POLINOMIAL KROMATIK GRAF LENGKAP TRIPARTIT

SKRIPSI

Oleh

Jafanin Ashril Indarta
NIM 151810101056

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2019

POLINOMIAL KROMATIK GRAF LENGKAP TRIPARTIT

SKRIPSI

disusun guna memenuhi tugas akhir sebagai salah satu persyaratan akademik pada program sarjana (S1) Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Oleh

Jafanin Ashril Indarta
NIM 151810101056

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2019

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah SWT yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penulis mempersembahkan skripsi ini sebagai ungkapan kebahagiaan dan rasa terima kasih kepada:

1. Ayahanda Soedarsono, SH., Ibunda Hartatik, dan Adik Fhirtania Ashril Indarta yang telah mendukung dan memberikan doa, kasih sayang, motivasi, dan senyuman yang selalu menguatkan setiap perjalanan hidup saya,
2. Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota,
3. Seluruh guru dan dosen yang telah memberikan banyak ilmu pengetahuan dan membimbing dengan penuh kesabaran,
4. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, SMA Muhammadiyah 3 Tulangan, SMPIT Al-Uswah Bangil, SDIT Nurul Islam Krembung, SDN Lajuk, dan TK Dharmawanita Lajuk.

MOTO

Dan mohonlah pertolongan (kepada Allah) dengan sabar dan salat, dan (salat) itu sungguh berat kecuali bagi orang-orang yang khusyuk."

(Terjemahan surat *Al Baqarah* ayat 45)[*)]

Sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan. Maka apabila engkau telah selesai (dari suatu urusan), tetaplah bekerja keras (untuk urusan yang lain). Dan hanya kepada Tuhanmulah engkau berharap.

(Terjemahan surat *Asy Syrah* ayat 6-8)[*)]

Tantangan sesungguhnya bukanlah tentang me-manage waktu, melainkan me-manage diri kita sendiri.[**)]

[*)]Kementrian Agama Republik Indonesia. 2011. Mushaf Al-Qur'an dan Terjemahannya. Surabaya. PT Lentera Jaya Abadi Divisi Letera Optima Pustaka.

[**)] www.lokerseni.web.id/2014/01/kumpulan-kata-kata-bijak-motivasi-mario.html.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Jafanin Ashril Indarta

NIM : 151810101056

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya tulis ilmiah yang berjudul "Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit" adalah benar-benar karya sendiri, kecuali jika disebutkan sumbernya dan belum pernah diajukan pada institusi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung inggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata dikemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juli 2019

Jafanin Ashril Indarta
NIM 151810101056

SKRIPSI

POLINOMIAL KROMATIK GRAF LENGKAP TRIPARTIT

Oleh

Jafanin Ashril Indarta

NIM 151810101056

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama	: Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.
Dosen Pembimbing Anggota	: Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit" telah diuji dan disahkan pada:

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. NIP 197408132000032004	Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. NIP 198610142014041001
Anggota I,	Anggota II,
Kusbudiono, S.Si., M.Si. NIP 197704302005011001	Dian Anggraeni, S.Si., M.Si. NIP 198202162006042002

Mengesahkan

Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D.
NIP 196101081986021001

RINGKASAN

Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit; Jafanin Ashril Indarta, 151810101056; 2019: 52 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Jember.

Polinomial kromatik pertama kali diperkenalkan oleh Birkhof pada tahun 1912, dan dilanjutkan oleh Whitney pada tahun 1932. Terinspirasi dari dugaan empat warna, pada tahun 1946 Birkhof dan Lewis mendapatkan polinomial kromatik dari graf planar dan membuat dugaan kuat mengenai teorema empat warna (TEW). Kajian mengenai polinomial kromatik telah dibahas oleh beberapa peneliti sebelumnya. Pada tahun 2004, Kurniawati telah melakukan penelitian mengenai polinomial kromatik dari graf lengkap, graf cycle, dan graf lintasan. Pada tahun 2007, Phoy telah melakukan penelitian mengenai polinomial kromatik dari graf bipartit dengan menghapus tiga dan empat sisi. Pada tahun 2009, Niswah telah melakukan penelitian mengenai pembuktian teorema polinomial kromatik dalam sudoku. Pada tahun 2011, Dwijayanti telah melakukan penelitian mengenai polinomial kromatik dari graf bintang, graf roda, dan graf tangga.

Polinomial kromatik dinotasikan dengan $P_G(t)$ adalah banyaknya cara untuk mewarnai titik-titik pada graf G dengan t warna (Wilson, 2010). Minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai graf G adalah sejumlah bilangan kromatiknya. Jika banyaknya warna yang dipakai untuk mewarnai graf G kurang dari bilangan kromatiknya, maka $P_G(t) = 0$. Bilangan kromatik dinotasikan dengan $\chi(G)$ adalah banyak warna minimum yang digunakan untuk mewarnai titik-titik pada graf G (Hartsfield dan Ringel, 1994). Graf G dikatakan berkromatik-t jika G terwarnai-t tetapi tidak terwarnai $t-1$, jika bilangan kromatik G adalah t maka dapat dituliskan dengan $\chi(G) = t$. Pewarnaan titik pada graf adalah pemberian warna yang berbeda pada setiap titik sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga dengan warna yang sama (Chartrand dan Zhang, 2009). Secara matematis, pewarnaan titik pada graf G adalah fungsi $c : V(G) \to Z$, dengan Z adalah himpunan warna,

sedemikian sehingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v merupakan dua titik yang bertetangga.

Penelitian ini membahas mengenai polinomial kromatik dari graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$ dengan $l, m \in \{1,2\}$ dan $l \leq m \leq n$. Graf lengkap tripartit adalah sebuah graf lengkap k-partit dengan $k = 3$ atau graf lengkap dengan 3 buah partisi himpunan titik. Misalkan 3 buah partisi himpunan titiknya adalah l, m, dan n maka graf lengkap tripartit dinotasikan dengan $K_{l,m,n}$. Dalam hal ini, titik-titik pada setiap partisi saling bertetangga tetapi titik-titik pada sebuah partisi tidak saling bertetangga. Dari hasil penelitian, didapatkan polinomial kromatik dari graf $K_{1,1,n}$ yaitu $P_{K_{1,1,n}}(t) = t(t-1)(t-2)^n$, dari graf $K_{1,2,n}$ yaitu $P_{K_{1,2,n}}(t) = t(t-1)(t-2)[(t-3)^n + (t-2)^{n-1}]$, dan dari graf $K_{2,2,n}$ yaitu $P_{K_{2,2,n}}(t) = t(t-1)(t-2)[(t-3)^2(t-4)^{n-1} + (t-2)^n - (n^2 - 3n + 2)(t-3)^{n-2}]$.

PRAKATA

Segala puji syukur saya panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan hidayah dan inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit”. Skripsi ini disusun guna memenuhi tugas akhir sebagai salah satu persyaratan akademik pada program sarjana (S1) Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing utama dan Bapak Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si., selaku dosen pembimbing anggota yang telah memberikan ilmu serta bersedia meluangkan waktu, tenaga, dan perhatian untuk membimbing penulis dengan penuh kesabaran dalam menyelesaikan skripsi ini,
2. Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si., dan Ibu Dian Anggraeni, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran demi kesempurnaan skripsi ini,
3. Seluruh dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember yang telah membantu proses penyelesaian skripsi ini,
4. Ayahanda Soedarsono, SH., Ibunda Hartatik, dan Adik Fhirtania Ashril Indarta tercinta yang telah memberikan semangat, doa, dan dukungannya dalam proses penyelesaian skripsi ini,
5. Sahabat-sahabat tersayang Cho, Kakning, Sudiyul, Sufiro, Sumali, dan Suselo yang telah setia menemani berjuang dan berusaha bersama sehingga skripsi ini dapat terselesaikan,
6. Teman-teman satu bidang skripsi graf, teman-teman KKN 41 Gambiran, teman-teman seangkatan SIGMA’15 dan Himatika “geokompstat” yang telah memberikan semangat dan dukungannya pada proses penyelesaian skripsi ini,
7. Serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga penulis sangat mengharapkan kritik, saran, dan masukan untuk perbaikan serta penyempurnaan lebih lanjut pada masa yang akan datang. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Jember, Juli 2019

Penulis,

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PERSEMBAHAN ii
HALAMAN MOTO iii
HALAMAN PERNYATAAN iv
HALAMAN PEMBIMBINGAN v
HALAMAN PENGESAHAN vi
RINGKASAN vii
PRAKATA ix
DAFTAR ISI xi
DAFTAR GAMBAR xii
DAFTAR TABEL xv

BAB 1. PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Batasan Masalah 3
1.4 Tujuan 3
1.5 Manfaat 3
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA
2.1 Pengertian dan Konsep Graf 4
2.2 Kelas-Kelas Graf 8
2.3 Pewarnaan Titik 10
2.4 Partisi Himpunan 12
2.5 Polinomial Kromatik 13
BAB 3. METODE PENELITIAN
3.1 Metodologi 22
3.2 Langkah-Langkah Penelitian 23
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Bilangan Kromatik Graf Lengkap Tripartit 29
4.2 Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit 30
4.2.1 Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit $K_{1,1,n}$, n≥ 1 31
a. Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit $K_{1,1,1}$ 31
b. Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit $K_{1,1,2}$ 32
c. Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit $K_{1,1,3}$ 33
4.2.2 Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit $K_{1,2,n}$, n≥ 2 36
a. Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit $K_{1,2,2}$ 36
b. Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit $K_{1,2,3}$ 38
c. Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit $K_{1,2,4}$ 39
4.2.3 Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit $K_{2,2,n}$, n≥ 2 44
a. Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit $K_{2,2,2}$ 44
b. Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit $K_{2,2,3}$ 46
c. Polinomial Kromatik Graf Lengkap Tripartit $K_{2,2,4}$ 48
BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN
5.1 Kesimpulan 56
5.2 Saran 56

DAFTAR PUSTAKA 57

DAFTAR GAMBAR

Halaman

2.1 Graf dengan 4 titik dan 4 sisi 4

2.2 Graf dengan dengan sisi rangkap dan loop 5

2.3 (a) Graf $H \subseteq G$, (b) Graf G, dan (c) Graf $F \nsubseteq G$ 6

2.4 (a) Graf G, (b) Graf $G - e$, (c) Graf $G - v_5$, (d) Graf $G + v_3v_5$ 7

2.5 (a) Graf G (b) Graf $G \backslash e$ (c) Graf $G: v_1 = v_4$ 8

2.6 Graf cycle (a) C_3, (b) C_4, dan (c) C_n 8

2.7 Graf lintasan (a) P_2, (b) P_3, dan (c) P_n 9

2.8 Graf lengkap (a) K_4, (b) K_5 dan (c) K_n 9

2.9 Graf (a) Bipartit (b) K_{24} (c) K_{123} 10

2.10 Graf untuk mengilustrasikan Algoritma Welch Powell 11

2.11 Graf untuk mengilustrasikan partisi pewarnaan 12

2.12 Graf untuk ilustrasi Teorema 2.4 15

2.13 Graf untuk ilustrasi Teorema 2.5 17

2.14 Graf hasil operasi Teorema 2.5 18

2.15 Graf untuk ilustrasi Teorema 2.6 19

2.16 Graf hasil operasi Teorema 2.6 19

2.17 Graf untuk mendapatkan polinomial kromatik 20

2.18 Banyaknya cara pewarnaan graf G dengan 2 warna 21

3.1 Penotasian titik dan sisi pada graf lengkap tripartit $K_{1,2,2}$ 23

3.2 Diagram alur polinomial kromatik graf lengkap tripartit $K_{1,1,n}$ 26

3.3 Diagram alur polinomial kromatik graf lengkap tripartit $K_{1,2,n}$ 27

3.4 Diagram alur polinomial kromatik graf lengkap tripartit $K_{2,2,n}$ 28

4.1 Graf lengkap tripartit $K_{1,1,1}$ 31

4.2 Graf lengkap tripartit $K_{1,1,2}$ 32

4.3 Graf lengkap tripartit $K_{1,1,3}$ 33

4.4 Graf lengkap tripartit $K_{1,2,2}$ 36

4.5 Graf lengkap tripartit $K_{1,2,3}$ 38

4.6 Graf lengkap tripartit $K_{1,2,4}$ 39

4.7 Graf lengkap tripartit $K_{2,2,2}$ 44

4.8 Graf lengkap tripartit $K_{2,2,3}$ 46

4.9 Graf lengkap tripartit $K_{2,2,4}$ 48

DAFTAR TABEL

Halaman

2.1 Bentuk partisi graf G 16

4.1 Bentuk partisi graf lengkap tripartit $K_{1,1,2}$ 32

4.2 Bentuk partisi graf lengkap tripartit $K_{1,1,3}$ 33

4.3 Bentuk partisi graf lengkap tripartit $K_{1,2,2}$ 37

4.4 Bentuk partisi graf lengkap tripartit $K_{1,2,3}$ 38

4.5 Bentuk partisi graf lengkap tripartit $K_{1,2,4}$ 40

4.6 Bentuk partisi graf lengkap tripartit $K_{2,2,2}$ 44

4.7 Bentuk partisi graf lengkap tripartit $K_{2,2,3}$ 46

4.8 Bentuk partisi graf lengkap tripartit $K_{2,2,4}$ 49

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan menvisualisasikan permasalahan kedalam bentuk graf, maka suatu permasalahan dapat dijelaskan secara lebih sederhana. Misalnya penentuan jadwal ujian, jadwal ujian adalah sebuah graf dengan menotasikan titik sebagai mahasiswa dan mata kuliah, sedangkan mahasiswa yang mengikuti ujian mata kuliah dinotasikan sebagai sisi. Jadwal ujian tersebut ditentukan sedemikian sehingga tidak ada mahasiswa yang memiliki dua mata kuliah yang diujikan pada waktu yang bersamaan. Contoh lainnya adalah peta jalan raya yang menghubungkan sejumlah kota di sebuah provinsi, peta tersebut merupakan sebuah graf yang menyatakan sebuah titik sebagai kota dan sebuah sisi sebagai jalan. Sehingga dapat diketahui apakah ada lintasan jalan antara dua buah kota dan rute perjalanan dari kota A ke kota B (Rosen, 2003). Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan asal Swiss bernama Leonhard Euler pada tahun 1736. Ide besarnya muncul sebagai upaya menyelesaikan masalah jembatan yang berada di kota Konisberg. Dari permasalahan tersebut, akhirnya Euler mengembangkan beberapa konsep mengenai teori graf (Chartrand dan Oellerman, 1993).

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah pewarnaan. Pewarnaan pada graf G adalah pemberian warna pada setiap objek dari G, sedemikian sehingga setiap dua objek yang dihubungkan dengan sebuah objek lainnya diberi warna yang berbeda. Pewarnaan pada objek tersebut berupa pewarnaan titik, sisi, atau wilayah. Namun jika tidak diberikan kualifikasinya, pewarnaan graf dapat diartikan sebagai pewarnaan titik. Apabila suatu graf G dapat diwarnai sejumlah t warna, maka paling sedikit warna yang digunakan pada graf G disebut sebagai bilangan kromatik. Bilangan kromatik dapat dicari dengan mengidentifikasi struktur grafnya, sedangkan banyak warna yang dapat digunakan pada graf G adalah sebanyak titik pada graf tersebut. Kasus yang akan dibahas pada skripsi ini adalah berapa banyaknya cara yang digunakan untuk memberikan warna pada graf G dengan warna yang disediakan.

Suatu fungsi untuk menghitung banyaknya cara suatu graf dapat diwarnai dengan k warna disebut sebagai polinomial kromatik. Polinomial kromatik pertama kali diperkenalkan oleh Birkhof pada tahun 1912, dan dilanjutkan oleh Whitney pada tahun 1932. Terinspirasi dari dugaan empat warna, pada tahun 1946 Birkhof dan Lewis mendapatkan polinomial kromatik dari graf planar dan membuat dugaan kuat mengenai teorema empat warna (TEW) yaitu setiap graf planar membutuhkan maksimal 4-warna. Untuk mendapatkan polinomial kromatik suatu graf bisa ditentukan dengan memeriksa struktur grafnya. Tetapi tidak semua graf dapat dengan mudah dihitung dengan cara ini, sehingga perlu metode yang lebih pasti untuk mendapatkan polinomial kromatik suatu graf. Metode yang digunakan pada skripsi ini adalah dengan mempartisi himpunan pewarnaan titik pada graf G.

Kajian mengenai polinomial kromatik telah dibahas oleh beberapa peneliti sebelumnya. Pada tahun 2004, Kurniawati telah melakukan penelitian mengenai polinomial kromatik pada graf lengkap, graf cycle, dan graf lintasan. Pada tahun 2007, Phoy telah melakukan penelitian mengenai polinomial kromatik graf bipartit dengan menghapus tiga dan empat sisi. Pada tahun 2009, Niswah telah melakukan penelitian mengenai pembuktian teorema polinomial kromatik dalam sudoku. Pada tahun 2011, Dwijayanti telah melakukan penelitian mengenai polinomial kromatik pada graf bintang, graf roda, dan graf tangga dengan menggunakan partisi himpunan titik.

Pada penelitian ini, penulis tertarik untuk membahas mengenai polinomial kromatik dari graf lengkap tripartit. Secara sederhana, graf lengkap tripartit adalah sebuah graf yang menyajikan 3 kelompok titik dengan titik-titik pada setiap kelompok saling mengenal satu sama lain, sedangkan setiap titik pada kelompoknya sendiri tidak saling mengenal. Adanya bentuk pengenalan pada setiap titik dihubungkan dengan sebuah sisi.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas pada penelitian ini adalah bagaimana mendapatkan polinomial kromatik dari graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$ dengan mempartisi himpunan pewarnaan titik pada graf.

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini permasalahan dibatasi pada graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$ dengan $l, m \in \{1,2\}$, dan $l \leq m \leq n$.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan polinomial kromatik dari graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$ dengan $l, m \in \{1,2\}$, dan $l \leq m \leq n$.

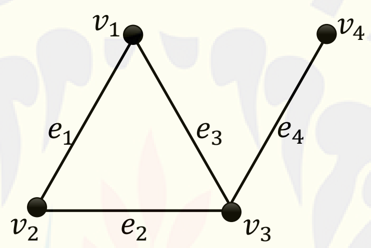
1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah mendapatkan informasi lebih lanjut mengenai polinomial kromatik dari graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$ dan memberikan motivasi kepada peneliti yang lain untuk melakukan penelitian mengenai polinomial kromatik dari graf yang berbeda.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengertian dan Konsep Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) yang dinotasikan $G = (V, E)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan (tak kosong) yang memuat elemen-elemen yang disebut *titik* (*verteces*), dan $E(G)$ adalah himpunan (boleh kosong) yang memuat pasangan-pasangan elemen $V(G)$ yang disebut *sisi* (*edges*) (Wilson, 2010). Sebagai contoh, pada Gambar 2.1 merupakan graf dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

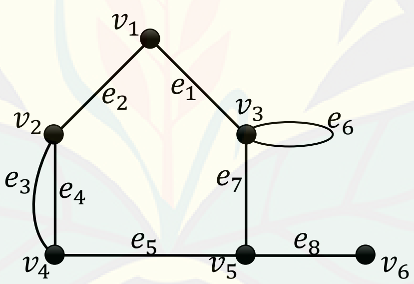


Gambar 2.1 Graf dengan 4 titik dan 4 sisi

Jika dua titik u dan v di G dihubungkan dengan sisi $e = uv$, maka u dan v dikatakan *bertetangga* (*adjacent*), sedangkan titik u dan sisi e atau titik v dan sisi e dikatakan *bersinggungan* (*incident*). Dua sisi e_1 dan e_2 di G dikatakan bertetangga jika keduanya bersinggungan dengan satu titik persekutuan. Pada Gambar 2.1, titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_3 tetapi tidak bertetangga dengan titik v_4, sedangkan titik v_3 bersinggungan dengan sisi e_2, e_3 dan e_4 tetapi tidak bersinggungan dengan sisi e_1, dan sisi e_1 bertetangga dengan sisi e_2 dan e_3 tetapi tidak bertetangga dengan sisi e_4.

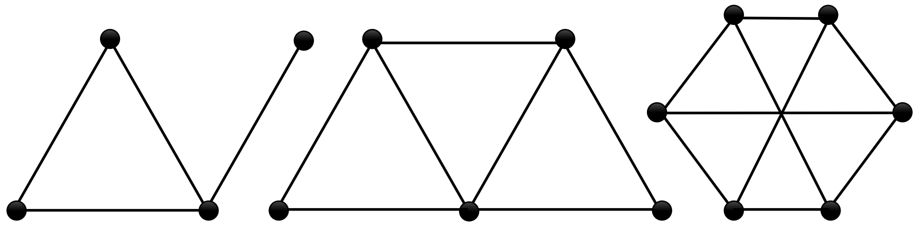
Order dari graf G adalah banyaknya titik dalam graf G. Sedangkan *size* dari graf G adalah banyaknya sisi dalam graf G. Graf pada Gambar 2.1 mempunyai *order* 4 dan *size* 4. *Derajat* (*Degree*) sebuah titik v pada graf G adalah bilangan yang menyatakan jumlah sisi yang bersinggungan dengan v dan dinotasikan dengan $\deg(v)$. Pada Gambar 2.1 $\deg(v_4) = 1$, $\deg(v_1) = 2$, $\deg(v_2) = 2$, dan $\deg(v_3) = 3$. Sebuah titik yang tidak bersinggungan dengan minimal satu buah sisi atau berderajat nol disebut sebagai *titik terisolasi* (*isolated vertex*) dan sebuah titik berderajat satu disebut sebagai *titik ujung* (*end vertex*). *Derajat terkecil* yang dimiliki suatu titik ditunjukkan dengan jumlah sisi yang bersinggungan paling sedikit diantara titik-titik yang lain pada graf G dan dinotasikan dengan $\delta(G)$. *Derajat terbesar* yang dimiliki suatu titik ditunjukkan dengan jumlah sisi yang bersinggungan paling banyak diantara titik-titik yang lain pada graf G dan dinotasikan dengan $\Delta(G)$ (Chartrand dan Zhang, 2012). Graf pada Gambar 2.1 menunjukkan titik v_4 mempunyai derajat terkecil sehingga $\delta(G) = 1$ dan titik v_3 mempunyai derajat terbesar sehingga $\Delta(G) = 3$.

Loop dalam suatu graf terjadi apabila suatu titik v dihubungkan dengan dirinya sendiri. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan titik u dengan titik v, maka sisi tersebut dinamakan sisi rangkap. Sebagai contoh pada Gambar 2.2 titik yang memiliki *loop* adalah titik v_3 dengan *loop* sisi e_6, sisi rangkap yang dimiliki yaitu pada sisi e_3 dan e_4 yang menghubungkan antara titik v_2 dan v_4. Graf G dikatakan graf sederhana apabila tidak memuat *loop* dan sisi rangkap.



Gambar 2.2 Graf dengan dengan sisi rangkap dan loop

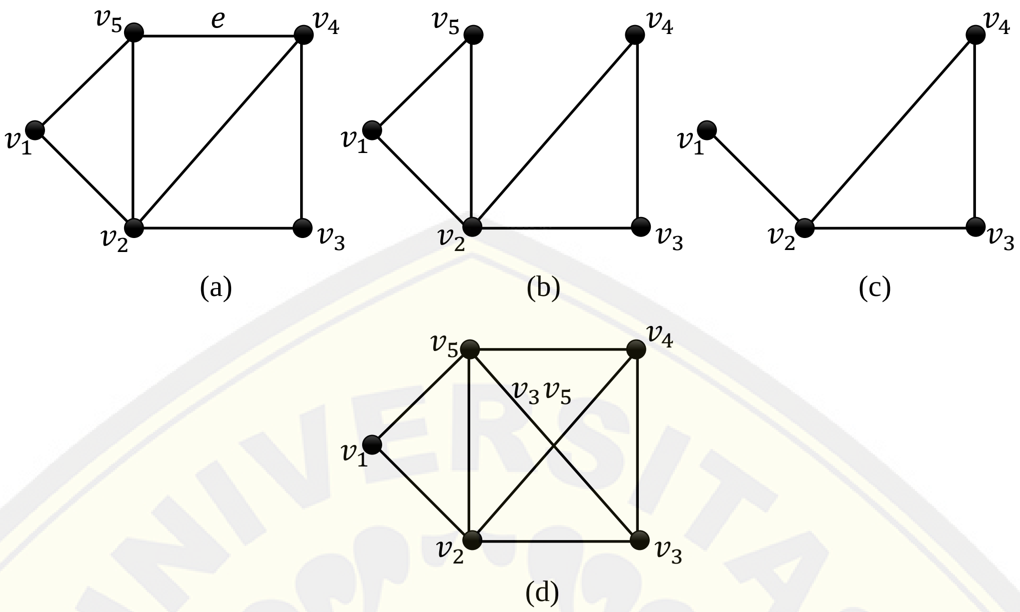
Sebuah graf H disebut *subgraf* dari graf G jika setiap titik dalam H merupakan anggota himpunan $V(G)$ dan setiap sisinya merupakan anggota himpunan $E(G)$. Sehingga pada Gambar 2.3 (a) H subgraf dari G (b) graf G (c) F bukan subgraf G.



(a) (b) (c)

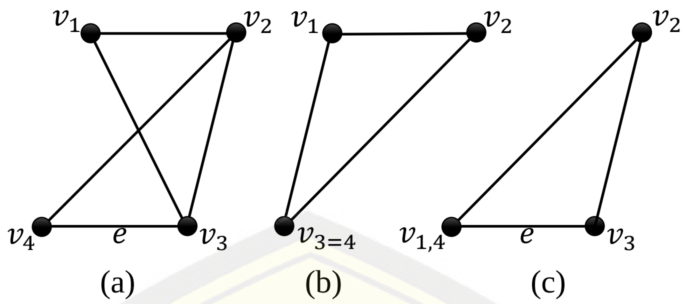
Gambar 2.3 (a) Graf $H \subseteq G$, (b) Graf G, dan (c) Graf $F \nsubseteq G$

Subgraf dari graf G dapat diperoleh dengan cara menghapus sisi atau titiknya. Jika e adalah sebuah sisi dalam graf G, maka $G - e$ adalah graf yang dihasilkan dengan cara menghapus sisi e dari graf G. Penghapusan sisi e dari G merupakan subgraf dari G yang memuat himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G) - \{e\}$. Jika v adalah sebuah titik dalam graf G, maka $G - v$ adalah graf yang dihasilkan dengan cara menghapus titik v beserta sisi-sisi yang bersinggungan dengan titik v dari graf G. Penghapusan titik v dari G merupakan subgraf dari G dengan himpunan titik $V(G - v) = V(G) - \{v\}$. Jika titik u dan v tidak bertetangga di G, penambahan sisi uv pada graf G dilambangkan dengan $G + uv$. Penambahan sisi uv pada G memuat himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G) + \{uv\}$. Pada Gambar 2.4 (a) menunjukkan sebuah graf G, (b) subgraf dari G dengan menghapus sisi e, (c) subgraf dari G dengan menghapus titik v_5 beserta sisi yang bersinggungan, dan (d) graf G dengan menambahkan sebuah sisi diantara titik v_3 dan v_5.



Gambar 2.4 (a) Graf G, (b) Graf $G - e$, (c) Graf $G - v_5$, (d) Graf $G + v_3v_5$

Graf $G\backslash e$ adalah sebuah penamaan graf yang diperoleh dengan cara memilih sebuah sisi e pada graf G kemudian menyatukan 2 titik u dan v yang bersinggungan dengan sisi tersebut, sehingga titik yang terbentuk akan bersinggungan dengan semua sisi (selain e) yang sebelumnya bersinggungan dengan titik u atau v. Sedangkan graf $G{:}\,u = v$ adalah sebuah penamaan graf yang diperoleh dengan cara memilih 2 titik u dan v yang tidak bertetangga kemudian menyatukannya menjadi satu titik tunggal, sehingga sisi-sisi yang bersinggungan dengan titik u dan titik v saling bersinggungan dengan sebuah titik gabungan dari u dan v. Pada Gambar 2.5 (a) disajikan graf G, (b) graf penggabungan 2 titik yang bersinggungan dengan sebuah sisi dari graf G dan (c) graf penggabungan 2 titik yang tidak bersinggungan dengan sebuah sisi dari graf G.

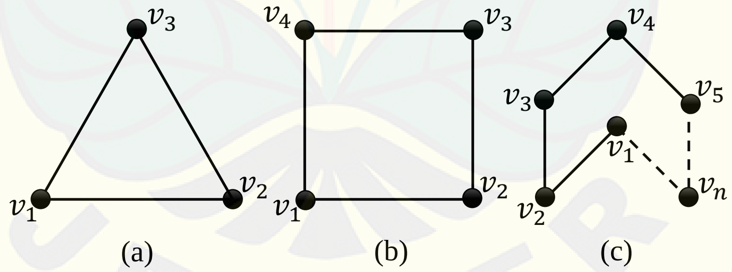


Gambar 2.5 (a) Graf G (b) Graf $G\backslash e$ (c) Graf $G: v_1 = v_4$

2.2 Kelas-Kelas Graf

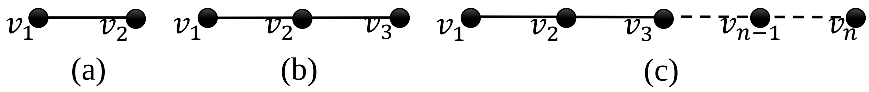
Graf diklasifikasikan dalam beberapa kelas, tetapi dalam skripsi ini akan dibahas beberapa kelas graf sederhana, diantaranya adalah graf lengkap tripartit serta beberapa graf sederhana yang diperlukan untuk mendefinisikan graf tersebut.

Graf cycle dengan n titik yang dinotasikan C_n dengan $n \geq 3$ merupakan graf dengan *order* n dan *size* n yang memiliki titik-titik yaitu $v_1, v_2, \dots, v_n$ yang berderajat dua dan sisi-sisinya adalah $v_1 v_n$ dan $v_i v_{i+1}$ untuk $i = 1,2, \dots, n-1$. Pada Gambar 2.6 menunjukan graf lingkaran dengan 3, 4, dan *n* titik.



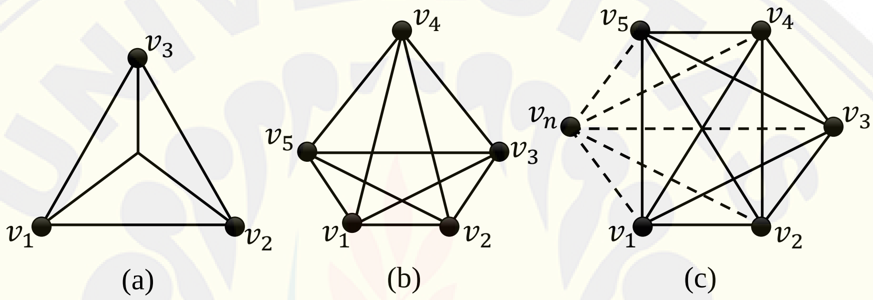
Gambar 2.6 Graf cycle (a) C_3, (b) C_4, dan (c) C_n

Graf lintasan dengan n titik yang dinotasikan sebagai P_n adalah graf yang diperoleh dari C_n dengan cara membuang salah satu sisinya sehingga terdapat 2 titik yang berderajat 1 dan titik lainnya berderajat 2. Graf pada Gambar 2.7 adalah graf lintasan dengan 2, 3, dan n titik.



Gambar 2.7 Graf lintasan (a) P_2, (b) P_3, dan (c) P_n

Graf lengkap adalah sebuah graf sederhana yang setiap titiknya saling bertetangga dengan titik lainnya, sehingga setiap titiknya berderajat $n-1$. Graf lengkap dinotasikan dengan K_n yang memiliki n titik dan $\frac{1}{2}n(n-1)$ sisi. Sebagai contoh, Gambar 2.8 adalah graf lengkap K_4, K_5 dan K_n.

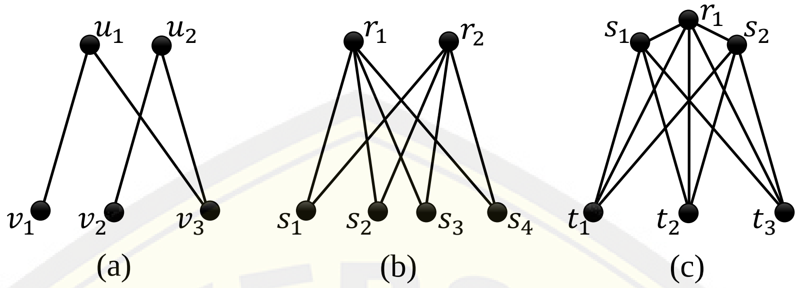


Gambar 2.8 Graf lengkap (a) K_4, (b) K_5 dan (c) K_n

Graf G adalah *graf k-partit* jika $V(G)$ dapat dipartisi menjadi k himpunan bagian $V_1, V_2, \dots, V_k$ jika dan hanya jika setiap uv sisi dari G, maka u dan v berada dalam himpunan partisi yang berbeda. Misalkan G adalah graf dengan 2 buah himpunan partisi, jika setiap titik pada 2 partisi tersebut saling dihubungkan dengan sebuah sisi maka G adalah *graf lengkap bipartit*. Graf lengkap bipartit memiliki r-verteks dan s-verteks yang dinotasikan dengan $K_{m,n}$. Apabila beberapa titik pada 2 buah himpunan partisi saling dihubungkan dengan sebuah sisi, maka G adalah *graf 2-partit* atau *graf bipartit*.

Misalkan G adalah graf dengan 3 buah himpunan partisi, jika setiap titik pada 3 partisi tersebut saling dihubungkan dengan sebuah sisi maka G adalah *graf lengkap tripartit*. Graf lengkap tripartit memiliki l-verteks, m-verteks, dan n-verteks yang dinotasikan dengan $K_{l,m,n}$. Dalam hal ini l-verteks adalah himpunan titik-titik sebanyak l, begitu juga untuk m-verteks dan n-verteks. Apabila beberapa titik pada 3 buah himpunan partisi saling dihubungkan dengan sebuah sisi, maka G

adalah *graf 3-partit* atau *graf tripartit*. Sebagai contoh, Gambar 2.9 (a) graf k-partit dengan $k = 2$ (b) graf bipartit lengkap ($K_{m,n}$) (c) graf tripartit lengkap ($K_{l,m,n}$).



Gambar 2.9 Graf (a) Bipartit (b) K_{24} (c) K_{123}

2.3 Pewarnaan Titik

Pewarnaan titik pada graf adalah pemberian warna yang berbeda pada setiap titik sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga dengan warna yang sama (Chartrand dan Zhang, 2009). Secara matematis pewarnaan titik pada graf G adalah fungsi $c : V(G) \rightarrow Z$, dengan Z adalah himpunan warna, sedemikian sehingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v merupakan dua titik yang bertetangga. Suatu graf G dikatakan berwarna n jika terdapat n warna dalam pewarnaan graf G tersebut. Sehingga maksimal warna yang digunakan untuk mewarnai suatu graf adalah sebanyak titik pada graf tersebut.

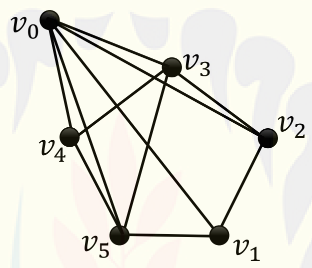
Terdapat cara mewarnai suatu graf jika banyaknya warna yang tersedia lebih sedikit dari banyaknya titik graf, yaitu dengan Algoritma Welch-Powell. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut (Patty dkk, 1991):

a. Urutkan titik pada graf dari derajat titik yang paling besar ke derajat titik yang paling kecil. Misalkan urutan titiknya $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ dengan $\deg(v_1) \geq \deg(v_2) \geq \cdots \geq \deg(v_n)$.
b. Berilah warna pertama pada titik yang berderajat paling besar dan semua titik lain yang tidak bertetangga dengan titik yang sudah mendapat warna pertama.
c. Berilah warna kedua pada titik dengan derajat terbesar yang belum mendapat warna dan semua titik lain yang tidak bertetangga dengan titik yang sudah mendapat warna kedua.

d. Ulangi langkah c sampai semua titik terwarnai.

Bilangan kromatik dinotasikan dengan $\chi(G)$ adalah banyak warna minimum yang digunakan untuk mewarnai titik-titik pada graf G dengan dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda (Hartsfield dan Ringel, 1994). Jadi, graf G dikatakan berkromatik-t jika G terwarnai-t tetapi tidak terwarnai $t-1$. Jika bilangan kromatik G adalah t dapat dituliskan dengan $\chi(G) = t$.

Berikut akan diberikan contoh pewarnaan graf G pada Gambar 2.10 dengan menggunakan Algoritma Welch Powell.



Gambar 2.10 Graf untuk mengilustrasikan Algoritma Welch Powell

Solusi: Sesuai dengan langkah-langkah pada Algoritma Welch Powell, maka graf pada Gambar 2.10 dapat diwarnai sebagai berikut.

Langkah 1: deretan titik menurut urutan derajat

$$v_0\ v_5\ v_3\ v_4\ v_1\ v_2$$

Langkah 2: warna α untuk v_0

Langkah 3: warna β untuk v_5 v_2

Langkah 4: warna γ untuk v_3 v_1

Langkah 5: warna δ untuk v_4

Sehingga dapat disimpulkan, graf pada Gambar 2.10 terwarnai-4 dan bilangan kromatiknya adalah $\chi(G) \leq 4$.

Teorema 2.1 (Wilson, 2010) *Jika G adalah sebuah graf sederhana dengan derajat titik terbesar Δ maka G adalah $(\Delta + 1)$-pewarnaan.*

Teorema 2.2 (Wilson, 2010) *Jika G adalah graf sederhana terhubung yang bukan merupakan graf lengkap dan jika derajat terbesar dari G adalah $\Delta \geq 3$ maka G adalah Δ-pewarnaan.*

Teorema 2.3 (Ringel, 1994) *Jika G graf sederhana dengan derajat maksimum $\Delta(G)$, maka $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

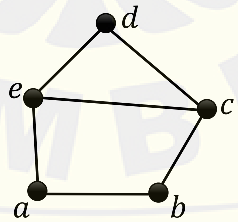
2.4 Partisi Himpunan

Partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong A_1, A_2, ..., A_n dari A sedemikian sehingga,

- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = A$ dan
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$

Partisi pewarnaan dari graf G adalah sebuah partisi pewarnaan dari $V(G)$ yang terdiri dari himpunan bagian $V(G)$ yang saling bebas. Pada setiap himpunan bagian terdiri dari n buah titik dengan warna yang berbeda. Dalam hal ini dua buah titik yang bertetangga tidak boleh berwarna sama, sedangkan dua buah titik yang tidak bertetangga boleh berwarna sama maupun tidak. Dua atau lebih titik yang berwarna sama akan berada dalam sebuah himpunan bagian, sedangkan titik yang berwarna berbeda akan berada dalam himpunan bagian lainnya.

Akan diberikan sebuah contoh untuk mengilustrasikan partisi pewarnaan dari sebuah himpunan graf terhubung pada Gambar 2.11.



Gambar 2.11 Graf untuk mengilustrasikan partisi pewarnaan

Jika diberikan suatu graf G pada Gambar 2.11 maka diperoleh

a. $\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\}\}$ adalah sebuah partisi dengan 5 himpunan bagian.

b. $\{\{a,c\},\{b\},\{d\},\{e\}\}$ dan $\{\{a,d\},\{b\},\{c\},\{e\}\}$ dan $\{\{a\},\{b,d\},\{c\},\{e\}\}$ dan

$\{\{a\},\{b,e\},\{c\},\{d\}\}$ adalah empat buah partisi dengan 4 himpunan bagian.

c. $\{\{a,c\},\{b,d\},\{e\}\}$, $\{\{a,c\},\{b,e\},\{d\}\}$, dan $\{\{a,d\},\{b,e\},\{c\}\}$ adalah tiga buah partisi dengan 3 himpunan bagian.

Titik a dan b tidak boleh berada dalam satu himpunan bagian karena titik a bertetangga dengan titik b. Begitu juga dengan titik a dan e, titik b dan c, titik c dan d, titik c dan e, serta titik d dan e.

2.5 Polinomial Kromatik

Polinomial adalah sebuah fungsi riil yang melibatkan penjumlahan satu atau lebih variabel yang dikalikan dengan koefisien. Diantara semua fungsi, polinomial merupakan yang paling mudah untuk di evaluasi. Karena hanya menyangkut tiga operasi hitungan, yaitu penjumlahan, pengurangan, dan perkalian (Purcell dan Verberg, 1998).

Secara matematis, polinomial $P(x)$ dengan koefisien bilangan bulat Z adalah sebuah penjumlahan tak hingga $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ dengan $a_i \in Z$. Unsur-unsur a_i disebut koefisien-koefisien dari $P(x)$. Jika untuk setiap $i > 0, a_i = 0$, maka $P(x)$ disebut polinomial konstan dan a_0 disebut suku konstan (Fraleigh, 1994).

Polinomial kromatik dinotasikan dengan $P_G(t)$ adalah banyaknya cara mewarnai titik G dengan t warna sehingga tidak ada dua titik bertetangga yang berwarna sama (Wilson, 2010). Minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai graf G adalah sejumlah bilangan kromatiknya, yaitu $\chi(G)$. Jika banyaknya warna yang dipakai untuk mewarnai graf G kurang dari bilangan kromatiknya, maka $P_G(t) = 0$. Sedangkan maksimal warna yang digunakan adalah sebanyak titik pada graf tersebut (Chartrand dan Oellerman, 1993).

Kurniawati (2004) telah mengkaji polinomial kromatik pada beberapa kelas graf terhubung, yaitu :

a. Polinomial kromatik dari graf lengkap K_n adalah $P_{K_n}(t) = t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1)$.

b. Polinomial kromatik dari graf cycle C_n adalah $P_{C_n}(t) = (t-1)^n + (-1)^n(t-1)$.
c. Polinomial kromatik dari graf lintasan P_n adalah $P_{P_n}(t) = t(t-1)^{n-1}$.

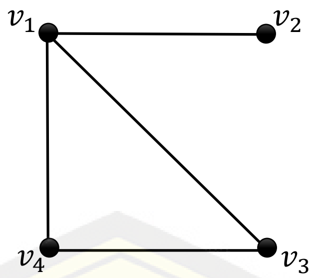
Dwijayanti (2011) telah mengkaji polinomial kromatik pada graf bintang, graf roda, dan graf tangga, yaitu :

a. Polinomial kromatik dari graf bintang S_n adalah $P_{S_n}(t) = t(t-1)^n$.
b. Poliomial kromatik dari graf roda W_n adalah $P_{W_n}(t) = t[(t-2)^n + (-1)^n(t-2)]$.
c. Polinomial kromatik dari graf tangga L_n adalah $P_{L_n}(t) = t(t-1)(t^2-3t+3)^{n-1}$.

Teorema 2.4 (Dong dkk, 2005) *Jika diberikan sebuah graf G dengan order n, maka polinomial kromatik dari graf G adalah* $P_G(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(G,i)(t)_i$ *dengan* $\alpha(G,i)$ *banyak kemungkinan partisi* $V(G)$ *dalam i himpunan bagian.*

Untuk mendapatkan polinomial kromatik suatu graf dengan metode mempartisi himpunan pewarnaan titik dapat digunakan Teorema 2.4. Misalkan sebuah graf G diwarnai sebanyak t warna dan ada $(t)_i$ cara untuk mewarnainya, maka cara pewarnaan graf G dapat dipartisi sebanyak i warna dari himpunan $\{1,2,\dots,t\}$. Sehingga pada setiap partisi himpunan pewarnaan titik terdapat $(t)_i$ cara untuk mewarnai graf G, dengan $t_i = t(t-1)(t-2)\dots(t-i+1)$ yang diambil dari bentuk polinomial kromatik graf lengkap K_n. Jadi, polinomial kromatik dari suatu graf G adalah penjumlahan dari banyaknya partisi himpunan pewarnaan titik dikali dengan banyaknya cara untuk mewarnai graf G tepat i warna.

Berikut diberikan ilustrasi untuk mendapatkan polinomial kromatik suatu graf. Digunakan graf G pada Gambar 2.12 untuk mendapatkan polinomial kromatik menggunakan Teorema 2.4.



Gambar 2.12 Graf untuk ilustrasi Teorema 2.4

Solusi : Langkah pertama adalah mencari semua kemungkinan pewarnaan titik yang terjadi pada graf Gambar 2.12, yaitu dengan memberikan pewarnaan yang sama terhadap titik-titik yang tidak bertetangga dan kemungkinan-kemungkinan pewarnaan titik lainnya. Dalam hal ini, graf G mempunyai $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Diketahui titik v_1 bertetangga dengan semua titik, sehingga v_1 harus mempunyai warna yang berbeda dengan titik v_2, v_3, v_4. Titik v_2 bertetangga dengan titik v_1, sehingga titik v_2 dapat diwarnai sama dengan titik v_3, v_4. Titik v_3 bertetangga dengan titik v_1, v_4, sehingga titik v_3 dapat diwarnai sama dengan titik v_2. Dan titik v_4 bertetangga dengan titik v_1, v_3, sehingga titik v_4 dapat diwarnai sama dengan titik v_2. Misalkan titik v_2 diwarnai sama dengan titik v_3, maka kemungkinan pewarnaan titik lainnya yaitu titik v_1 harus diwarnai berbeda dengan titik v_4.

Langkah kedua adalah mempartisikan himpunan pewarnaan titik yang diperoleh dari langkah pertama, yaitu mempartisikan titik-titik yang berwarna sama menjadi satu himpunan bagian. Misalkan titik v_2 diwarnai sama dengan titik v_3, dan titik v_1 diwarnai berbeda dengan titik v_4. Sehingga titik v_2 dan v_3 berada dalam satu himpunan bagian, sedangkan titik v_1 dan v_4 berada dalam himpunan bagian yang berbeda. Selanjutnya menghitung banyaknya himpunan bagian dalam sebuah partisi himpunan pewarnaan titik. Maka akibat dari pemisalan diatas didapatkan banyak partisinya sebanyak 3, yaitu partisi pertama adalah titik v_2 dan v_3, partisi kedua adalah titik v_1 dan partisi ketiga adalah titik v_4. Lebih lengkapnya, kedua langkah diatas ditunjukkan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Bentuk partisi graf G

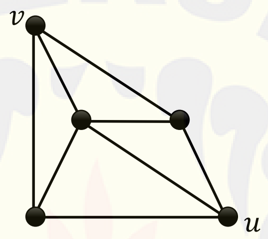
Jika v_i dan v_j diwarnai sama	Kemungkinan pewarnaan titik lainnya	Bentuk partisi himpunan pewarnaan	Banyak partisi
$v_2 = v_3$	$v_1 \neq v_4$	$\{\{v_2, v_3\}, \{v_1\}, \{v_4\}\}$	3
$v_2 = v_4$	$v_1 \neq v_3$	$\{\{v_2, v_4\}, \{v_1\}, \{v_3\}\}$	3
Berbeda semua	$v_1 \neq v_2 \neq v_3 \neq v_4$	$\{, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}\}$	4

Pada Tabel 2.1 diperoleh banyak partisi dari kemungkinan pewarnaan G. Setiap partisi diberi warna i dengan banyak partisi adalah $\alpha(G, i)$, dan cara pewarnaannya adalah t_i. Dalam hal ini, i menunjukkan banyaknya himpunan bagian pada sebuah partisi himpunan pewarnaan titik. Syarat i adalah minimal bilangan kromatik dari graf G dan maksimal sebanyak titik pada graf G. Pada baris pertama diketahui bahwa $i = 3$ yang artinya graf G dapat diwarnai dengan 3 warna. Selanjutnya mencari kemungkinan pewarnaan titik lainnya dengan banyak partisi yang diwarnai 3 warna, yaitu sebanyak 2 maka $\alpha(G, 3) = 2$. Dalam hal ini 2 sebagai koefisien untuk mewarnai graf G dengan 3 warna, yang artinya hanya terdapat 2 cara saja untuk mewarnai graf G dengan 3 warna. Cara pewarnaan graf G disimbolkan sebagai t_i, misalkan $i = 3$ maka cara pewarnaan graf G dengan 3 warna yaitu t_3. Bentuk sederhana dari t_3 yaitu faktorisasi dari 3! yang dinotasikan dengan t sehingga $t_3 = t(t-1)(t-2)$. Jadi, graf G yang diwarnai dengan 3 warna mempunyai cara pewarnaan $2t_3 = 2\big(t(t-1)(t-2)\big)$, dan jika diwarnai dengan 4 warna mempunyai cara pewarnaan $t_4 = t(t-1)(t-2)(t-3)$. Dengan demikian, polinomial kromatik dari graf G adalah

$$
\begin{aligned}
P_G(t) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha(G, i)(t)_i \\
&= 2t_3 + t_4 \\
&= 2\big(t(t-1)(t-2)\big) + \big(t(t-1)(t-2)(t-3)\big) \\
&= (2t^3 - 6t^2 + 4t) + (t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t) \\
&= t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 2t
\end{aligned}
$$

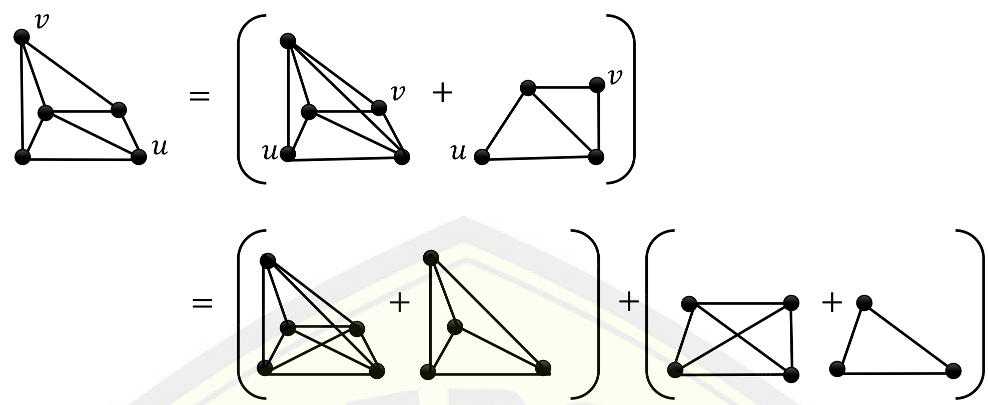
Teorema 2.5 (Narsingh, 1974) *Misalkan u dan v dua titik yang tidak bersinggungan dalam graf G. Misalkan G' adalah sebuah graf yang didapat dari graf G dengan menghubungkan sebuah garis antara titik u dan v, sedangkan G'' adalah sebuah graf yang didapatkan dengan menggabungkan titik u dan v menjadi sebuah titik, maka $P_G(t) = P_{G'}(t) + P_{G''}(t)$.*

Berikut diberikan ilustrasi untuk mendapatkan polinomial kromatik suatu graf. Digunakan graf G pada Gambar 2.13 untuk menyelesaikan polinomial kromatik menggunakan Teorema 2.5.



Gambar 2.13 Graf untuk ilustrasi Teorema 2.5

Solusi: Akan dilakukan operasi pada Teorema 2.5 pada graf G dengan menghubungkan titik u dan v dengan sebuah sisi, serta menyatukan titik u dan v tepat menjadi 1 titik tunggal. Pemilihan titik u dan v adalah 2 buah titik yang tidak bertetangga pada graf G. Dari 1 buah graf G dioperasikan menjadi 2 buah graf baru yaitu graf $G + uv$ dan graf $G: u = v$. Begitu seterusnya hingga semua titik pada graf baru G saling terhubung dengan dengan titik lainnya. Selanjutnya menggabungkan seluruh polinomial kromatik dari beberapa graf sederhana pada hasil operasi tersebut.



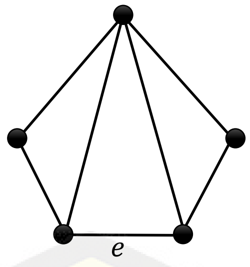
Gambar 2.14 Graf hasil operasi Teorema 2.5

Pada Gambar 2.14 menunjukkan hasil operasi Teorema 2.5 yang terdiri dari graf sederhana yaitu graf lengkap K_n dengan $n \geq 3$. Graf pada operasi pertama adalah graf lengkap K_5, graf pada operasi kedua dan ketiga adalah graf lengkap K_4, dan graf pada operasi keempat adalah graf lengkap K_3. Sehingga didapatkan polinomial kromatik dari graf hasil operasi Teorema 2.5 adalah

$$\begin{aligned} P_G(t) &= \left[\left(t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)\right) + \left(t(t-2)(t-2)(t-3)\right)\right] \\ &\qquad + \left[\left(t(t-2)(t-2)(t-3)\right) + \left(t(t-1)(t-2)\right)\right] \\ &= t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) + 2\left(t(t-2)(t-2)(t-3)\right) \\ &\qquad + t(t-1)(t-2) \\ &= t^5 - 8t^4 + 22t^3 - 21t^2 + 2t \\ &= t(t-1)(t-2)(t^2-5t+7) \end{aligned}$$

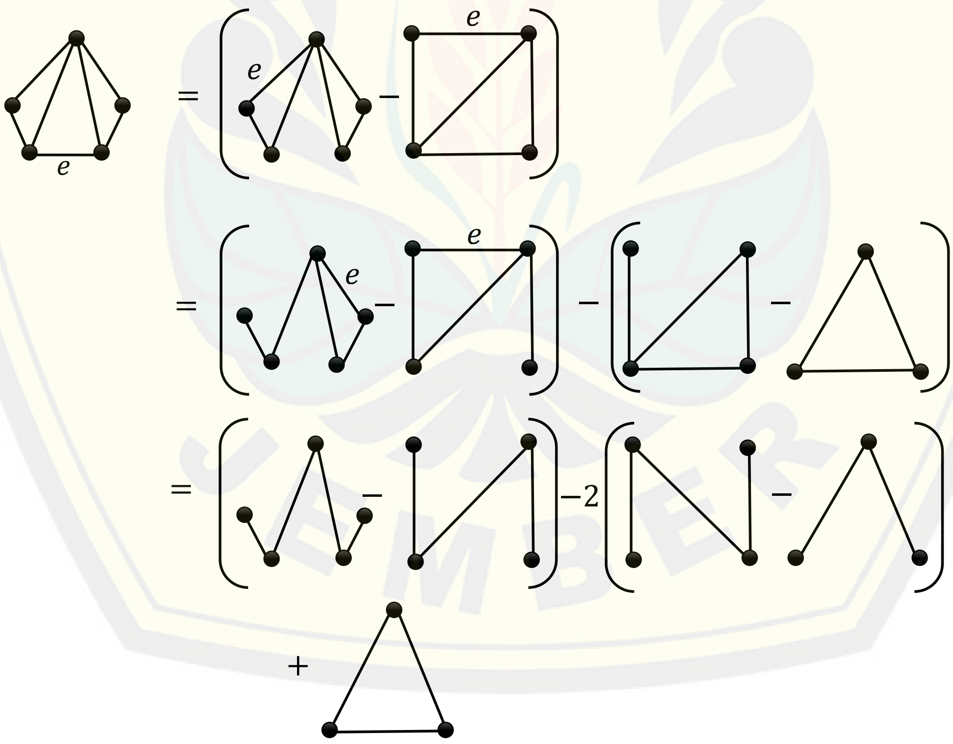
Teorema 2.6 (Wilson, 2010) *G adalah graf sederhana, dengan $G-e$ dan $G\backslash e$ adalah graf yang diperoleh dari G dengan menghilangkan dan menggabungkan 2 titik yang bersinggungan dengan sisi e, maka $P_G(t) = P_{G-e}(t) - P_{G\backslash e}(t)$.*

Berikut diberikan ilustrasi untuk mendapatkan polinomial kromatik suatu graf. Digunakan graf G pada Gambar 2.15 untuk menyelesaikan polinomial kromatik menggunakan Teorema 2.6.



Gambar 2.15 Graf untuk ilustrasi Teorema 2.6

Solusi: Akan dilakukan operasi pada graf G dengan menghapus sebuah sisi e, serta menyatukan 2 buah titik yang bersinggungan dengan sisi e. Pemilihan sisi e adalah sebarang sisi yang dihubungkan oleh 2 buah titik. Dari 1 buah graf G dioperasikan menjadi 2 buah graf baru yaitu graf $G - e$ dan graf $G\backslash e$. Begitu seterusnya hingga mendapatkan graf yang paling sederhana. Selanjutnya menggabungkan seluruh polinomial kromatik dari beberapa graf sederhana pada hasil operasi tersebut.



Gambar 2.16 Graf hasil operasi Teorema 2.6

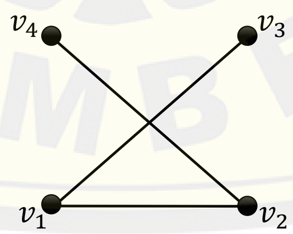
Pada Gambar 2.16 menunjukkan graf hasil operasi Teorema 2.6 yang terdiri dari beberapa bentuk graf sederhana yaitu graf lintasan P_n dan graf lengkap K_n. Graf pada operasi pertama adalah graf lintasan P_5, graf pada operasi kedua dan ketiga adalah graf lintasan P_4, graf pada operasi keempat adalah graf lintasan P_3, dan graf pada operasi kelima adalah graf lengkap K_3. Sehingga didapatkan polinomial kromatik dari graf hasil operasi Teorema 2.6 adalah

$$\begin{aligned} P_G(t) &= [(t(t-1)^4) - (t(t-1)^3)] - 2[(t(t-1)^3) - (t(t-1)^2)] \\ &\qquad + \big(t(t-1)(t-2)\big) \\ &= t(t-1)^4 - 3t(t-1)^3 + 2t(t-1)^2 + t(t-1)(t-2) \\ &= t^5 - 7t^4 + 18t^3 - 20t^2 + 8t \\ &= t(t-1)(t-2)^2 \end{aligned}$$

Teorema 2.7 (Read, 1968) *Polinomial kromatik $P_G(t)$ dari graf G dengan v titik dan e sisi memenuhi kondisi berikut:*

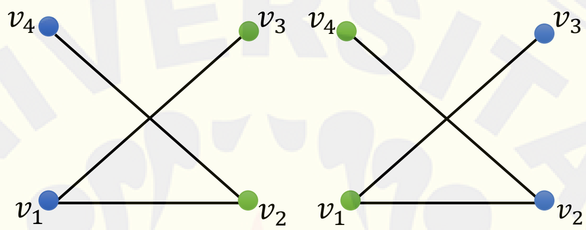
a. *Order polinomial dari $P_G(t)$ adalah v.*
b. *Koefisien dari t^n pada $P_G(t)$ adalah* 1.
c. *Koefisien dari t^{n-1} pada $P_G(t)$ adalah $-e$.*
d. *Suku konstan dari $P_G(t)$ adalah* 0.
e. *Jika $e \neq 0$, maka jumlah koefisien pada $P_G(t)$ adalah* 0.

Berikut ini akan diberikan ilustrasi kemunginan pewarnaan yang terjadi untuk mendapatkan polinomial kromatik suatu graf G. Sebagai contoh, akan digunakan graf G pada Gambar 2.17 untuk mendapatkan semua kemungkinan pewarnaan yang terjadi.



Gambar 2.17 Graf untuk mendapatkan polinomial kromatik

Solusi: Jika graf G pada Gambar 2.17 diwarnai dengan t warna sehingga $t \geq \chi(G)$ dengan $\chi(G) = 2$, maka ada t cara untuk mewarnai titik v_1. Karena titik v_2 dan v_3 bertetangga dengan titik v_1, maka titik v_2 dan v_3 harus diwarnai berbeda dengan titik v_1. Dan karena titik v_2 tidak bertetangga dengan titik v_3 maka titik v_2 dan v_3 boleh diwarnai sama, sehingga ada $(t-1)$ cara untuk mewarnai titik v_2 dan v_3. Selanjutnya, karena titik v_4 bertetangga dengan titik v_2 maka titik v_2 dan v_4 tidak boleh diwarnai sama. Tetapi karena titik v_4 tidak bertetangga dengan titik v_1 dan v_3 maka titik v_4 dapat diwarnai sama dengan titik v_1 atau v_3, sehingga ada $(t-1)$ cara untuk mewarnai titik v_4. Jadi fungsi polinomial kromatik dari graf G pada Gambar 2.17 adalah $P_G(t) = t(t-1)^3$.



Gambar 2.18 Banyaknya cara pewarnaan graf G dengan 2 warna

BAB 3. METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan dijelaskan tentang prosedur penelitian yang digunakan untuk mendapatkan polinomial kromatik pada graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$. Prosedur penelitian tersebut terdiri dari metode penelitian yang akan digunakan serta langkah-langkah penelitian. Adapun langkah-langkah penelitian juga akan disajikan dalam diagram alur.

3.1 Metodologi

Metode yang digunakan dalam penentuan polinomial kromatik pada graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$ adalah metode induktif. Dalam hal ini, akan dicari polinomial kromatik dari graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$:

a. Dengan $l = 1$, $m = 1$, dan $n \geq 1$ yaitu graf lengkap tripartit $K_{1,1,1}$, $K_{1,1,2}$, dan $K_{1,1,3}$ sebagai acuan untuk mendapatkan pola poliomial kromatik dari graf lengkap tripartit $P_{K_{1,1,n}}(t)$.
b. Dengan $l = 1$, $m = 2$, dan $n \geq 2$ yaitu graf lengkap tripartit $K_{1,2,2}$, $K_{1,2,3}$, dan $K_{1,2,4}$ sebagai acuan untuk mendapatkan pola poliomial kromatik graf lengkap tripartit $P_{K_{1,2,n}}(t)$.
c. Dengan $l = 2$, $m = 2$, dan $n \geq 2$ yaitu graf lengkap tripartit $K_{2,2,2}$, $K_{2,2,3}$, dan $K_{2,2,4}$ sebagai acuan untuk mendapatkan pola poliomial kromatik graf lengkap tripartit $P_{K_{2,2,n}}(t)$.

Dari keenam bentuk polinomial kromatik tersebut, akan diperoleh polinomial kromatik graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$ dengan $l, m \in \{1,2\}$ dan $l \leq m \leq n$. Metode deduktif aksiomatik juga berperan dalam menyelesaikan penelitian ini. Metode deduktif aksiomatik merupakan metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada.

3.2 Langkah-Langkah Penelitian

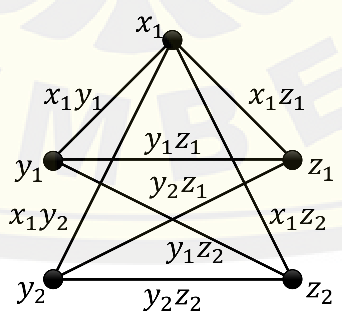
Langkah-langkah penelitian yang akan dilakukan untuk mendapatkan polinomial kromatik pada graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$ dengan menggunakan partisi himpunan pewarnaan titik adalah sebagai berikut :

1. Menentukan graf yang akan diteliti

   Langkah pertama pada penelitian ini adalah menentukan sebuah graf yang akan dicari polinomial kromatiknya. Dalam hal ini, penulis memilih sebuah graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$ sebagai penelitiannya.

2. Penotasian titik pada graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$

   Misalkan graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$ dengan $l, m \in \{1,2\}$ dan $l \leq m \leq n$ mempunyai himpunan titik $V(K_{l,m,n}) = \{x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \dots, z_n\}$ dan himpunan sisi $E(K_{l,m,n}) = \{x_1y_1, x_1y_2, x_1z_1, x_1z_2, \dots, x_1z_n, x_2y_1, x_2y_2, x_2z_1,$ $x_2z_2, \dots, x_2z_n, y_1z_1, y_1z_2, \dots, y_1z_n, y_2z_1, y_2z_2 \dots, y_2z_n\}$. Dengan l, m, n adalah 3 buah partisi himpunan titik (*verteks*) yang berbeda, pada himpunan titik l dan m terdiri dari maksimal 2 titik sedangkan pada himpunan titik n terdiri dari n titik. Dalam hal ini l-verteks terdiri dari himpunan titik $\{x_1, x_2\}$, m-verteks terdiri dari himpunan titik $\{y_1, y_2\}$, dan n-verteks terdiri dari himpunan titik $\{z_1, z_2 \dots, z_n\}$. Titik-titik pada setiap himpunan partisi l, m, n saling bertetangga, tetapi titik-titik pada sebuah himpunan partisi tidak saling bertetangga. Pada Gambar 3.1 diberikan contoh penotasian titik dan sisi pada graf lengkap tripartit $K_{1,2,2}$.



Gambar 3.1 Penotasian titik dan sisi pada graf lengkap tripartit $K_{1,2,2}$

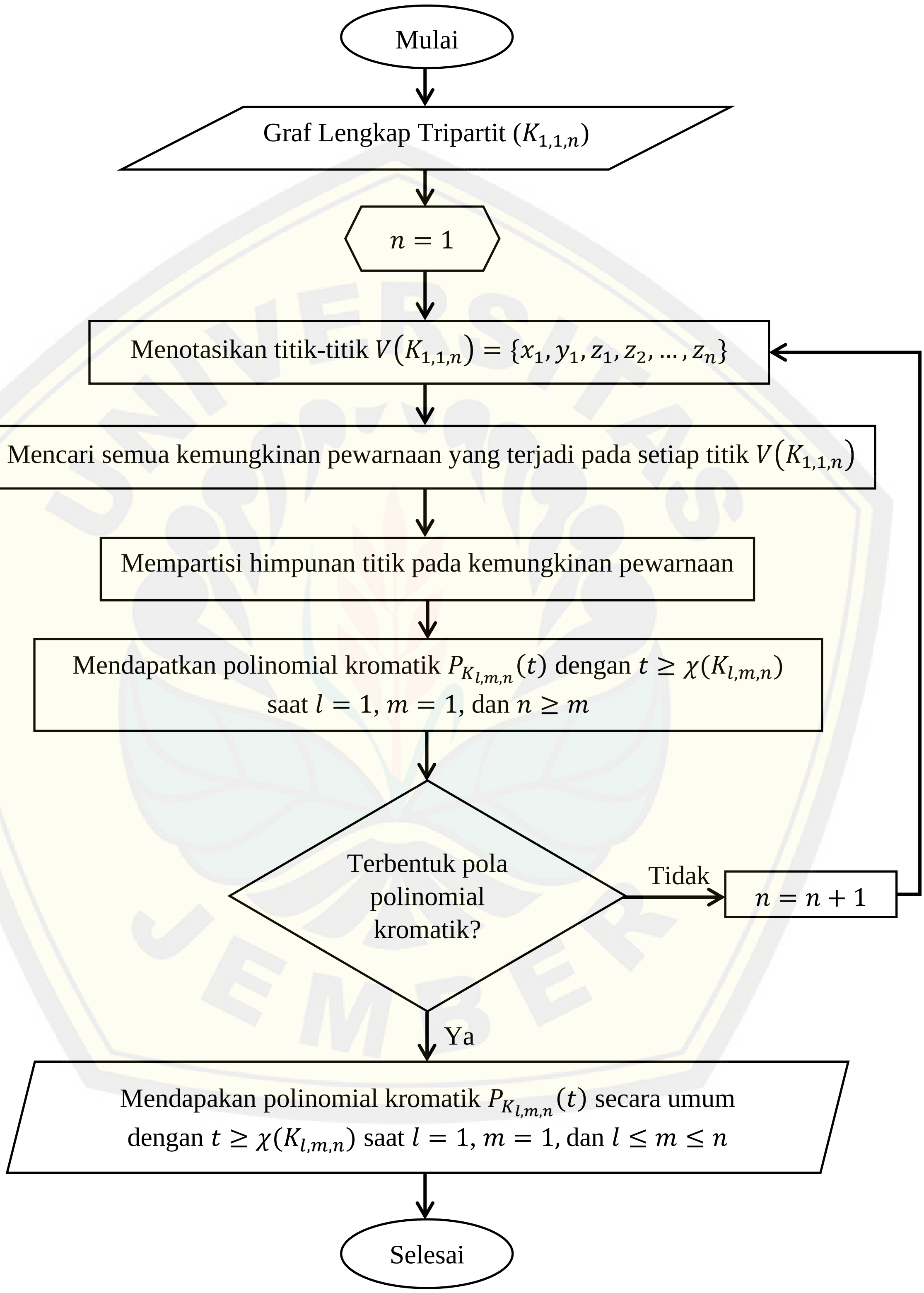
3. Menentukan kemungkinan pewarnaan titik pada graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$

   Setiap titik pada graf lengkap tripartit diberi t-pewarnaan sehingga tidak ada dua buah titik yang bertetangga dengan warna yang sama. Suatu titik pada graf dapat diwarnai minimal sebesar bilangan kromatiknya dan maksimal sebanyak titik pada graf tersebut. Pada tahap ini, penulis mencari kemungkinan pewarnaan titik sebanyak kombinasi dari titik-titik pada graf yang tidak bertetangga. Pada graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$ dengan $l,m \in \{1,2\}$ dan $l \leq m \leq n$, titik-titik yang bertetangga diberi warna yang sama dan terletak pada satu himpunan tetapi titik-titik yang tidak bertetangga diberi warna yang berbeda dan terletak tidak pada satu himpunan atau diberi warna yang sama dan terletak pada satu himpunan. Apabila pewarnaan titik yang diperoleh berulang maka cukup digunakan sekali.
4. Mempartisi himpunan titik pada graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$

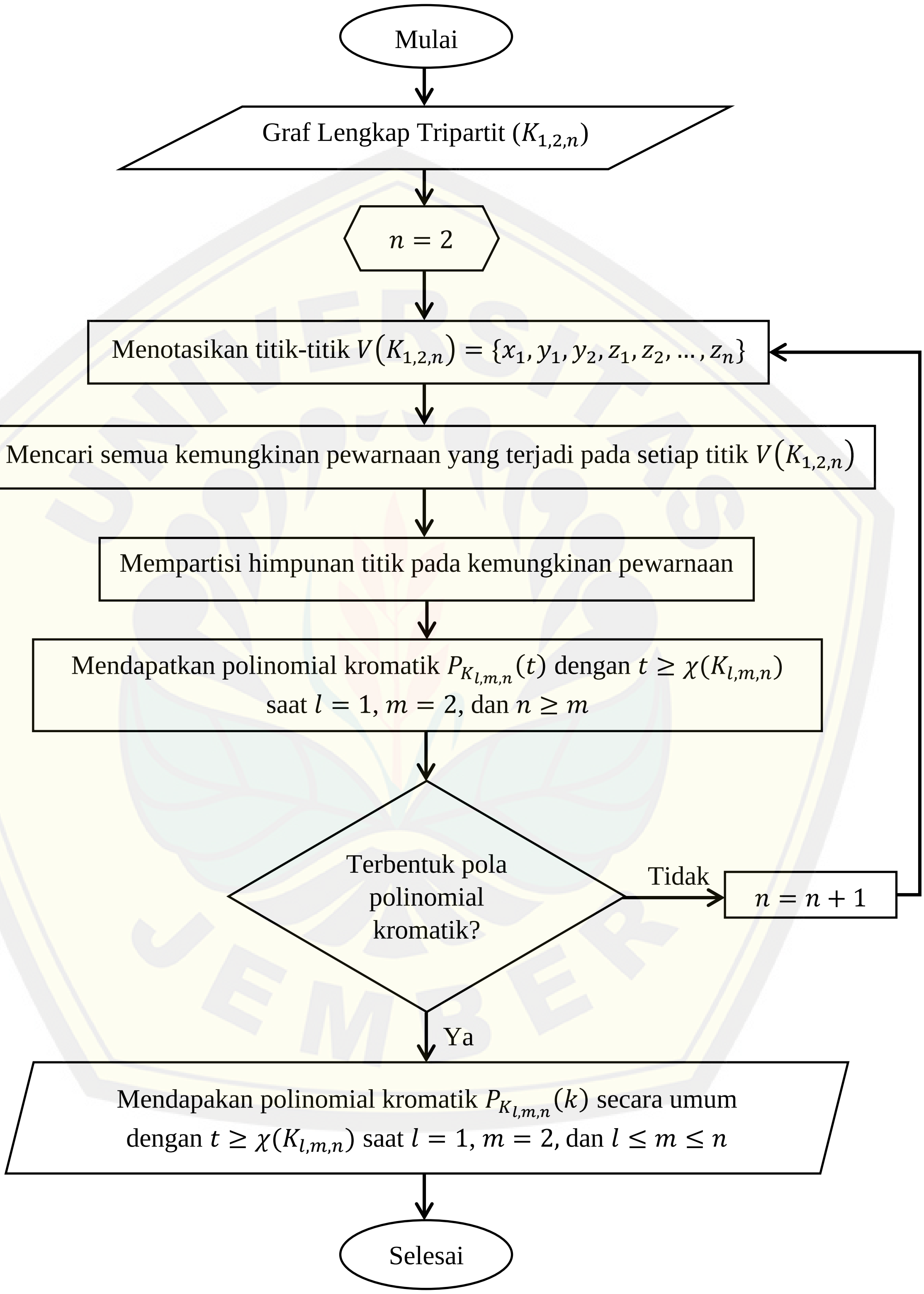
   Sebuah partisi pewarnaan pada graf G adalah partisi dari $V(G)$ yang terdiri dari himpunan bagian $V(G)$ yang saling bebas dengan titik-titik yang tidak saling bertetangga pada setiap himpunan bagiannya. Himpunan titik pada graf lengkap tripartit $V(K_{l,m,n}) = \{x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \dots, z_n\}$, jika pewarnaan titik $x_1 = x_2$ maka akibat untuk titik y_1, y_2, dan $z_1, z_2, \dots, z_n$ mempunyai kemungkinan pewarnaan $(y_1 = y_2) \neq (z_1 = z_2 = \cdots = z_n)$. Sehingga bentuk partisi himpunannya $\{\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2, \dots, z_n\}\}$, adalah sebuah partisi dengan 3 himpunan titik saling bebas. Hal ini berlaku untuk semua kemungkinan yang terjadi tanpa ada pengulangan pewarnaan.
5. Menentukan polinomial kromatik graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$

   Untuk mendapatkan polinomial kromatik graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$, maka diperlukan minimal 3 bentuk graf lengkap tripartit dengan l dan m yang ditetapkan dan n yang dijalankan sebagai acuan keakuratan suatu polinomial. Dengan menerapkan metode induktif, penulis mencari polinomial kromatik pada graf lengkap tripartit saat $l = 1$, $m = 1$, $n \geq 1$, dan $l = 1$, $m = 2$, $n \geq 2$, serta $l = 2$, $m = 2$, dan $n \geq 2$. Sehingga akan didapatkan pola polinomial kromatik pada graf lengkap tripartit $K_{1,1,n}$, $K_{1,2,n}$, dan $K_{2,2,n}$.

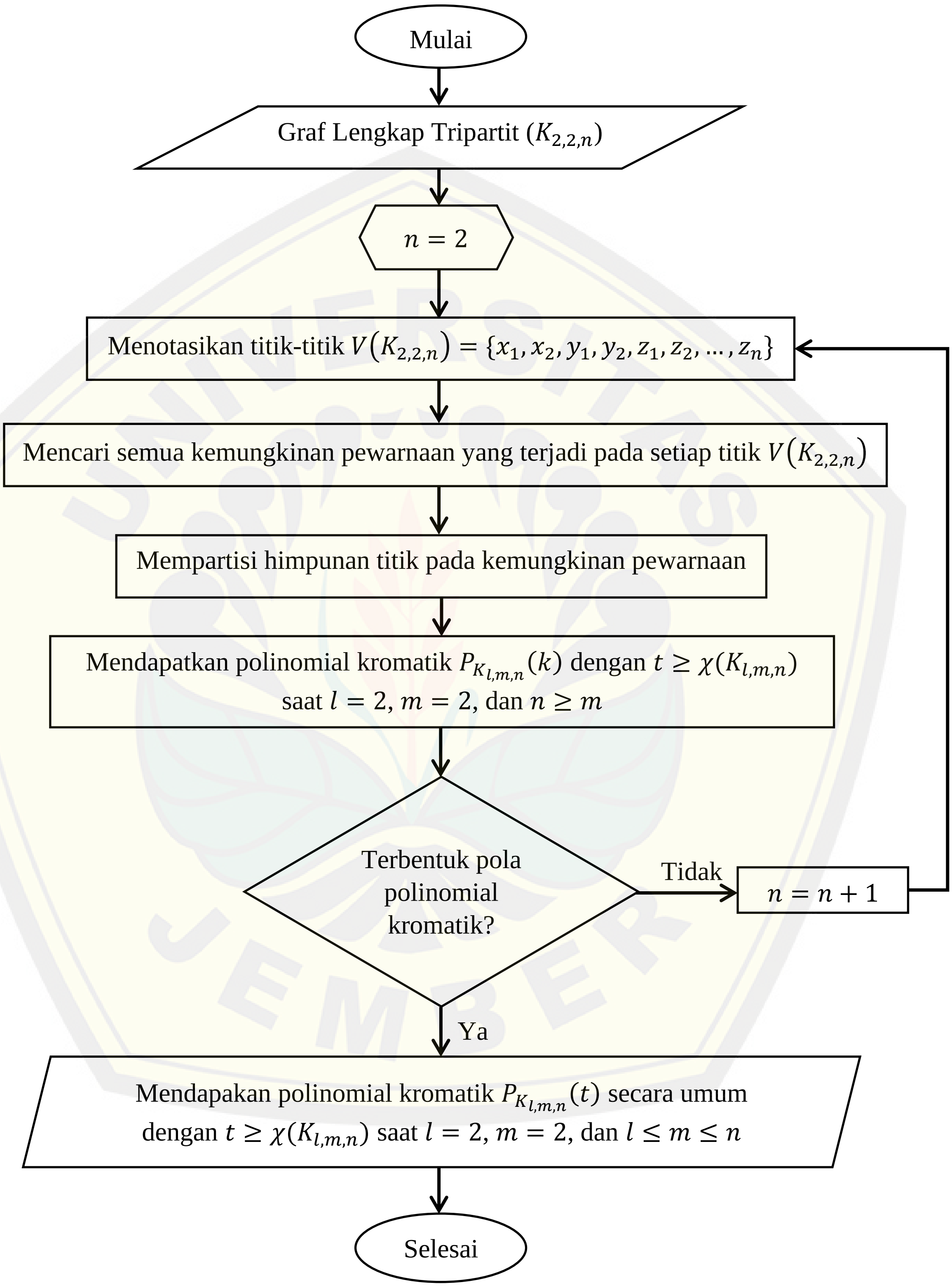
Berdasarkan langkah-langkah penelitian diatas, dapat ditunjukkan dengan diagram alur pada Gambar 3.2 untuk graf $K_{1,1,n}$, Gambar 3.3 untuk graf $K_{1,2,n}$, dan Gambar 3.4 untuk graf $K_{2,2,n}$ sebagai berikut:



Gambar 3.2 Diagram alur polinomial kromatik graf lengkap tripartit $K_{1,1,n}$



Gambar 3.3 Diagram alur polinomial kromatik graf lengkap tripartit $K_{1,2,n}$



Gambar 3.4 Diagram alur polinomial kromatik graf lengkap tripartit $K_{2,2,n}$

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, untuk mendapatkan polinomial kromatik dari graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$ adalah dengan mencari semua kemungkinan pewarnaan yang terjadi pada setiap titik serta mempartisikan himpunan pewarnaan titiknya. Kemudian dimasukkan kedalam Teorema 2.4 dan ditentukan pola setiap polinomial kromatik dari graf $K_{l,m,n}$ dengan l dan m yang ditentukan. Sehingga diperoleh kesimpulan bahwa polinomial kromatik dari graf lengkap tripartit $K_{l,m,n}$ dengan $l, m \in \{1,2\}$ dan $l \leq m \leq n$ adalah sebagai berikut :

a. Polinomial kromatik graf lengkap tripartit $K_{1,1,n}$ adalah $P_{K_{1,1,n}}(t) = t(t-1)(t-2)^n$.
b. Polinomial kromatik graf lengkap tripartit $K_{1,2,n}$ adalah $P_{K_{1,2,n}}(t) = t(t-1)(t-2)[(t-3)^n + (t-2)^{n-1}]$.
c. Polinomial kromatik graf lengkap tripartit $K_{2,2,n}$ adalah $P_{K_{2,2,n}}(t) = t(t-1)(t-2)[(t-3)^2(t-4)^{n-1} + (t-2)^n - (n^2 - 3n + 2)(t-3)^{n-2}]$.

5.2 Saran

Penelitian mengenai polinomial kromatik dari suatu graf merupakan salah satu permasalahan yang berkaitan dengan pewarnaan titik. Peneliti memberikan saran kepada pembaca untuk mencari polinomial kromatik dari graf lainnya dengan menggunakan metode partisi himpunan titik atau metode yang lainnya. Serta dapat pula mengkaji mengenai permasalahan pewarnaan graf lainnya seperti pewarnaan sisi, wilayah dan *total coloring*. Sehingga akan semakin berkembang penelitian mengenai pewarnaan suatu graf.

DAFTAR PUSTAKA

Birkhoff G. D. dan Lewis D. C. 1946. *Chromatic Polynomials*. USA: Mathemathics Soc.

Chartrand, G. dan Oellerman, O.R. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Chartrand, G., dan Zhang, P. 2009. *Chromatic Graph Theory*. USA: CRC Press.

Chartrand, G., dan Zhang, P. 2012. *A First Course in Graph Theory*. New York: Dover Publication, Inc.

Dong, F. M., Koh, K. M., dan Teo, K. L. 2005. *Chromatic Polynomials and Chromaticity of Graphs*. Singapore: B & JO Enterprise.

Dwijayanti, R. 2011. Polinomial Kromatik pada Graf Bintang, Graf Roda, dan Graf Tangga. *Skripsi*. Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.

Fraleigh, J. B. 1994. *A First in Abstract Algebra*. 5th Edition. USA: Addison-Welsey Publishing Company, Inc.

Hartsfield, N., dan Ringel G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. Australia: Academic Press.

Kurniawati, R. 2004. Polinomial Kromatik dari Graf Terhubung yaitu Graf Lengkap, Graf Sikel, dan Graf Lintasan. *Skripsi*. Jember: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.

Narsingh, D. 1974. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. USA: Pretice-Hall, Inc.

Niswah, L. A. 2009. Pembuktian Teorema Polinomial Kromatik dalam Sudoku. *Skripsi*. Malang: Universitas Islam Negeri Malang.

Patty, C. W., Hughes, H., Peter, F. 1991. *Foundation of Discrete Mathematics*. Pws-Kent Publishing Company Boston.

Phoy, Y. H. 2007. Chromaticity of Bipartite Graph with Three and Four Edges Deleted. *Skripsi*. Malaysia: Universiti Sains Malaysia.

Purcell, E. J. dan Verberg D. 1998. *Kalkulus dan Geometri Analisis*. Jilid 1. Alih bahasa oleh I Nyoman S., Bana K., dan Rawuh. Jakarta: Erlangga.

Read, R. C. 1968. *An Introduction to Chromatic Polynomials*. J. Combin. Theory 4.

Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. United Kingdom: Academic Press Limited.

Rosen, K. H. 2003. *Discrete Mathemathics and Its Aplication*. Fifth Edition. Singapura: McGraw Hill.

Wilson, R. J. 2010. *Pengantar Teori Graf*. Edisi Kelima. Jakarta: Erlangga.