

SIGMA-Mu

JURNAL PENELITIAN & GAGASAN SAINS DAN MATEMATIKA TERAPAN



JURNAL SIGMA-Mu	VOLUME 2	NOMOR 1	Halaman 1-69	Bandung Maret 2010	ISSN 1978-290X
--------------------	-------------	------------	-----------------	-----------------------	-------------------

SUSUNAN DEWAN PENYUNTING (REDAKSI)

Penanggung Jawab : Nani Yuningsih, S.Si., M.Si. (Ketua UL MKU Politeknik Negeri Bandung)

Pemimpin Redaksi : Dr. Dra. Sri Nur Yuliyawati, M.Pd.

Editor Senior : Dra. Wastu Kurning Purbandini, M.Hum.

Editor Akuisisi : Dra. Euis Sartika, M.Si.

Copy Editor : Ratu Fenny Muldiani, S.Si.,M.Si.

Kesekretariatan : Muh. Syamsul Hidayat, S.H.

Diterbitkan oleh Unit Layanan Mata Kuliah Umum (UL MKU) Politeknik Negeri Bandung

Jln. Gegerkalong Hilir, Ds. Ciwaruga, Bandung PO BOX 6468

Tlp. (022)2013789 pswt. 245, Faks (022)2013789

Email: sigmamu@polban.ac.id

DAFTAR ISI

Volume 2 Nomor 1: Maret 2010

- **Penentuan Secara Analitik Konduktivitas Termal Komposit Multifasa**
Siti Samsiyah Purwaningsih
1-11
- **KONTROL OPTIMAL H2**
Agus Binaro, Firdaus Ubaidillah
12-22
- **SIMULASI MODEL RLC BERBANTUAN MS EXCEL**
Endang Habinuddin
23-32
- **ANALISIS SOAL BAHASA INDONESIA DAN MATEMATIKA SELEKSI MAHASISWA BARU (SMB) POLITEKNIK NEGERI BANDUNG TAHUN AJARAN 2008/2009**
Hazma M. Hum., Endang Habinuddin
33-43
- **STUDI KADAR KEILMIAHAN BAHASA ARTIKEL PADA JURNAL SPEKTRUM TEKNOLOGI**
Sri Nur Yuliyawati, Sri Murniati
44-59
- **PENGOLAHAN DATA BERSKALA ORDINAL**
Euis Sartika
60-69

KONTROL OPTIMAL \mathcal{H}_2

\mathcal{H}_2 OPTIMAL CONTROL

Agus Binarto

(Staf Pengajar UP MKU Politeknik Negeri Bandung)

(Email : gus_binarto@yahoo.com)

Firdaus Ubaidillah

(Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember)

(Email : firdaus_u@yahoo.com)

ABSTRAK

Tulisan ini membahas kontrol optimal sistem dengan indeks performansi kuadratik. Tujuannya adalah mencari fungsi pengontrol sedemikian rupa sehingga fungsi *state* bernilai kecil bila waktu menuju tak hingga dengan indeks performansi diminimumkan. Secara khusus, dibahas jaminan stabilitas margin *Linear Quadratic Regulator* (LQR), problem standar \mathcal{H}_2 dan stabilitas margin dari pengontrol \mathcal{H}_2 .

Kata kunci : kontrol optimal, problem standar \mathcal{H}_2 , problem kontrol LQR, indeks performansi kuadratik.

ABSTRACT

This paper discusses the optimal control of systems with quadratic performance index. The goal is to find controllers such that the function of the state function is small when the time to infinity with minimized performance index. Specifically discuss the stability margin guarantees Linear quadratic regulator (LQR), the standard problem of stability margin \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_2 of the controller.

Keywords : optimal control, the standard \mathcal{H}_2 problem, LQR control problem, the quadratic performance index.

Pendahuluan

Banyak permasalahan yang dapat disajikan dalam bentuk persamaan matematika khususnya dalam bentuk persamaan sistem dinamik. Dalam sistem tersebut, dikenal adanya *input* dan *output* yang dapat berupa fungsi waktu. Terkadang *output* sistem tidak seperti yang diharapkan. Oleh karena itu, perlu adanya sesuatu yang dinamakan pengontrol sistem. Dengan

adanya pengontrol sistem itu, diharapkan sistem menjadi lebih optimal.

Tulisan ini intinya membahas problem LQR dan problem \mathcal{H}_2 . Problem LQR adalah menentukan aturan fungsi kontrol demikian sehingga sistem stabil dan kriteria performansi kuadratik minimum. Problem \mathcal{H}_2 merupakan menemukan pengontrol rasional riil sehingga sistem

stabil dan meminimumkan $norm \mathcal{H}_2$ dari matriks transfer^[2].

Problem Regulator

Perhatikan sistem dinamik berikut

$$\dot{x} = Ax + B_2u, \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

dengan x_0 diberikan sebarang. Tujuannya adalah mencari fungsi kontrol $u(t)$ yang didefinisikan pada $[t_0, T]$, yang dapat berupa fungsi $state \ x(t)$ demikian sehingga $state \ x(t)$ dibuat kecil di sekitar nilai asal pada waktu T. Hal ini yang disebut *problem regulator*. Satu hal, yang memberikan sugesti adalah masalah regulator ini dapat memiliki solusi trivial untuk sebarang $T > t_0$, adalah jika sistem terkontrol. Aksi kontrol yang besar dapat mengendalikan keluaran sistem pada daerah tempat model linear yang diberikan sudah benar. Konstrain kontrol u diukur dalam beberapa cara yang berbeda; misalnya,

$$\int_{t_0}^T \|u\| dt, \quad \int_{t_0}^T \|u\|^2 dt, \quad \sup_{t \in [t_0, T]} \|u\|;$$

Istilah-istilah tersebut dinamakan $norm \ \mathcal{L}_1$, $norm \ \mathcal{L}_2$ dan $norm \ \mathcal{L}_\infty$ atau yang lebih umum pembobot $norm \ \mathcal{L}_1$, $norm \ \mathcal{L}_2$ dan $norm \ \mathcal{L}_\infty$ dengan

$$\int_{t_0}^T \|W_u u\| dt, \quad \int_{t_0}^T \|W_u u\|^2 dt, \quad \sup_{t \in [t_0, T]} \|W_u u\|$$

untuk suatu matriks pembobot W_u .

Dengan cara yang serupa, ditentukan suatu konstrain respons transien $x(t)$ pada suatu model serupa :

$$\int_{t_0}^T \|W_x x\| dt, \quad \int_{t_0}^T \|W_x x\|^2 dt, \quad \sup_{t \in [t_0, T]} \|W_x x\|$$

untuk suatu matriks pembobot W_x . Oleh karena itu, problem regulator dapat diperhatikan sebagai problem kontrol

optimal dengan indeks performansi terkombinasi u dan x . Problem difokuskan kepada masalah regulator waktu tak hingga (yakni, $T \rightarrow \infty$) dan tanpa mengurangi keterumuman, diasumsikan $t_0 = 0$. Problem kasus ini adalah menentukan kontrol $u(t)$ yang didefinisikan pada $[0, \infty)$ demikian sehingga $state \ x(t)$ dikendalikan pada titik asal di $t \rightarrow \infty$ dan indeks performansi berikut diminimalkan

$$\min_u \int_0^\infty \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \quad (2)$$

untuk suatu $Q = Q^*$, S dan $R = R^* > 0$. Problem ini disebut problem **regulator kuadratik linear** atau singkatnya problem LQR (*Linear Quadratic Regulator*). Diasumsikan $R > 0$ untuk menekankan energi kontrol berhingga (yakni, $u(t) \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$). $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ adalah ruang atas integral tersebut di atas yang diminimumkan. Secara umum, diasumsikan

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3)$$

Karena R definit positif, memiliki akar kuadrat $R^{1/2}$ yang juga definit positif. Dengan substitusi $u \leftarrow R^{1/2}u$, diasumsikan $R = I$, dapat tetap mengasumsikan $S = 0$ dengan menggunakan sebuah *feedback pre-state* $u = -S^*x + v$. Karena matriks pada persamaan (3) semi definit positif dengan $R = I$ dan dapat difaktorkan sebagai

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^* \\ D_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$$

persamaan (2) dapat ditulis lagi sebagai

$$\min_{u \in \mathcal{L}_2[0, \infty)} \|C_1 x + D_{12} u\|_2^2.$$

Kenyataannya, problem LQR diperhatikan sebagai problem minimalisasi :

$$\min_{u \in L_2[0, \infty)} \|C_1 x + D_{12} u\|_2^2 \quad (4)$$

kendala :

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (5)$$

tanpa menyebut secara eksplisit kontrol tersebut akan mengendalikan *state* tersebut ke asalnya. Justru asumsi dikenakan pada Q, S, dan R (atau ekuivalen pada C_1 dan D_{12}) untuk menjamin hukum kontrol optimal mempunyai sifat ini. Melihat bahwa suatu asumsi diperlukan dalam menjamin problem minimalisasi pada persamaan (4) dan (5) mempunyai solusi, perhatikan contoh sederhana dengan $A = 1, B = 1, Q = 0, S = 0$ dan $R = 1$

$$\min_{u \in L_2[0, \infty)} \int_0^{\infty} u^2 dt, \quad \dot{x} = x + u, \quad x(0) = x_0$$

Jelaslah, $u = 0$ merupakan solusi optimal. Namun, sistem dengan $u = 0$ tak stabil dan $x(t)$ divergen secara eksponensial ke tak hingga karena $x(t) = e^t x_0$. Problem contoh ini menunjukkan bahwa indeks performansi *state* x tak stabil. Jadi, untuk menjamin problem minimalisasi pada persamaan (4) dan (5) adalah masuk akal, harus diasumsikan semua *state* yang tak stabil dapat diobservasi dari indeks performansi tersebut; yakni (C_1, A) harus terdeteksi. Problem ini selanjutnya disebut *problem LQR standar*.

Jika kestabilan *loop* tertutup dibebankan kepada minimalisasi sebelumnya, hal itu

$$\text{dapat ditunjukkan } \min_{u \in L_2[0, \infty)} \int_0^{\infty} u^2 dt = 2x_0^2$$

dan $u(t) = -2x(t)$ merupakan kontrol optimal. Hal ini dapat pula diperumum untuk kasus yang (C_1, A) tak perlu dapat dideteksi. Dengan demikian, problem LQR akan dikatakan sebagai **problem LQR yang diperluas**.

Problem LQR Standar

Kita perhatikan problem LQR yang dirumuskan sebagai berikut

$$\dot{x} = Ax + B_2 u, \quad x(0) = x_0 \quad (6)$$

diberikan sebarang.

$$z = C_1 x + D_{12} u \quad (7)$$

dan misalkan matriks-matriks parameter sistem memenuhi asumsi-asumsi berikut :

(A1) (A, B_2) dapat distabilkan

(A2) D_{12} mempunyai *rank* kolom penuh dengan $[D_{12} \ D_{\perp}]$ uniter.

(A3) (C_1, A) dapat dideteksi;

(A4) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ mempunyai *rank* kolom penuh untuk setiap ω .

Tentukan aturan kontrol optimal $u(t) \in L_2[0, \infty)$ demikian sehingga

kriteria performansi $\|z\|_2^2$ diminimalkan.

Asumsi (A1) jelas perlu untuk eksistensi kestabilan fungsi kontrol u . Asumsi (A2) dibuat untuk penyederhanaan notasi dan $R = D_{12}^* D_{12} = I \cdot D_{\perp}$ tidak diperlukan bila D_{12} bujur sangkar. Hal tersebut menarik untuk menjelaskan bahwa (A3) tidak diperlukan dalam problem LQR diperluas. Asumsi (A3) mengarahkan bahwa problem optimalisasi yang tak kondisional akan menghasilkan aturan kontrol kestabilan. Asumsi (A3) bersama-sama dengan (A1) menjamin bahwa kestabilan *input/output* akan mengakibatkan kestabilan internal; yaitu $u \in L_2$ dan $z \in L_2$ mengakibatkan $x \in L_2$, yang akan ditunjukkan pada Lemma 1. Asumsi (A4) ekuivalen dengan kondisi $(D_{\perp}^* C_1, A - B_2 D_{12}^* C_1)$ tak memiliki cara-cara ketakterobservasian pada sumbu imajiner dan lebih lemah daripada asumsi populer kedeteksian $(D_{\perp}^* C_1, A - B_2 D_{12}^* C_1)$. Asumsi (A4), dengan kestabilan (A, B_2) , menjamin

bahwa matriks Hamiltonian^{[1][3]} berikut haruslah $\text{dom}(\text{Ric})$ dan $X = \text{Ric}(H) \geq 0$:

$$H = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ -C_1^* D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{12}^* C_1 & B_2^* \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} A - B_2 D_{12}^* C_1 & -B_2 B_2^* \\ -C_1^* D_{12}^* C_1 & -(A - B_2 D_{12}^* C_1)^* \end{bmatrix} \quad (8)$$

Catatan : jika $D_{12}^* C_1 = 0$, (A4)

diakibatkan oleh pendeteksian (C_1, A) .

Persamaan Riccati^{[1][2]} yang berkorespondensi dengan persamaan (8) adalah

$$(A - B_2 D_{12}^* C_1)^* X + X(A - B_2 D_{12}^* C_1) - X B_2 B_2^* X + C_1^* D_{12}^* D_{12}^* C_1 = 0. \quad (9)$$

Misalkan, X solusi penstabilan yang berkorespondensi dan didefinisikan

$$F := -(B_2^* X + D_{12}^* C_1) \quad (10)$$

maka $A + B_2 F$ stabil. Ini menunjukkan

$$A_F := A + B_2 F,$$

$$C_F := C_1 + D_{12}^* F$$

dan susun kembali persamaan (9) untuk mendapatkan

$$A_F^* X + X A_F + C_F^* C_F = 0 \quad (11)$$

Jadi, X terobservasi Gramian^[3] pada (C_F, A_F) .

Perhatikan penerapan aturan kontrol $u = Fx$ ke persamaan-persamaan sistem (6) dan (7). Sistem terkontrol menjadi

$$\dot{x} = A_F x, \quad x(0) = x_0$$

$$z = C_F x$$

atau ekuivalen,

$$\dot{x} = A_F x + x_0 \delta(t), \quad x(0_-) = x_0$$

$$z = C_F x$$

Matriks transfer terasosiasi adalah

$$G_c(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_F & I \\ \hline C_F & 0 \end{array} \right] \text{ dan } \|G_c x_0\|_2^2 = x_0^* X x_0$$

Bukti dari teorema berikut memerlukan pendahuluan hasil kestabilan internal yang diberikan kestabilan *input-output*.

Lemma 1. Jika $u, z \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ dan (C_1, A) terdeteksi pada sistem yang diberikan pada persamaan (6) dan (7), $x \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$. Lebih jauh, $x(t) \rightarrow 0$ bila $t \rightarrow \infty$.

Bukti. Karena (C_1, A) terdeteksi, terdapat L demikian sehingga $A + LC_1$ stabil. Misal, \hat{x} adalah *state* estimasi dari x yang diberikan oleh

$$\dot{\hat{x}} = (A + LC_1)\hat{x} + (LD_{12} + B_2)u - Lz$$

maka $\hat{x} \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ begitu pula z dan u ada di $\mathcal{L}_2[0, \infty)$. Sekarang misalkan $e = x - \hat{x}$; maka

$$\dot{e} = (A + LC_1)e$$

dan $e \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$. Oleh karena itu, $x = e + \hat{x} \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$. Dapat dilihat $e(t) \rightarrow 0$ bila $t \rightarrow \infty$ untuk sebarang kondisi awal $e(0)$. Akhirnya, $x(t) \rightarrow 0$ karena $\hat{x} \rightarrow 0$.

Teorema 2. Terdapat suatu kontrol optimal tunggal untuk problem LQR, namakan $u = Fx$. Selain itu,

$$\min_{u \in \mathcal{L}_2[0, \infty)} \|z\|_2 = \|G_c x_0\|_2$$

Bukti. Dengan mengubah variabel $v = u - Fx$, sistem dapat ditulis lagi menjadi

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_F & B_2 \\ C_F & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}, \quad x(0) = x_0 \quad (12)$$

Sekarang, $v \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$, maka $x, z \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ dan $x(\infty) = 0$ karena A_F stabil. Oleh karena itu, $u = Fx + v \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$. Kebalikannya,

jika $u, z \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$, dari Lemma 1 $x \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$. Dengan demikian, $v \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$. Jadi, pemetaan $v = u - Fx$ di antara $v \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ dan bahwa $u \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ yang menjadikan $z \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ merupakan pemetaan 1-1 dan pada. Oleh karena itu,

$$\min_{u \in \mathcal{L}_2[0, \infty)} \|z\|_2 = \min_{v \in \mathcal{L}_2[0, \infty)} \|z\|_2$$

Dengan pendiferensialan $x(t)^* Xx(t)$ terhadap t sepanjang solusi persamaan (12) dan dengan menggunakan persamaan (9) serta fakta $C_F^* D_{12} = -XB_2$, dapat dilihat bahwa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^* Xx &= \dot{x}^* Xx + x^* X\dot{x} \\ &= x^* (A_F^* X + XA_F)x \\ &\quad + 2x^* XB_2v \\ &= -x^* C_F^* C_F x + 2x^* XB_2v \\ &= -(C_F x + D_{12}v)^* (C_F x + D_{12}v) \\ &\quad + 2x^* C_F^* D_{12}v + v^* v + \\ &\quad 2x^* XB_2v \\ &= -\|z\|_2^2 + \|v\|_2^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan (13) dari 0 sampai ∞ , diperoleh

$$\|z\|_2^2 = x_0^* Xx_0 + \|v\|_2^2$$

Jelaslah, kontrol optimal tunggal bila $v = 0$, yakni $u = Fx$

Problem LQR Yang Diperluas

Pada seksi problem LQR yang diperluas ini, tidak ada asumsi pendeteksian yang dibuat untuk (C_1, A) .

Perhatikan problem LQR yang diperluas

$$\dot{x} = Ax + B_2u, \quad x(0) = x_0 \quad \text{diberikan}$$

sebarang

$$z = C_1x + D_{12}u$$

dengan asumsi-asumsi :

(A1) (A, B_2) dapat distabilkan;

(A2) D_{12} mempunyai rank kolom penuh dengan $\begin{bmatrix} D_{12} & D_{\perp} \end{bmatrix}$ uniter;

(A3) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ mempunyai rank kolom penuh untuk setiap ω .

Tentukan aturan kontrol optimal $u \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ demikian sehingga sistem stabil internal (yakni, $x \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$) dan kriteria performansi $\|z\|_2^2$ diminimalisasi.

Teorema 3. Terdapat kontrol optimal tunggal pada problem LQR yang diperluas, namakan $u = Fx$. Selain itu,

$$\min_{u \in \mathcal{L}_2[0, \infty)} \|z\|_2 = \|G_c x_0\|_2$$

Bukti. Bukti teorema ini serupa dengan bukti pada problem LQR standar kecuali dalam hal kestabilan *input/output* mungkin tidak harus mengakibatkan kestabilan internal. Justru kestabilan internal dijamin dengan cara pemilihan aturan kontrol.

Misalkan, $u \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ merupakan aturan kontrol yang sistemnya stabil, yakni $x \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ maka $v = u - Fx \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$. Di sisi lain, misal $u \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ dan perhatikan

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_F & B_2 \\ C_F & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix},$$

$$x(0) = x_0.$$

maka $x, z \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ dan $x(\infty) = 0$, karena A_F stabil. Karena itu, $u = Fx + v \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$. Pemetaan

$v = u - Fx$ di antara $v \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ dan bahwa $u \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ yang menjadikan $z \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ dan $x \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ pemetaan 1-1 dan pada. Oleh karena itu,

$$\min_{u \in L_2[0, \infty)} \|z\|_2 = \min_{v \in L_2[0, \infty)} \|z\|_2$$

Dengan menggunakan teknik yang sama seperti bukti problem LQR standar, diperoleh

$$\|z\|_2^2 = x_0^* X x_0 + \|v\|_2^2$$

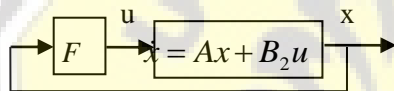
Jadi, kontrol optimal tunggal bila $v=0$, yakni $u = Fx$.

Jaminan Stabilitas Margin dari LQR

Perhatikan sistem dari persamaan (6), yaitu sistem dinamik :

$\dot{x} = Ax + B_2 u$, $x(0) = x_0$ diberikan sebarang dengan hukum kontrol LQR $u=Fx$.

Diagram blok *loop*-tertutup ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1 : Sistem *loop*-tertutup LQR.

Lemma 4.

$F = -(B_2^* X + D_{12}^* C_1)$ dan definisikan

$G_{12} = D_{12} + C_1 (sI - A)^{-1} B_2$, maka

$$(I - B_2^* (-sI - A^*)^{-1} F^*)$$

$$(I - F(sI - A)^{-1} B_2) =$$

$$G_{12}^{-1}(s) G_{12}(s)$$

Bukti^{[1][3]}.

Corollary 5

$D_{12}^* C_1 = 0$. maka

$$(I - B_2^* (-sI - A^*)^{-1} F^*)$$

$$(I - F(sI - A)^{-1} B_2) = I +$$

$$B_2^* (-sI - A^*)^{-1} C_1^* C_1$$

$$(sI - A)^{-1} B_2$$

Khususnya,

$$(I - B_2^* (-j\omega I - A^*)^{-1} F^*)$$

$$(I - F(j\omega I - A)^{-1} B_2) \geq I$$

(14)

$$[(I + B_2^* (-j\omega I - A^* - F^* B_2^*)^{-1}$$

$$F^*][I + F(j\omega I - A - B_2 F)^{-1}$$

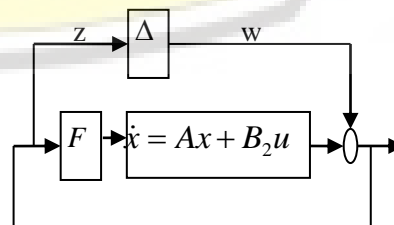
$$B_2] \leq I$$

(15)

Ketidaksamaan (15) mengikuti akibat invers ketidaksamaan (14).

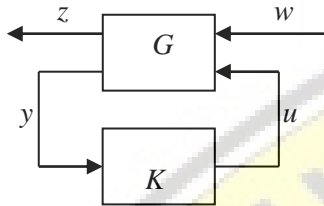
Definisikan $G(s) = -F(sI - A)^{-1} B_2$ dan asumsikan untuk momen bahwa sistem adalah *single-input*. Ketidaksamaan (14) menunjukkan bahwa diagram Nyquist^[2] *loop*-terbuka dari sistem $G(s)$ pada Gambar 1 tidak pernah memasuki unit *disk* (cakram unit) yang berpusat di $(-1,0)$ dari bidang kompleks. Karena itu, sistem mempunyai paling tidak 6 dB ($=20\log 2$) *gain margin* (batas keuntungan) dan 60° *phase margin* di kedua arah. Interpretasi semula mungkin digeneralisasi ke sistem *multiple-input*.

Ketidaksamaan (15) dapat juga memberikan beberapa interpretasi *robustness* (kerobustan) dan menyatakan bahwa *loop*-tertutup pada Gambar 1 adalah stabil sekalipun sistem *loop*-terbuka $G(s)$ diperturbasi *additively* oleh $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$ selama $\|\Delta\|_\infty < 1$. Ini dapat dilihat dari diagram blok berikut dan teorema *small gain*^[3] dengan matriks transfer^[2] dari w ke z secara pasti adalah $I + F(j\omega I - A - B_2 F)^{-1} B_2$.



Standar \mathcal{H}_2 Problem

Perhatikan sistem yang digambarkan oleh diagram blok standar berikut :



Realisasi dari matriks transfer^[2] G didapat bentuk :

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right]$$

Perhatikan struktur khusus *off-diagonal* dari D : D_{22} diasumsikan menjadi nol sedemikian sehingga G_{22} *strictly proper*/sangat tepat (Anggapan ini dibuat tanpa menghilangkan keumuman karena substitusi dari $K_D = K(I + D_{22}K)^{-1}$ akan memberikan pengontrol untuk $D_{22} \neq 0$); juga, D_{11} diasumsikan menjadi nol agar menjamin bahwa problem \mathcal{H}_2 adalah *properly posed* (Meningat bahwa fungsi transfer^[2] rasional *proper* stabil adalah fungsi \mathcal{RH}_2 jika dan hanya jika *strictly proper*/sangat tepat).

Berikut asumsi tambahan yang dibuat untuk *output feedback* problem \mathcal{H}_2 :

- (i). (A, B_2) dapat distabilkan dan (C_2, A) dapat dideteksi.
- (ii). $R_1 = D_{12}^* D_{12} > 0$ dan $R_2 = D_{21} D_{21}^* > 0$;
- (iii). $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ mempunyai *rank* kolom penuh untuk semua ω ;

(iv). $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ mempunyai *rank*

baris penuh untuk semua ω .

Asumsi pertama untuk kestabilan dari G dengan *output feedback*^[1], asumsi ketiga dan keempat bersama dengan pertama menjamin bahwa dua matriks Hamiltonian^{[1][3]} diasumsikan dengan problem \mathcal{H}_2 berikut termasuk $\text{dom}(\text{Ric})$. Asumsi-asumsi pada (ii) menjamin bahwa problem kontrol optimal \mathcal{H}_2 adalah nonsingular.

Problem \mathcal{H}_2 .

Problem control \mathcal{H}_2 adalah menemukan proper, pengontrol rasional riil K sehingga menstabilkan G secara internal dan meminimumkan norm \mathcal{H}_2 dari matriks transfer T_{zw} dari w ke z .

Dalam bahasan ini, diasumsikan bahwa kita mempunyai model *state* dari G dan K . Mengingat bahwa pengontrol dikatakan menjadi *admissible* (dapat diterima) jika menstabilkan secara internal dan proper.

Sesuai *Corollary 12.7*^[3] dua matriks Hamiltonian^[1] H_2 dan J_2 termasuk $\text{dom}(\text{Ric})$, dan, selain itu, $X_2 := \text{Ric}(H_2) \geq 0$ dan $Y_2 := \text{Ric}(J_2) \geq 0$.

Definisi

$$F_2 := -R_1^{-1} (B_2^* X_2 + D_{12}^* C_1),$$

$$L_2 := -(Y_2 C_2^* + B_1 D_{12}^*) R_2^{-1} \text{ dan}$$

$$A_{F_2} := A + B_2 F_2$$

$$C_{1F_2} := C_1 + D_{12} F_2$$

$$A_{L_2} := A + L_2 C_2$$

$$B_{1L_2} := B_1 + L_2 D_{21}$$

$$\hat{A}_2 := A + B_2 F_2 + L_2 C_2$$

$$G_c(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_{F_2} & I \\ \hline C_{1F_2} & 0 \end{array} \right],$$

$$G_f(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_{L_2} & B_{1L_2} \\ \hline I & 0 \end{array} \right]$$

Lemma 6 Misal $U, V \in \mathcal{RH}_2$ didefinisikan sebagai :

$$U := \left[\begin{array}{c|c} A_{F_2} & B_2 R_1^{-1/2} \\ \hline C_{1F_2} & D_{12} R_1^{-1/2} \end{array} \right],$$

$$V := \left[\begin{array}{c|c} A_{L_2} & B_{1L_2} \\ \hline R_2^{-1/2} C_2 & R_2^{-1/2} D_{21} \end{array} \right]$$

Jad, U adalah inner dan V adalah *co-inner*, $U^* G_c \in \mathcal{RH}_2^\perp$, dan $G_f V^* \in \mathcal{RH}_2^\perp$.

Bukti^[3]

Teorema 7

Terdapat pengontrol optimal unik/tunggal

$$K_{opt}(s) := \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_2 & -L_2 \\ \hline F_2 & 0 \end{array} \right]$$

Selain itu,

$$\|T_{zw}\|_2^2 = \|G_c B_1\|_2^2 + \|R_1^{1/2} F_2 G_f\|_2^2$$

$$\min \quad = \text{trace}(B_1^* X_2 B_1) + \text{trace}(R_1 F_2 Y_2 F_2^*).$$

Bukti^[3]

Pengontrol \mathcal{H}_2 optimal, K_{opt} , dan matriks transfer *loop*-tertutup, T_{zw} , dapat dihasilkan dengan program MATLAB berikut

```
>> [K,Tzw] = h2syn(G,ny,nu)
```

dengan n_y dan n_u adalah dimensi dari y dan u .

Stability Margin dari Pengontrol \mathcal{H}_2

Telah diketahui bahwa sistem dengan pengontrol LQR mempunyai paling tidak *margin phase*^[2] 60° dan 6 dB *gain margin*^[2]. Bagaimanapun, ini tidak jelas

apakah stabilitas margin akan diawetkan jika *state* tidak tersedia dan pengontrol *output feedback* \mathcal{H}_2 (atau LQG) harus digunakan. Jawabannya diberikan di sini melalui contoh penyangkal dari Doyle^[3][1978]: Tidak ada jaminan *stability margin* untuk pengontrol \mathcal{H}_2 .

Perhatikan *single-input* dan *single-output* sistem *two-state generalized dynamical*:

$$G(s) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \sqrt{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{\sigma} & 0 & 1 \\ \hline \sqrt{q} & \sqrt{q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Ini dapat ditunjukkan secara analitik bahwa

$$X_2 = \begin{bmatrix} 2\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 2\beta & \beta \\ \beta & \beta \end{bmatrix} \quad \text{dan}$$

$$F_2 = -\alpha [1 \quad 1],$$

$$L_2 = -\beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{dengan} \quad : \quad \alpha = 2 + \sqrt{4+q},$$

$$\beta = 2 + \sqrt{4+\sigma}$$

sehingga pengontrol *output* optimal \mathcal{H}_2 diberikan oleh

$$K_{opt} = \left[\begin{array}{cc|c} 1-\beta & 1 & \beta \\ \hline -(\alpha+\beta) & 1-\alpha & \beta \\ \hline -\alpha & -\alpha & 0 \end{array} \right]$$

Anggap bahwa hasil pengontrol *loop*-tertutup (atau *plant* G_{22}) mempunyai skalar *gain* k dengan nilai nominal $k=1$, maka pengontrol diimplementasikan dalam sistem secara aktual

$$K = kK_{opt},$$

Matriks A sistem *loop*-tertutup menjadi

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k\alpha & -k\alpha \\ \beta & 0 & 1-\beta & 1 \\ \beta & 0 & -\alpha-\beta & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

Ini dapat ditunjukkan bahwa polinomial karakteristik mempunyai bentuk

$$\det(sI - \tilde{A}) = s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

dengan

$$a_1 = \alpha + \beta - 4 + 2(k-1)\alpha\beta,$$

$$a_0 = 1 + (1-k)\alpha\beta$$

Untuk *stability loop*-tertutup perlu dipunyai $a_0 > 0$ dan $a_1 > 0$, $a_0 \approx (1-k)\alpha\beta$ dan $a_1 \approx 2(k-1)\alpha\beta$ untuk α dan β yang cukup besar jika $k \neq 1$.

Mudah dilihat bahwa untuk α dan β yang cukup besar (atau q dan σ), sistem tidak stabil untuk *perturbations* (gangguan) kecil yang berubah-ubah dalam k di salah satu arah. Jadi, dengan memilih dari q dan σ , *gain margin*^[2] mungkin membuat perubahan kecil.

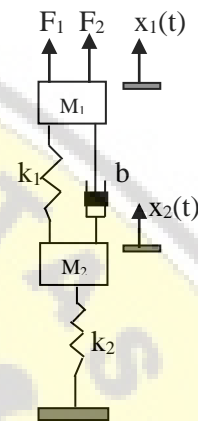
Margin memburuk ketika kontrol berat ($1/q$) semakin kecil (q besar) dan/atau sistem pengontrol *noise* (keributan) membesar (σ besar).

Contoh Problem \mathcal{H}_2

Masalah sistem massa/pegas/redaman yang merupakan penyederhanaan dari sistem suspensi mobil.

Sistem ini adalah model sederhana dari sistem suspensi mobil pada satu roda. M_1 adalah massa benda 1, M_2 adalah massa benda 2, $x_1(t)$ adalah posisi benda 1, $x_2(t)$ adalah posisi benda 2, k_1 adalah

konstanta pegas 1, k_2 adalah konstanta pegas 2, b adalah konstanta redaman (penyerap kejut), F_1 adalah gaya kontrol yang dikenakan pada sistem, dan F_2 adalah gaya *disturbance* yang dikenakan pada sistem.



Gambar 1. Sistem suspensi mobil yang disederhanakan.

Pengukuran x_1 dan x_2 terganggu oleh *noise* sehingga

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

Akan didesain pengontrol F_1 pada sistem seperti pada Gambar 2. di bawah ini sehingga efek gaya *disturbance* F_2 pada posisi massa x_1 dan x_2 tereduksi.

Dengan :

$$W_e = \begin{bmatrix} A_e & B_e \\ C_e & D_e \end{bmatrix} \text{ dan } W_u = \begin{bmatrix} A_u & B_u \\ C_u & D_u \end{bmatrix}$$

$$A_e = \begin{bmatrix} -0.6 & 0 \\ 0 & -0.6 \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_e = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, D_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_u = -10, B_u = 4, C_u = -2.25, D_u = 1$$

Misalkan $M_1 = 1, M_2 = 2, k_1 = 1, k_2 = 4,$ dan $b = 0.2$

Analisis Optimalisasi Kontrol \mathcal{H}_2

Dengan menggunakan Matlab (program terlampir), diperoleh pengontrol K dan fungsi transfer T_{zw} dengan \mathcal{H}_2 kontrol sebagai berikut :

Norm \mathcal{H}_2 dari Fungsi transfer T_{zw} adalah

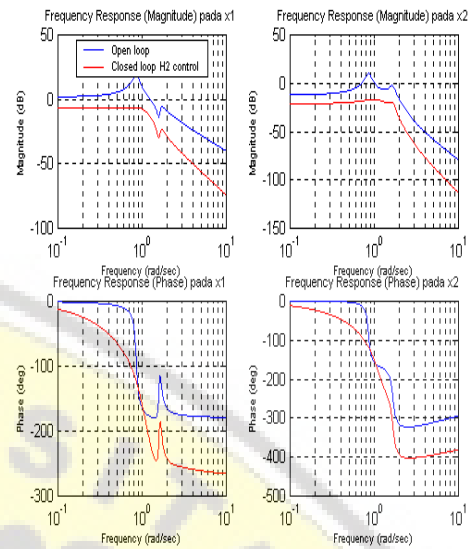
$$\|T_{zw}\|_2 = 0,3240$$

Selanjutnya, akan dibahas hasil sintesis kontrol dengan memberikan *input* gaya *disturbance* F_2 berupa fungsi sinusoidal (*frequency response*), fungsi unit *step* (*tangga*), dan fungsi unit *impuls* (*impulse response*).

Frequency Response

Pada simulasi ini, pada sistem diberikan gaya *disturbance* F_2 berupa fungsi sinusoidal dengan frekuensi antara 10^{-1} rad/detik sampai dengan 10 rad/detik, dan pada saat *steady state magnitude* dan *phase* dari *output* x_1 dan x_2 dapat dilihat pada Gambar 4.

Untuk *output* x_1 pada *loop* terbuka mode pertama, terjadi frekuensi 0,8490 rad/detik dengan *magnitude* 21.1494 dB, pada *loop* tertutup dengan \mathcal{H}_2 kontrol menjadi -6.2966 dB. Mode kedua terjadi frekuensi 1.7268 rad/sec dengan *magnitude* -5.5312 dB. Untuk *output* x_2 pada *loop* terbuka mode pertama terjadi frekuensi 0.8530 rad/detik dengan *magnitude* 10.2441 dB, pada *loop* tertutup dengan \mathcal{H}_2 kontrol menjadi -17.1823 dB.



Gambar 4. *Frequency response* dari *loop* terbuka dan *loop* tertutup dengan \mathcal{H}_2

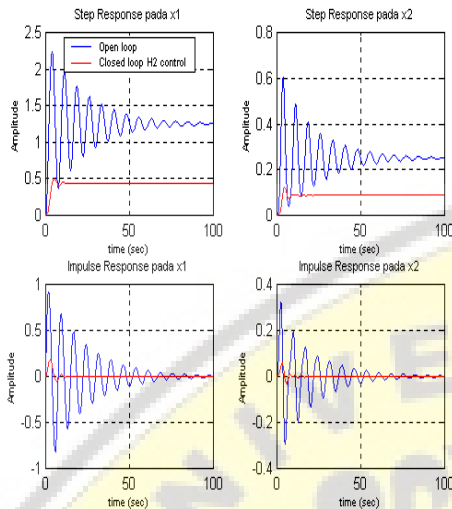
TimeResponse

Pada simulasi *step response* pada sistem, diberikan gaya *disturbance* F_2 berupa fungsi unit *step* untuk waktu antara 0 detik sampai 200 detik, hasil *step response* dapat dilihat pada Gambar 5.

Untuk *output* x_1 pada *loop* terbuka sampai dengan waktu 200 detik, sistem belum stabil, pada *loop* tertutup dengan \mathcal{H}_2 kontrol sistem mulai stabil pada waktu 44.6322 detik. Untuk *output* x_2 pada *loop* terbuka sampai dengan waktu 200 detik, sistem belum stabil. Pada *loop* tertutup dengan \mathcal{H}_2 kontrol, sistem mulai stabil pada waktu 44.6522 detik.

Pada simulasi *impulse response*, pada sistem diberikan gaya *disturbance* F_2 berupa fungsi unit impuls (Fungsi Delta Dirac) untuk waktu antara 0 detik sampai 200 detik. Hasil *impulse response* dapat dilihat pada Gambar 5. Untuk *output* x_1 pada *loop* terbuka sampai dengan waktu 100 detik, sistem belum stabil. pada *loop* tertutup dengan \mathcal{H}_2 kontrol sistem mulai stabil pada waktu 49.6075 detik. Untuk *output* x_2 pada *loop* terbuka sampai dengan waktu 100 detik sistem belum stabil. Pada

loop tertutup dengan \mathcal{H}_2 kontrol sistem mulai stabil pada waktu 59.7029 detik.



Gambar 5. *Time response* dari *loop* terbuka dan *loop* tertutup dengan \mathcal{H}_2 kontrol.

Simpulan

Problem LQR standar memerlukan syarat (C_1, A) yang harus terdeteksi.

Problem LQR yang diperluas tidak perlu (C_1, A) dapat terdeteksi.

Margin yang menghilang tidak hanya disebabkan oleh sistem *loop*-terbuka yang tidak stabil. Hal itu mudah untuk membangun (mengontruksi) fase minimum, contoh penyangkal *loop*-terbuka stabil untuk margin yang kecil perubahannya.

Inti contoh ini adalah solusi \mathcal{H}_2 (LQG), yang tidak seperti solusi LQR, tidak memberikan sistem *independent global* yang dijamin sifat-sifat *robust*. Seperti contoh-contoh sebelumnya, perancang

modern LQG diharuskan untuk mengetes marginnya untuk setiap rancangan khusus.

Dimungkinkan, untuk meningkatkan *robustness* (kerobustan) dari rancangan yang diberikan dengan mengurangi optimalitas dari filter dan memperhatikan sifat-sifat *error*. Pendekatan ini biasa dinamakan teknik desain LQG *loop transfer recovery* (LQG/LTR). Idanya untuk mendesain *filtering gain*, L_2 , sedemikian sehingga hukum kontrol LQG (atau \mathcal{H}_2) mendekati sifat-sifat *loop* dari kontrol LQR regular. Ini tidak akan dibahas lebih lanjut pada tulisan ini.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Frank L. Lewis dan Vassilis L. Syrmos, 1995, *Optimal Control*, John Wiley & Sons, Inc.
- [2]. Katsuhiko Ogata, 1997, *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, New Jersey.
- [3]. Kemin Zhou, 1998, *Essential of Robust Control*, Prentice Hall, New Jersey.