



e-ISSN: 2580-460X

p-ISSN: 2580-4596

Vol. 1 No. 1 (2017)



PROSIDING SIMaNI.s

SEMINAR NASIONAL INTEGRASI MATEMATIKA DAN NILAI ISLAMI

Malang, 6 Mei 2017



Kesekretariatan:

Ruang Sidang Jurusan Matematika

Gedung BJ. Habibie Fakultas Sains dan Teknologi Lantai 3

Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144, email: simanis@uin-malang.ac.id

Editorial Team

ADVISORY BOARD

Prof. Dr. Toto Nusantara, M.Si (Universitas Negeri Malang)
Prof. Dr. Yus Chalily, M.Si (Universitas Muhammadiyah Malang)
Prof. Dr. Cholis Sa'dijah, M.Pd (Universitas Negeri Malang)

Prof. Dr. Supama, M.Si (Universitas Gadjah Mada)
Dr. Intan Muchtadi, M.Si (Institut Teknologi Bandung)
Dr. Muhammad Mashuri, M.Si (Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya)
Dr. I Nengah Parta, M.Si (Universitas Negeri Malang)
Dr. I Made Sulandra, M.Si (Universitas Negeri Malang)
Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc (Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang)
Dr. Sri Harini, M.Si (Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang)
Dr. Abdussakir, M.Pd (Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang)
Dr. Turmudi, M.Si (Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang)
Dr. Imam Sujarwo, M.Pd (Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang)
Dr. In H. Abdullah, M.Si (Universitas Khairun Ternate)
Dr. Edy Bambang, M.Pd (Universitas Negeri Malang)
Dr. Abadi, M.Si (Universitas Negeri Surabaya)
Dr. Dellavitha Nasution, M.Si (Institut Teknologi Bandung)
Dr. Abdurrahman Asari, M.Pd (Universitas Negeri Malang)
Dr. Heri Kuswanto, M.Si (Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya)
Dr. Tatag Yuli Siswanto, M.Pd (Universitas Negeri Surabaya)

SCIENTIFIC COMMITTEE

Dr. Drs. H. Turmudi, M.Si
Dr. Sri Harini, M. Si
Dr. Drs. Usman Pagalay, M.Si
Dr. Abdussakir, M.Pd
Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

ORGANIZING COMMITTEE

Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc (Editor in Chief)
Juhari, S.Pd., M.Si (Production Editor)
Ria Dhea, M.Si (Section Editor)
Mohammad Nafie Jauhari, M.Si (Design)
Indhra Mustofa (Layout)

Editorial Office

Mathematics Department,
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Jalan Gajayana 50 Malang, Jawa Timur, Indonesia 65144
Phone (+62) 81336397956, Faximile (+62) 341 558933
e-mail: simanis@uin-malang.ac.id

DAFTAR ISI

Konstruksi Kode Cross Bifix Bebas Ternair untuk Panjang Ganjil

Moh Affaf, Zaiful Ulum

1-5

Kombinasi Delphi dan Geogebra Sebagai Media Pembelajaran Dimensi Tiga

Zulfan Rhamdany, Syamsul Arifin

6-14

Perluasan Geographically Weighted Regression Menggunakan Fungsi Polinomial

Toha Saifudin, Fatmawati Fatmawati, Nur Chamidah

15-20

Mathematics Anxiety and Self-efficacy among Secondary School Students

Risma Nurul Auliya

21-25

Pemahaman Konseptual dan Keterampilan Prosedural Siswa Kelas VIII Melalui Media Flash Player

Lidya Fransisca Claudia

26-31

Aplikasi Reduksi Model dengan Metode Linear Matrix Inequality pada Masalah Kualitas Air Kali Surabaya

Nenik Estuningsih, Fatmawati Fatmawati

32-40

Kontrol Optimal pada Model Epidemologi SEIQR dengan Tingkat Kejadian Standar

Zulaikha Zulaikha, Trisilowati Trisilowati, Intan Fadhilah

41-51

Model Penjualan Plywood PT. Linggarjati Mahardika Mulia

Nuri Wahyuningsih, Sri Suprapti H, Sinar Dwi Amutu

52-57

Konvolusi pada Distribusi dengan Support Kompak

Cynthia Tri Octavianti

453-457

Text

Dewi Masfufah

458-462

Penerapan Pendekatan Keterampilan Proses dalam Meningkatkan Kemampuan Komunikasi Matematis

Juariah juariah

463-468

Analisis keterampilan proses pemecahan masalah matematika siswa pada model pembelajaran inquiry

Intan ayu sari dewi

469-475

Suatu Ukuran Bernilai $C[a,b]$

Firdaus Ubaidillah

476-483

Model Machine Learning CART Diabetes Melitus

Ria Dhea Layla Nur Karisma, Bambang Widjanarko Otok

484-491

Matematika Diri: Menghisab Diri Sebelum Dihisab

Ahmad Mukhibin

496-502

The Pengaruh Model Pembelajaran Kooperatif Tipe Group Investigation terhadap Kecerdasan Majemuk Siswa Ditinjau dari Hasil Pembelajaran

Ahmad Zainun Hamidi

503-510

Suatu Ukuran Bernilai $C[a, b]$

Firdaus Ubaidillah

Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember

firdaus_u@yahoo.com

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 15 Mei 2017

Direvisi: 1 Juni 2017

Diterbitkan: 31 Juli 2017

Keyword:

Ukuran luar
Ukuran
Himpunan terukur
Ruang ukuran

ABSTRACT

Dalam paper ini dikonstruksi suatu ukuran bernilai $C[a, b]$, dimana $C[a, b]$ adalah koleksi semua fungsi kontinu bernilai real yang terdefinisi pada selang tertutup dan terbatas $[a, b]$. Dalam mengkonstruksi ukuran bernilai $C[a, b]$ tersebut, terlebih dahulu dikonstruksi ukuran luar bernilai $C[a, b]$. Kemudian membangkitkan ukuran melalui ukuran luar tersebut. Beberapa sifat sederhana yang berkaitan dengan ukuran bernilai $C[a, b]$ juga akan dibahas dalam paper ini.

Copyright © 2017 SI MaNIs.
All rights reserved.

Corresponding Author:

Firdaus Ubaidillah,
Jurusan Matematika Fakultas MIPA,
Universitas Jember,
Jl. Kalimantan 37 Jember, Jawa Timur, Indonesia 68121
Email:firdaus_u@yahoo.com

1. PENDAHULUAN

Salah satu bagian dalam bidang matematika yang terus berkembang adalah matematika analisis. Terkadang dalam pengembangan tersebut, diperlukan perluasan definisi, seperti definisi ukuran yang sudah dikenal selama ini bernilai real, untuk keperluan tertentu. Sebagai contoh, Boccuto, Riecan, dan Vrabelova [2] dalam mendefinisikan jumlah Riemann (*Riemann sum*) fungsi $f: T \rightarrow \mathbf{R}$, dengan \mathbf{R} ruang Riesz, adalah

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \mu(E_i)$$

dengan $D = \{(E_i, t_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ partisi δ -fine atas T dan μ ukuran bernilai Riesz \mathbf{R} , yakni $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$ dengan Σ merupakan aljabar- σ atas semua himpunan bagian Borel dari T . Dalam definisinya, mereka berasumsi bahwa \mathbf{R} ruang Riesz lengkap Dedekind. Sekarang, jika diambil $\mathbf{R} = C[a, b]$ ruang atas semua fungsi kontinu bernilai real yang terdefinisi pada selang tertutup dan terbatas $[a, b]$ yang merupakan ruang Riesz yang tidak lengkap Dedekind, ini menarik untuk membahasnya karena μ menjadi ukuran bernilai $C[a, b]$. Sebelumnya, Ghousoub [3] telah membahas ukuran bernilai ruang Riesz, bahkan lebih awal lagi, Wright [7] juga telah membahas ukuran bernilai ruang terurut parsial.

Tahun 2014, Ubaidillah dkk [5] telah membahas suatu ukuran bernilai $C[a, b]$, namun definisi ukuran tersebut masih pada koleksi tertentu saja dan belum pada himpunan kuasanya. Hasil ukuran tersebut kemudian digunakan Ubaidillah dkk [6] untuk mengkonstruksi integral Henstock-Kurzweil di dalam ruang $C[a, b]$. Tujuan dari tulisan ini adalah mengkonstruksi suatu ukuran bernilai $C[a, b]$ yang terdefinisi pada himpunan kuasa $2^{C[a, b]}$ dengan melalui ukuran luar. Dalam tulisan ini, terlebih dahulu dikonstruksikan suatu ukuran luar pada $C[a, b]$ kemudian membangkitkan ukuran melalui ukuran luar tersebut dengan membatasi pada aljabar-

nya saja. Beberapa sifat ukuran bernilai $C[a, b]$ juga akan dibahas dalam tulisan ini.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam seksi ini akan dikonstruksi suatu ukuran bernilai $C[a, b]$ dengan terlebih dahulu mengkonstruksi ukuran luar. Untuk keperluan hal-hal tersebut, diperlukan perluasan sistem $C[a, b]$ dan pengertian aljabar- σ himpunan pada $C[a, b]$. Perluasan sistem $C[a, b]$ sebagai berikut

$$\bar{C}[a, b] = C[a, b] \cup \{-\infty, \infty\}$$

yang disebut dengan **sistem $C[a, b]$ yang diperluas**. Elemen $r, s \in \bar{C}[a, b]$ dengan $r = \infty$ dan $s = -\infty$ mempunyai arti berturut-turut $r(x) = \infty$ dan $s(x) = -\infty$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Operasi-operasi aljabar antara simbol $\pm\infty$ dan elemen $f \in C[a, b]$ sebagai berikut

- (i). $-\infty < f < \infty$ untuk setiap $f \in C[a, b]$
- (ii). $f + \infty = \infty$ dan $f - \infty = -\infty$ untuk setiap $C[a, b]$
- (iii). $f \cdot \infty = \infty$ dan $f \cdot (-\infty) = -\infty$ untuk setiap $f \in C[a, b]$ dengan $f > \theta$
- (iv). $f \cdot \infty = -\infty$ dan $f \cdot (-\infty) = \infty$ untuk setiap $f \in C[a, b]$ dengan $f < \theta$
- (v). $\infty + \infty = \infty$ dan $-\infty + (-\infty) = -\infty$, dan
- (vi). $\theta \cdot \infty = \theta \cdot (-\infty) = \theta$

Selanjutnya, diberikan pengertian aljabar- σ himpunan yang diambilkan dari [1].

Definisi 1. Diberikan himpunan $X \neq \emptyset$. Koleksi $\mathcal{A} \in 2^X$ yang mempunyai sifat-sifat

- (i). $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (ii). $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- (iii). $\{A_n\} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

disebut **aljabar- σ himpunan** pada X .

Pasangan X dan \mathcal{A} aljabar- σ himpunan padanya, (X, \mathcal{A}) , disebut **ruang terukur** dan setiap anggota dari ruang terukur disebut **himpunan terukur**. Beberapa sifat aljabar- σ himpunan diberikan dalam dua teorema berikut yang buktinya dapat dilihat di [4].

Teorema 2. Jika \mathcal{A} aljabar- σ himpunan pada X , maka

- (i). $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$
- (ii). $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A - B \in \mathcal{A}$
- (iii). $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) \in \mathcal{A}$.

Teorema 3. Jika (X, \mathcal{A}) ruang terukur dan $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ maka terdapat $\{B_n\} \subseteq \mathcal{A}$ sehingga $B_i \cap B_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$ dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

2.1. Ukuran Luar

Dalam subseksi ini akan dikonstruksi ukuran luar dan aljabar- σ himpunan pada $C[a, b]$ yang dibangkitkan melalui ukuran luar pada $C[a, b]$. Untuk mengawali hal itu, diberikan pengertian ukuran luar pada $C[a, b]$.

Definisi 4. Fungsi himpunan $\mu^*: 2^{C[a, b]} \rightarrow \bar{C}[a, b]$ yang memenuhi sifat-sifat

- (i). $\mu^*(A) \geq \theta$, untuk setiap $A \subseteq C[a, b]$
 $\mu^*(\emptyset) = \theta$
- (ii). $A, B \subseteq C[a, b]$ dan $A \leq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
- (iii). $\{A_n\} \subseteq C[a, b] \Rightarrow \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

disebut **ukuran luar** pada $C[a, b]$.

Untuk $f, g \in C[a, b]$, selang-selang terbuka di dalam $C[a, b]$ dinyatakan dengan (f, ∞) , $(-\infty, f)$, (f, g) asalkan $f < g$, atau $C[a, b]$ sendiri, dan koleksi semua selang terbuka di dalam $C[a, b]$ dan himpunan kosong dinyatakan oleh \mathcal{J} . Jika $I, J \in \mathcal{J}$, mudah dipahami bahwa $I \cap J \in \mathcal{J}$ dan jika $I \cap J \neq \emptyset$ maka $I \cup J \in \mathcal{J}$. Selanjutnya, jika $f, g \in C[a, b]$ dengan $f < g$, didefinisikan fungsi $\ell: \mathcal{J} \rightarrow \bar{C}[a, b]$ dengan

$$\ell(I) = \begin{cases} \theta & , \text{jika } I = \emptyset \\ g - f & , \text{jika } I = (f, g) \\ \infty & , \text{jika } I = (f, \infty), I = (-\infty, f) \text{ atau } I = C[a, b] \end{cases}$$

Diperhatikan bahwa $\ell(I)$ senantiasa ada di dalam $\bar{C}[a, b]$ dan $\ell(I) \geq \theta$ untuk setiap $I \in \mathcal{J}$. Untuk selanjutnya, koleksi semua $\{I_n\} \subseteq \mathcal{J}$ sehingga $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ dinyatakan dengan $\mathcal{P}(A)$. Diperhatikan bahwa, untuk setiap $E \subseteq A$ berlaku $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(E)$.

Lemma 5. Jika $I, J \in \mathcal{J}$ dan $I \cap J \neq \emptyset$, maka

$$\ell(I \cup J) + \ell(I \cap J) = \ell(I) + \ell(J).$$

Bukti: Anggap $I = (f_1, g_1)$ dan $J = (f_2, g_2)$ dengan $f_1 < g_1, f_2 < g_2$, dan $f_1 < f_2$. Karena $I \cap J \neq \emptyset$, maka diperoleh $I \cap J = (f_2, g_1)$ dan $I \cup J = (f_1, g_2)$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\ell(I \cup J) + \ell(I \cap J) = (g_2 - f_1) + (g_1 - f_2) = (g_1 - f_1) + (g_2 - f_2) = \ell(I) + \ell(J). \quad \blacksquare$$

Selanjutnya didefinisikan pemetaan $\bar{\mu}: 2^{C[a,b]} \rightarrow C[a, b]$ dengan

$$\bar{\mu}(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : \{I_n\} \in \mathcal{P}(A) \right\}, \text{ untuk setiap } A \subseteq C[a, b]$$

asalkan infimum tersebut ada.

Koleksi semua $A \subseteq C[a, b]$ sehingga $\bar{\mu}(A)$ ada dinyatakan dengan $\mathcal{M}[a, b]$.

Lemma 6. Diberikan $A, B \subseteq C[a, b]$ dengan $A \subseteq B$. Jika $A, B \in \mathcal{M}[a, b]$, maka $\bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B)$.

Bukti: Diberikan $A, B \in \mathcal{M}[a, b]$. Karena $A \subseteq B$, diperoleh $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Oleh karena itu diperoleh

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : \{I_n\} \in \mathcal{P}(B) \right\} \subseteq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : \{I_n\} \in \mathcal{P}(A) \right\} \quad (1)$$

Karena $A, B \in \mathcal{M}[a, b]$, maka kedua himpunan pada ruas kiri dan kanan (1) mempunyai infimum dan diperoleh

$$\bar{\mu}(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : \{I_n\} \in \mathcal{P}(A) \right\} \leq \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : \{I_n\} \in \mathcal{P}(B) \right\} = \bar{\mu}(B). \quad \blacksquare$$

Jika $A \in \mathcal{M}[a, b]$, maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat $\{I_n\} \in \mathcal{P}(A)$ sehingga berlaku

$$\bar{\mu}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq \bar{\mu}(B) + \varepsilon,$$

dan berlaku sebaliknya.

Teorema 7. Diberikan $A, B \subseteq C[a, b]$. Jika $A, B \in \mathcal{M}[a, b]$, maka $A \cup B \in \mathcal{M}[a, b]$.

Bukti: Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\{I_n\} \in \mathcal{P}(A)$ sehingga berlaku

$$\bar{\mu}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq \bar{\mu}(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

dan terdapat $\{J_n\} \in \mathcal{P}(B)$ sehingga berlaku

$$\bar{\mu}(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \leq \bar{\mu}(B) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jika $\{I_n \cup J_n\}$ dinyatakan sebagai $\{D_m\} \subseteq \mathcal{J}$, maka $\{D_m\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ dan berdasarkan Lemma 5, diperoleh

$$\bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) < \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) + \varepsilon$$

atau

$$\bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \ell(D_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n \cap J_n) < \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) + \varepsilon.$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) - \bar{\mu}(A \cap B) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \ell(D_m) < \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B) - \bar{\mu}(A \cap B) + \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Sebagai akibat dari Teorema 7, diperoleh hasil berikut.

Akibat 8. Diberikan $A_i \in C[a, b]$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$. Jika $A_i \in \mathcal{M}[a, b]$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$, maka $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{M}[a, b]$.

Lemma 9. Jika $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}[a, b]$ dengan $\bar{\mu}(A_n) = \theta$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}[a, b]$ dan $\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \theta$.

Bukti: Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan setiap $n \in \mathbb{N}$, diambil $\{I_k^n\} \in \mathcal{P}(A_n)$ sehingga berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k^n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Jika $\{I_k^n\}$ dinyatakan dengan sebagai $\{D_m\} \subseteq \mathcal{J}$, maka $\{D_m\} \in \mathcal{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ dan diperoleh

$$\theta \leq \sum_{m=1}^{\infty} \ell(D_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Jadi, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}[a, b]$ dan $\bar{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \theta$.

Lemma 10. Diberikan $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}[a, b]$. Jika $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}[a, b]$, maka

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n)$$

Bukti: Diambil $A \in \mathcal{M}[a, b]$ dan $\{A_n\} \subseteq \mathcal{M}[a, b]$ sehingga $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan setiap $n \in \mathbb{N}$, diambil $\{B_k^n\} \subseteq \mathcal{J}$ sehingga berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(B_k^n) < \frac{\varepsilon}{2^n} + \bar{\mu}(A_n).$$

Jika $\{B_k^n\}$ dinyatakan dengan sebagai $\{D_m\} \subseteq \mathcal{J}$, maka $A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m$ dan diperoleh

$$\bar{\mu}(A) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \ell(D_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \ell(B_k^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2^n} + \bar{\mu}(A_n)\right) = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n).$$

Selanjutnya, dibentuk koleksi-koleksi himpunan

$$\mathcal{M}_1[a, b] = \{X \subseteq C[a, b] : X \notin \mathcal{M}[a, b], \text{ terdapat } Y \in \mathcal{M}[a, b] \text{ dengan } X \subseteq Y \text{ dan } \bar{\mu}(Y) = \theta\}$$

$$\mathcal{M}_2[a, b] = \{X \subseteq C[a, b] : X \notin \mathcal{M}[a, b] \text{ terdapat } Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}[a, b] \text{ dengan } Y_1 \subseteq X \subseteq Y_2 \text{ dan } \theta < \bar{\mu}(Y_i) < \infty, i = 1, 2\}$$

$$\mathcal{M}_3[a, b] = \{X \subseteq C[a, b] : X \notin \mathcal{M}[a, b], X \notin \mathcal{M}_1[a, b], X \notin \mathcal{M}_2[a, b]\}$$

dan didefinisikan fungsi $\mu^* : 2^{C[a, b]} \rightarrow \bar{C}[a, b]$ dengan

$$\mu^*(A) = \begin{cases} \theta, & A \in \mathcal{M}_1[a, b] \\ \bar{\mu}(A), & A \in \mathcal{M}[a, b] \\ \bar{\mu}(B), & A \in \mathcal{M}_2[a, b] \text{ dengan } A \subseteq B \in \mathcal{M}[a, b] \text{ dan } \mu^*(B - A) = \theta \\ \infty, & A \in \mathcal{M}_3[a, b] \end{cases} \quad (2)$$

Akan ditunjukkan $C[a, b]$ well-defined.

Diperhatikan bahwa $\mathcal{M}_i[a, b] \cap \mathcal{M}_j[a, b] = \emptyset$ untuk setiap $i, j = 1, 2, 3$ dan $i \neq j$ dan $\mathcal{M}_i[a, b] \cap \mathcal{M}[a, b] = \emptyset$ untuk setiap $i, j = 1, 2, 3$.

Dari koleksi $\mathcal{M}_3[a, b]$, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3[a, b] &= (\mathcal{M}[a, b])^c \cap (\mathcal{M}_1[a, b])^c \cap (\mathcal{M}_2[a, b])^c \\ &= (\mathcal{M}[a, b] \cup \mathcal{M}_1[a, b] \cup \mathcal{M}_2[a, b])^c \\ (\mathcal{M}_3[a, b])^c &= \mathcal{M}[a, b] \cup \mathcal{M}_1[a, b] \cup \mathcal{M}_2[a, b] \end{aligned}$$

Teorema 11. Diberikan $A, B \subseteq C[a, b]$. Jika $A \subseteq B$, maka $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Bukti: Akan dibuktikan per kasus.

Kasus $\mu^*(B) = \infty$. Cukup jelas berlaku $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Kasus $\mu^*(B) = \theta$. Ini berakibat $A \in \mathcal{M}[a, b]$ atau $A \in \mathcal{M}_1[a, b]$ dan $\mu^*(A) = \theta$. Dengan menggunakan Lemma 6, diperoleh $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Kasus $\theta < \mu^*(B) < \infty$. Ini berakibat $B \in \mathcal{M}[a, b]$ atau $B \in \mathcal{M}_2[a, b]$. Dengan menggunakan Lemma 6, diperoleh $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. ■

Lemma 12. Diberikan $A, B \subseteq C[a, b]$. Jika $A \in \mathcal{M}[a, b]$ dan $\mu^*(B) = \theta$, maka $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A)$

Teorema 13. Jika $\{A_n\} \subseteq C[a, b]$, maka

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Bukti: Ambil sebarang $\{A_n\} \subseteq C[a, b]$. Jika terdapat A_n sehingga $\mu^*(A_n) = \infty$, bukti selesai. Selanjutnya, dianggap $\mu^*(A_n) < \infty$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Dibentuk himpunan-himpunan

$$I = \{n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{M}[a, b]\}$$

$$I_1 = \{n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{M}_1[a, b]\}$$

$$I_2 = \{n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{M}_2[a, b]\}$$

Untuk setiap $n \in I_1$, terdapat $X_n \in \mathcal{M}[a, b]$ dengan $A_n \subseteq X_n$ dan $\bar{\mu}(X_n) = \theta$.

Untuk setiap $n \in I_2$, terdapat $Y_n \in \mathcal{M}[a, b]$ dengan $A_n \subseteq Y_n$ dan $\mu^*(Y_n - A_n) = \theta$.

Oleh karena itu, diperoleh hubungan

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &= \bigcup_{n \in I} A_n \cup \bigcup_{n \in I_1} A_n \cup \bigcup_{n \in I_2} A_n \\ &\subseteq \bigcup_{n \in I} A_n \cup \bigcup_{n \in I_1} X_n \cup \bigcup_{n \in I_2} Y_n. \end{aligned}$$

Jika $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \theta$, maka $\mu^*(A_n) = \theta$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Akibatnya $I_2 = \emptyset$. Karena $\bar{\mu}(A_n) = \theta = \bar{\mu}(X_n)$ untuk setiap $n \in I \cup I_1$, berdasar Lemma 9, diperoleh

$$\bigcup_{n \in I} A_n \cup \bigcup_{n \in I_1} X_n \in \mathcal{M}[a, b]$$

dan

$$\bar{\mu} \left(\bigcup_{n \in I} A_n \cup \bigcup_{n \in I_1} X_n \right) = \theta.$$

Berdasarkan Teorema 11, diperoleh

$$\theta \leq \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \mu^* \left(\bigcup_{n \in I} A_n \cup \bigcup_{n \in I_1} X_n \right) = \bar{\mu} \left(\bigcup_{n \in I} A_n \cup \bigcup_{n \in I_1} X_n \right) = \theta.$$

Jika $\theta < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \infty$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sehingga $\sum_{n=K+1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \varepsilon$. Oleh karena itu, berdasar Teorema 11, Lemma 12 dan Akibat 8, diperoleh

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) &\leq \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^K A_n \cup \bigcup_{n=K+1}^{\infty} A_n \right) = \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^K A_n \right) \\ &\leq \mu^* \left(\bigcup_{n \in I} A_n \cup \bigcup_{n \in I_2} Y_n \right) = \bar{\mu} \left(\bigcup_{n \in I} A_n \cup \bigcup_{n \in I_2} Y_n \right) \\ &\leq \sum_{n \in I} \bar{\mu}(A_n) + \sum_{n \in I_2} \bar{\mu}(Y_n) \\ &= \sum_{n \in I} \mu^*(A_n) + \sum_{n \in I_2} \mu^*(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^K \mu^*(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \end{aligned}$$

Bukti telah lengkap. ■

Teorema 14. Fungsi μ^* yang didefinisikan pada (2) merupakan ukuran luar pada $C[a, b]$.

Bukti : Akan dibuktikan μ^* memenuhi sifat-sifat di dalam Definisi 4.

Pertama, akan dibuktikan $\mu^*(A) \geq \theta$ untuk setiap $A \in 2^{C[a,b]}$ dan $\mu^*(\emptyset) = \theta$.

Karena $\bar{\mu}(A) \geq \theta$ untuk setiap $A \in \mathcal{M}[a, b]$ dan berdasarkan definisi μ^* pada (2), diperoleh $\mu^*(A) \geq \theta$ untuk setiap $A \in 2^{C[a,b]}$.

$\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$ dan $\ell(\emptyset) = \theta$, karena itu disimpulkan $\emptyset \in \mathcal{M}[a, b]$ dan $\mu^*(\emptyset) = \bar{\mu}(\emptyset) = \ell(\emptyset) = \theta$.

Selanjutnya, berdasarkan Teorema 11, diperoleh sifat setiap $A \subseteq B \subseteq C[a, b]$ berlaku $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Untuk membuktikan sifat (iii) di dalam Definisi 4, berdasarkan Teorema 13, diperoleh untuk setiap $\{A_n\} \subseteq C[a, b]$ berlaku $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Jadi, μ^* merupakan ukuran luar pada $C[a, b]$. ■

Definisi 15. Himpunan $E \subseteq C[a, b]$ dikatakan **terukur- μ^*** , jika setiap $A \subseteq C[a, b]$ benar bahwa

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Untuk setiap $A \subseteq C[a, b]$, benar bahwa $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$, sehingga menurut sifat (iii) di dalam Definisi 4, diperoleh

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Oleh karena itu diperoleh definisi baru sebagai berikut: himpunan $A \subseteq C[a, b]$ dikatakan terukur- μ^* , jika setiap $A \subseteq C[a, b]$ berlaku

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Teorema 16. Jika $\mu^*(E) = \theta$, maka E terukur- μ^* .

Bukti: Untuk setiap $A \subseteq C[a, b]$, berlaku $A \cap E \subseteq E$ dan berdasarkan sifat (ii) Definisi 4, diperoleh $\theta \leq \mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = \theta$. Dengan kata lain $\mu^*(A \cap E) = \theta$.

Di sisi lain, $A \supseteq A \cap E^c$ sehingga diperoleh

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E^c) = \theta + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c). \quad \blacksquare$$

Teorema 17. Pernyataan-pernyataan berikut bernilai benar

(i). θ dan $C[a, b]$ terukur- μ^* .

(ii). Jika $E \subseteq C[a, b]$ terukur- μ^* , maka E^c terukur- μ^* .

(iii). Jika $E_1, E_2 \subseteq C[a, b]$ terukur- μ^* , maka $E_1 \cup E_2$ dan $E_1 \cap E_2$ keduanya terukur- μ^* .

Berdasarkan Teorema 17, diperoleh akibat berikut

Akibat 18. Jika E_1, E_2, \dots, E_n masing-masing himpunan terukur- μ^* , maka himpunan

$$\bigcup_{i=1}^n E_i \quad \text{dan} \quad \bigcap_{i=1}^n E_i$$

keduanya terukur- μ^* .

Teorema 19. Jika E_1, E_2, \dots, E_n saling asing dan terukur- μ^* , maka untuk setiap $A \subseteq C[a, b]$ berlaku

$$\mu^* \left(A \cap \bigcup_{i=1}^n E_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu^* (A \cap E_i).$$

Bukti: Akan dibuktikan dengan induksi matematika.

Jelas teorema benar untuk $n = 1$. Selanjutnya, anggap teorema benar untuk himpunan-himpunan E_1, E_2, \dots, E_{n-1} , yakni benar bahwa

$$\mu^* \left(A \cap \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \mu^* (A \cap E_k),$$

untuk setiap $A \subseteq C[a, b]$.

Karena E_1, E_2, \dots, E_{n-1} saling asing, dipunyai

$$A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k \right) \cap E_n = A \cap E_n$$

dan

$$A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k \right) \cap E_n^c = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \right).$$

Karena E_n terukur- μ^* , maka diperoleh

$$\begin{aligned} \mu^* \left(A \cap \bigcup_{k=1}^n E_k \right) &= \mu^* \left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k \right) \cap E_n \right) + \mu^* \left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n E_k \right) \cap E_n^c \right) \\ &= \mu^* (A \cap E_n) + \mu^* \left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k \right) \right) \\ &= \mu^* (A \cap E_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu^* (A \cap E_k) = \sum_{k=1}^n \mu^* (A \cap E_k). \end{aligned}$$

Teorema 20. Jika $\{E_n\}$ barisan himpunan terukur- μ^* , maka himpunan

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{dan} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

keduanya terukur- μ^* .

Teorema 21. Untuk setiap $f \in C[a, b]$, selang-selang (f, ∞) , $[f, \infty)$, $(-\infty, f)$ dan $(-\infty, f]$ terukur- μ^* .

Akibat dari Teorema 21, maka setiap selang di dalam $C[a, b]$ terukur- μ^* .

Teorema berikut memperlihatkan bahwa koleksi semua himpunan terukur- μ^* pada $C[a, b]$ merupakan aljabar- σ pada $C[a, b]$.

Teorema 22. Jika \mathcal{A} menyatakan koleksi semua himpunan terukur- μ^* , maka \mathcal{A} merupakan aljabar- σ pada $C[a, b]$.

Bukti: Karena $\emptyset \in \mathcal{A}$, maka $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Berdasarkan Definisi 1, jika $E \in \mathcal{A}$ diperoleh $E^c \in \mathcal{A}$, dan berdasarkan Teorema 20, jika $E_i \in \mathcal{A}$ untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ maka $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$. ■

2.2. Ukuran

Dalam subseksi ini, akan dibangun suatu ukuran μ yang dibangkitkan oleh ukuran luar μ^* dan ruang ukuran pada $C[a, b]$. Sebelum itu, diberikan pengertian ukuran dan ukuran lengkap pada $C[a, b]$.

Definisi 23. Diberikan \mathcal{A} aljabar- σ pada $C[a, b]$. Fungsi $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \bar{C}[a, b]$ yang memenuhi sifat-sifat

(i). $\mu(A) \geq \theta$ untuk setiap $A \in \mathcal{A}$,
 $\mu(\emptyset) = \theta$,

(ii). $\{A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ dan $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ maka $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$,

disebut **ukuran** pada $C[a, b]$. Ruang terukur $C[a, b]$ yang dilengkapi dengan ukuran $C[a, b]$ padanya disebut **ruang ukuran** dan dituliskan dengan $(C[a, b], \mathcal{A}, \mu)$. Ruang ukuran $(C[a, b], \mathcal{A}, \mu)$ dikatakan **lengkap** jika untuk setiap $A \in \mathcal{A}$ dengan $\mu(A) = \theta$ maka untuk setiap $E \subseteq A$ berakibat $E \in \mathcal{A}$.

Suatu ruang ukuran dapat dibangkitkan melalui apa yang dinamakan dengan ukuran luar μ^* yang pengertiannya telah diberikan dalam Definisi 4. Teorema berikut menunjukkan terdapat suatu ruang ukuran lengkap pada $C[a, b]$.

Teorema 24. Diberikan $(C[a, b], \mathcal{A})$ ruang terukur. Fungsi $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \bar{C}[a, b]$ dengan rumus

$$\mu(E) = \mu^*(E), \quad \text{untuk setiap } E \in \mathcal{A}$$

adalah ukuran pada $(C[a, b], \mathcal{A})$. Lebih jauh, ruang ukuran $(C[a, b], \mathcal{A}, \mu)$ lengkap.

Bukti: $\mu(E) = \mu^*(E) \geq \theta$ untuk setiap $E \in \mathcal{A}$ dan $\mu(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = \theta$. Jika $\{E_k\} \in \mathcal{A}$ dan saling-asing, berdasarkan Teorema 19 dengan mengambil $A = C[a, b]$, diperoleh

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^n E_k \right) = \mu^* \left(\bigcup_{k=1}^n E_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(E_k) = \sum_{k=1}^n \mu(E_k).$$

Selanjutnya, ambil sebarang $A \in \mathcal{A}$ dengan $\mu(A) = \theta$. Jadi $\mu^*(A) = \theta$. Akibatnya untuk setiap $E \subseteq A$, dengan sifat kemonotonan, diperoleh $\mu^*(E) = \theta$. Akibatnya, berdasarkan Teorema 16, E terukur- μ^* . Dengan Teorema 22, diperoleh $E \in \mathcal{A}$. ■

Jika diperhatikan, ukuran μ adalah suatu fungsi himpunan yang diperoleh dengan cara membatasi ukuran luar μ^* pada aljabar- σ himpunan \mathcal{A} .

Sebagai akhir dari subseksi ini, diberikan beberapa sifat ukuran dalam satu teorema berikut.

Teorema 25. Diberikan $\{E_n\}$ barisan himpunan terukur.

(i). Jika $E_n \subseteq E_{n+1}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

jika limitnya ada.

(ii). Jika $E_{n+1} \subseteq E_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$$

jika limitnya ada.

Bukti: Akan dibuktikan untuk bagian (i) saja, bagian (ii) serupa.

Jika $\mu(E_n) = \infty$ untuk suatu n , penyelesaian trivial.

Jika $\mu(E_n) < \infty$ untuk setiap n , dibentuk himpunan

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Karena $E_n \subseteq E_{n+1}$ untuk setiap n , himpunan-himpunan $E_{i+1} \setminus E_i$ dan $E_{j+1} \setminus E_j$ saling-asing untuk $i \neq j$. Oleh karena itu, berdasarkan bukti Teorema 24, diperoleh

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(E_{i+1} \setminus E_i) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\mu(E_{i+1}) - \mu(E_i)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n). \end{aligned}$$

■

3. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh suatu kesimpulan bahwa terdapat suatu ukuran bernilai $C[a, b]$. Ukuran bernilai $C[a, b]$ yang dikonstruksi di atas diperoleh dengan cara membangkitkan ukuran luar pada $C[a, b]$ dan membatasinya pada aljabar- σ himpunannya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bartle, R.G., The Elements of Integration and Lebesgue Measure. John Wiley & Sons, New York; 1995.
- [2] Boccutto, A., Riecan, B. and Vrabelova, M., Kurzweil-Henstock Integral in Riesz Spaces. Bentham Books; 2009.
- [3] Ghossoub, N., Riesz Spaces Valued Measures and Processes, *Bull. Soc. Math. France*, 1982. (110), hal. 233257
- [4] Royden, H.L. and Fitzpatrick, P.M., *Real Analysis*, Fourth Edition, Pearson Education Asia Limited and China Machine Press; 2010.
- [5] Ubaidillah, F., Darmawijaya, S., dan Rini, Ch. I., $C[a,b]$ -Valued Measure and Some of Its Properties *Proc. Int. Conf. on Research, Imp. and Edu. of Math. and Sci.*, Yogyakarta State University; 2014. hal. M21-M26
- [6] Ubaidillah, F., Darmawijaya, S., dan Rini, Ch. I., On the Henstock-Kurzweil Integral of $C[a; b]$ Space-valued Functions, *Int. J. Math. An.* 2015. 9 (37) hal. 1831 – 1846
- [7] Wright, J.D.M., Measures with Values in a Partially Ordered Vector Space, *Proc. London Math. Soc.*; 1972. 25 hal. 675- 688