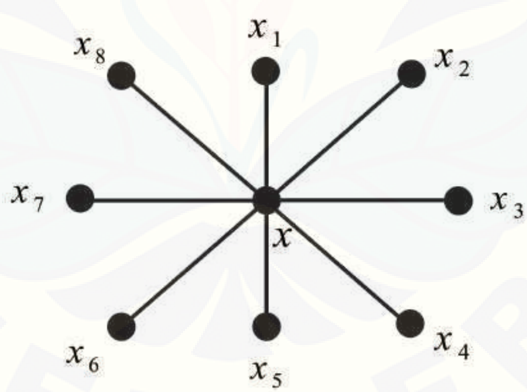
Graf lintasan adalah graf pohon yang memiliki himpunan titik $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ dan himpunan sisi yaitu $\{v_i v_{i+1}\}$ untuk $1 \leq i \leq n-1$. Syarat minimal terbentuknya graf lintasan adalah terdapatnya dua buah titik terhubung yang memiliki derajat satu namun apabila terdapat titik-titik lainnya maka titik-titik tersebut berderajat dua. Graf lintasan dinotasikan dengan P_n dengan $n \geq 2$, *order* n dan *size* $n-1$ (Maowa, 2016:23). Contoh dari graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.10



Gambar 2.10 Contoh Graf Lintasan P_7

h. Graf Bintang (*Star Graph*)

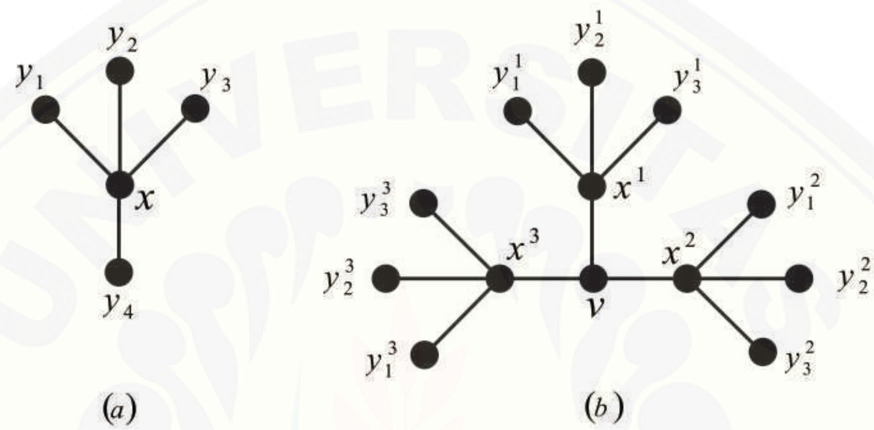
Graf bintang adalah graf pohon dengan n daun yang dihubungkan dengan satu titik pusat (Maowa, 2016:50). Contoh dari graf bintang dapat dilihat pada Gambar 2.11



Gambar 2.11 Contoh Graf Bintang S_8

2.3 Operasi Graf Amalgamasi Titik

Misalkan graf G merupakan graf terhubung. Graf hasil operasi amalgamasi titik dari suatu graf dinotasikan dengan $G = amal(G, v_o, n)$ untuk $n \geq 2$ dimana setiap n *copies* atau salinan graf G memiliki sebuah titik v_o yang disebut sebagai titik tetap (Lee dkk, 1991:208). Jadi, graf hasil operasi amalgamasi titik merupakan graf yang diperoleh dari beberapa salinan suatu graf dan setiap graf tersebut dipilih masing-masing satu titik yang ditempelkan pada titik tertentu yang disebut titik tetap. Titik tetap artinya titik hasil rekatan beberapa titik yang telah dipilih di operasi amalgamasi titik suatu graf. Berikut contoh graf bintang dan graf hasil operasi amalgamasi titik graf bintang dapat dilihat pada Gambar 2.12



Gambar 2.12 (a) Graf S_4 (b) Graf $amal(S_4, v, 3)$

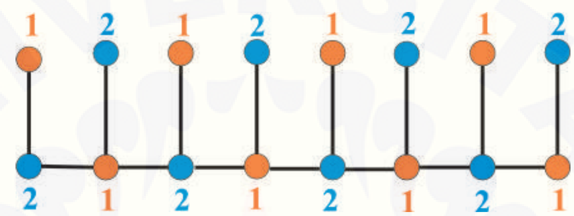
Gambar diatas merupakan contoh graf bintang S_4 dan graf hasil operasi amalgamasi titik pada graf bintang S_4 dengan 3 salinan graf bintang S_4. Graf bintang S_4 memiliki titik daun y_4 yang dijadikan sebagai titik tetap ketika menggunakan operasi amalgamasi titik (Gambar 2.12 a). Pelabelan titik tetap y_4 diubah menjadi titik v. Hal ini dilakukan untuk mempermudah ketika melabeli titik pada graf hasil operasi amalgamasi titik $amal(S_4, v, 3)$. Oleh karena nilai $m = 3$ diperoleh 3 *copies* atau salinan graf S_4 untuk setiap titik y_4 pada graf bintang S_4 dengan 1 titik tetap yaitu titik v (Gambar 2.12 b).

2.4 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf adalah salah satu bentuk pelabelan graf dengan memberikan warna pada elemen-elemen graf dengan syarat elemen yang bertetangga tersebut harus memiliki warna yang berbeda (Chartrand dkk, 2019:3). Terdapat tiga jenis pewarnaan suatu graf yaitu:

1. Pewarnaan Titik

   Pewarnaan titik dari sebuah graf G adalah pemberian warna pada titik untuk setiap titik yang bertetangga mendapatkan warna yang berbeda (Levin, 2019:268). Bilangan asli yang menunjukkan warna seminimal mungkin pada pewarnaan titik suatu graf yang disebut sebagai bilangan kromatik atau *chromatic number* dan dinotasikan dengan $\chi(G)$ (Levin, 2019:268). Contoh pewarnaan titik dapat dilihat pada Gambar 2.13

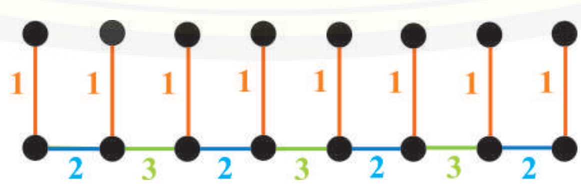


Gambar 2.13 Pewarnaan Titik Graf *Centipede* Cp_8

   Berdasarkan Gambar 2.13, diperoleh $\chi(Cp_8) = 2$ artinya graf tersebut memiliki warna minimal yaitu 2 warna. Warna 1 diwarnai dengan warna oranye dan warna 2 diwarnai dengan warna biru. Hal tersebut sesuai dengan definisi pewarnaan titik.

2. Pewarnaan Sisi

   Pewarnaan sisi dari sebuah graf G adalah pemberian warna pada sisi untuk setiap sisi yang bertetangga mendapatkan warna yang berbeda. Bilangan bulat positif yang menunjukkan warna seminimal mungkin pada pewarnaan sisi disebut indek kromatik dinotasikan $\chi'(G)$ (Levin, 2019:272). Contoh pewarnaan sisi dapat dilihat pada Gambar 2.14

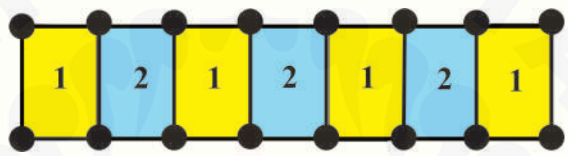


Gambar 2.14 Pewarnaan Sisi Graf *Centipede* Cp_8

Berdasarkan Gambar 2.14, diperoleh diperoleh $\chi'(Cp_8) = 3$ artinya graf tersebut memiliki warna minimal yaitu 3 warna. Warna 1 diwarnai dengan warna oranye, warna 2 diwarnai dengan warna biru dan warna 3 diwarnai dengan warna hijau. Hal tersebut sesuai dengan definisi pewarnaan sisi.

3. Pewarnaan Wilayah

   Pewarnaan wilayah adalah pemberian warna pada wilayah untuk setiap wilayah yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Jika terdapat minimal k warna pada pewarnaan wilayah maka disebut k-pewarnaan wilayah (Chartrand dan Lesniak, 1996:247). Contoh pewarnaan wilayah dapat dilihat pada Gambar 2.15



Gambar 2.15 Pewarnaan Wilayah Graf Tangga L_8

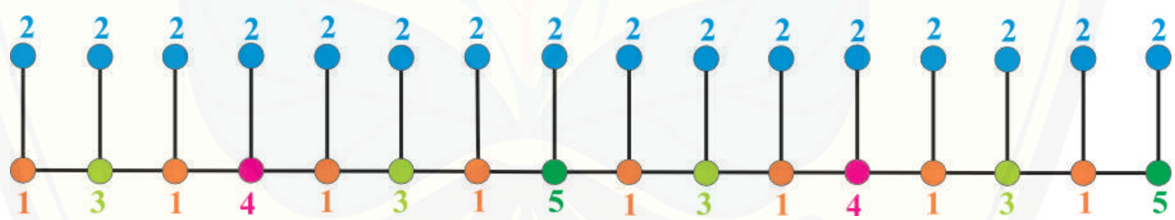
   Berdasarkan Gambar 2.15, diperoleh nilai $k = 2$ artinya graf tersebut memiliki warna minimal yaitu 2 warna. Warna 1 diwarnai dengan warna kuning dan warna 2 diwarnai dengan warna biru. Hal tersebut sesuai dengan definisi pewarnaan wilayah.

Terdapat beberapa aplikasi pewarnaan di kehidupan sehari-hari diantaranya yaitu pemilahan bahan kimia yang diproduksi oleh perusahaan manufaktur sehingga bahan kimia yang tidak dapat dipergunakan secara bersamaan dapat teratasi sehingga tidak akan tejadi hal yang tidak diinginkan oleh perusahaan manufaktur tersebut (Balakrishnan dan Ranganathan, 2012:143), pengaturan lampu lalu lintas di perempatan jalan yang harus hidup secara bergantian untuk mencegah terjadinya kecelakaan lalu lintas, pengaturan agar warna setiap wilayah yang bertetangga pada suatu peta memiliki warna yang berbeda.

2.5 Pewarnaan *Packing*

Salah satu contoh pewarnaan titik pada graf yaitu pewarnaan *packing*. Konsep pewarnaan *packing* pertama kali ditemukan oleh Goddart dkk (2008). Konsep tersebut dilatarbelakangi oleh munculnya permasalahan area penetapan frekuensi pada jaringan nirkabel *(wireless network)* dengan nama pewarnaan siaran *(broadcast coloring)* di stasiun radio. Hal tersebut mengakibatkan dua buah stasiun dengan penugasan frekuensi sama harus ditempatkan pada jarak tertentu sehingga kedua siaran tersebut tidak mengalami gangguan proses penerimaan siaran serta dapat memaksimalkan kekuatan sinyal siaran.

Apabila graf $G = (V(G), E(G))$ merupakan graf terhubung dan k bilangan bulat positif $k \geq 1$ maka pewarnaan $k - packing$ dari graf G adalah pemetaan $\pi : V(G) \rightarrow \{1, 2, ...k\}$ sehingga dua buah titik memiliki warna i minimal berjarak $i + 1$ (Rajalakshmi dan Venkatachalam, 2018:2389). Bilangan bulat positif terkecil k dari graf G yang memiliki k- pewarnaan *packing* disebut bilangan kromatik *packing* dan dinotasikan dengan $\chi_\rho(G) = k$ (Brešar dkk, 2007:2303). Contoh pewarnaan *packing* dapat dilihat pada Gambar 2.16



Gambar 2.16 Pewarnaan *Packing* Graf *Centipede* Cp_{16}

Gambar 2.16 merupakan contoh pewarnaan *packing* pada graf *centipede* (Cp_{16}) yang menghasilkan 5 warna dengan kata lain $\chi_\rho(Cp_{16}) = 5$ untuk $n = 16$. Berdasarkan definisi pewarnaan *packing* yaitu terdapat dua titik yang tidak bertetangga misal titik x dan y diperoleh $c(x) = c(y) = i$ dan $d(x, y) \geq i + 1$. Berikut ini Tabel 2.1 untuk mengkaji ulang pola pewarnaan *packing* yang diperoleh dan disesuaikan dengan definisi pewarnaan *packing*.

Tabel 2.1: Pewarnaan *Packing* pada Graf *Centipede* Cp_{16}

Jarak Antar Titik	Pewarnaan *Packing*
$d(x_i, x_{i+2}) \geq 2$	1, untuk i gasal
$d(y_i, y_{i+1}) \geq 3$	2, untuk $1 \leq i \leq n-1$
$d(x_i, x_{i+4}) \geq 4$	3, untuk $i \equiv 2 \pmod 4$
$d(x_i, x_{i+8}) \geq 5$	4, untuk $i \equiv 4 \pmod 8$
$d(x_i, x_{i+8}) \geq 6$	5, untuk $i \equiv 0 \pmod 8$

Pada tahap pembuktian teorema bilangan kromatik *packing* digunakan hal-hal penting seperti berikut:

Lema 2.7.1 Jika graf H merupakan subgraf dari graf G maka berlaku $\chi_\rho(H) \leq \chi_\rho(G)$ (Goddard dkk, 2008).

Proposisi 2.7.1 Apabila $d(u, v) = 2$ maka berlaku $c(u) = c(v) = 1$ (Goddard dkk, 2008).

Proposisi 2.7.2 $\chi_\rho(P_n) = \begin{cases} 2, \ 2 \leq n \leq 3 \\ 3, \ n \geq 4 \end{cases}$ (Goddard dkk, 2008.)

Proposisi 2.7.3 $\chi_\rho(S_n) = 2$ (Goddard dkk, 2008.)

2.6 Penelitian Sebelumnya

Pada bagian ini disajikan beberapa graf hasil penelitian mengenai perwanaan *packing* yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Tabel 2.2 berikut memaparkan hasil pewarnaan *packing* pada penelitian sebelumnya.

Tabel 2.2: Hasil Penelitian Tentang Pewarnaan *Packing*

Graf	Hasil $\chi_p(G)$	Keterangan
Graf Lintasan	$\chi_\rho(P_n) = \begin{cases} 2, \ 2 \leq n \leq 3 \\ 3, \ n \geq 4 \end{cases}$	Goddard dkk, 2008.
Graf Lingkaran	$\chi_\rho(C_n) = \begin{cases} 3, \ n = 3, \ n \equiv 0 (mod\ 4) \\ 4, \ n \ \text{lainnya} \end{cases}$	Goddard dkk, 2008.
Graf Bintang	$\chi_\rho(S_n) = 2$	Goddard dkk, 2008.
Graf *Triangular Lattice*	$\chi_\rho(\tau) = \propto$	Finbow dan Rall,2010

Graf	Hasil $\chi_p(G)$	Keterangan
Graf Hasil Operasi *Comb*	$\chi_\rho(P_n \Theta K_l) \leq 5,\ n \geq 8$	William dan Roy, 2013.
Graf Tangga Sirkular	$\chi_\rho(CL_n) \leq 5,\ n \equiv 0(mod\, 6), n \geq 6$	William dan Roy,2013
Graf H	$\chi_\rho(H(r)) \leq 5,\ r$ genap $r \geq 4$	William dan Roy,2013
Graf Kincir	$\chi_\rho(C_n^m) = \begin{cases} 3,\ n \text{ kelipatan } 4 \\ 4,\ n \text{ bukan kelipatan } 4 \end{cases}$	William dan Roy, 2013
Graf Kipas Tertentu	$\chi_\rho(SF_n^r) \geq 3 + n(r - \lceil \frac{r}{2} \rceil - 1), n \geq 4$ $r \geq 5$	Roy, 2017
Graf Roda Tertentu	$\chi_\rho(KW(n,r)) \geq 4 + n[(r+1) - \lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 2]$ $-1, n \geq 5, r \geq 6$	Roy, 2017
Middle Roda Ganda	$\chi_\rho(L(DW_n)) = 3n + 1,\ \ n \geq 3$	Rajalakhmi dan Venkatachalam, 2018
Line Roda Ganda	$\chi_\rho(L(DW_n)) = 3n + 1,\ \ n \geq 3$	Rajalakhmi dan Venkatachalam, 2018
Total Roda Ganda	$\chi_\rho(T(DW_n) = \begin{cases} 5n,\ n \text{ ganjil} \\ 5n+1,\ n \text{ genap} \end{cases}$	Rajalakhmi dan Venkatachalam, 2018
Central Roda Ganda	$\chi_\rho(C(DW_n) = \begin{cases} \frac{7n+3}{2},\ n \text{ ganjil} \\ \frac{7n+4}{2},\ n \text{ genap} \end{cases}$	Rajalakhmi dan Venkatachalam, 2018
Graf Buku	$\chi_\rho(B_n) = n + 2$	Dafik dkk, *preprint*
Middle Buku	$\chi_\rho(M(B_n)) = 2n + 3$	Dafik dkk, *preprint*
Line Buku	$\chi_\rho(L(B_n)) = 2n + 1$	Dafik dkk, *preprint*
Total Buku	$\chi_\rho(T(B_n)) \leq 2n + 5$	Dafik dkk, *preprint*
Central Buku	$\chi_\rho(C(B_n)) = 2n + 3$	Dafik dkk, *preprint*
Graf Jahangir	$\chi_\rho(J_{n,k}) = \begin{cases} 5,\ n \text{ ganjil dan } k \equiv 1(mod\, 4) \\ 4,\ n \text{ genap dan } k \equiv 1(mod\, 4) \\ \text{atau } n \geq 3 \text{ dan } k \equiv 3(mod\, 4) \end{cases}$ $, n \geq 3,\ k$ ganjil	Alfarisi dkk, *preprint*
Graf Jahangir	$\chi_\rho(J_{n,k}) \leq n + 2,\ n$ genap, $k = 2$	Alfarisi dkk, *preprint*
Graf Hasil Operasi *Edge Corona*	$\chi_\rho(P_2 \diamond P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3,\ n \geq 2$	Joedo, 2020
Graf Hasil Operasi	$\chi_\rho(P_3 \diamond P_n) = \begin{cases} n+3,\ n \text{ ganjil} \\ n+4,\ n \text{ genap} \end{cases} , n \geq 2$	Joedo, 2020

Graf	Hasil $\chi_p(G)$	Keterangan
Graf Hasil Operasi *Edge Corona*	$\chi_\rho(P_4 \diamond P_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor + 3, \ n \text{ ganjil} \\ \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor + 4, \ n \text{ genap} \end{cases}, n \geq 2$	Joedo, 2020
Graf Hasil Operasi *Edge Corona*	$\chi_\rho(P_2 \diamond S_n) = 4, \ n \geq 2$	Joedo, 2020
Graf Hasil Operasi *Edge Corona*	$\chi_\rho(P_3 \diamond S_n) = 6, \ n \geq 2$	Joedo, 2020
Graf Hasil Operasi *Edge Corona*	$\chi_\rho(P_4 \diamond S_n) = 7, \ n \geq 2$	Joedo, 2020
Graf Hasil Operasi *Edge Corona*	$\chi_\rho(P_2 \diamond C_n) = \begin{cases} 5, \ n \equiv 0 (mod\ 4) \\ 6, \ n \equiv 1,2,3 (mod\ 4) \end{cases}, n \geq 3$	Joedo, 2020
Graf Hasil Operasi *Edge Corona*	$\chi_\rho(P_3 \diamond C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{2} \rceil + 6, \ n = 3 \\ \wedge\, n \equiv 0 (mod\ 4) \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + 7, \ n \equiv 1,2 (mod\ 4) \\ \wedge\, n \equiv 3 (mod\ 4), \ n \geq 7 \end{cases}, n \geq 3$	Joedo, 2020
Graf Hasil Operasi *Edge Corona*	$\chi_\rho(P_4 \diamond C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{3n}{2} \rceil + 4, \ n \text{ genap} \\ \lceil \frac{3n}{2} \rceil + 5, \ n \text{ ganjil} \end{cases}, n \geq 3$	Joedo, 2020
Graf *Sun*	$\chi_\rho(S_n) = \begin{cases} 4, \ n = 3,4 \\ 5, \ n = 5,6,8 \\ 6, \ n = 7, n \geq 9 \end{cases}, n \geq 3$	Ariningtyas, 2020
Graf *Cricket*	$\chi_\rho(Cr_{m,n}) = \begin{cases} 3, \ m = 2, n = 3 \ dan \\ m \equiv 3 (mod\ 4), n \equiv 0 (mod\ 4) \\ 4, \ m,n \text{ lainnya} \end{cases}$ $m \geq 2, n \geq 3$	Ariningtyas, 2020
Graf *Peach*	$\chi_\rho(C_m^m) = \begin{cases} 2, \ m = 2 \\ 3, \ m = 3, m \equiv 0 (mod\ 4) \\ 4, \ m \text{ lainnya} \end{cases}, m \geq 2$	Ariningtyas, 2020

Graf	Hasil $\chi_p(G)$	Keterangan
Graf *Tadpole*	$\chi_\rho(T_{m,\,n}) = \begin{cases} 3, & m \equiv 0(mod\,4), n \equiv 3(mod\,4) \\ 4, & m, n \text{ lainnya} \\ 5, & m \equiv 5(mod\,8), n \equiv 4(mod\,8), \\ & dan\; m \equiv 3(mod\,4), n \equiv 2(mod\,4) \end{cases}$ $, m \geq 3, n \geq 2$	Ariningtyas, 2020
Graf *Net*	$\chi_\rho(N_{3,\,m}) = 4, m \geq 3$	Ariningtyas, 2020
Graf *Bull*	$\chi_\rho(B_{3,\,m}) = 4, m \geq 2$	Ariningtyas, 2020

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan pada penelitian ini yaitu penelitian eksploratif. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan untuk menemukan hal baru yang ingin diketahui kemudian hasilnya dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.

3.2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksi pola (*pattern recognition*). Berikut penjelasan dari setiap metode:

1. Metode deduktif aksiomatik

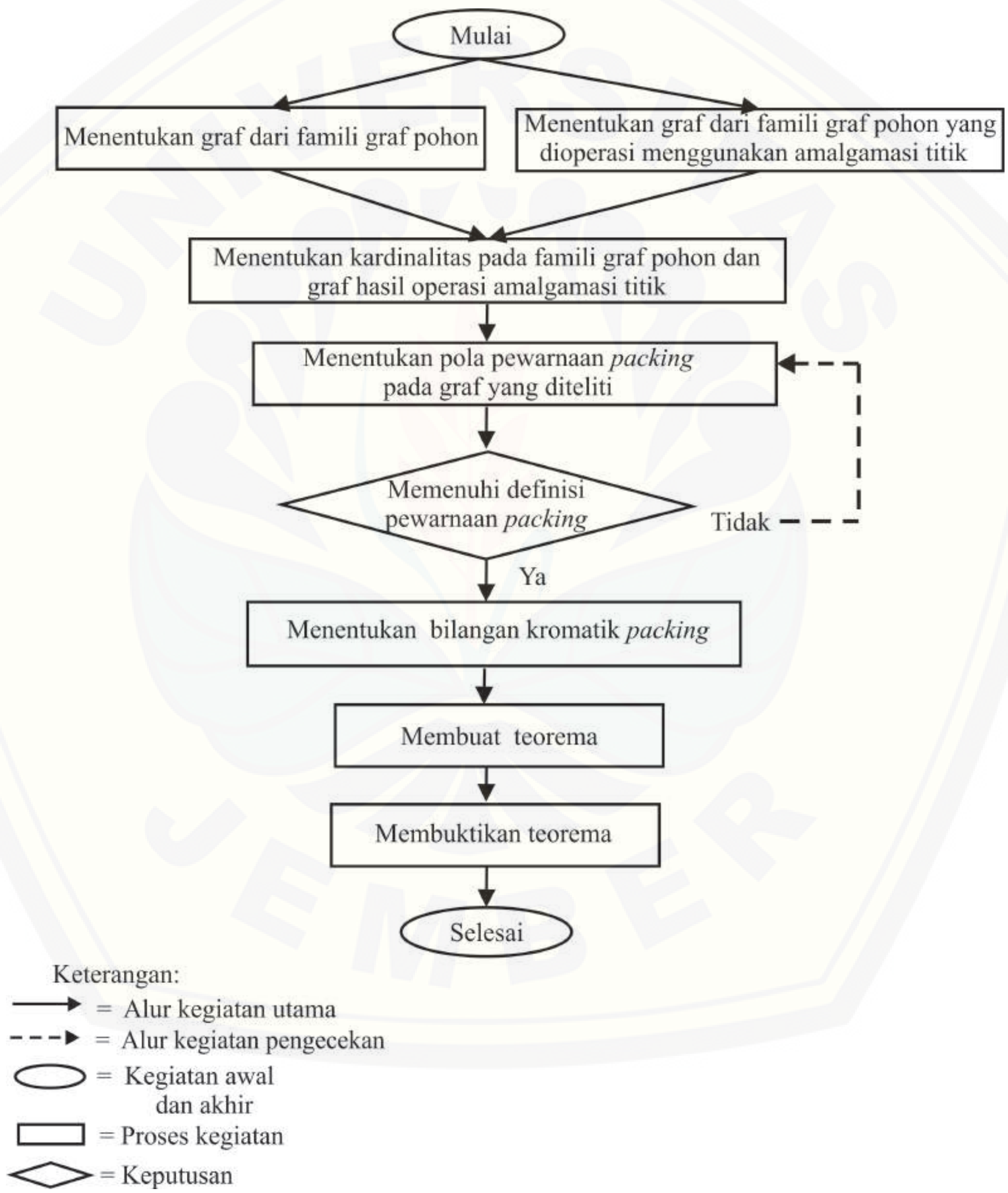
   Metode deduktif aksiomatik adalah metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku pada logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada kemudian diterapkan pada pewarnaan *packing* pada famili graf pohon dan graf hasil operasi amalgamasi titik.

2. Metode pendeteksi pola *(pattern recognition)*

   Metode pendeteksi pola *(pattern recognition)* merupakan metode untuk mencari serta menemukan pola pewarnaan dan bilangan kromatik sedemikian hingga diperoleh bilangan kromatik *packing* pada famili graf pohon dan graf hasil operasi amalgamasi titik.

3.3 Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian merupakan uraian mengenai langkah-langkah yang dilakukan sebagai pedoman pada pelaksanaan penelitian untuk memperoleh hasil yang dicapai sesuai dengan tujuan penelitian. Prosedur penelitian yang dilakukan untuk menentukan bilangan kromatik *packing* pada famili graf pohon dan graf hasil operasi amalgamasi titik diilustrasikan pada Gambar 3.1



Gambar 3.1 Alur Penelitian

Berikut penjelasan dari prosedur penelitian untuk menentukan bilangan kromatik *packing* pada famili graf pohon dan graf hasil operasi amalgamasi titik adalah sebagai berikut:

1) Menentukan graf yang diteliti meliputi;
   a. graf *centipede*, graf kembang api, graf sapu, graf bintang ganda, graf pohon pisang;
   b. graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan, graf hasil operasi amalgamasi titik graf sapu dan graf hasil operasi amalgamasi titik graf bintang.
2) Menentukan kardinalitas graf yang diteliti yaitu graf *centipede*, graf kembang api, graf sapu, graf bintang ganda, graf pohon pisang, graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan, graf hasil operasi amalgamasi titik graf sapu dan graf hasil operasi amalgamasi titik graf bintang;
4) Menentukan pembentukan pola pewarnaan *packing* yang telah diperoleh;
5) Mengkaji ulang pola pewarnaan *packing* yang telah diperoleh dengan menyesuaikan terhadap definisi pewarnaan *packing*;
6) Menentukan bilangan kromatik *packing* pada graf yang diteliti;
7) Membuat teorema mengenai bilangan kromatik *packing*;
8) Membuktikan kebenaran dari teorema yang telah diperoleh pada penelitian ini.

3.4 Observasi Awal Penelitian

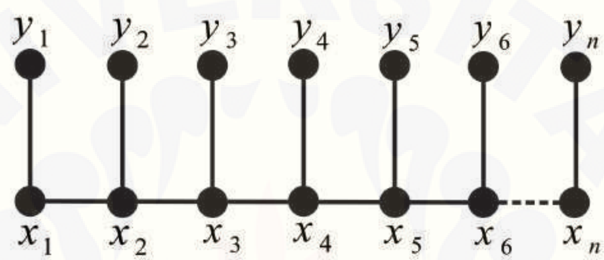
Langah awal pada penelitian ini yaitu, menentukan graf yang digunakan. Tujuan dilakukannya hal tersebut adalah untuk memberikan batasan permasalahan yang dibahas serta untuk menduga bilangan kromatik *packing* pada suatu graf.

3.4.1 Jenis Graf yang Diteliti

Jenis graf yang diteliti yaitu, famili graf pohon meliputi; graf *centipede*, graf kembang api, graf sapu, graf bintang ganda, graf pohon pisang dan graf hasil operasi amalgamasi titik meliputi; graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan, graf hasil operasi amalgamasi titik graf sapu dan graf hasil operasi amalgamasi titik graf bintang. Berikut definisi setiap graf yang diteliti:

1. Graf *Centipede* Cp_n

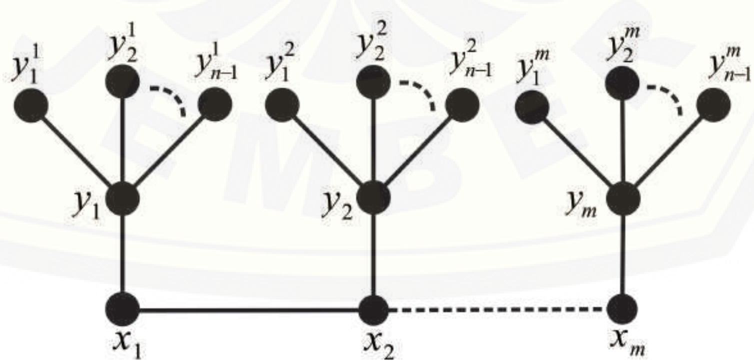
   Graf *centipede* adalah graf hasil gabungan dari n titik yang terhubung melalui sebuah sisi masing-masing terhadap titik pada graf P_2 sehingga membentuk sebuah graf yang menyerupai hewan kaki seribu (Purnapraja dkk, 2014:228). Contoh graf *centipede* dapat dilihat pada Gambar 3.2



Gambar 3.2 Graf *Centipede* Cp_n

2. Graf Kembang Api / *Firecracker Graph* $F_{m,n}$

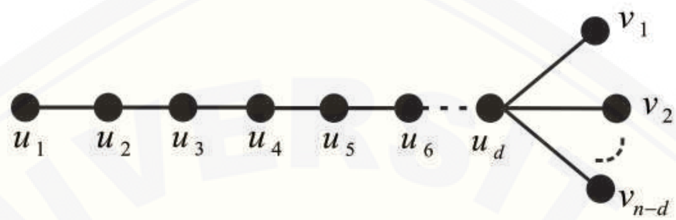
   Graf kembang api adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan m buah graf bintang dan menghubungkan salah satu daun pada masing-masing graf bintang (Chen dkk, 1997). Contoh graf kembang api dapat dilihat pada Gambar 3.3



Gambar 3.3 Graf Kembang Api $F_{m,n}$

3. Graf Sapu / *Broom Graph* B_d^n

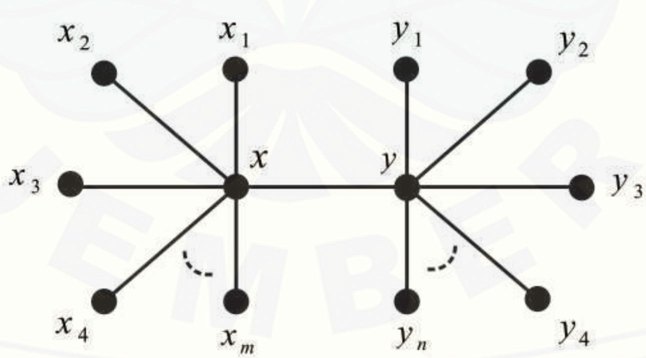
   Graf sapu adalah graf dengan n titik yang memuat graf lintasan dengan d titik dan $n-d$ titik daun yang semuanya bertetangga dengan salah satu titik ujung dari graf lintasan. Graf sapu dinotasikan dengan B_d^n untuk $d \geq 3$ dan $n-d \geq 2$ (Sriram dkk, 2014:147). Contoh graf sapu dapat dilihat pada Gambar 3.4



Gambar 3.4 Contoh Graf Sapu B_d^n

4. Graf Bintang Ganda / *Double Star Graph* $S_{m,n}$

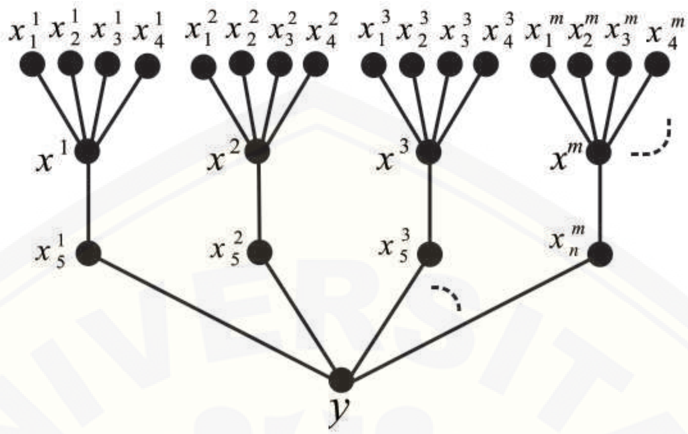
   Graf bintang ganda adalah graf yang memiliki dua titik sebagai titik *central* sekaligus bukan sebagai titik akhir dan graf bintang ganda memiliki diameter tiga. Graf bintang ganda dinotasikan dengan $S_{m,n}$ untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ (Chartrand dkk, 2019:16). Contoh graf bintang ganda dapat dilihat pada Gambar 3.5



Gambar 3.5 Graf Bintang Ganda $S_{m,n}$

5. Graf Pohon Pisang / *Banana Tree Graph* $B_{m,n}$

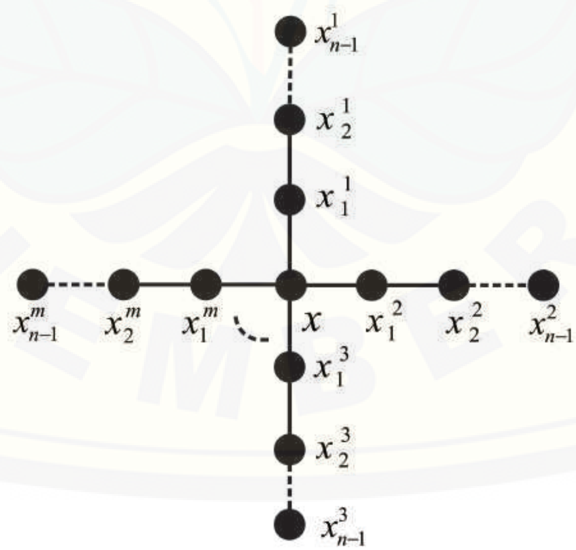
   Graf pohon pisang adalah sebuah graf yang memuat titik y dan dihubungkan dengan salah satu daun pada m salinan graf bintang (Maowa, 2016:37). Contoh graf pohon pisang dapat dilihat pada Gambar 3.6



Gambar 3.6 Graf Pohon Pisang $B_{m,n}$

6. Graf Hasil Operasi Amalgamasi Graf Lintasan $amal(P_n, v, m)$

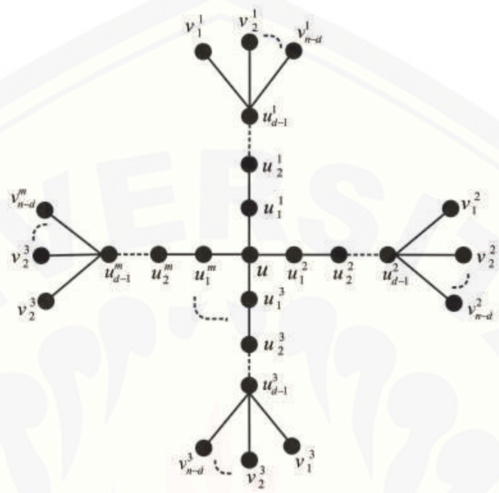
   Graf hasil operasi $amal(P_n, v, m)$ merupakan graf lintasan yang dioperasikan dengan amalgamasi titik dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Contoh graf $amal(P_n, v, m)$ dapat dilihat pada Gambar 3.7



Gambar 3.7 Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik Graf Lintasan $amal(P_n, v, m)$

7. Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik Graf Sapu $amal(B_d^n, v, m)$

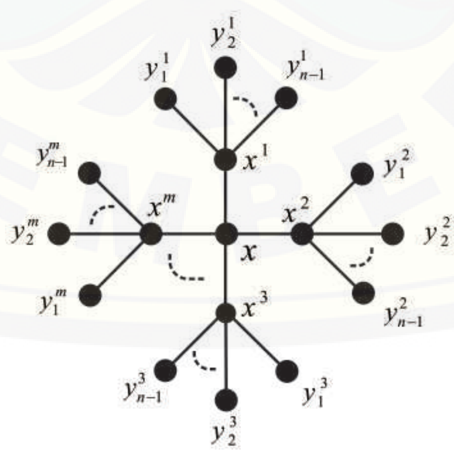
   Graf hasil operasi $amal(B_d^n, v, m)$ merupakan graf sapu yang dioperasikan dengan amalgamasi titik dengan $d \geq 3, n - d \geq 2$ dan $m \geq 2$. Contoh graf $amal(B_d^n, v, m)$ dapat dilihat pada Gambar 3.8



Gambar 3.8 Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik Graf Sapu $amal(B_d^n, v, m)$

8. Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik Graf Bintang $amal(S_n, v, m)$

   Graf hasil operasi $amal(S_n, v, m)$ merupakan graf bintang yang dioperasikan dengan amalgamasi titik dengan $n \geq 3$ dan $m \geq 2$. Contoh graf $amal(S_n, v, m)$ dapat dilihat pada Gambar 3.9



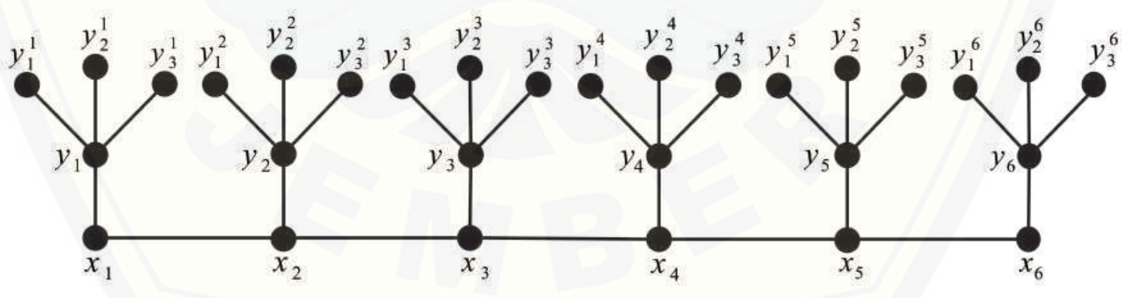
Gambar 3.9 Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik Graf Bintang $amal(S_n, v, m)$

3.4.2 Contoh Observasi Awal

Pada bagian ini dilakukan observasi awal pada salah satu graf yaitu graf kembang api $F_{6,4}$. Tujuan dari observasi awal tersebut adalah menduga hasil penerapan definisi pewarnaan *packing* pada graf dan menentukan pola warnanya hingga akhirnya diperoleh bilangan kromatik *packing*. Langkah-langkah pada observasi awal adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan graf kembang api $F_{6,4}$.
2. Menentukan kardinalitas dari graf kembang api $F_{6,4}$.
3. Menentukan pola pewarnaan *packing* sesuai definisi pewarnaan *packing* pada graf kembang api $F_{6,4}$.
4. Mengkaji kembali pola pewarnaan yang diperoleh sehingga memenuhi definisi pewarnaan *packing*.
5. Menentukan bilangan kromatik *packing* pada graf kembang api $F_{6,4}$.

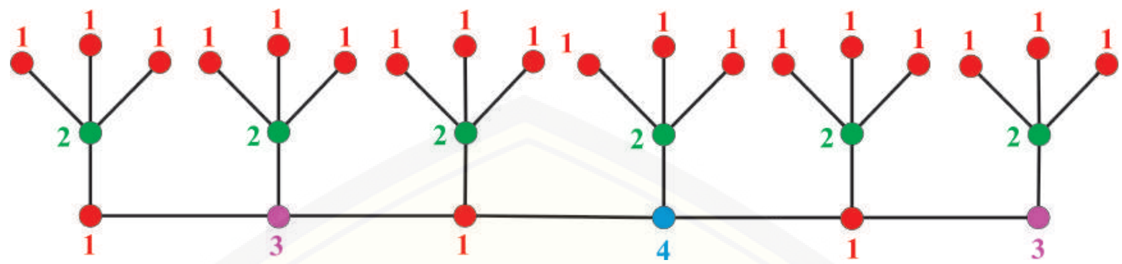
Berdasarkan langkah-langkah diatas, berikut penjelasan dari masing-masing langkah tersebut yaitu graf kembang api $F_{6,4}$ merupakan graf yang diperoleh dengan menggabungkan 6 buah graf bintang dan menghubungkan salah satu daun pada masing-masing graf bintang S_4. Contoh dari graf kembang api $F_{6,4}$ dapat dilihat pada Gambar 3.10



Gambar 3.10 Contoh Graf Kembang Api $F_{6,4}$

Kemudian kardinalitas dari himpunan titik dan himpunan sisi graf kembang api $F_{6,4}$ masing-masing yaitu, $|V(F_{6,4})| = 30$ dan $|E(F_{6,4})| = 29$. Setelah menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi berikutnya menentukan pola pewarnaan *packing*. Berikut pola pewarnaan *packing* pada graf kembang api $F_{6,4}$ dapat dilihat pada Gambar

3.11



Gambar 3.11 Pewarnaan *Packing* pada Graf Kembang Api $F_{6,4}$

Selanjutnya mengkaji pola pewarnaan *packing* pada graf kembang api $F_{6,4}$. Tabel 3.1 menjelaskan pola pewarnaan yang disesuaikan dengan definisi pewarnaan *packing* dan diperoleh $\chi_\rho(F_{6,4}) = 4$ untuk $m = 6$.

Tabel 3.1: Pengecekan Pewarnaan *Packing* pada Graf Kembang Api $F_{6,4}$

Jarak Antar Titik	Pewarnaan *Packing*
$d(x_i, x_{i+2}) \geq 2$	1, untuk i gasal
$d(y_j^i, y_{j+1}^i) \geq 2$	1, untuk $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n-2$
$d(y_i, y_{i+1}) \geq 3$	2, untuk $1 \leq i \leq m$
$d(x_i, x_{i+4}) \geq 4$	3, untuk $i \equiv 2 \pmod 4$

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada Bab 4, dapat disimpulkan bahwa penelitian ini menghasilkan lima teorema tentang bilangan kromatik *packing* pada famili graf pohon dan tiga teorema tentang bilangan kromatik *packing* pada graf hasil operasi amalgamasi titik yaitu:

1. Bilangan kromatik *packing* pada graf *centipede* Cp_n untuk $n \geq 2$ adalah
$$\chi_\rho(Cp_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 2, 3 \\ 4, & \text{untuk } 4 \leq n \leq 7 \\ 5, & \text{untuk } n \geq 8 \end{cases}$$
2. Bilangan kromatik *packing* pada graf kembang api $F_{m,n}$ untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ adalah
$$\chi_\rho(F_{m,n}) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } m = 2, 3 \\ 4, & \text{untuk } 4 \leq m \leq 7 \\ 5, & \text{untuk } m \geq 8 \end{cases}$$
3. Bilangan kromatik *packing* pada graf sapu B_d^n untuk $d \geq 3$ dan $n - d \geq 2$ adalah 3.
4. Bilangan kromatik *packing* pada graf bintang ganda $S_{m,n}$ untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 2$ adalah 3.
5. Bilangan kromatik *packing* pada graf pohon pisang $B_{m,n}$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah 3.
6. Bilangan kromatik *packing* pada graf hasil operasi amalgamasi titik graf lintasan $amal(P_n, v, m)$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ adalah

$$\chi_\rho(amal(P_n, v, m)) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } n = 2 \text{ dan } m \geq 2 \\ 3, & \text{untuk } n > 2 \text{ dan } m \geq 2 \end{cases}$$

7. Bilangan kromatik *packing* pada graf hasil operasi amalgamasi titik graf sapu $amal(B_d^n, v, m)$ untuk $d \geq 3, n - d \geq 2$ dan $m \geq 2$ adalah 3.

8. Bilangan kromatik *packing* pada graf hasil operasi amalgamasi titik graf bintang $amal(S_n, v, m)$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ adalah

$$\chi_\rho(amal(S_n, v, m)) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m \geq 2 \text{ dan } n = 3 \\ m + 1, & \text{untuk } m \geq 2 \text{ dan } n > 3 \end{cases}$$

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pewarnaan *packing*, terdapat beberapa keluarga graf seperti keluarga graf grid, keluarga graf dengan operasi lainnya seperti operasi amalgamasi sisi, *comb*, *cartesian* dan sebagainya yang masih belum ditemukan pola pewarnaan *packing*nya.

DAFTAR PUSTAKA

Alfarisi, R., A. I. Kristiana., M. I. Utoyo dan Dafik. tanpa tahun. Bilangan Kromatik *Packing* pada Graf Jahangir. *preprint*.

Ariningtyas, R. 2020. Analisis Bilangan Kromatik *Packing* pada Keluarga Graf *Unicyclic* Dikaitkan dengan Keterampilan Berpikir Metakognisi. *Skripsi*. Jember: Universitas Jember.

Ariningtyas, R., A.I. Kristiana dan Dafik. 2020. On The Packing $k-$ Coloring of Unicyclic Graph Family. *International Journal of Academic and Applied Research (IJAAR)*. 4(1): 1-9.

Asmiati, H. Assiyatun dan E. T. Baskoro. 2011. Locating- Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB J.SCi*. 43A(1): 1-8.

Balakrishnan, R dan K. Ranganathan. 2012. *A Textbook of Graph Theory Second Edition* . New York: Springer Science+Business Media.

Bondy, J. A dan U. S. R. Murty. 1976. *Graph Theory with Applications*. United States of America: Elsevier Science Publishing Co., Inc.

Brešar, B., S. Klavžar dan D. F. Rall. 2007. On the Packing Chromatic Number of Cartesian Product, Hexxagonal Lattice and Trees. *Discrete Applied Mathematics*. 155(17): 2303-2311.

Chartrand, G dan L. Lesniak. 1996. *Graph and Diagraphs Third Edition*. United States America: Chapman and Hall/CRC.

Chartrand, G., C. Egan dan P. Zhang. 2019. *How to Label a Graph*. Switzerland: Springer Nature Switzerland AG.

Chen, W. C., H.I. Lu dan Y. N. Yeh. 1997. Operations of Interlaced Trees and Graceful Trees. *Southeast Asian Bull Math*. 21:337-348.

Dafik. 2015. Teori Graf, Aplikasi dan Tumbuhnya Keterampilan Berpikir Tingkat Tnggi. *Makalah Orasi Ilmiah*. Jember: Pengukuhan Profesor di Lingkungan Universitas Jember: 19 Mei.

Dafik., A. I. Kristiana., K. Rajalakshmi., M. Venkatachalam., I. H. Agustin dan M. Barani. tanpa tahun . On Packing Coloring of Graphs and Its Operation. *preprint*.

Finbow, A. S dan D. F Rall. 2010. On The Packing Chromatic Number of Some Lattice. *Discrete Applied Mathematics*. 158(12): 1224-1228.

Fitriani, D dan A. N. M. Salman. 2016. Rainbow Connection Number of Amalgamation of Some Graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*. 13(1): 90-99.

Goddard, W., S. M. Hedetniemi., S.T. Hedetniemi., J. M. Harris dan D. F. Rall. 2008. Braodcast Chromatic Numbers of Graphs. *Ars Combinatoria*. 86:1-21.

Hartsfield, N dan G. Ringel. 1990. *Pearls in Graph Theory A Comprehensive Introduction*. London: Academic Press,Inc.

Jensen, J. B dan G. Gutin. 2007. *Digraphs Theory, Algorithms and Applications*. London: Springer-Verlag.

Joedo, J. C. 2020. Analisis Bilangan Kromatik *Packing* pada Graf Hasil Operasi *Edge Corona* dan Relevasinya dengan Keterampilan Berpikir Kreatif. *Skripsi*. Jember: Universitas Jember.

Joedo, J. C., A.I. Kristiana., Dafik dan R. Alfarisi. 2019. On The Packing $k-$ Coloring of Edge Corona Product. *International Journal of Academic and Applied Research (IJAAR)*. 3(12): 55-59.

Jungnickel, D. 2008. *Graphs, Networks and Algorithms Third Edition*. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Lee S. M., E. Schmeichel dan S. C. Shee. 1991. On Felicitous Graphs. *Discrete Mathematics*. 93: 201-209.

Levin, O. 2019. *Discrete Mathematics an Open Introduction 3rd Edition*. Colorado: University of Northern Colorado.

Maowa, J. 2016. A Study on Graceful Labeling of Trees. *Thesis*. Bangladesh: Departement of Computer Science and Engineering. Bangladesh University of Engineering and Technology (BUET).

Minarti, L. D, Dafik, S. Setiawani, Slamin dan A. Fatahillah. 2019. Pewarnaan Sisi r-Dinamis Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik Keluarga Graf Pohon dan Kaitannya dengan Ketereampilan Berpikri Tingkat Tinggi. *Saintifika*. 21(2): 16-22.

Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit*. Edisi Ketiga. Bandung: Informatika Bandung.

Pancahayani, S. 2017. Dekomposisi Super Ajaib Berbentuk Lintasan dari Amalgamasi Graf Siklus. *Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*. 2(2): 128-133.

Purnapraja, A. K, F. Cholidah dan Dafik. 2014. Super (a,d)-H- Antimagic Total Selimut pada Graf Centipede. *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014*. 1(1). 19 November 2014: 227-241.

Rajalakshmi, K dan M. Venkatachalam. 2018. On Packing Coloring of Double Wheel Graph Families. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 119(12): 2389-2396.

Roy, S. 2017. Packing Chromatic Number of Certain Fan and Wheel Related Graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*. 14(1): 63-69.

Sriram, S., D. Ranganayakulu., I. Venkat dan K. G. Subramanian. 2014. On Eccentric Graphs of Broom Graphs. *Annals of Pure and Applied Mathematics*.

5(2):146-152.

William, A dan S. Roy. 2013. Packing Chromatic Number of Certain Graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 87(6): 731-739.

LAMPIRAN

Lampiran A. Matrik Penelitian

Judul	**Latar Masalah**	**Rumusan Masalah**	**Variabel**	**Indikator**	**Sumber Data**	**Jenis Penelitian**	**Metode Penelitian**
Pewarnaan *Packing* pada Famili Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik	1. Teori graf 2. Pewarnaan graf 3. Operasi graf	Bagaimana bilangan kromatik *packing* pada famili graf pohon dan graf hasil operasi amalga-masi titik ?	1.Famili graf pohon 2.Operasi amalgamasi titik 3.Pewarnaan *packing*	Untuk menen-tukan pewarnaan *packing* pada famili graf pohon dan graf hasil operasi amalga-masi titik	Kepusta-kaan	Penelitian eksploratif	1.Metode deduktif aksiomatik 2.Metode pendeteksian pola

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN RI
UNIVERSITAS JEMBER
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
Jalan Kalimantan Nomor 37 Kampus Bumi Tegalboto Jember 68121
Telepon: 0331- 334988, 330738 Faks: 0331-334988
Laman: www.fkip.unej.ac.id

LEMBAR REVISI SKRIPSI

NAMA MAHASISWA : Sri Moeliyana Citra
NIM : 170210101072
JUDUL SKRIPSI : Pewarnaan *Packing* pada Famili Graf Pohon dan Graf Hasil Operasi Amalgamasi Titik
TANGGAL UJIAN : 15 Januari 2021
PEMBIMBING : Dr.Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.
Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si.

MATERI PEMBETULAN / PERBAIKAN

No.	HALAMAN	HAL-HAL YANG HARUS DIPERBAIKI
1.	2	Tambahan definisi intuitif tentang pewarnaan *packing*
2.	3	Tambahkan kalimat penjelas pada definisi intuitif tentang operasi amalgamasi titik
3.	10	Perbaikan definisi graf pohon dan tambahkan definisi intuitif graf pohon
4.	14	Tambahkan definisi intuitif operasi amalgamasi titik dan definisi intuitif titik tetap
5.	29-30, 49	Perbaikan pada *blank space* agar tampilan naskah lebih rapi

PERSETUJUAN TIM PENGUJI

JABATAN	NAMA TIM PENGUJI	TTD dan Tanggal
Ketua	Dr.Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.	
Sekretaris	Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si.	
Anggota	Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D.	
	Ermita Rizki Albirri, S.Pd., M.Si.	

Jember, 15 Januari 2021
Mengetahui / menyetujui :

Dosen Pembimbing I,

Dr.Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.
NIP. 19760502 200604 2 001

Dosen Pembimbing II,

Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si.
NIP. 19920731 201903 2 015

Mahasiswa Yang Bersangkutan

Sri Moeliyana Citra
NIM. 170210101072

Mengetahui,
Ketua Jurusan P.MIPA

Dr. Dwi Wahyuni, M.Kes.
NIP. 19600309 198702 2 002