

KALKULUS INTEGRAL

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.

Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

KALKULUS INTEGRAL

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., dkk

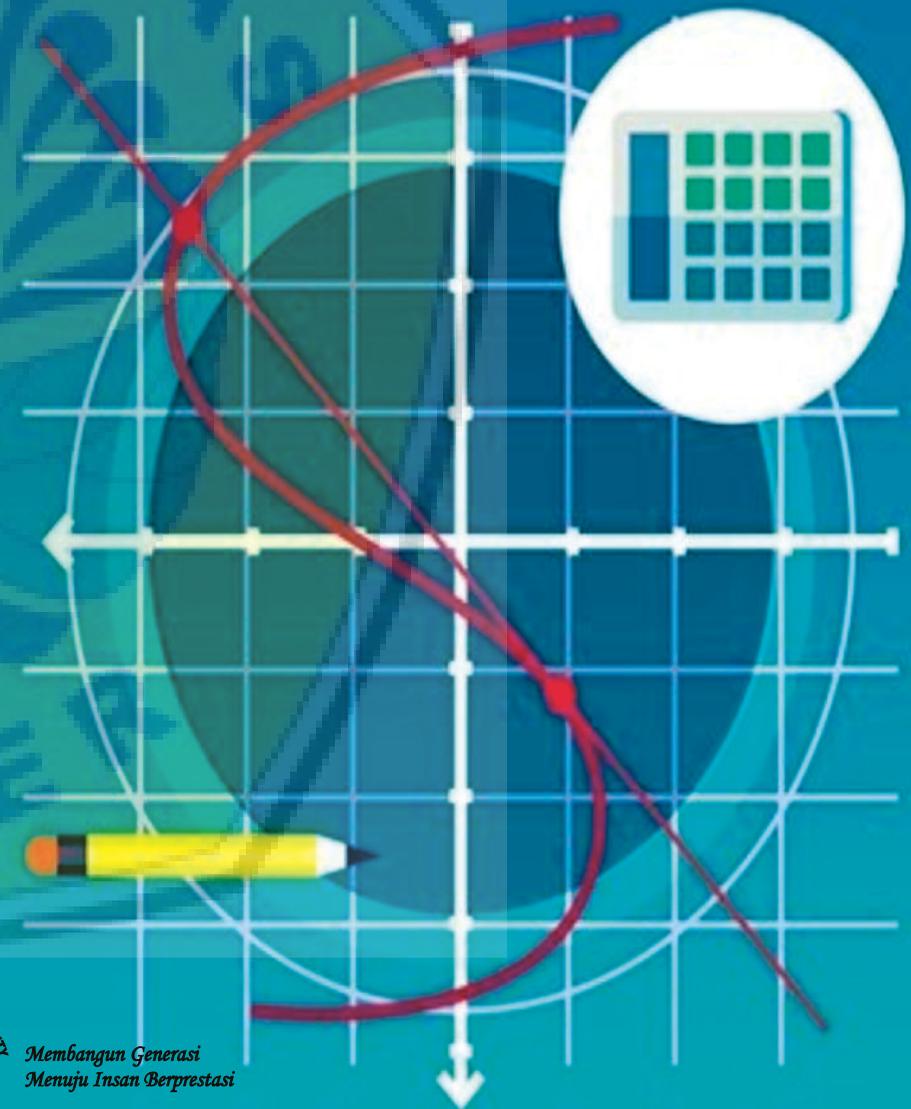
Anggota APPTI No. 036/KTA/APPT/2015

Anggota IKAPI No. 127/JTI/2011

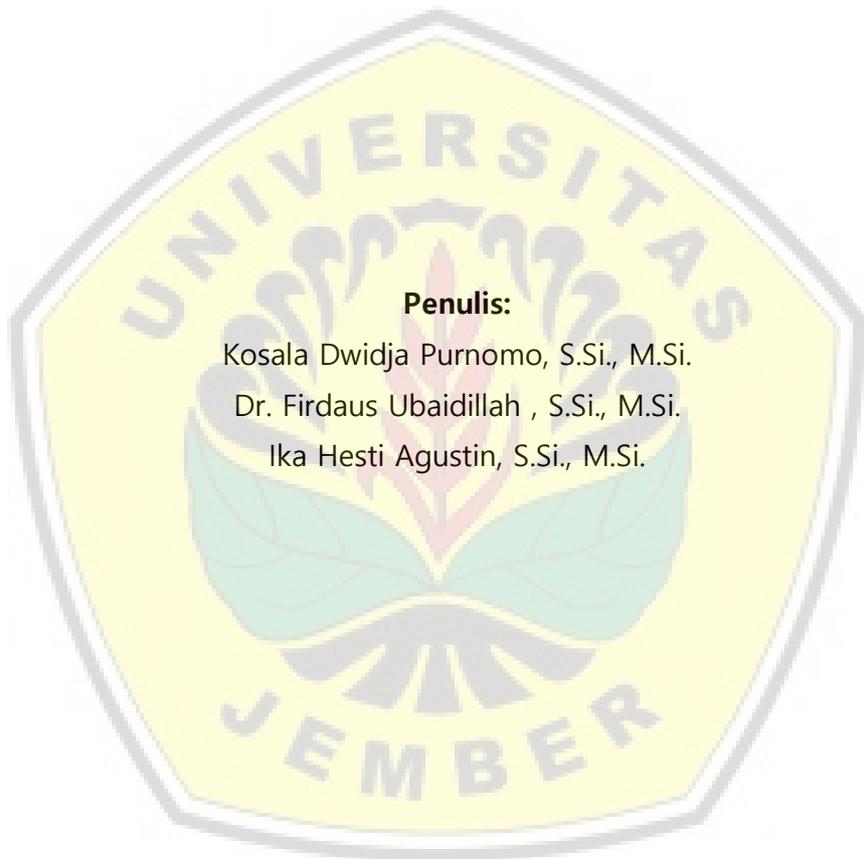
Jember University Press
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121
Telp. 0331-330224, psw. 0319
E-mail: upt-penerbitan@unej.ac.id



Membangun Generasi
Menuju Insan Berprestasi



KALKULUS INTEGRAL



Penulis:

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.

Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

UPT PERCETAKAN & PENERBITAN

UNIVERSITAS JEMBER

2019

KALKULUS INTEGRAL

Penulis:

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.

Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

Desain Sampul dan Tata Letak

Fatkhur Rokhim

M. Hosim

ISBN: 978-623-7226-73-4

Penerbit:

UPT Percetakan & Penerbitan Universitas Jember

Redaksi:

Jl. Kalimantan 37

Jember 68121

Telp. 0331-330224, Voip. 00319

e-mail: upt-penerbitan@unej.ac.id

Distributor Tunggal:

UNEJ Press

Jl. Kalimantan 37

Jember 68121

Telp. 0331-330224, Voip. 0319

e-mail: upt-penerbitan@unej.ac.id

Hak Cipta dilindungi Undang-Undang. Dilarang memperbanyak tanpa ijin tertulis dari penerbit, sebagian atau seluruhnya dalam bentuk apapun, baik cetak, *photoprint*, maupun *microfilm*.



Kata Pengantar

Kalkulus Integral: Mengkalkulasi impact dari sebuah perubahan

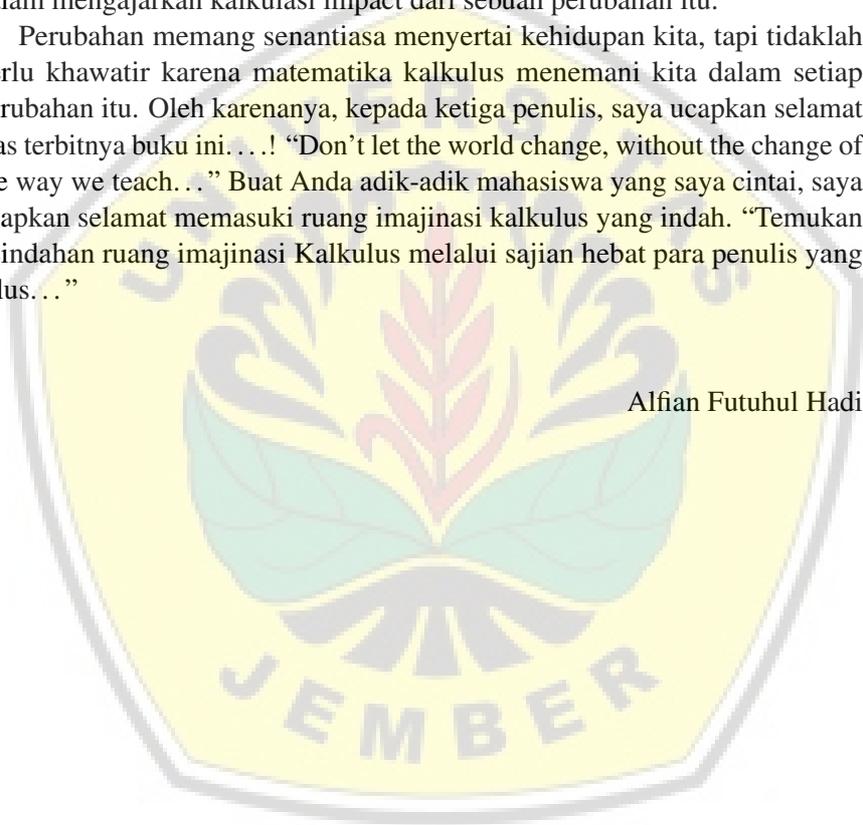
Kalkulus integral, seringkali kita mengenalnya sebagai suatu cabang kalkulus yang berkaitan dengan teori dan aplikasi integral. Secara umum kita mengenal kalkulus dalam dua bagian yaitu kalkulus diferensial dan kalkulus integral. Sementara, kalkulus diferensial mempelajari tentang bagaimanakah sesuatu berubah, kalkulus integral mempelajari tentang akibat yang ditimbulkan dari perubahan tersebut. Dalam kasus sederhana, kalkulus integral mempelajari mengenai hubungan antara dua buah variabel jika diketahui laju perubahan dari kedua variable tersebut. Kalkulus diferensial berfokus pada tingkat perubahan, seperti kemiringan garis singgung dan kecepatan, sedangkan kalkulus integral berkaitan dengan ukuran atau nilai total, seperti panjang (jarak), luas bidang atau wilayah, juga volume ruang.

Kedua cabang dihubungkan oleh teorema dasar kalkulus, yang menunjukkan bagaimana integral tertentu dihitung dengan menggunakan antiderivatif, dimana fungsi laju perubahannya, atau turunannya, sama dengan fungsi yang diintegrasikan. Sebagai contoh, mengintegrasikan fungsi kecepatan menghasilkan fungsi jarak, yang memungkinkan jarak yang ditempuh dihitung oleh suatu objek selama interval waktu tertentu. Beberapa kalkulus integral berkaitan dengan derivasi formula untuk menemukan antiderivatif. Kemanfaatan kalkulus intergral yang luas berasal dari penggunaannya dalam menyelesaikan persamaan diferensial.

Buku ajar yang ada di tangan Anda ini, hendak mengajak kita memasuki wilayah dan ruang itu. Saya mengenal ketiga penulis sebagai kolega yang memiliki dedikasi tinggi, dan kecintaan mendalam pada matematika. Ketulusan ini membuat pengajaran matematika mendarat mulus dalam hati kita, para mahasiswa. Dengan kecintaannya pada pengajaran matematika dan kedalaman kelimuan yang dimiliki, ketiga penulis buku ajar ini akan memandu kita para pengajar kalkulus untuk merasakan keluasan ruang matematika kalkulus dalam mengajarkan kalkulasi impact dari sebuah perubahan itu.

Perubahan memang senantiasa menyertai kehidupan kita, tapi tidaklah perlu khawatir karena matematika kalkulus menemani kita dalam setiap perubahan itu. Oleh karenanya, kepada ketiga penulis, saya ucapkan selamat atas terbitnya buku ini. . . .! “Don’t let the world change, without the change of the way we teach. . .” Buat Anda adik-adik mahasiswa yang saya cintai, saya ucapkan selamat memasuki ruang imajinasi kalkulus yang indah. “Temukan keindahan ruang imajinasi Kalkulus melalui sajian hebat para penulis yang tulus. . .”

Alfian Futuhul Hadi





Prakata

Puji syukur dihaturkan hanya kepada Allah Tuhan yang Mahaesa. Atas rahmatNya jua buku ini sampai ke tangan pembaca. Semoga semua ikhtiar ini menjadi bagian dari kontribusi Tim Penulis untuk memajukan dan memahamkan matematika di bumi pertiwi tercinta.

Turunan dan integral adalah sebagian dari konsep dasar penting untuk memahami fenomena sains di sekeliling kita. Banyak fenomena yang dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial, sehingga karenanya dibutuhkan pemahaman terhadap konsep dasar turunan. Demikian juga, pemahaman terhadap konsep integral dibutuhkan untuk menentukan solusi persamaan diferensial tersebut, sekaligus untuk menginterpretasikan solusi tersebut dalam masalah terkait.

Buku yang ada di tangan pembaca ini memuat beberapa penerapan konsep integral sebagai kelanjutan dari konsep turunan. Penentuan luas daerah, volume benda dengan bentuk yang memenuhi aturan tertentu, panjang kurva, serta luas permukaan putar suatu benda adalah sebagian contoh penerapan integral yang akan diuraikan. Dalam hal ini fungsi-fungsi yang digunakan dipilih yang relatif sederhana, sehingga bisa diselesaikan dengan menggunakan teknik pengintegralan yang dibahas juga di dalam buku ini.

Untuk keperluan aplikasi di bidang teknik, dibahas juga beberapa bentuk fungsi transenden, diantaranya adalah fungsi logaritma asli dan fungsi eksponensial asli sebagai inversnya. Fungsi-fungsi ini diperlukan untuk menyele-

saikan bentuk persamaan diferensial sederhana yang muncul dalam model pertumbuhan populasi eksponensial maupun logistik. Pemahaman terhadap sifat-sifat fungsi logaritma dan eksponensial (yang asli maupun umum) akan banyak membantu dalam menjelaskan solusi persamaan diferensial terkait.

Mahasiswa juga perlu dibekali kemampuan menyelesaikan beberapa bentuk integral tertentu yang sering muncul dalam aplikasi. Oleh karenanya, beberapa teknik pengintegralan dasar harus dikuasainya. Saat ini sudah dikembangkan berbagai software matematika yang dapat digunakan menyelesaikan berbagai bentuk integral dari fungsi yang rumit. Namun demikian, tetap saja diperlukan ketrampilan untuk menyelesaikan berbagai bentuk integral secara manual. Tentu saja, hal tersebut terbatas pada fungsi yang dapat diselesaikan dengan teknik-teknik pengintegralan yang diberikan.

Pada akhirnya akan dikenalkan berbagai bentuk integral tak-wajar yang juga banyak ditemui dalam aplikasi di lapangan. Konsep kekonvergenan limit dari suatu fungsi juga dibutuhkan dalam menentukan nilai integral tak-wajar tersebut. Oleh karenanya, pembahasan tentang ini akan didahului dengan identifikasi bentuk-bentuk tak-tentu sebagaimana disyaratkan dalam menyelesaikan bentuk limit terkait.

Akhirnya, selamat menikmati buku sederhana ini. Secara khusus, bagi mahasiswa semoga anda dapat mengambil pelajaran dari buku ini dan memanfaatkannya untuk memperkuat pondasi matematika. Sekecil apa pun pelajaran tersebut akan membahagiakan kami sebagai tim penulis. Semoga menjadi amal jariyah bagi kami dan semua pihak terkait.

Jember, Desember 2019

Tim Penulis



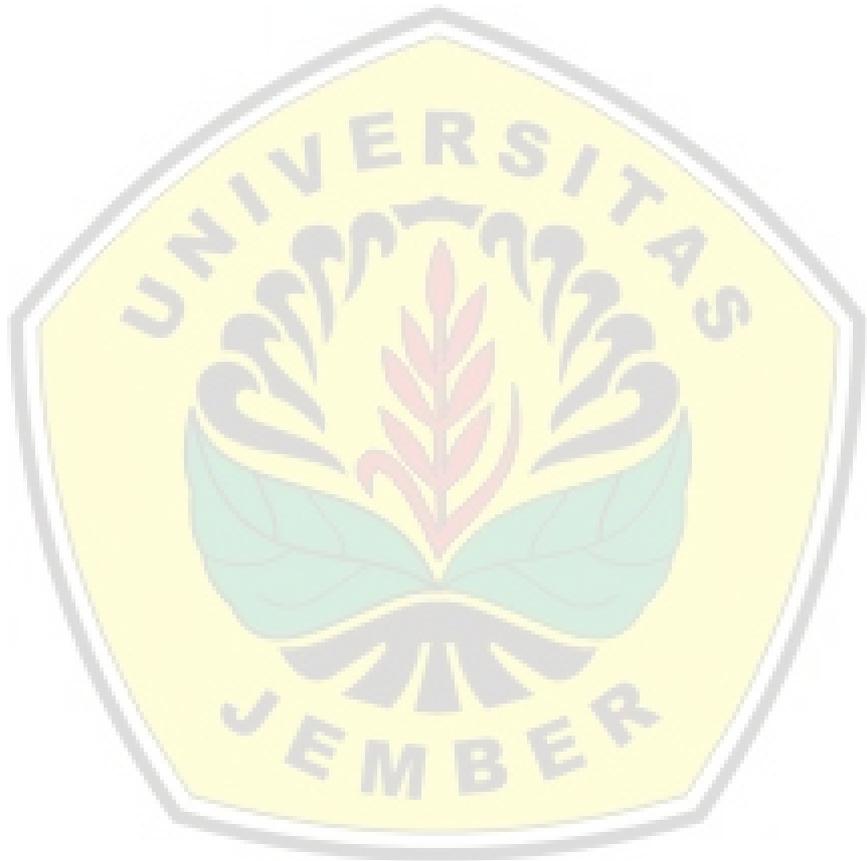
Contents

1	Penggunaan Integral	15
1.1	Luas Daerah Bidang Rata	16
1.1.1	Luas Daerah di Atas Sumbu x	16
1.1.2	Luas Daerah di Antara Dua Kurva	19
1.1.3	Daerah di Bawah Sumbu x	21
1.1.4	Jarak dan Perpindahan	23
1.2	Volume Benda dalam Bidang	26
1.2.1	Metode Cakram	26
1.2.2	Metode Cincin	33
1.3	Volume Benda Putar: Kulit Tabung	39
1.4	Panjang Kurva pada Bidang (Kurva Rata)	45
1.5	Luas Permukaan Putar	52
1.5.1	Luas Permukaan Benda Putar, Sumbu Putar Sumbu X	52
1.6	Rangkuman	54

2	Fungsi Transenden	57
2.1	Fungsi Logaritma Asli	58
2.1.1	Fungsi Logaritma	58
2.1.2	Sifat-sifat Fungsi Logaritma Natural	59
2.1.3	Turunan Fungsi Logaritma Natural	60
2.1.4	Sketsa Grafik Fungsi Logaritma Natural	64
2.1.5	Diferensial Logaritmik	64
2.1.6	Integral yang Menghasilkan Fungsi Logaritma Natural	65
2.2	Integral Fungsi Logaritma dan Eksponen	68
2.2.1	Latihan soal	73
2.3	Fungsi Invers dan Turunannya	74
2.4	Fungsi Eksponen Asli	80
2.5	Fungsi Eksponen Umum dan Fungsi Logaritma Umum	87
2.6	Pertumbuhan dan Peluruhan Eksponen	92
2.7	Fungsi Trigonometri Invers	101
2.7.1	Fungsi Invers Sin dan Cos	101
2.7.2	Fungsi inverse tan	105
2.7.3	Fungsi invers Sec	108
2.7.4	Empat Pemakaian Kesamaan	108
2.8	Turunan Fungsi Trigonometri	111
2.9	Fungsi Hiperbola dan Inversnya	117
2.9.1	Fungsi Hiperbola	117
2.10	Rangkuman	127
3	Teknik Pengintegralan	131
3.1	Pengintegralan dengan Substitusi	132
3.2	Beberapa Integral Trigonometri	136
3.3	Substitusi yang Merasionalkan	143
3.4	Pengintegralan Parsial	148
3.5	Rangkuman	153

4	Bentuk Tak-Tentu dan Integral-Tak-Wajar	157
4.1	Bentuk Tak-Tentu Jenis 0/0	158
4.2	Bentuk Tak-Tentu yang Lain	159
4.3	Integral Tak-Wajar: Batas Tak-Terhingga	161
4.4	Integral Tak-Wajar: Integran Tak-Terhingga	168
4.5	Rangkuman	171







Tinjauan Mata Kuliah

Kalkulus Integral, sesuai dengan namanya, berisi tentang sejumlah teori integral dan mengilustrasikan bagaimana teori tersebut dapat diimplementasikan pada beberapa arumusan yang lebih praktis. Di dalam kalkulus, teori integral selalu didahului dengan pembahasan tentang turunan (derivatives). Karena, memang integral tak-tentu didefinisikan sebagai anti-turunan. Demikian juga, konsep integral tentu yang didefinisikan dari limit jumlah Riemann tetap membutuhkan integral sebagai anti-turunan pada saat menghitung nilai integralnya. Oleh karena itu, buku ini tidak dapat dipisahkan dari topik Kalkulus Diferensial yang seharusnya.

Buku ajar ini merupakan penunjang untuk mata kuliah Kalkulus yang diberikan di Jurusan Matematika dan jurusan lainnya di lingkungan FMIPA Universitas Jember. Banyak mata kuliah yang membutuhkan prasyarat topik integral yang dibahas di dalam buku ini. Diantaranya, di Jurusan Matematika topik ini dibutuhkan untuk memahami mata kuliah Persamaan Diferensial Biasa, Kalkulus Peubah Banyak, Kalkulus Vektor, dan Statistika Matematika. Di lingkungan FMIPA di Jurusan Fisika, Kimia, Biologi, topik integral juga diberikan dalam bentuk mata kuliah Kalkulus. Topik integral juga dibutuhkan untuk menunjang mata kuliah Matematika Teknik yang diajarkan di jurusan-jurusan berbasis keteknikan (*engineering*).

Untuk memahami topik-topik yang ditulis dalam buku ajar ini, pembaca harus sudah mempunyai bekal pemahaman terkait limit, kekontinuan, turunan,

serta konsep dasar integral yang membahas hubungan turunan dan integral. Jika pemahaman tersebut dirasakan masih kurang, maka pembaca harus mereview kembali topik-topik terkait.

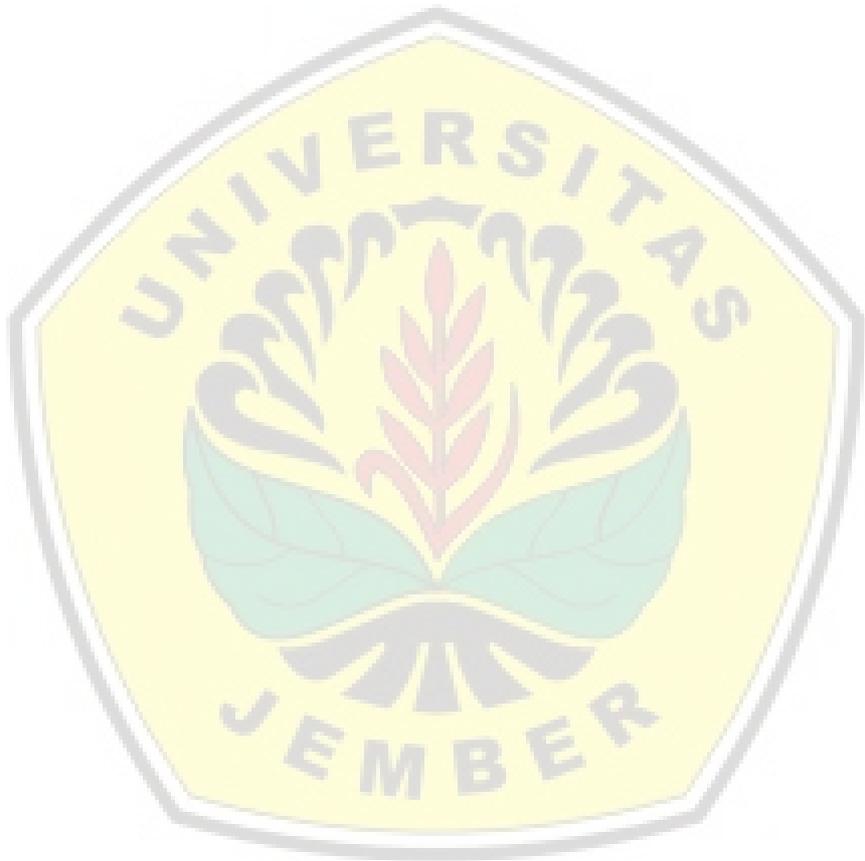
Secara umum topik-topik dalam buku ajar ini disampaikan dalam mata kuliah Kalkulus atau Kalkulus Lanjut. Dengan mengasumsikan bahwa definisi dan pengertian dasar integral sudah difahami, di dalam Bab 1 dibahas tentang penggunaan integral dalam bentuk paling sederhana, yaitu luas daerah. Topik ini mengajak pembaca untuk memahami makna geometris integral sebagai luasan suatu daerah. Selanjutnya akan dibahas tentang volume benda putar, yaitu bagaimana seandainya sebuah daerah diputar mengelilingi sumbu tertentu. Di dalam bab ini juga akan dibahas tentang panjang kurva yang dinyatakan dalam bentuk fungsi parametrik. Potongan kurva tersebut jika diputar pada sumbu tertentu akan membentuk luas permukaan dari suatu benda putar.

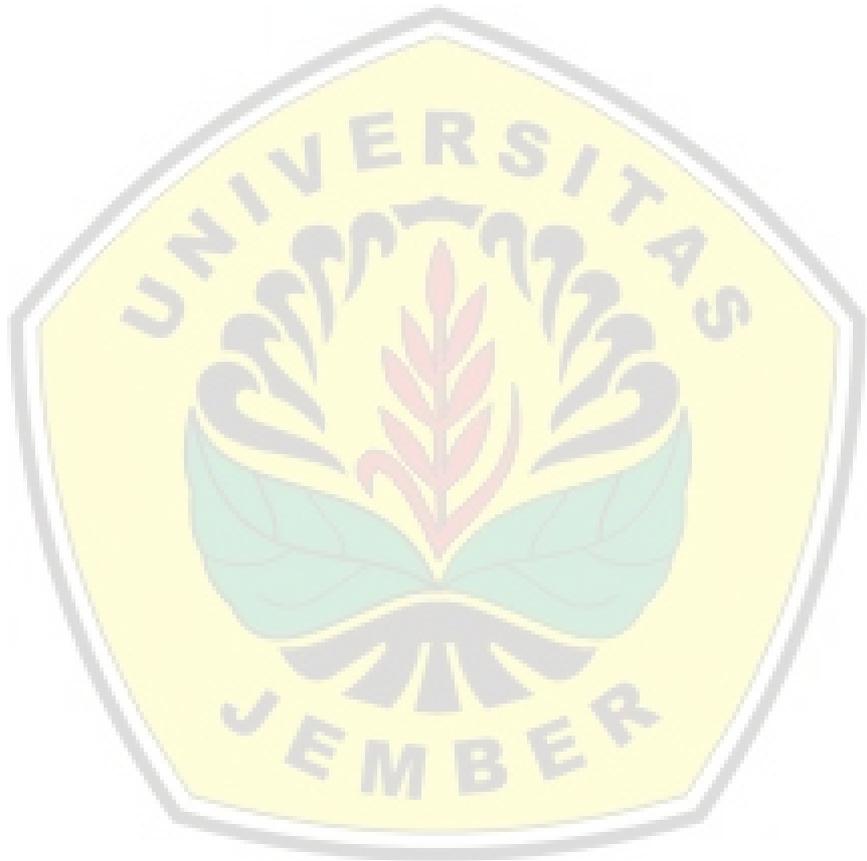
Selanjutnya, untuk kepentingan aplikasi yang melibatkan fungsi yang lebih rumit, di dalam Bab 2 dibahas berbagai bentuk fungsi transenden. Fungsi trigonometri, hiperbolik, beserta inversnya akan dibahas. Dalam hal ini dibahas juga turunan dan integral fungsi-fungsi tersebut. Kemudian untuk aplikasi di bidang teknik, akan dibahas fungsi logaritma asli dan umum beserta inversnya, yaitu eksponensial asli dan umum. Pembahasan fungsi-fungsi ini juga akan dikaitkan dengan turunan dan integralnya. Materi dalam Bab 3 dimaksudkan untuk memperdalam pemahaman tentang teknik pengintegralan dari berbagai fungsi aljabar dan transenden. Sebenarnya sudah cukup banyak software matematika yang dapat digunakan untuk membantu menyelesaikan berbagai bentuk integral. Namun demikian, dalam proses belajar, pembaca perlu mempunyai pengalaman langsung menelusuri prosedur penyelesaian manual untuk menyelesaikannya.

Pada akhirnya di dalam Bab 4 akan dikenal berbagai bentuk integral tak-wajar yang mempunyai batas pengintegralan atau nilai fungsi integran tak hingga. Bentuk integral semacam ini dapat diselesaikan dengan bantuan limit dari bentuk-bentuk tak-tentu. Oleh karena itu, di awal bab akan dibahas tentang berbagai bentuk tak-tentu untuk membantu penyelesaian integral tak-wajar.

Pada akhir setiap bab dalam buku ajar ini disediakan beberapa pengertian penting yang dirangkum dalam ringkasan. Oleh karena itu, pembaca hendaknya memastikan bahwa pengertian-pengertian tersebut sudah difahami dengan baik sebelum membaca bab selanjutnya. Latihan soal dan bahan diskusi juga diberikan agar didapatkan pemahaman yang lebih mendalam. Penulis menyarankan ini dibahas dalam diskusi kelompok agar pembaca

mendapatkan pemahaman yang lebih komprehensif.







Bibliography

- [1] Ayres, Frank. 1990. Teori dan Soal-Soal Diferensial dan Integral KALKULUS. Jakarta: Erlangga.
- [2] Ayres Frank. 1972. Theory Of Problems Of Differential And Integral Calculus, 2nd Edition. Inggris : McGraw-Hill Inc.
- [3] Ayres, Frank dan Elliot Mendelson. 2006. Schaum's Outline Kalkulus Edisi Keempat. Jakarta: Erlangga
- [4] Baisuni, H. M. Hasyim. 2006. *KALKULUS*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- [5] Bien, Y.I. 2018. *Kalkulus Integral Berbasis Maple*. Jakarta:CV Budi Utama.
- [6] Budi Didit N.2012.Kalkulus Integral dan Apikasinya.Yogyakarta:Graha Ilmu
- [7] Hariastuti, R. M. 2017 *Kalkulus Lanjut*. Jakarta : Gramedia
- [8] Iswadi,Hazrul.2007.*Kalkulus*.Malang:Bayu Media Publishing.
- [9] Izwandi, Hazrul., Endah Asmawati., Joice Ruth Juliana., dkk. 2007. *KALKULUS*. Malang: Bayumedia Publishing.

- [10] Krantz, Steven G. 2002 *Calculus Demystified*. New York: McGRAW HILL.
- [11] Martono, K. 1999. *Kalkulus*. Jakarta : Penerbit Erlangga.
- [12] Mikusinski, J. 1993. *Mathematical Analysis*. USA : Malloy Lithographics.
- [13] Thomas, George R. 2004. *CALCULUS*. London: Addison Wesley Longman.
- [14] Nugroho, Didit Budi. 2002. *Kalkulus Integral dan Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- [15] Prayudi. 2006. *Kalkulus Fungsi Satu Variabel*. Yogyakarta : Graha Ilmu.
- [16] Purcell, E. J. 1987. *Calculus With Analytic Geometry 5th edition*. Jakarta: Erlangga.
- [17] Purcell, Edwin J. dan Varberg, Dale .2011. *Kalkulus dan Geometri Analisis Jilid 1 Edisi Sembilan*. Jakarta: Erlangga.
- [18] Purcell, E. J., Varberg, D., Rigdon, S. E. 2003. *Kalkulus Jilid 1, Edisi Kedelapan (diterjemahkan oleh I Nyoman Susila)*. Jakarta: Erlangga.
- [19] Schaum. 1996. *Deferensial dan Integral Kalkulus*. Jakarta: Erlangga.
- [20] Spiegel, M. Robert. 2007. *Kalkulus Lanjut Edisi 2*. Jakarta : Penerbit Erlangga
- [21] Stewart, J. 2009. *Kalkulus*. Jakarta: Salemba Teknik.
- [22] Sungkono Chriswan. 2009. *Kalkulus Edisi 5*. Jakarta : Salemba Teknika.
- [23] Thomas, G. 1962. *CALCULUS*. Tokyo : ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, INC.



Glosarium

benda putar, benda solid yang didapatkan dari pemutaran sebuah daerah yang dibatasi kurva-kurva pada sumbu putar tertentu

metode cakram, cara mendapatkan volume benda putar melalui aproksimasi volume potongan benda yang mirip dengan cakram

cincin, cara mendapatkan volume benda putar melalui aproksimasi volume potongan benda yang mirip dengan cakram yang berlubang (cincin)

kulit tabung, cara mendapatkan volume benda putar melalui aproksimasi volume potongan benda yang mirip dengan kulit tabung

kurva, kumpulan titik pada bidang atau ruang yang dinyatakan dalam persamaan dengan interval parameter tertentu

permukaan putar, permukaan benda yang didapatkan dari pemutaran suatu kurva pada sumbu putar tertentu

invers fungsi, bentuk fungsi yang didapatkan dengan cara mensubstitusikan variabel terikat suatu fungsi dengan variabel bebasnya dan

demikian sebaliknya

fungsi logaritma asli, fungsi yang didefinisikan dari luas daerah yang dibatasi kurva tertentu

logaritma umum, fungsi logaritma dengan bilangan dasar positif

eksponensial asli, bentuk fungsi yang didapatkan dari invers fungsi logaritma asli

eksponensial umum, bentuk fungsi yang didapatkan dari invers fungsi logaritma umum

trigonometri, fungsi yang didefinisikan dari bentuk sinus dan cosinus

hiperbolik, fungsi yang didefinisikan dari bentuk aljabar fungsi eksponensial asli

pendiferensialan logaritmik, cara memanipulasi penurunan fungsi dengan menggunakan sifat turunan dari fungsi logaritma asli

bentuk tak-tentu, sebuah bentuk perkalian, pembagian, pengurangan, atau eksponen dari dua nilai yang tidak memberikan nilai bilangan real tertentu

integral tak-wajar, bentuk integral dengan batas integral tak-hingga atau nilai fungsi integran yang membesar mendekati tak-hingga dalam interval pengintegralannya



Index

B

Benda	
putar	26
putaran	26
Bentuk tak-tentu	158
Bunga majemuk	98

C

Corong Gabriel	166
----------------------	-----

D

Diferensial	
logaritmik	64
Distribusi eksponensial	165

F

Fungsi	
distribusi kumulatif	165
eksponensial asli	81
eksponensial umum	87
hiperbola	117
kepadatan probabilitas ..	164
komposit	116
logaritma	58
logaritma asli	58
logaritma umum	87
transenden	57
trigonometri invers	101

I

Integral	
parsial	148

tak-wajar 157
 trigonometri 136

R

K

kerucut
 terpancung 52
 Kulit Tabung 39
 Kurva Rata 45

T

Rumus reduksi 152

Teknik
 pengintegralan 131
 Teorema
 fungsi balikan 80
 fungsi invers 83

L

Luas
 permukaan putar 52
 Luas daerah 16

V

Volume benda 26

W

Waktu paruh 96

M

Metode
 Cakram 26
 Cincin 33

P

Panjang kurva 45
 Peluruhan
 radioaktif 95
 Peluruhan
 eksponensial 93
 Perpindahan 24
 Pertumbuhan
 eksponensial 93



Biografi Penulis



Kosala Dwidja Purnomo, lahir di Kota Madiun pada 28 Agustus 1969 merupakan putra kedua dari lima bersaudara. Jenjang pendidikan dasar sampai pendidikan menengah ditempuh di Kota Madiun, yaitu SD Mojorejo II, SMP 4, dan SMA 2. Selesai menempuh jenjang sarjana di Jurusan Matematika Institut Teknologi Bandung pada tahun 1995 dan jenjang magister di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun 2008. Telah menikah dengan seorang isteri dan dikaruniai satu orang puteri. Sejak 1997 telah mengajar di Program Studi Matematika FMIPA Universitas Jember. Pernah mengampu mata kuliah Kalkulus, Kalkulus Peubah Banyak, Analisis Real, Aljabar Linier Elementer, Persamaan Diferensial Biasa, Metode Numerik, dan Fraktal.



Firdaus Ubaidillah, lahir di Lamongan tanggal 6 Juni 1970, menempuh pendidikan dasar di SD Alun-alun II Lamongan dan SD Dinoyo III Malang, pendidikan menengah di MTsN Malang II dan MAN Malang II Batu. Tahun 1989 melanjutkan studi S1

di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya (UB) Malang lulus tahun 1994. Studi S2 ditempuh di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Institut Teknologi Bandung (ITB) lulus tahun 2004. Pendidikan S3 ditempuh di Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada (UGM) Yogyakarta dan memperoleh gelar Doktor bidang matematika tahun 2016. Dalam kesehariannya, penulis aktif mengajar di prodi S1 dan S2 Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember dengan matakuliah yang diampu adalah Kalkulus, Analisis Real, Fungsi Peubah Kompleks, Persamaan Diferensial Biasa, Persamaan Diferensial Parsial, Aljabar Linear, dan lain-lain. Karya buku yang telah ditulis adalah Kalkulus Fungsi Satu Peubah.



Ika Hesti Agustin, lahir di Jember pada tanggal 1 Agustus 1984. Pendidikan sarjana Matematika ditempuh di Universitas Jember dan lulus pada tahun 2006. Kemudian pendidikan magister Matematika ditempuh di Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dan lulus pada tahun 2013. Pada tahun 2019, melanjutkan studi doktor Matematika di Universitas Airlangga. Penulis mulai mengajar tahun 2008 sampai sekarang di jurusan Matematika Universitas Jember.

Mata kuliah yang diampu adalah kalkulus, geometri, dan teori graf. Penulis telah melakukan banyak penelitian. Penelitian-penelitian yang telah dipublikasikan dapat dilihat di Sinta dengan ID 55574 dan Scopus dengan ID 57189004242. Karya buku yang telah ditulis adalah Kalkulus Fungsi Satu Peubah.