ISBN. 978-602-449-325-7

snpmpu UNESA Program Studi
S3 Pendidikan Matematika
Pascasarjana

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL PENDIDIKAN MATEMATIKA
PASCASARJANA UNESA

PEMBELAJARAN MATEMATIKA MENGHADAPI ERA REVOLUSI INDUSTRI 4.0

2018

PROSIDING:
Seminar Nasional "Pembelajaran Matematika Menghadapi Revolusi Industri 4.0"

Penangungjawab	: Prof. Dr. Siti M. Amin, M.Pd
Ketua Panitia	: Erik Valentino, S.Pd., M.Pd
Wakil Ketua	: Sulaiman, M.Pd
Reviewer	: Prof. Dr. Sunardi, M.Pd. Prof. Dr. Ratu Ilma Indra Putri, M.Si Prof. Dr. Cholis Sa'dijah, M.Pd., M.A Dr. Agung Lukito, M.S. Rooselyna Ekawati, S.Si., M.Sc., Ph.D Dr. Rahmah Johar, M.Pd
Editor	: Endang Suprapti, S.Pd., M.Pd. Via Yustitia,S.Pd., M.Pd. Sri Hartatik, S.Si., M.Pd. Sulaeman, S.Pd., M.Pd
Design Sampul	: Asep Sahrudin, S.Pd., M.Pd.
Layout	: Henry Putra Imam Wijaya, S.Si., M.Pd
Diterbitkan Oleh	: Unesa University Press Universitas Negeri Surabaya
ISBN	: **978-602-449-325-7**

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga prosiding ini dapat tersusun dengan baik. Prosiding ini berisi kumpulan makalah di bidang matematika dan didiskusikan dalam seminar nasional. Seminar nasional ini diselenggarakan oleh S3 Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Surabaya pada Hari Sabtu, 8 Desember 2018. Seminar ini mengangkat tema "Pembelajaran Matematika di Era Revolusi Industri 4.0" .

Prosiding ini disusun untuk mendokumentasikan gagasan dan hasil penelitian di bidang pendidikan Matematika. Selain itu, diharapkan prosiding ini dapat memberikan wawasan tentang penemuan-penemuan baru yang berkembang di dunia pendidikan khususnya bagi seluruh profesi yang sifatnya mendidik demi terwujudnya pendidikan berkemajuan.

Kami menyadari prosiding ini dapat terwujud berkat kerjasama partisipasi dan bantuan dari berbagai pihak, oleh karena itu, kami mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang membantu terselenggarakannya Seminar Nasional ini.

Surabaya, 29 Maret 2019
Ketua Panitia

SNPMPU

Erik Valentino, M.Pd

DAFTAR ISI

POLA PENGUBINAN DENGAN MEMANFAATKAN FRAKTAL FIBONACCI SNOWFLAKE

Kosala Dwidja Purnomo[1), Farah Intan Nur Oktavia[2), Firdaus Ubaidillah[3)
[1]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
email: kosala.fmipa@unej.ac.id
[2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
email: frhintan@gmail.com
[3]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember
email: firdaus_u@yahoo.com

Abstract

Fractal is a class of complex geometric shapes that generally have fractional dimension values. There are various fractal forms, one of which is the Fibonacci Word fractal. The Fibonacci Word fractal is a curve that has the properties of self - similarity through simple and interesting drawing rules based on the Fibonacci Word sequence. There is a development of the Fibonacci Word Fractals, namely Fibonacci Snowflakes fractals. Fibonacci Snowflakes fractals are polyominoes that arrange fields or surfaces with translation. Polyomino means a field or area divided by many squares. In previous studies, there were topics concerning Fibonacci Snowflakes in tesselation patterns. Tesselation is a repetition of patterns from the buildings that cover completely a flat field without any gap or overlap. In this paper, the authors are interested in studying further the generation of fractal curves based on the rules of the Snowflake Fibonacci fractal construction. In addition, the author will examine the tesselation pattern possessed by the Snowflake Fibonacci fractal.

Keywords: *Fibonacci Word sequence, Fibonacci Snowflakes fractals, polyomino, tesselation.*

1. PENDAHULUAN

Menurut Peitgen (1998), fraktal merupakan kelas bentuk geometri kompleks yang umumnya mempunyai nilai dimensi pecahan.Mandelbrot (1997) membagi fraktal menjadi dua jenis. Fraktal jenis pertama adalah himpunan-himpunan fraktal (*fractal sets*), contohnya *Koch snowflake*, *Sierpinski triangle, Mandelbrot set*, dan *Julia set*. Sedangkan fraktal jenis kedua adalah fraktal alami (*natural fractal*), contohnya cabang-cabang pohon, bentuk pegunungan, garis pantai, dan daun.

Salah satu bentuk fraktal lainnya adalah kurva *Fibonacci word*. Kurva ini dikenalkan pertama kali oleh Dumaine (2009) yang kemudian dikenal sebagai fraktal *Fibonacci Word*. Fraktal *Fibonacci Word* adalah suatu kurva yang memiliki sifat *self-similarity* melalui aturan gambar yang sederhana dan menarik berdasarkan pada barisan *Fibonacci Word*. Terdapat pengembangan dari Fraktal *Fibonacci Word*, yaitu fraktal *Fibonacci Snowflakes*.

Fraktal *Fibonacci Snowflakes* adalah sebuah polyomino yang menata bidang atau permukaan dengan translasi. Polyomino sendiri berasal dari kata "*poly*" yang berarti banyak dan "*domino*" yang berarti suatu daerah yang terbagi oleh dua persegi. Sehingga polyomino berarti suatu bidang atau daerah yang terbagi oleh banyak persegi. Fraktal ini mempunyai struktur seperti *snowflake*. Dalam penelitian sebelumnya, terdapat topik mengenai *Fibonacci Snowflakes* dalam pola pengubinan (*tesselation*).

Tesselasi (*tesselation*) adalah suatu pengulangan pola dari bangun-bangun yang menutup secara lengkap suatu bidang datar tanpa ada celah atau tumpang tindih. Tesselasi juga biasa disebut pengubinan. Tesselasi merupakan konsep antar cabang ilmu pengetahuan, yakni matematika dan seni. Dalam bidang seni, tesselasi mengacu pada konsep artistik. Sedangkan dalam matematika, tesselasi meliputi beberapa konsep-konsep matematika yang lebih dalam seperti segi banyak beraturan, segi banyak tidak beraturan, kekongruenan, sudut dalam, jumlah sudut dalam suatu segi banyak, simetri, translasi, refleksi, dan rotasi (Rokhmah, 2010).

Berdasarkan uraian di atas, peneliti tertarik untuk mengkaji lebih lanjut pembangkitan kurva fraktal berdasarkan aturan konstruksi fraktal *Fibonacci Snowflake*. Selain itu, peneliti akan mengkaji pola pengubinan (*tesselation*) yang dimiliki oleh fraktal *Fibonacci Snowflake*.

2. KAJIAN LITERATUR

2.1 Fraktal

Menurut Mandelbrot (1977), fraktal berasal dari bahasa latin yaitu *frangere* merupakan kata kerja yang berarti membelah atau *fractus* merupakan kata sifat yang berarti tidak teratur atau terfragmentasi. Fraktal mempunyai dua ciri khas, yaitu *self-similarity* dan *infinite detail*. *Self similarity* merupakan keadaan objek yang dibangun secara berulang dengan mengganti suatu gambar dengan yang sebangun, tetapi berukuran lebih kecil dari aslinya. Artinya setiap bagian kecil dalam sebuah fraktal dapat dipandang sebagai replikasi skala kecil dari bentuk keseluruhan. Sedangkan *infinite detail* merupakan objek fraktal yang memiliki bentuk besar yang seakan-akan tidak habis apabila diperbesar. Contohnya kurva koch apabila diperbesar dengan generasi yang tak terhingga akan mempunyai ketidakrataan yang sama (Santosa, 1994).

2.2 Barisan *Fibonacci Word*

Tahun 1202, Leonardo Fibonacci memperkenalkan sebuah barisan yang dikenal sebagai barisan *Fibonacci*. Barisan ini didefinisikan secara rekursif sebagai:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

dimana $F_1 = 1$ dan $F_2 = 1$ untuk $n \geq 3$.

Setiap bilangan dalam barisan ini merupakan jumlah dari dua bilangan sebelumnya, sehingga untuk barisan *Fibonacci* adalah $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ (Dumaine, 2009).

Sedangkan barisan *Fibonacci Word* adalah suatu barisan khusus dari bilangan biner $(0-1)$. Barisan ini didefinisikan secara induktif sebagai:

$$f_1 = 1$$
$$f_2 = 0$$
$$f_n = f_{n-1}f_{n-2}, \qquad n \geq 3$$

Fungsi f_n merupakan gabungan dari dua sifat sebelumnya. Berikut adalah barisan *Fibonacci Word* berturut-turut:

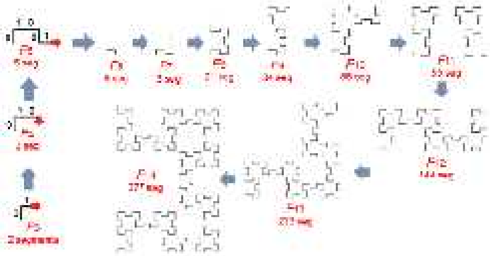
$$f_1 = 1$$
$$f_2 = 0$$
$$f_3 = 01$$
$$f_4 = 010$$
$$f_5 = 01001$$
$$f_6 = 01001010$$
$$f_7 = 0100101001001$$

2.3 Fraktal *Fibonacci Word*

Fraktal *Fibonacci Word* adalah suatu kurva yang memiliki sifat *self-similarity* melalui aturan gambar yang sederhana dan menarik berdasarkan pada barisan *Fibonacci Word*. Aturan konstruksi fraktal *Fibonacci word* dari simbol barisan *Fibonacci word* dapat dilakukan dengan cara mengambil barisan *Fibonacci word* digit ke-n, selanjutnya gambar suatu segmen garis. Apabila digitnya "0", maka belok kiri untuk "n" genap dan belok kanan untuk "n" ganjil, kemudian lanjutkan iterasi. Aturan konstruksi ini disebut aturan garis ganjil-genap. Garis pertama pada aturan garis ganjil-genap, dapat digambar dengan cara berikut:

a. digit pertama adalah 0, maka gambar garis vertikal dan belok kanan,
b. digit kedua adalah 1, maka gambar garis horizontal,
c. digit ketiga adalah 0, maka lanjutkan menggambar garis horizontal dan belok kanan.
d. digit keempat adalah 0, maka gambar garis vertikal dan belok kiri. Lanjutkan secara induktif (Dumaine, 2009).

Konstruksi fraktal *Fibonacci word* menggunakan aturan garis ganjil – genap dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Konstruksi Fraktal *Fibonacci Word* (Dumaine, 2009)

2.4 Fraktal *Fibonacci Snowflake*

Fraktal *Fibonacci Snowflake* merupakan pengembangan dari fraktal *Fibonacci Word* yang memiliki struktur seperti *snowflake*. *Fibonacci Snowflake* adalah kurva tertutup sederhana pada kisi persegi Z^2 terkait dengan deret *Fibonacci* F_n. *Fibonacci Snowflake* ini termasuk kelas kurva yang panjangnya $4F_{3n+1}$ dan bagian dalam atau interior kurva yang membentuk ubin pada bidang melalui translasi (A. Blondin-Masse, 2012).

Pada tahun sebelumnya, (A. Blondin-Masse, 2011) mendefinisikan *Fibonacci Snowflake* atau ubin pada orde n merupakan sebuah polyomino $T_F(n)$ yang direpresentasikan oleh:

$$\phi_n = (q_{3n+1})^3 q_{3n+1} \qquad (2.1)$$

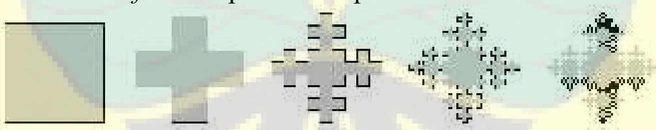
dimana:
ϕ_n adalah kurva fraktal *Fibonacci Snowflake* ke-n,
q adalah barisan *Fibonacci* yang didefinisikan secara rekursif dan $n \geq 0$.

Polyomino yang dimaksud adalah kesatuan unit yang terbatas kisi kotak (piksel) dalam bidang diskrit yang batasnya adalah jalur tertutup sederhana. Dikatakan jalur tertutup sederhana jika titik awal sama dengan titik akhir dengan tidak memotong dirinya sendiri. Secara khusus, sebuah polyomino sederhana terhubung (tanpa lubang) dan batasnya sederhana (tidak menyilang).

Fraktal ini termasuk dalam *Fibonacci* karena perimeter yang digunakan adalah aturan angka *Fibonacci* yakni $4F_{(3n+1)}$ dimana $F_{(n)}$ adalah barisan *fibonacci* dengan $F_{(1)} = F_{(2)} = 1$. Fraktal ini mempunyai struktur seperti *snowflake* yang dinyatakan dalam barisan:

$$1, 5, 29, 169, 985, 5741, 33461, 195025, 1136689, 6625109, 38613965, \ldots$$

Konstruksi fraktal *Fibonacci Snowflake* dapat dilihat pada Gambar 2.3 di bawah ini.



Gambar 2.3 Fraktal *Fibonacci Snowflake* untuk n=0, 1, 2 , 3, 4.

Sedangkan, pengubinan dengan menggunakan *Fibonacci Snowflake* dapat diilustrasikan pada Gambar 2.4.

Gambar 2.4 Pengubinan (*tesselation*) dengan Fraktal *Fibonacci Snowflake*

2.5 Aturan Konstruksi Fraktal *Fibonacci Snowflake*

Untuk mendeskripsikan jalur pada kotak persegi adalah dengan memberikan urutan arah pada titik pertemuan atau titik potong: jalan sepenuhnya ditentukan oleh langkah awal α □ ε, dimana ε adalah huruf kosong yang berarti diam tidak bergerak. Kemudian urutan indikasi arah, yaitu bergerak ke kiri (L), kanan (R), maju (F) atau mundur (B). Dalam catatan ini kita mempertimbangkan subkelas yang didefinisikan pada alfabet $\tau = \{L, R\}$, dan pada khususnya jalur kelas yang diperoleh dari huruf-huruf yang didefinisikan oleh rekurens :

$$q_n = \begin{cases} q_{n-1} q_{n-2} \; jika \; n \equiv 2 \; mod \; 3, \\ q_{n-1} \overline{q_{n-2}} \; jika \; n \equiv 0,1 \; mod \; 3 \end{cases}, \text{ untuk } n \geq 2. \quad (2.2)$$

dimana:
$q_0 = \varepsilon$ (kosong),
$q_1 = R$,
Operasi $\bar{\ }$ berarti lawan atau komplemen dari R ataupun L. Misal $q_1 = R$ maka $\overline{q_1} = L$.
Berikut adalah beberapa iterasi untuk fraktal *Fibonacci Snowflake*:

$$q_0 = \varepsilon$$
$$q_1 = R$$
$$q_2 = R$$
$$q_3 = RL$$
$$q_4 = RLL$$
$$q_5 = RLLRL$$
$$q_6 = RLLRLLRR$$
$$q_7 = RLLRLLRRLRRLR$$
$$q_8 = RLLRLLRRLRRLRRLLRLLRR \quad LRR$$

Perhatikan bahwa $|q_n| = F_n$ adalah angka Fibonacci ke-n, yaitu $|q_n|$ adalah jumlah komponen q_n. q_n.

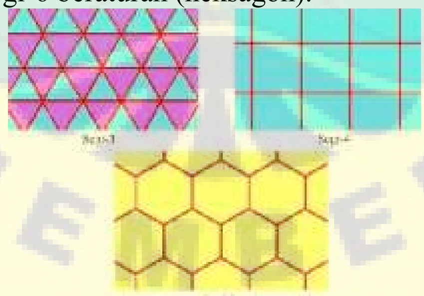
2.6 Pengubinan (*Tesselation*)

Dalam matematika pengubinan disebut dengan tesselasi. Kata tesselasi berasal dari bahasa Inggris yaitu *Tesselation*. Pengubinan adalah kata benda yang berasal dari kata ubin yakni semacam benda yang digunakan untuk menutup lantai. Suatu pola khusus yang terdiri dari bangun - bangun geometri yang disusun tanpa pemisah/ jarak untuk menutupi suatu bidang datar dinamakan pengubinan (O' Daffer, 2008).

Terdapat beberapa macam *tesselation* menurut bidang datar pembangunnya, yakni *regular tesselation*, *semiregular tesselation*, dan *non-regular tesselation*.

a. Regular Tesselation

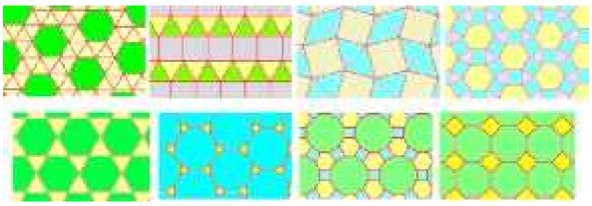
Sebuah *tesselation* yang seluruhnya terbentuk dari bangun segi-*n* yang beraturan, dimana bangun tersebut saling berhimpitan dinamakan *regular tesselation* (O' Daffer, 2008). Terdapat 3 contoh *regular tesselation*, yakni tesselation yang dibentuk oleh segi-3 beraturan (segitiga sama sisi), segi-4 beraturan (persegi), dan segi-6 beraturan (heksagon).



Gambar 2.5 *Regular Tesselation*
(Sumber : www.mathisfun.com)

b. Semiregular Tesselation

Semiregular tesselation merupakan tesselation yang dibentuk dari dua atau lebih bangun segi-n beraturan, dengan pola susunan bangun pada tiap *vertex* harus sama. Berikut beberapa contoh dari *semiregular tesselation*.

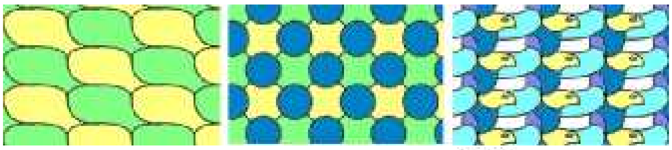


Gambar 2.6 *Semiregular Tesselation*

(Sumber : www.mathisfun.com)

c. *Non-regular Tesselation*

Tesselation yang dibangun menggunakan bangun – bangun datar yang tidak beraturan dinamakan *non-regular tesselation*.



Gambar 2.7 *Non-regular Tesselation*
(Sumber : www.mathisfun.com)

Untuk menentukan pengubinan bangun-bangun segi-n beraturan, harus dipahami besar setiap sudut pada segi-n beraturan. Misalnya, jumlah ukuran sudut segitiga adalah 180º dan besar ukuran sudut satu lingkaran penuh adalah 360º. Namun, untuk mengetahui besar ukuran setiap sudut dalam segi-n beraturan dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Ukuran Sudut Segi-n Beraturan

Nama Bangun	**Jumlah Ukuran Sudut**	**Besar Ukuran Setiap Sudut**
Segitiga beraturan	180º	1/3 x 180º = 60º
Segiempat beraturan	2 x 180º = 360º	2/4 x 180º = 90º
Segilima beraturan	3 x 180º = 540º	3/5 x 180º = 108º
Segienam beraturan	4 x 180º = 720º	4/6 x 180º = 120º
Segitujuh beraturan	5 x 180º = 900º	5/7 x 180º = 128,57º
Segidelapan beraturan	6 x 180º = 1080º	6/8 x 180º = 135º
Segisembilan beraturan	7 x 180º = 1260º	7/9 x 180º = 140º
Segisepuluh beraturan	8 x 180º = 1440º	8/10 x 180º = 144º
Segi-n beraturan	(n – 2) x 180º	((n – 2) / n) x 180º

Untuk mengetahui segibanyak beraturan yang bisa digunakan untuk pengubinan, akan dicari menggunakan langkah berikut.

- Pertama, besar sudut sebuah segi-n beraturan adalah $\frac{(n-2)}{n} \times 180°$
- Selanjutnya, agar tidak saling tindih dan tidak ada celah, maka p buah ubin tersebut harus tepat menutup permukaan. Ini berarti,

$$p \times \pi\left(1-\frac{2}{n}\right)=2\pi$$
$$p\left(1-\frac{2}{n}\right)=2$$
$$1-\frac{2}{n}=\frac{2}{p}$$
$$\frac{2}{n}+\frac{2}{p}=1$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2} \qquad (2.3)$$

Persamaan (2.3) hanya dipenuhi berturut-turut untuk nilai $n=3, p=6, n=4, p=4$ dan $n=6, p=3$. Dengan demikian, hanya terdapat tepat 3 (tiga) bangun datar yang bisa digunakan pada pengubinan beraturan, yaitu segitiga samasisi, persegi dan segienam beraturan.

3. METODE PENELITIAN

3.1 Penafsiran Fraktal *Fibonacci Snowflakes* secara Matematis

Langkah pertama dalam penelitian ini adalah penafsiran fraktal *Fibonacci Snowflakes* secara matematis. Pada langkah ini akan ditentukan komponen-komponen pembentukan kurva fraktal *Fibonacci Snowflakes*, dimana komponen-komponen ini mengacu pada definisi barisan *Fibonacci Snowflakes* pada persamaan (2.2), yaitu:

$$q_n = \begin{cases} q_{n-1}q_{n-2} & jika\ n \equiv 2 \ mod\ 3, \\ q_{n-1}\overline{q_{n-2}} & jika\ n \equiv 0,1 \ mod\ 3 \end{cases}, \text{ untuk } n \geq 2.$$

dimana:

$q_0 = \varepsilon$ (kosong),

$q_1 = R$,

Operasi $\bar{\ }$ berarti lawan atau komplemen dari R ataupun L. Misal $q_1 = R$ maka $\overline{q_1} = L$.

Selain itu, komponen-komponen pembentukan kurva fraktal *Fibonacci Snowflakes* juga diperoleh berdasarkan aturan konstruksi kurva yang mengacu pada persamaan (2.1), yaitu:

$$\phi_n = (q_{3n+1})^3 q_{3n+1}$$

Kemudian berdasarkan komponen-komponen pembentukan kurva tersebut akan diperoleh beberapa generasi kurva fraktal *Fibonacci Snowflakes*.

3.2 Penafsiran Fraktal *Fibonacci Snowflakes* secara Grafis

Langkah kedua dalam penelitian ini adalah penafsiran fraktal *Fibonacci Snowflakes* secara grafis setelah didapatkan penafsiran secara matematisnya pada langkah pertama. Hasil generasi kurva fraktal *Fibonacci Snowflakes* pada langkah sebelumnya, kemudian digambar secara grafis sesuai komponen-komponen pembentukan kurva yang telah didapatkan sebelumnya. Pada langkah ini akan digambarkan kurva fraktal *Fibonacci Snowflakes* hingga beberapa generasi sebagai pembanding dengan hasil visualisasi pada program. Kemudian akan divisualisasikan pula pola pengubinan dengan memanfaatkan fraktal *Fibonacci Snowflakes*.

3.3 Pembuatan Program

Langkah ketiga dalam penelitian ini yaitu pembuatan program visualisasi berdasarkan kurva yang dihasilkan di langkah kedua. Algoritma program yang digunakan dalammembangkitkan kurva adalah sebagai berikut:

a. Mendefiniskan simbol untuk menggambar;
b. Menentukan aturan produksi dan aksioma berdasarkan aturan kontruksi fraktal *Fibonacci Snowflakes*;
c. Menentukan titik awal (X_0, Y_0);
d. Menentukan aturan pengubinan;
e. Visualisasi input hingga generasi ke-n.

3.4 Analisis Hasil

Hasil yang diperoleh dari pembuatan program adalah visualisasi kurva dari fraktal *Fibonacci Snowflakes* dalam dimensi dua dan visualisasi pola pengubinan dengan menggunakan kurva dari fraktal *Fibonacci Snowflakes*. Dari kurva yang dihasilkan akan dianalisa mengenai sifat *tesselation* dari hasil kurva fraktal *Fibonacci Snowflake*.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dibahas tentang pola pengubinan dengan memanfaatkan pola fraktal *Fibonacci Snowflake* berdasarkan langkah-langkah yang telah diuraikan pada bagian 3.

4.1 Penafsiran Fraktal *Fibonacci Snowflakes* secara Matematis

Penafsiran fraktal *Fibonacci Snowflake* secara matematis dibangun dengan menentukan komponen-komponen pembentukan kurva fraktal *Fibonacci Snowflake*. Berdasarkan definisi barisan *Fibonacci Snowflake* pada Persamaan (2.2) dan mengacu pada representasi kurva fraktal *Fibonacci Snowflake* pada Persamaan (2.1), maka generasi kurva fraktal *Fibonacci Snowflake*adalah

$$\phi_n = (q_{3n+1})^3 q_{3n+1}$$
$$\phi_n = (q_{3n+1})^4$$
$$\phi_0 = (q_1)^4 = (R)^4 = RRRR$$
$$\phi_1 = (q_4)^4 = (RL[illegible]$$
$$\phi_2 = (q_7)^4 = (RL[illegible]$$
$$= [illegible]$$ [redacted] RRLRRLR

Dengan R adalah simbol untuk menggambar garis ke kanan sepanjang 1 satuan, L adalah simbol [redacted] L adalah sim[redacted] untuk menggambar garis ke kiri sepanjang 1 satuan dan sudut belok yang digunakan adalah $\frac{\pi}{2}$.

Beberapa generasi kurva fraktal *Fibonacci Snowflakes* secara matematis dapat dilihat pada Tabel 4.1.

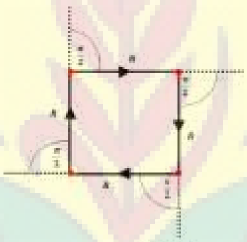
Tabel 4.1 Beberapa Generasi Kurva Fraktal *Fibonacci Snowflakes* Secara Matematis

Generasi	Formula	Hasil Produksi
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	RRRR RLLRLLRLLRLL RLLRLLRRLRRLRRLLRLLRRLRRLR RLLRLLRRLRRLR [illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible] [redacted]

4.2 Penafsiran Fraktal *Fibonacci Snowflakes* secara Grafis

Generasi kurva fraktal *Fibonacci Snowflake* yang didapatkan pada langkah sebelumnya, selanjutnya akan digambar secara grafis berdasarkan definisi simbol-simbol dari persamaan yang digunakan. Langkah ini disebut dengan penafsiran fraktal *Fibonacci Snowflake* secara grafis.

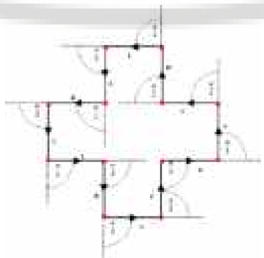
Penafsiran grafis kurva fraktal *Fibonacci Snowflake* untuk generasi $n = 0$ dapat dilihat pada Gambar 4.1



Gambar 4.1Hasil Visualisasi Fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk Generasi $n = 0$

Penafsiran grafis berdasarkan pada Gambar 4.1 tersebut mula-mula mengerjakan perintah simbol ***R***, yaitu menggambar garis ke kanan sepanjang l satuan. Untuk awalan, pendefisinisian simbol ***R***dilakukan secara bebas atau fleksibel baik dilakukan dengan membuat garis ke kanan, ke kiri, ke atas maupun ke bawah karena hasil akhir akan sama dengan tetap mengikuti pendefinisian sebenarnya untuk simbol-simbol berikutnya. Perintah simbol ***R*** tersebut dilakukan berulang sebanyak 4 kali dengan sudut belok sebesar $\theta = \frac{\pi}{2}$. Banyaknya simbol ***R***dan ***L***menunjukkan banyaknya segmen garis yang dihasilkan.

Penafsiran secara grafis yang telah dilakukan untuk $n = 0$ dapat pula diterapkan untuk $n = 1$. Penafsiran grafis kurva fraktal *Fibonacci Snowflake* untuk generasi $n = 1$ dapat dilihat pada Gambar 4.2

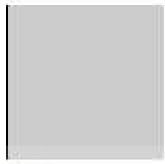
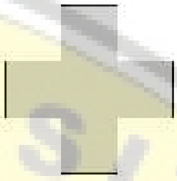
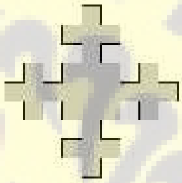
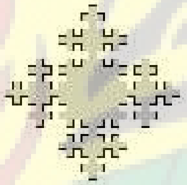
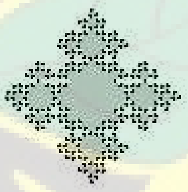


Gambar 4.2Hasil Visualisasi Fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk Generasi $n = 1$

Penafsiran grafis berdasarkan pada Gambar 4.2 tersebut mula-mula mengerjakan perintah simbol ***R***, yaitu menggambar garis ke kanan sepanjang l satuan. Perintah simbol ***L*** menggambar garis ke kiri sepanjang l satuan Perintah simbol $\boldsymbol{R}$ maupun $\boldsymbol{L}$ tersebut dilakukan dengan sudut belok sebesar $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Langkah yang sama dalam penafsiran fraktal *Fibonacci Snowflake* secara grafis dapat dilakukan untuk generasi lainnya. Beberapa generasi kurva fraktal *Fibonacci Snowflakes* secara grafis dapat dilihat pada Tabel 4.2

Tabel 4.2Beberapa Generasi Kurva Fraktal *Fibonacci Snowflakes* Secara Grafis

Generasi	Formula	Hasil Produksi
g^0	$(g^1)^4$	
g^1	$(g^4)^4$	
g^2	$(g^7)^4$	
g^3	$(g^{10})^4$	
g^4	$(g^{13})^4$	

4.3 Pembuatan Program

Langkah selanjutnya yaitu pembuatan program visualisasi fraktal *Fibonacci Snowflake* dan pengubinan dengan menggunakan fraktal *Fibonacci Snowflake* berdasarkan hasil penafsiran fraktal *Fibonacci Snowflake* mulai dari $n = 0$ secara matematis dan grafis. Program visualisasi fraktal *Fibonacci Snowflake* dilakukan dengan menggunakan *Software Matlab* dan *script* program terdapat dalam Lampiran 4.1. algoritma program dalam membangun fraktal *Fibonacci Snowflake* dan pengubinan diuraikan sebagai berikut.

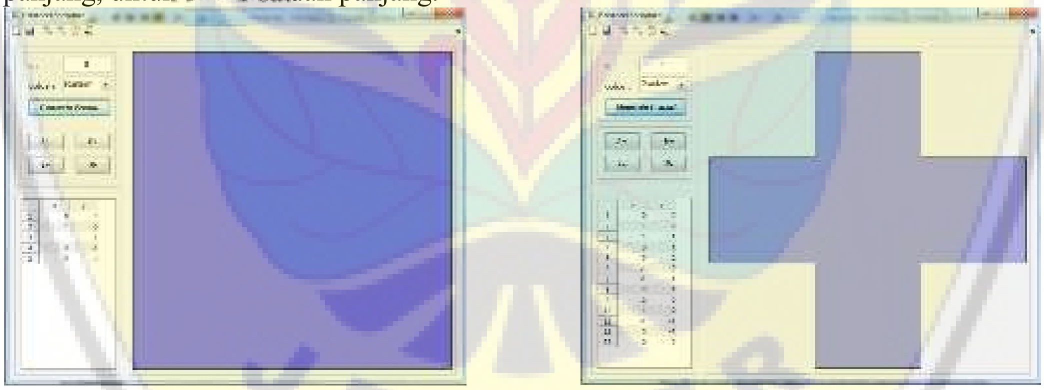
a. Menentukan aturan produksi dan aksioma berdasarkan aturan kontruksi fraktal *Fibonacci Snowflakes*;
b. Menentukan nilai generasi fraktal *Fibonacci Snowflake* yang akan divisualisasi sebagai input. Nilai generasi tersebut dinyatakan dalam bilangan positif dan dimulai dari angka nol;
c. Menentukan panjang segmen, sudut putar, arah, posisi titik awal dan aturan pengubinan pada fraktal *Fibonacci Snowflake*, yaitu:
   1) Panjang segmen garis pada fraktal *Fibonacci Snowflake* untuk $R(x), D(x), L(x), U(x), x = 1$ satuan panjang;
   2) Nilai satu satuan sudut θ (sudut putar) adalah $\frac{\pi}{2}$ radian;

3) Perintah belok kanan dan belok kiri dalam program menggunakan asumsi empat arah, yaitu kanan, kiri, atas dan bawah;
4) Posisi titik awal adalah $(X_0, Y_0) = (0,0)$ yang dilanjutkan ke titik $(X_1, Y_1) = (1,0)$
5) Aturan pengubinan fraktal *Fibonacci Snowflake* menggunakan teknik translasi atau pergeseran titik koordinat, yaitu:
   a) $R+$ (kanan naik) : titik X bergeser ke kanan sejauh $\left\lceil \frac{l_{n-1}}{2} \right\rceil$, titik Y bergeser ke atas sejauh $\left\lceil \frac{l_n}{2} \right\rceil$
   b) $R-$ (kanan turun) : titik X bergeser ke kanan sejauh $\left\lceil \frac{l_n}{2} \right\rceil$, titik Y bergeser ke bawah sejauh $\left\lceil \frac{l_{n-1}}{2} \right\rceil$
   c) $L+$ (kiri naik) : titik X bergeser ke kiri sejauh $\left\lceil \frac{l_n}{2} \right\rceil$, titik Y bergeser ke atas sejauh $\left\lceil \frac{l_{n-1}}{2} \right\rceil$
   d) $L-$ (kiri turun) : titik X bergeser ke kiri sejauh $\left\lceil \frac{l_{n-1}}{2} \right\rceil$, titik Y bergeser ke bawah sejauh $\left\lceil \frac{l_n}{2} \right\rceil$

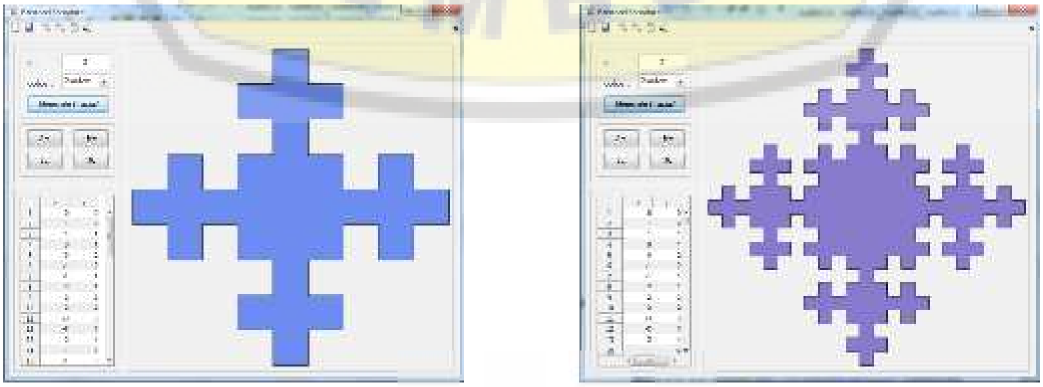
d. Menginputkan *nilai* generasi *hingga* generasi ke-n dan visualisasi pengubinan berdasarkan aksioma dan aturan produksi yang telah diberikan;
e. Menggambar fraktal *Fibonacci Snowflakes* berdasarkan ketentuan pada point c dan generasi yang telah didapatkan pada langkah sebelumnya.

4.4 Hasil Simulasi Program

Dengan menjalankan program didapatkan hasil visualisasi fraktal *Fibonacci Snowflakes* dalam beberapa generasi dan visualisasi pola pengubinan menggunakan fraktal *Fibonacci Snowflakes*. Visualisasi fraktal *Fibonacci Snowflakes* tersebut dihasilkan mulai dari generasi ke-0 sampai generasi ke-8, hal ini dikarenakan keterbatasan prosesor dan memori pada komputer yang digunakan. Hasil visualisasi fraktal *Fibonacci Snowflakes* generasi ke-0, ke-1, ke-2 dan ke-3 dapat dilihat pada Gambar 4.3 dengan panjang $R = l$ satuan panjang, $D = l$ satuan panjang, $L = l$ satuan panjang dan $U = l$ satuan panjang, untuk $l = 1$ satuan panjang.



(a)(b)

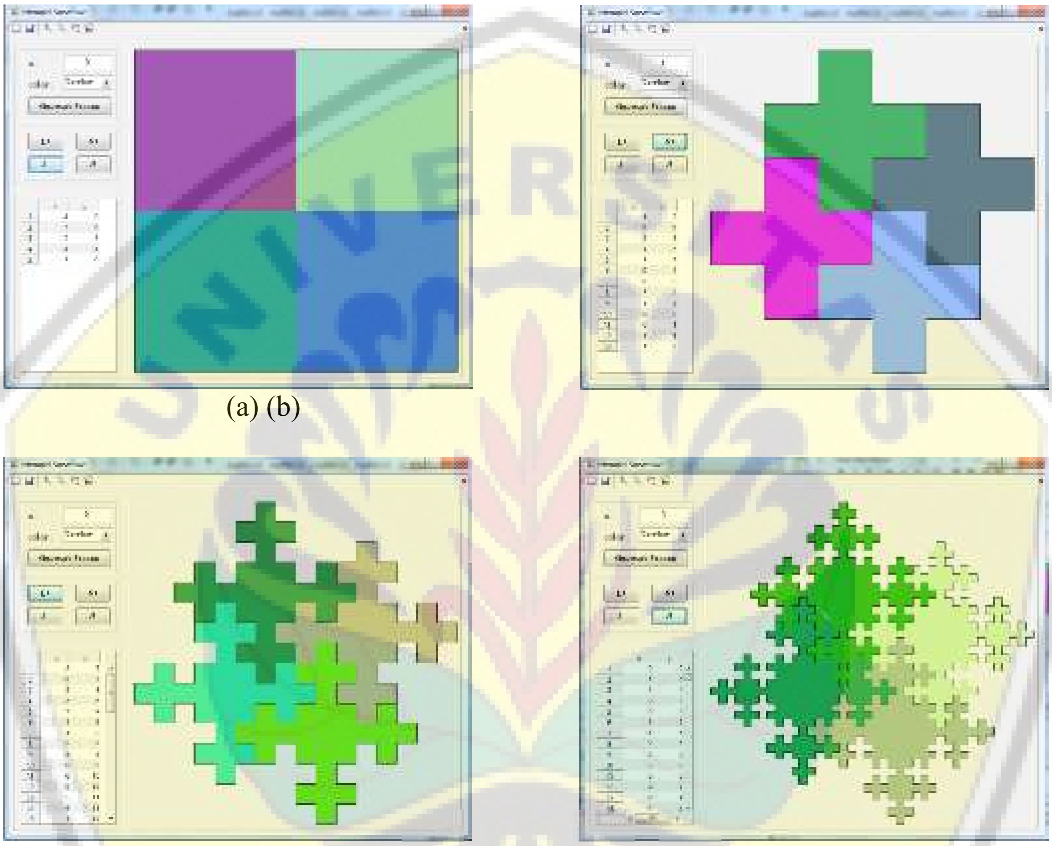


(c) (d)

Gambar 4.3Hasil Visualisasi Fraktal *Fibonacci Snowflakes*
(a) g_0, (b) g_1, (c) g_2, (d) g_3

Hasil visualisasi program fraktal *Fibonacci Snowflakes* pada Gambar 4.3 memiliki bentuk sama dengan hasil penafsiran fraktal *Fibonacci Snowflakes* secara grafis. Hasil generasi yang diperoleh dari program memiliki urutan yang sama dengan hasil penafsiran fraktal *Fibonacci Snowflakes* secara matematis.

Berdasarkan langkah-langkah yang telah dilakukan, yaitu penafsiran fraktal *Fibonacci Snowflakes* secara matematis, grafis, pembuatan dan simulasi program. Maka fraktal *Fibonacci Snowflakes* dapat diterapkan dalam membangun pola pengubinan. Bentuk fraktal *Fibonacci Snowflakes* sesuai dengan aturan pola pengubinan, yaitu saling menutupi tanpa ada tumpang tindih.Hasil visualisasi pengubinan dengan menggunakan fraktal *Fibonacci Snowflakes* generasi ke-0, ke-1, ke-2 dan ke-3 dapat dilihat pada Gambar 4.4



(a) (b)

(c)(d)

Gambar 4.4Hasil Visualisasi Pola Pengubinan Menggunakan Pola Fraktal *Fibonacci Snowflakes* (a) g_0, (b) g_1, (c) g_2, (d) g_3

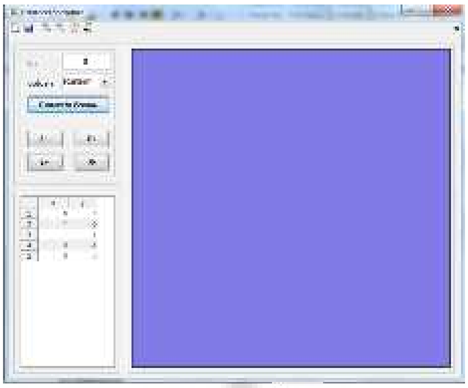
Berdasarkan tampilan dari hasil visualisasi menggunakan program, tombol $R+$ menunjukkan penambahan kurva ke arah kanan atas. Tombol $R-$ menunjukkan penambahan kurva ke arah kanan bawah. Tombol $L+$ menunjukkan penambahan kurva ke arah kiri atas dan tombol $L-$ menunjukkan penambahan kurva ke arah kiri bawah. Koordinat yang ditampilkan adalah koordinat kurva yang aktif terakhir.

4.5 Pembahasan

Pada subbab 4.4 telah dibuat program visualisasi fraktal *Fibonacci Snowflakes* dengan aturan produksi yang telah ditentukan. Selanjutnya, program yang telah dibuat tersebut digunakan untuk memvisualisasikan nilai generasi yang lebih besar.

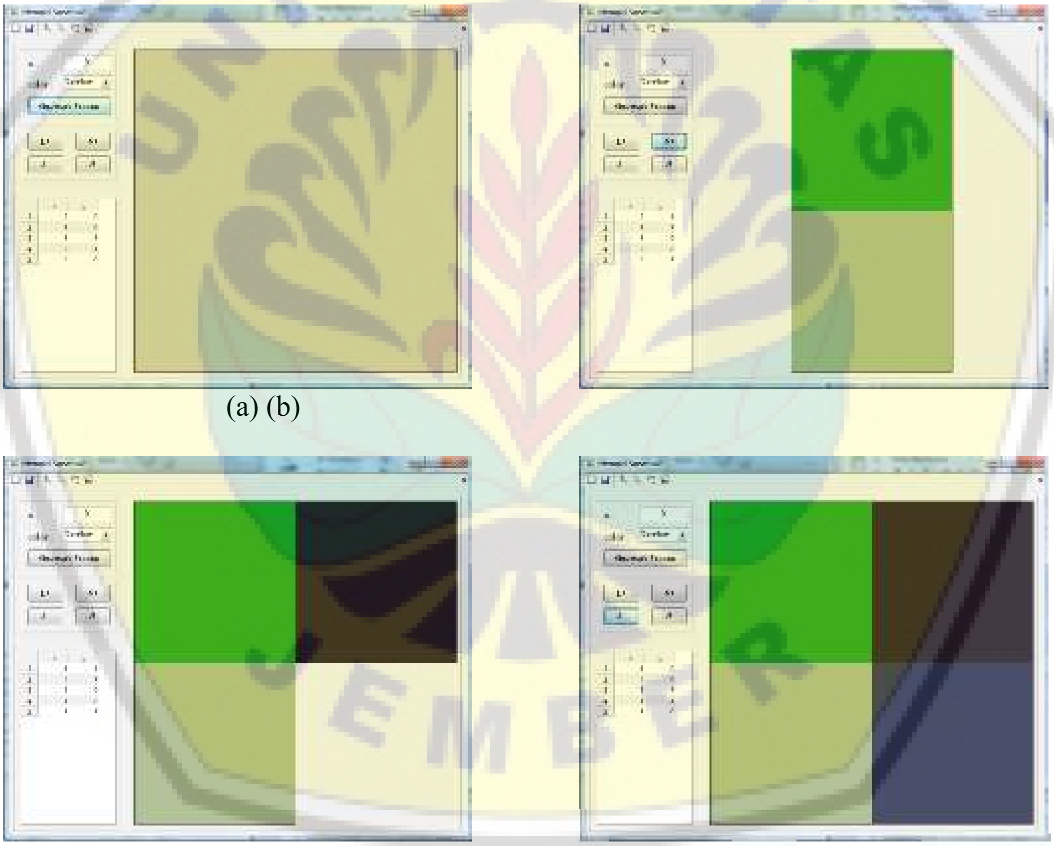
a. Visualisasi fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk $n = 0$

Hasil visualisasi fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk $n = 0$ dapat dilihat pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5Hasil Visualisasi Fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk $n = 0$

Berdasarkan Gambar 4.5 dapat diketahui jumlah segmen garis setiap generasi fraktal *Fibonacci Snowflakes*. Generasi ke-0 dari fraktal *Fibonacci Snowflakes* memiliki empat segmen garis, dimana ini sama dengan banyaknya digit pada ϕ_n atau sama dengan panjang kurva fraktal *Fibonacci Snowflakes*, yaitu $4F_{3n+1}$ dimana $F_n = |q_n|$. Hasil visualisasi pengubinan dengan menggunakan fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk $n = 0$ dapat dilihat pada Gambar 4.6.



(a) (b)

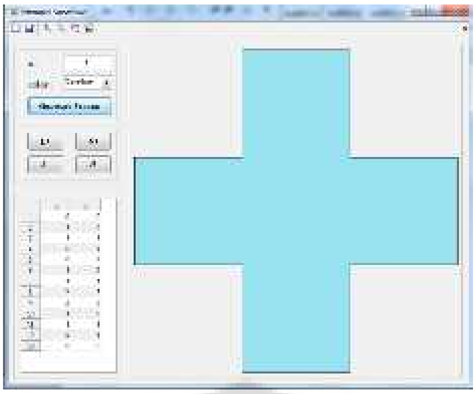
(c)(d)

Gambar 4.6Hasil Visualisasi Pola Pengubinan Menggunakan Pola Fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk $n = 0$

(a) Hasil *Generate Fractal*, (b) Hasil $R+$, (c) Hasil $R-$, (d) Hasil $L-$

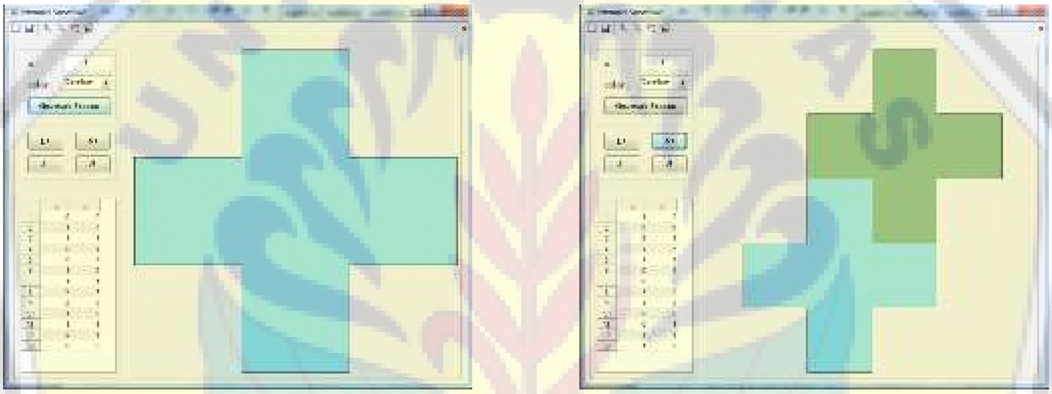
b. Visualisasi fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk $n = 1$

Hasil visualisasi fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk $n = 1$ dapat dilihat pada Gambar 4.7.

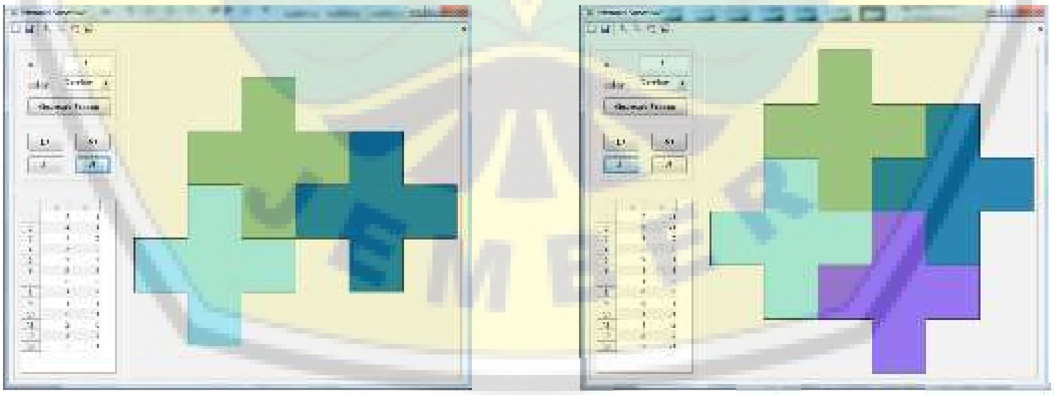


Gambar 4.7Hasil Visualisasi Fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk $n = 1$

Berdasarkan Gambar 4.7 dapat diketahui jumlah segmen garis pada generasi ke-1 dari fraktal *Fibonacci Snowflakes* adalah 12, dimana ini sama dengan banyaknya digit pada ϕ_n atau sama dengan panjang kurva fraktal *Fibonacci Snowflakes*, yaitu $4F_{3n+1}$ dimana $F_n = |q_n|$. Hasil visualisasi pengubinan dengan menggunakan fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk $n = 1$ dapat dilihat pada Gambar 4.8.



(a) (b)



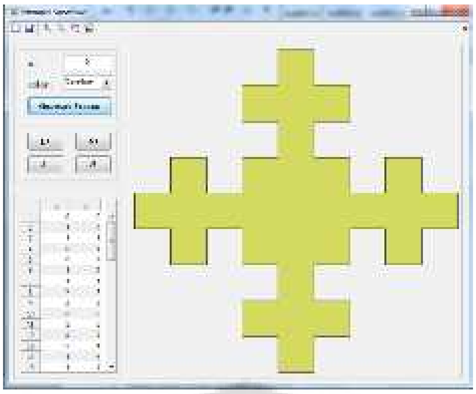
(c)(d)

Gambar 4.8Hasil Visualisasi Pola Pengubinan Menggunakan Pola Fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk $n = 1$

(a) Hasil *Generate Fractal*, (b) Hasil $R +$, (c) Hasil $R -$, (d) Hasil $L -$

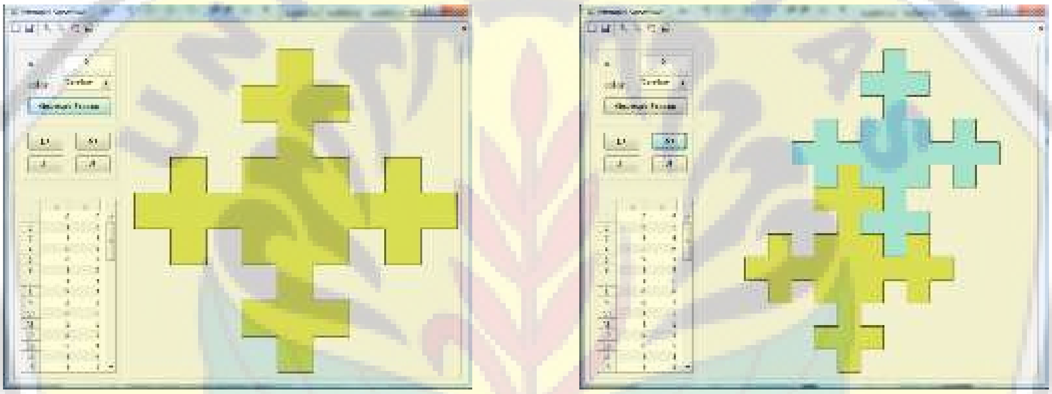
c. Visualisasi fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk $n = 2$

Hasil visualisasi fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk $n = 2$ dapat dilihat pada Gambar 4.9.

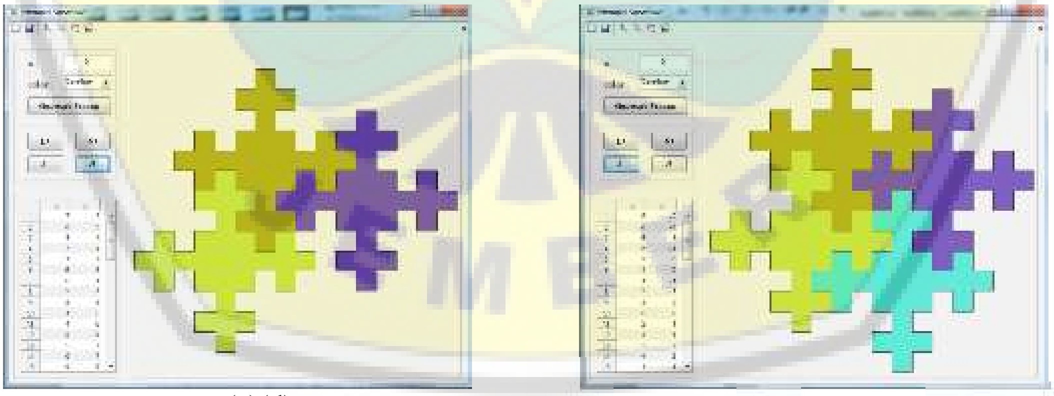


Gambar 4.9Hasil Visualisasi Fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk $n = 2$

Berdasarkan Gambar 4.9 dapat diketahui jumlah segmen garis pada generasi ke-2 dari fraktal *Fibonacci Snowflakes* adalah 52, dimana ini sama dengan banyaknya digit pada ϕ_n atau sama dengan panjang kurva fraktal *Fibonacci Snowflakes*, yaitu $4F_{3n+1}$ dimana $F_n = |q_n|$. Hasil visualisasi pengubinan dengan menggunakan fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk $n = 2$ dapat dilihat pada Gambar 4.10.



(a) (b)



(c)(d)

Gambar 4.10Hasil Visualisasi Pola Pengubinan Menggunakan Pola Fraktal *Fibonacci Snowflakes* untuk $n = 1$

(a) Hasil *Generate Fractal*, (b) Hasil $R +$, (c) Hasil $R -$, (d) Hasil $L -$

Berdasarkan uraian diatas, dapat diketahui bahwa untuk nilai generasi yang lebih besar mempunyai lebih banyak segmen garis. Banyaknya segmen garis pada kurva fraktal *Fibonacci Snowflakes* dari generasi ke-0 hingga generasi ke-3 dapat dilihat pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3Banyaknya Segmen Garis pada Kurva Fraktal *Fibonacci Snowflakes*

Generasi	Banyak Segmen Garis
[illegible]	4
[illegible]	12

[illegible]	52
[illegible]	220

5. KESIMPULAN

Penelitian ini memiliki kesimpulan bahwa aturan kontruksi fraktal *Fibonacci Snowflakes* didapat dari barisan *Fibonacci* yang didefinisikan oleh R dan L dimana R menunjukkan segmen garis ke arah kanan sedangkan L menunjukkan segmen garis ke arah kiri. Hasil kurva fraktal *Fibonacci Snowflakes* dapat diterapkan pada pola pengubinan karena kurva fraktal *Fibonacci Snowflakes* memenuhi syarat pola pengubinan, yaitu saling menutupi tanpa ada tumpang tindih.

6. REFERENSI

Beng, P. D. R. 2018. *Tessellation*. https://www.mathsisfun.com/geometry/ tessellation.html. [Diakses pada 12 Mei 2018]

Dumaine, A. M. 2009. *The Fibonacci Word Fractal*. https://hal.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/367972/filename/The_Fibonacci_word_fractal.pdf. [Diakses pada 12 Mei 2018]

Mandelbrot, B. B. 1977. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman and Company.

Massé A. B., S. Brlek, A. Garon, S. Labbé. 2011. Two Infinite Families of Polyominoes That Tile the Plane by Translation In Two Distinct Ways. *Theoret. Comput. Sci*. 412 4778–4786.

Massé A. B., S. Brlek, S.Labbé, M. Mendès France. 2011. Fibonacci Snowflakes. *Ann. Sci. Math. Québec* 35, No 2, 141–152.

Massé A. B., S. Brlek, S.Labbé, M. Mendès France. 2012. Complexity of the Fibonacci Snowflake. *Fractals* 20 257–260.

O'Daffer, P. G. 2008. *Mathematics for Elementary School Teachers*. Fourth Edition: Pearson Education.

Peitgen, H.O. dan Soupe, D. 1988. *The Science of Fractal Images*. New York: Springer-Verlag

Santosa, P. I. 1994. *Grafika Komputer dan Antarmuka Grafis Teknik Penyusunan Program Aplikasi Berbasis Grafis yang Profesional*. Yogyakarta : Andi Offset.

7. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung kegiatan penelitian yang bersumber dari dana Hibah Keris Batch 4 tahun 2018 LP2M Universitas Jember melalui Kelompok Riset Geometri Rancang Bangun dan Matematika Analisis (Keris Gerbang Mata).