



PENERAPAN METODE NEWTON-COTES OPEN FORM 5 TITIK UNTUK MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN NONLINIER

M Ziaul Arif [✉], Yasmin Farida, Ahmad Kamsyakawuni

Jurusan Matematika FMIPA
Universitas Jember

Info Artikel

Sejarah Artikel:
Diterima April 2017
Disetujui Mei 2017
Dipublikasikan Mei 2017

Keywords:

*Nonlinear Equation Systems,
Newton Method,
Newton-Cotes Open Form*

Abstrak

Dalam Artikel ini, kami membahas mengenai metode penyelesaian sistem persamaan nonlinier dengan menggunakan 2 (dua) skema baru yaitu skema 3 langkah. Skema-skema tersebut merupakan skema yang didasarkan pada metode *Newton* dan dikembangkan dengan memanfaatkan metode integrasi numerik *Newton-Cotes Open Form 5 titik*. Berdasarkan analisis konvergensi, skema baru tersebut memiliki konvergensi berorde-3 dan berorde-4. Beberapa contoh hasil numerik dan perbandingan dengan metode *Newton* ditunjukkan pada bagian akhir artikel ini.

Abstract

In this article, we discuss the method of solving nonlinear equation system using two new schemes. The schemes are a multi-step scheme based on the Newton method and developed by utilizing numerical integration method i.e. the Open Form Newton-Cotes 5 points. We prove the third and fourth order of convergence of these methods. Several numerical examples are tested of the new iterative methods and compared with Newton method and others at the end of part.

How to Cite

Arif M.Z., Farida, Y., & Kamsyakawuni, A. (2017). Penerapan Metode Newton-Cotes Open Form 5 Titik untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Nonlinier. *Unnes Journal of Mathematics*, 6(1): 102-107.

PENDAHULUAN

Mencari solusi sistem persamaan nonlinear (SPNL) merupakan masalah yang menarik dalam analisis numerik. Sistem persamaan nonlinear yang diberikan $F(x): D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, Masalahnya adalah untuk menemukan vektor $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^t$ sehingga $F(\beta) = 0$, dimana

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^t,$$

dan $x = (x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})^t$

Metode penyelesaian numerik sistem persamaan nonlinear yang terkenal adalah metode Newton. Namun, beberapa tahun terakhir, banyak para ilmuwan matematika mengembangkan metode dalam menyelesaikan sistem persamaan nonlinear. Mulai dari metode satu langkah sampai dengan metode multi langkah.

Prinsip dari metode multi langkah adalah adanya langkah yang memprediksi dan adanya langkah yang mengoreksi. Sehingga sering disebut dengan metode dengan prinsip prediktor-korektor. Wang (2011) menggunakan skema orde tiga dari metode iterasi Newton – like untuk memecahkan sistem persamaan nonlinear. Fontini dan Sormani (2003), dan Khirallah dan Hafiz (2012, 2013) telah mengembangkan metode berorde tiga *Newton-family* untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear (SPNL). Sedangkan Cordero et al (2007, 2009, 2012) mendapatkan metode berorde lima. Semua peneliti tersebut menerapkan prinsip prediktor-korektor.

Masih banyaknya peluang pengembangan metode penyelesaian sistem persamaan nonlinear, sehingga penulis tertarik memodifikasi metode 3 langkah yang dimodifikasi berdasar pada metode yang ditemukan oleh peneliti di atas tersebut. Dalam artikel ini akan dibahas metode yang sudah ditemukan oleh penulis dengan menerapkan metode integrasi numerik orde tinggi *Newton-Cotes Open form 5 titik*. Akhirnya, peneliti melakukan analisis untuk mengetahui orde konvergensinya, dan mengetahui hasil solusinya jika dibandingkan dengan metode Newton dan lainnya.

METODE

Penelitian ini dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Studi literatur metode multi-langkah penyelesaian sistem persamaan nonlinear.
2. Mengembangkan metode multi langkah berdasarkan metode Newton dan integrasi numerik *Newton-Cotes Open form 5 titik*
3. Menganalisis orde konvergensi.
4. Membuat program dengan MATLAB.
5. Komparasi hasil yang diperoleh dengan metode Newton.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Cordero [5] telah mengembangkan metode tiga langkah dengan rumusan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_i &= x_i - F'(x_i)^{-1}F(x_i), \\ z_i &= x_i - 2[F'(y_i) + F'(x_i)]^{-1}F(x_i), \\ x_{i+1} &= z_i - F'(y_i)^{-1}F(z_i) \end{aligned} \tag{1}$$

dimana y_i adalah langkah pertama sebagai prediktor, z_i adalah langkah kedua sebagai prediktor, dan x_{i+1} adalah langkah ketiga sebagai korektor. Modifikasi metode yang dilakukan pada penelitian ini yaitu dengan formula yang didasarkan *Newton-Cotes Open form 5 titik* pada pembahasan selanjutnya.

Misalkan X adalah solusi dari fungsi terdiferensialkan dan pandang solusi numerik dari sistem persamaan $F(x) = 0$, dimana $F: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ adalah pemetaan yang *continue* pada himpunan konveks D , memiliki akar unik di dalam D , $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ dan $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ merupakan fungsi nonlinear, maka

$$F(x) = F(x_i) + \int_{x_i}^x F'(t) dt \tag{2}$$

Jika integral pada persamaan (2) diaproksimasi dengan menggunakan metode integrasi numerik *Newton-Cotes open form 5 titik*, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_6} f(x) dx &= \frac{6h}{20} \left[11f\left(\frac{5x_0+x_6}{6}\right) - 14f\left(\frac{4x_0+2x_6}{6}\right) + \right. \\ & 26f\left(\frac{3x_0+3x_6}{6}\right) - 14f\left(\frac{2x_0+4x_6}{6}\right) + \\ & \left. 11f\left(\frac{x_0+5x_6}{6}\right) \right]. \end{aligned} \tag{3}$$

dengan mengasumsikan $x_0 = x_i$ dan $x_6 = x$, $h = \frac{x-x_i}{6}$. Misalkan $F(x)$ pada ruas kanan (2) adalah suatu sistem persamaan nonlinear yang diaproksimasi dengan persamaan (3), maka tujuan untuk menyelesaikan SPNL yaitu dengan mendapat suatu vektor X^* dimana $F(X^*) = 0$, sehingga

$$x = x_i - 20 \left[11F' \left(\frac{5x_i + x}{6} \right) - 14F' \left(\frac{4x_i + 2x}{6} \right) + 26F' \left(\frac{3x_i + 3x}{6} \right) - 14F' \left(\frac{2x_i + 4x}{6} \right) + 11F' \left(\frac{x_i + 5x}{6} \right) \right]^{-1} F(x_i). \quad (4)$$

Persamaan (4) di atas adalah persamaan implisit. Karena Solusi SPNL adalah mencari kovergenitas barisan solusi. Dengan kata lain bahwa nilai x sekarang dan sebelumnya adalah hampir sama, sehingga persamaan (4) bisa diasumsikan persamaan yang eksplisit dalam mencari solusi pendekatan dari SPNL jika nilai x di ruas kanan diestimasi dengan langkah prediksi yang nilainya dekat dengan nilai x pada ruas kiri. Selanjutnya digunakan skema prediksi dan koreksi dalam menentukan solusi pendekatan SPNL yang digabungkan dengan metode Newton. Sehingga teknik prediksi dan koreksi yang didapatkan adalah sebagai berikut:

Algoritma 1:

$$y_i = x_i - F'(x_i)^{-1}F(x_i),$$

$$z_i = x_i - 2[F'(y_i) + F'(x_i)]^{-1}F(x_i),$$

$$x_{i+1} = y_i - 20 \left[11F' \left(\frac{5x_i + z_i}{6} \right) - 14F' \left(\frac{4x_i + 2z_i}{6} \right) + 26F' \left(\frac{3x_i + 3z_i}{6} \right) - 14F' \left(\frac{2x_i + 4z_i}{6} \right) + 11F' \left(\frac{x_i + 5z_i}{6} \right) \right]^{-1} F(y_i). \quad (5)$$

Algoritma 2:

Variabel x_i dan z_i pada algoritma 1 memiliki nilai yang hampir sama sehingga untuk mendapatkan orde yang lebih tinggi akan diterapkan suatu interpolasi titik yang dapat ditulis berturut-turut untuk nilai w_r sebagai berikut:

$$w_1 = \frac{28x_i - 20z_i}{8}, w_2 = \frac{11x_i - 3z_i}{8}, w_3 = \frac{-5x_i + 13z_i}{8},$$

$$w_4 = \frac{19x_i - 11z_i}{8}, \text{ dan } w_5 = \frac{22x_i - 14z_i}{8}.$$

sehingga bentuk skema algoritma 2 sebagai berikut:

$$y_i = x_i - F'(x_i)^{-1}F(x_i),$$

$$z_i = x_i - 2[F'(y_i) + F'(x_i)]^{-1}F(x_i), \quad (6)$$

$$x_{i+1} = y_i - 20 \left[11F' \left(\frac{28x_i - 20z_i}{8} \right) - 14F' \left(\frac{11x_i - 3z_i}{8} \right) + 26F' \left(\frac{-5x_i + 13z_i}{8} \right) - 14F' \left(\frac{19x_i - 11z_i}{8} \right) + 11F' \left(\frac{22x_i - 14z_i}{8} \right) \right]^{-1} F(y_i).$$

Analisis Konvergensi

Teorema 1: Misalkan x^* adalah solusi sederhana dari fungsi F . Jika x awal cukup mendekati solusi yaitu x^* , maka metode tiga langkah yang telah didefinisikan pada persamaan (5) mempunyai orde konvergensi yaitu orde 3.

Bukti:

Langkah pertama

Pada persamaan (5) langkah pertama bisa ditulis sebagai berikut:

$$y_n = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad (7)$$

Dengan menggunakan deret Taylor dipersekitaran titik x^* yaitu titik x_n ,

$$F(x_n) = F(x^*) + F'(x^*)(x_n - x^*) + F''(x^*) \frac{(x_n - x^*)^2}{2!} + F'''(x^*) \frac{(x_n - x^*)^3}{3!} + \dots$$

Karena $F(x^*) = 0$, misalkan $C_k = \frac{1}{k!} \frac{F^{(k)}(x^*)}{F'(x^*)}$, $k = 2, 3, \dots$ dan $E_n = x_n - x^*$, maka kita mempunyai:

$$F(x_n) = F'(x^*) [E_n + C_2 E_n^2 + C_3 E_n^3 + O(\|E_n^4\|)], \quad (8)$$

dan turunannya,

$$F'(x_n) = F'(x^*) [1 + 2C_2 E_n + 3C_3 E_n^2 + O(\|E_n^3\|)]. \quad (9)$$

Dari deret Taylor (8) dan (9) tersebut, maka

$$\frac{F(x_n)}{F'(x_n)} = E_n - C_2 E_n^2 + 2(C_2^2 - C_3) E_n^3 + O(\|E_n^4\|). \quad (10)$$

Kemudian persamaan (10) di atas disubstitusikan ke persamaan (7), dengan $E_n = x_n - x^*$ maka ekspansi deret Taylor untuk persamaan (7) adalah

$$y_n = x^* + C_2 E_n^2 + 2(C_3 - C_2^2) E_n^3 + O(\|E_n^4\|). \quad (11)$$

Langkah kedua

$$z_n = x_n - 2[F'(y_n) + F'(x_n)]^{-1}F(x_n).$$

Dari langkah pertama, kita mendapatkan (8). Selanjutnya dengan menggunakan teknik yang sama yaitu deret Taylor akan dicari $F(y_n)$ dan $F'(y_n)$, dan didapatkan

$$F(y_n) = F'(x^*)[C_2E_n^2 + 2(C_3 - C_2^2)E_n^3] + O(\|E_n^4\|) \quad (12)$$

serta turunannya

$$F'(y_n) = F'(x^*)[I + 2C_2^2E_n^2] + O(\|E_n^3\|). \quad (13)$$

Selanjutnya kita memiliki

$$F'(y_n) + F'(x_n) = 2F'(x^*)\left[I + C_2E_n + \left(C_2^2 + \frac{3}{2}C_3\right)E_n^2\right] + O(\|E_n^3\|). \quad (14)$$

Dari persamaan (8) dan (14) yang disubstitusikan pada persamaan (5) langkah kedua, maka didapatkan

$$z_n = x^* + \left(C_2^2 + \frac{1}{2}C_3\right)E_n^3 + O(\|E_n^4\|). \quad (15)$$

Langkah Ketiga

$$x_{n+1} = y_n - 20 \left[11F' \left(\frac{5x_n + z_n}{6} \right) - 14F' \left(\frac{4x_n + 2z_n}{6} \right) + 26F' \left(\frac{3x_n + 3z_n}{6} \right) - 14F' \left(\frac{2x_n + 4z_n}{6} \right) + 11F' \left(\frac{x_n + 5z_n}{6} \right) \right]^{-1} F(y_n).$$

Misalkan $w_1 = \frac{5x_n + z_n}{6}$, $w_2 = \frac{4x_n + 2z_n}{6}$, $w_3 = \frac{3x_n + 3z_n}{6}$, $w_4 = \frac{2x_n + 4z_n}{6}$, dan $w_5 = \frac{x_n + 5z_n}{6}$, dan seara umum deret Taylor sehingga $F'(w_r)$ sebagai berikut,

$$F'(w_r) = F'(x^*)[I + 2C_2(w_r - x^*) + 3C_3(w_r - x^*)^2] + O(\|E_n^3\|) \quad (16)$$

dengan $r = 1 \dots 5$.

Kemudian dengan mensubstitusikan w_r dan z_n adalah persamaan (15) pada persamaan (16) didapat

$$F'(w_1) = F'(x^*)\left[I + \frac{5}{3}C_2E_n + \frac{25}{12}C_3E_n^2\right] + O(\|E_n^3\|),$$

$$F'(w_2) = F'(x^*)\left[I + \frac{4}{3}C_2E_n + \frac{4}{3}C_3E_n^2\right] + O(\|E_n^3\|),$$

$$F'(w_3) = F'(x^*)\left[I + C_2E_n + \frac{3}{4}C_3E_n^2\right] + O(\|E_n^3\|),$$

$$F'(w_4) = F'(x^*)\left[I + \frac{2}{3}C_2E_n + \frac{1}{3}C_3E_n^2\right] + O(\|E_n^3\|),$$

$$F'(w_5) = F'(x^*)\left[I + \frac{1}{3}C_2E_n + \frac{1}{12}C_3E_n^2\right] + O(\|E_n^3\|),$$

sehingga

$$11F'(w_1) - 14F'(w_2) + 26F'(w_3) - 14F'(w_4) + 11F'(w_5) = 20F'(x^*)[I + C_2E_n + C_3E_n^2] + O(\|E_n^3\|). \quad (17)$$

Dari persamaan (11), (12), dan (17) yang disubstitusikan pada persamaan (5) langkah ketiga, diperoleh

$$x_{n+1} = x^* + C_2E_n^2 + 2(C_3 - C_2^2)E_n^3 + O(\|E_n^4\|) - [C_2E_n^2 + 2(C_3 - C_2^2)E_n^3 - C_2^2E_n^3 + O(\|E_n^4\|)].$$

diketahui $E_{n+1} = x_{n+1} - x^*$,

$$\text{jadi, } E_{n+1} = C_2^2E_n^3 + O(\|E_n^4\|).$$

Dengan langkah logis di atas, maka terbukti bahwa persamaan (5) mempunyai orde konvergensi yaitu orde 3. □

Teorema 2: Misalkan x^* adalah solusi sederhana dari fungsi F . Jika x awal cukup mendekati solusi yaitu x^* , maka metode tiga langkah yang telah didefinisikan pada persamaan (6) mempunyai orde konvergensi yaitu orde 4.

Bukti:

Langkah 1 dan langkah 2 sama dengan pembuktian pada Algoritma 1, selanjutnya dilakukan analisis konvergensi untuk persamaan (6) langkah ketiga sebagai berikut.

Langkah ketiga

$$\text{Misalkan, } w_1 = \frac{28x_i - 20z_i}{8}, w_2 = \frac{11x_i - 3z_i}{8}, w_3 = \frac{-5x_i + 13z_i}{8}, w_4 = \frac{19x_i - 11z_i}{8}, \text{ dan } w_5 = \frac{22x_i - 14z_i}{8}.$$

Serta diketahui deret Taylor seperti pada persamaan (16). Kemudian dengan mensubstitusikan w_r di atas dan z_n adalah persamaan (15) pada persamaan (16), didapat

$$F'(w_1) = F'(x^*)\left[I + 7C_2E_n + \frac{147}{4}C_3E_n^2\right] + O(\|E_n^3\|),$$

$$F'(w_2) = F'(x^*)\left[I + \frac{11}{4}C_2E_n + \frac{363}{64}C_3E_n^2\right] + O(\|E_n^3\|),$$

$$F'(w_3) = F'(x^*)\left[I - \frac{5}{4}C_2E_n + \frac{75}{6}C_3E_n^2\right] + O(\|E_n^3\|),$$

$$F'(w_4) = F'(x^*)\left[I + \frac{19}{4}C_2E_n + \frac{1083}{64}C_3E_n^2\right] + O(\|E_n^3\|),$$

$$F'(w_5) = F'(x^*) \left[I + \frac{11}{2} C_2 E_n + \frac{363}{16} C_3 E_n^2 \right] + O(\|E_n^3\|),$$

sehingga

$$11F'(w_1) - 14F'(w_2) + 26F'(w_3) - 14F'(w_4) + 11F'(w_5) = 20F'(x^*) \left[I + \frac{1325}{2} C_3 E_n^2 \right] + O(\|E_n^3\|). \tag{18}$$

Dari persamaan (11), (12), dan (18) diperoleh

$$x_{n+1} = x^* + C_2 E_n^2 + 2(C_3 - C_2^2) E_n^3 + O(\|E_n^4\|) - [C_2 E_n^2 + 2(C_3 - C_2^2) E_n^3 + O(\|E_n^4\|)].$$

diketahui $E_{n+1} = x_{n+1} - x^*$,

jadi, $E_{n+1} = O(\|E_n^4\|)$.

Dengan demikian pembuktian di atas telah selesai, terbukti bahwa persamaan (6) mempunyai orde konvergensi yaitu orde 4. □

Contoh Hasil Numerik

Berikut ini akan diberikan 3 contoh SPNL yang dirujuk dari beberapa artikel [3,4,7] yang hasilnya akan dibandingkan dengan metode Newton dan KHM1 [3]. Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan Kriteria pemberhentian $\|X_{i+1} - X_i\|_2 \leq 10^{-15}$. Berikut adalah contoh dan hasil penyelesaian SPNL.

Contoh 1. Dengan nilai awal (0, 0) [7]

$$\begin{cases} x - e^y - \cos(y) = 0 \\ 3x - y - \sin(y) = 0 \end{cases}$$

Contoh 2. Dengan nilai awal (1.1,1.1,1.1) [4]

$$\begin{cases} 3x - \cos(yz) - 0.5 = 0 \\ x^2 - 81(y + 0.1)^2 + \sin(z) + 1.06 = 0 \\ e^{-xy} + 20z + \frac{10\pi - 3}{3} = 0 \end{cases}$$

Contoh 3. Dengan nilai awal (2,2, ..., 2) [3]

$$F: f_i = x_i^2 - \cos(x_i - 1), i = 1..m$$

memiliki solusi eksak $X^* = [1,1, \dots, 1]^T$. Simulasi numerik dilakukan untuk m=25 dan m=50

Tabel 1. Hasil Penyelesaian SPNL Contoh 1

Metode	iter	sol	$\ X_{i+1} - X_i\ _2$
Newton	7	x=0.0000000000000000 y=0.0000000000000000	0.000000000000000e+00
KHM 1	5	x=0.0000000000000000 y=0.0000000000000000	0.000000000000000e+00
Alg 1	5	x1=0.0000000000000000 y=0.0000000000000000	0.000000000000000e+00
Alg 2	5	x1=0.0000000000000000 y=0.0000000000000000	0.000000000000000e+00

Tabel 2. Hasil Penyelesaian SPNL Contoh 2

Metode	iter	sol	$\ X_{i+1} - X_i\ _2$
Newton	9	x=0.5000000000000000 y=0.0000000000000000 z=-0.52359877559829	1.743811254114115e-16
KHM1	6	x=0.5000000000000000 y=0.0000000000000000 z=-0.52359877559829	1.534892420707631e-16
Alg 1	7	x=0.5000000000000000 y=0.0000000000000000 z=-0.52359877559829	2.128140640242952e-33
Alg 2	6	x=0.5000000000000000 y=0.0000000000000000 z=-0.52359877559829	9.099491129618892e-16

Tabel 3. Hasil Penyelesaian SPNL Contoh 3 m=25 dan =50

Metode	Iter (m=25)	Iter (m=50)	$\ X_{i+1} - X_i\ _2$
Newton	6	6	0.000000000000000e+00
KHM1	5	5	0.000000000000000e+00
Alg 1	5	5	0.000000000000000e+00
Alg 2	5	5	0.000000000000000e+00

SIMPULAN

Berdasarkan uraian pada pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa bentuk skema pengembangan metode 3 langkah adalah Skema baru yang memiliki konvergensi berorde 3 untuk algoritma 1. Sedangkan untuk algoritma 2 memiliki konvergensi berorde 4. Selanjutnya, berdasarkan hasil simulasi numerik, secara umum bila dibandingkan dengan metode Newton, metode baru ini memiliki konvergensi yang lebih baik terlihat dari jumlah iterasi dan galatnya dan memiliki karakter yang serupa dengan KHM1.

DAFTAR PUSTAKA

Cordero, A., Martínez, E. and Torregrosa, J.R. 2009. Iterative methods of order four and five for systems of nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 231.2: 541-551.

Cordero, A., and Torregrosa, J.R. 2007. Variants of Newton's method using fifth-order quadrature formulas.

Applied Mathematics and Computation
190.1 : 686-698.

Cordero, Hueso, Martinez, dan Torregrosa. 2012. Increasing The Convergence Order of An Iterative Method for Nonlinear System. *Applied Mathematics Letters*, 25: 2369-2374.

Frontini, M. dan Sormani, E. 2003. Some variant of Newton's method with third-order convergence. *Applied Mathematics and Computation*, 140: 419-426.

Khirallah, M. Q. dan Hafiz, M. A. 2012. Novel Three Order Methods for Solving a System of Nonlinear Equations. *Bulletin of Mathematical Sciences & Applications*. 1 (2): 1-14.

Khirallah, M. Q. dan Hafiz, M. A. 2013. Solving System of Nonlinear Equations Using Family of Jarrat Methods. *International Journal of Differential Equations and Applications*. 12 (2): 69-83.

Wang, P. 2011. A Third-Order Family of Newton-Like Iteration Methods for Solving Nonlinear Equations. *Journal of Numerical Mathematics and Stochastics*. 3 (1): 13-19.

