



**ANALISIS *b*-COLORING PADA GRAF HASIL OPERASI *COMB*
GRAF LINTASAN**

*diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana pada
program studi Pendidikan Matematika*

SKRIPSI

Oleh :

Angelita Oktavia Permadi

210210101034

KEMENTERIAN PENDIDIKAN TINGGI, SAINS, DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS JEMBER

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JEMBER

2025



**ANALISIS b -COLORING PADA GRAF HASIL OPERASI
COMB GRAF LINTASAN**

*diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana pada
program studi Pendidikan Matematika*

SKRIPSI

Oleh :

Angelita Oktavia Permadi

210210101034

Dosen Pembimbing I : Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.
Dosen Pembimbing II : Saddam Hussien, S.Pd., M.Pd.
Dosen Penguji I : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
Dosen Penguji II : Rafiantika Megahnia Prihandini, S.Pd., M.Si.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN TINGGI, SAINS, DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS JEMBER

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JEMBER

2025

PERSEMBAHAN

Segala puji bagi Allah, dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang. Sholawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penulis persembahkan ungkapan kebahagiaan dan ucapan terimakasih atas terselesaikannya skripsi ini kepada:

1. Kedua orang tua saya, Ibu Inuk Puji Lestari dan Bapak Tulus Dwi Harminto yang senantiasa berkorban, mendoakan, memberikan arahan, motivasi, pemenuh segala kebutuhan, serta penguat di setiap perjalanan hidup hingga penulis mampu menyelesaikan studinya sampai meraih gelar sarjana;
2. Orang tua saya, Ibu Ita Agustin yang telah berpulang tepat di hari ulang tahun saya dan juga Bapak Tahir Permadi yang selalu mendoakan dikejuhan sana, serta keluarga besar yang telah mendukung dan memberikan perhatian selama saya berkuliah di Jember;
3. Ibu Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Saddam Hussien, S.Pd., M.Pd. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang senantiasa meluangkan waktu dalam memberikan pengarahan dan bimbingan hingga terselesaikannya penulisan skripsi ini;
4. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Penguji Utama dan Ibu Rafiantika Megahnia Prihandini, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Penguji Anggota yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
5. Teman-teman saya, Aininnesa Nadahaq sahabat kecil di rumah yang selalu menemani kesepian hati saya. Tarisa Alya Ridha, teman pertama saya di perkuliahan, dan Ega Ayu Pramitasari, teman seperjuangan yang menemani dan memberikan semangat untuk menyelesaikan skripsi ini;
6. Seluruh keluarga besar Geometric angkatan 2021 Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember terutama pertemanan “Math Edu” yang memberikan arti dari pertemanan anak-anak rantau, membantu disaat membutuhkan, serta merangkul disaat ketakutan;

7. Almamater tercinta Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
8. Dan yang terakhir, kepada diri saya sendiri, Angelita Oktavia Permadi. Terima kasih sudah bertahan sejauh ini dan berusaha merayakan dirimu sendiri, walau sering kali merasa belum cukup atas apa yang diusahakan. Namun, terimakasih tetap menjadi manusia yang selalu mau berusaha dan tidak lelah untuk mencoba. Berbahagialah selalu dimanapun berada, apapun kurang dan lebihmu mari rayakan diri sendiri.

MOTTO

وَهُوَ مَعَكُمْ أَيْنَ مَا كُنْتُمْ

"Dan Dia (Allah) bersama kamu di mana saja kamu berada"

(QS. Al-Hadid: 4)

"If destiny is a point and effort is a line, then life is a graph. So, learn graph theory to have wonderful life." -Prof. Slamin

"You are what you write." -Prof. Dafik

"Jika jatuh adalah hujan dan bangkit adalah matahari. Maka kita butuh keduanya untuk melihat Pelangi."

PERNYATAAN ORISINILITAS

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Angelita Oktavia Permadi

NIM : 210210101034

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: *Analisis b-Coloring pada Graf Hasil Operasi Comb Graf Lintasan* adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum pernah diajukan pada institusi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata dikemudian hari pernyataan tidak benar.

Jember, 25 Februari 2025

Yang menyatakan,

Angelita Oktavia Permadi

NIM. 210210101034

HALAMAN PERSETUJUAN

Skripsi berjudul *Analisis b-Coloring pada Graf Hasil Operasi Comb Graf Lintasan* telah diuji dan disetujui oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember pada:

Hari :

Tanggal :

Tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Pembimbing

Tanda Tangan

1. Pembimbing Utama

Nama : Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.

(.....)

NIP : 19760502 200604 2 001

2. Pembimbing Anggota

Nama : Saddam Hussien, S.Pd., M.Pd.

(.....)

NRP : 760017071

Penguji

Tanda Tangan

1. Pembimbing Utama

Nama : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

(.....)

NIP : 19680802 199303 1 004

2. Penguji Anggota

Nama : Rafiantika Megahnia Prihandini, S.Pd., M.Si.

(.....)

NIP : 19891005 201903 2 034

ABSTRAK

Misalkan G adalah pasangan dua himpunan (V, E) dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E . Pewarnaan yang tepat dari suatu graf G adalah pewarnaan titik sedemikian sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama. Salah satu contoh adalah *b-Coloring* merupakan pewarnaan graf yang mengharuskan setiap kelas warna memiliki setidaknya satu titik yang bertetangga dengan semua kelas warna lainnya. *b-Chromatic number* merupakan bilangan terbesar k yang menunjukkan bahwa suatu graf memiliki *b-coloring* dengan k warna dan dilambangkan dengan $\varphi(G)$. Salah satu operasi graf yaitu operasi *comb* titik dinotasikan dengan $G \triangleright_o H$ adalah graf yang diperoleh melalui penggandaan graf H sampai banyaknya graf H sama dengan kardinalitas titik pada graf G . Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan *b-chromatic number* dari hasil *b-coloring* pada graf hasil operasi *comb* graf lintasan yang menghasilkan tujuh teorema baru diantaranya graf $P_n \triangleright_{v_3} P_m$, graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$, graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$, graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$, graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$, graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$, dan graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$.

Kata kunci: *b-coloring*, operasi *comb* titik, graf lintasan, *b-chromatic number*

RINGKASAN

Analisis *b-Coloring* pada Graf Hasil Operasi *Comb* Graf Lintasan; Angelita Oktavia Permadi; 210210101034; 2025; 43 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Penelitian ini membahas salah satu topik dalam bidang teori graf, khususnya pada pewarnaan graf yaitu *b-coloring*. Pewarnaan graf adalah pemetaan dari elemen-elemen suatu graf terhadap k warna dengan mengikuti aturan tertentu. *b-Coloring* merupakan perwarnaan dari titik-titik G sedemikian sehingga setiap kelas warna memiliki setidaknya satu titik yang bertetangga dengan semua kelas warna lainnya. *b-Chromatic number* dari sebuah graf G dilambangkan dengan $\varphi(G)$ adalah bilangan terbesar k sedemikian sehingga G memiliki *b-coloring* dengan k warna. Teori graf juga mengenal tentang adanya operasi graf yakni suatu cara untuk mendapatkan graf baru dengan melakukan suatu jenis operasi tertentu terhadap dua atau lebih graf sehingga menghasilkan graf yang berbeda dari graf pembentuknya. Salah satu operasi graf yaitu operasi *comb* titik yang dinotasikan dengan $G \triangleright_o H$ adalah graf yang diperoleh melalui penggandaan graf H sampai banyaknya graf H sama dengan kardinalitas titik pada graf G . Graf operasi *comb* titik memiliki satu titik pelekatan sehingga mempermudah proses pencarian *b-chromatic number*.

Graf yang diteliti dalam skripsi ini adalah graf hasil operasi *comb* graf lintasan. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan *b-chromatic number* dari hasil *b-coloring* pada graf hasil operasi *comb* graf lintasan. Penelitian ini memperoleh tujuh teorema sebagai berikut:

- i. *b-Chromatic number* pada graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$ untuk $n \geq 2, m \geq 3$ adalah

$$\varphi(P_n \triangleright_{v3} P_m) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n = 2, m = 3 \\ 4, & \text{jika } n, m = 3 \\ & \text{jika } n = 2, m = 4 \\ 5, & \text{jika } n \geq 3, m \geq 4 \end{cases}$$

- ii. *b-Chromatic number* pada graf $P_n \triangleright_{v1} C_m$ untuk $n, m \geq 6$ adalah

$$\varphi(P_n \triangleright_{v1} C_m) = 5$$

iii. *b-Chromatic number pada graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$ adalah*

$$\varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = 4$$

iv. *b-Chromatic number pada graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n, m \geq 2$ adalah*

$$\varphi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \begin{cases} 4, & \text{jika } n = 2, m \geq 2 \\ 5, & \text{jika } n \geq 3, m \geq 2 \end{cases}$$

v. *b-Chromatic number pada graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 4, m \geq 2$ adalah*

$$\varphi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 6$$

vi. *b-Chromatic number pada graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n, m \geq 2$ adalah*

$$\varphi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \begin{cases} 6, & \text{jika } n = 2, m \geq 2 \\ 7, & \text{jika } n \geq 3, m \geq 2 \end{cases}$$

vii. *b-Chromatic number pada graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n, m \geq 3$ adalah*

$$\varphi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = 8$$

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat, hidayah, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi berjudul “Analisis *b-Coloring* pada Graf Hasil Operasi *Comb* Graf Lintasan”. Penelitian ini diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Koordinator Jurusan Pendidikan MIPA FKIP Universitas Jember;
3. Koordinator Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember;
4. Ibu Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd. dan Bapak Saddam Hussen, S.Pd., M.Pd. selaku Dosen Pembimbing yang telah meluangkan waktu dan pikiran hingga terselesaikannya penulisan skripsi ini;
5. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. dan Ibu Rafiantika Megahnia Prihandini, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
6. Ibu Dr. Nurcholif Diah Sri Lestari, S.Pd., M.Pd. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan selama perkuliahan;
7. Dosen dan Karyawan FKIP Universitas Jember;
8. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, 25 Februari 2025

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
PERSEMBAHAN	ii
MOTTO	iv
PERNYATAAN ORISINILITAS	v
HALAMAN PERSETUJUAN	vi
ABSTRAK	vii
RINGKASAN	viii
PRAKATA	x
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR NOTASI	xv
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian	3
1.5 Batasan Penelitian	4
1.6 Kebaharuan Penelitian	4
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Terminologi Dasar Graf	5
2.2 Graf Khusus	7
2.3 Keluarga Graf Tangga	8
2.4 Operasi Graf <i>Comb</i>	9
2.5 Pewarnaan Graf	11
2.6 <i>b</i>-Coloring	12
BAB 3. METODOLOGI PENELITIAN	15
3.1 Jenis Penelitian	15

3.2	Metode Penelitian.....	15
3.3	Prosedur Penelitian.....	15
3.4	Observasi Awal Penelitian.....	17
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN.....		20
4.1	Hasil Penelitian <i>b-Coloring</i>	20
BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN.....		40
5.1	Kesimpulan.....	40
5.2	Saran.....	40
DAFTAR PUSTAKA.....		42
LAMPIRAN.....		44

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Hasil Kelas Warna <i>b-Coloring</i> Graf $P_3 \triangleright_{v_1} C_4$	13
---	----

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf Kosong (<i>Null Graph</i>)	5
Gambar 2.2 (a) Graf Terhubung dan (b) Graf Tak Terhubung	6
Gambar 2.3 Graf G , (b) Graf H , (c) dan Graf $G \triangleright_b H$	10
Gambar 2.4 Contoh <i>b-Coloring</i> Graf $P_3 \triangleright_{v_1} C_4$	13
Gambar 3.1 Prosedur Penelitian	17
Gambar 3.2 Hasil Observasi <i>b-Coloring</i> Graf (a) $P_2 \triangleright_{v_3} P_4$, (b) $P_2 \triangleright_{v_3} P_4$, (c) $P_3 \triangleright_{v_3} P_3$, dan (d) $P_3 \triangleright_{v_3} P_4$	18
Gambar 4.1 <i>b-Coloring</i> pada Graf $P_6 \triangleright_{v_3} P_7$	23
Gambar 4.2 <i>b-Coloring</i> pada Graf $P_7 \triangleright_{v_1} C_8$	25
Gambar 4.3 <i>b-Coloring</i> pada Graf $SL_5 \triangleright_{v_1} P_4$	30
Gambar 4.4 <i>b-Coloring</i> pada Graf $PTL_6 \triangleright_{v_1} P_4$	33
Gambar 4.5 <i>b-Coloring</i> pada Graf $DL_4 \triangleright_{v_1} P_3$	36
Gambar 4.6 <i>b-Coloring</i> pada Graf $LSP_4 \triangleright_{v_1} P_4$	33

DAFTAR NOTASI

G		= Graf G
\in		= Menyatakan elemen
$V(G)$		= Himpunan titik pada Graf G
$E(G)$		= Himpunan sisi pada Graf G
$ V(G) $		= Kardinalitas titik pada Graf G
$ E(G) $		= Kardinalitas sisi pada Graf G
v_i		= Titik ke- i pada Graf G
e_i		= Sisi ke- i pada Graf G
$d(v)$		= Derajat suatu titik
$\Delta(G)$		= Derajat terbesar dari Graf G
P_n		= Graf lintasan dengan n titik
C_n		= Graf lingkaran dengan n titik
H_n		= Graf tangga dengan $2n$ titik
SL_n		= Graf tangga miring dengan $2n$ titik
PTL_n		= Graf tangga prisma dengan $2n - 1$ titik
DL_n		= Graf tangga permata dengan $4n$ titik
LSP_n		= Graf tangga segitiga pita dengan $3n + 1$ titik
\triangleright_o		= Operasi <i>comb</i> titik
$P_n \triangleright_{v_3} P_m$		= Operasi <i>comb</i> pada P_n dengan penempelan titik pada $v_3 P_m$
$P_n \triangleright_{v_6} C_m$		= Operasi <i>comb</i> pada P_n dengan penempelan titik pada $v_6 C_m$
$C_n \triangleright_{v_1} P_m$		= Operasi <i>comb</i> pada C_n dengan penempelan titik pada $v_1 P_m$
$SL_n \triangleright_{v_1} P_m$		= Operasi <i>comb</i> pada SL_n dengan penempelan titik pada $v_1 P_m$
$PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$		= Operasi <i>comb</i> pada PTL_n dengan penempelan titik pada $v_1 P_m$
$DL_n \triangleright_{v_1} Bt_m$		= Operasi <i>comb</i> pada DL_n dengan penempelan titik pada $v_1 P_m$
$LSP_n \triangleright_{v_1} Bt_m$		= Operasi <i>comb</i> pada LSP_n dengan penempelan titik pada $v_1 P_m$
$\chi(G)$		= <i>Chromatic number</i> dari Graf G
$\varphi(G)$		= <i>b-Chromatic number</i> dari Graf G

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada tahun 1736, seorang ahli matematikawan Swiss bernama Leonhard Euler memperkenalkan teori graf untuk pertama kalinya yakni upaya dalam pemecahan masalah tentang jembatan Königsberg. Setelah lebih dari satu abad, perkembangan teori graf mengalami kemajuan hingga tahun 1976, Wolfgang Haken dan Kenneth Appel berhasil menyelesaikan *Four-Colour Conjecture* yang berkaitan dengan penggunaan empat warna pada peta sehingga tidak ada dua wilayah yang berbatasan memiliki warna yang sama. Mereka menggunakan kombinasi teknik teori graf dan komputasi sehingga penelitian mereka adalah salah satu pembuktian matematika paling terkenal yang melibatkan komputasi. Secara sederhana, suatu graf dapat direpresentasikan secara visual dengan menyatakan objek sebagai titik (*vertex*), sedangkan hubungan antara objek satu dengan objek lain direpresentasikan sebagai sisi (*edge*). Menurut Manongga (2013), graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada, seperti: struktur organisasi, rute transportasi, dan berbagai bagan sistem penjadwalan mata kuliah. Hal ini merupakan salah satu penerapan dari metode atau konsep teori graf.

Teori graf mengalami perkembangan yang sangat luas, salah satu konsep pada teori graf yang sangat diminati adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf adalah salah satu cara pelabelan pada graf dengan memberikan warna yang berbeda pada titik atau sisi atau wilayah yang bertetangga. Terbagi menjadi tiga jenis pewarnaan graf yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah. Pewarnaan titik adalah proses memberikan warna yang berbeda pada titik yang saling bertetangga sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama. Banyak warna minimal yang bisa digunakan untuk mewarnai titik-titik pada suatu graf disebut bilangan kromatik. Pada pewarnaan graf, terdapat banyak sekali macam cara pewarnaan dan tentunya selalu berkembang dengan temuan-temuan baru sepanjang waktu.

Pewarnaan *b-coloring* merupakan salah satu contoh kajian dalam pewarnaan graf yaitu pada pewarnaan titik dan menarik untuk diteliti. *b-Coloring* pada graf G

adalah metode pewarnaan dari titik-titik graf tersebut sedemikian hingga setiap kelas warna memiliki setidaknya satu titik yang bertetangga dengan semua kelas warna lainnya (Irving & Manlove, 1999). Kelas warna merupakan himpunan titik yang memiliki warna sama. Konsep *b-coloring* memiliki keterkaitan dengan permasalahan pewarnaan graf umum seperti *chromatic number* (bilangan kromatik). Salah satu masalah dalam mengkaji *b-coloring* yaitu bagaimana menentukan bilangan kromatik pada *b-coloring* (*b-Chromatic number*) dari sebuah graf G . *b-Chromatic number* adalah bilangan terbesar k sedemikian sehingga graf G memenuhi *b-coloring* dengan k warna (Irving & Manlove, 1999).

Teori graf juga mengenal tentang adanya operasi graf yakni suatu cara untuk mendapatkan graf baru dengan melakukan suatu jenis operasi tertentu terhadap dua atau lebih graf sehingga nantinya akan menghasilkan graf yang berbeda dari graf pembentuknya. Terdapat berbagai jenis operasi graf diantaranya yaitu *joint*, *cartesian product*, *composition*, *corona*, *shackle*, dan *comb*. Pada penelitian ini, operasi graf yang digunakan adalah operasi *comb*. Misalkan G dengan himpunan titik $V(G) = \{i = 1, 2, \dots, n\}$ dan H adalah sembarang graf terhubung. Hasil operasi *comb* titik dari graf G dan H dinotasikan dengan $G \triangleright_o H$ adalah graf yang diperoleh melalui penggandaan graf H sampai banyaknya graf H sama dengan kardinalitas titik pada graf G yaitu $H_1, H_2, \dots, H_{|V(G)|}$ dan memilih satu titik tetap u_i pada graf H_i , kemudian melekatkan titik tetap $u_i \forall i$, pada titik v_i di graf G (Hasmawati, 2020).

Beberapa penelitian *b-coloring* sebagaimana yang telah dilakukan mengenai topik dari keluarga prisma (Y_n) oleh Ansari dkk., (2018). Kemudian penelitian *b-coloring* pada keluarga graf net (N) oleh Akalyadevi & Ramaswamy (2019). Selanjutnya mengenai *b-Coloring of the Product of Paths and Cycles* oleh Afrose dkk., (2020), serta Nagarathinam & Parvathi (2021) yang melakukan penelitian dengan topik *b-coloring* pada graf operator *tadpole* ($T_{n,k}$) dan graf *wheel* (W_n). Berdasarkan hasil penelitian sebelumnya, peneliti tertarik untuk mengkaji lebih dalam mengenai *b-coloring* pada graf hasil operasi *comb* karena belum banyak yang meneliti tentang operasi tersebut. Graf yang digunakan pada penelitian ini antara lain graf Lintasan (P_n), graf Siklus (C_n), dan jenis-jenis dari keluarga graf Tangga (L_n) antara lain graf Tangga Miring (SL_n), graf Tangga Prisma (PTL_n), graf

Tangga Permata (DL_n), dan graf Tangga Segitiga Pita (LSP_n). Beberapa graf tersebut nantinya akan dioperasikan dengan *comb* graf Lintasan (P_n). Adapun pemilihan graf tersebut dikarenakan belum ada penelitian mengenai *b-coloring* pada graf hasil operasi *comb* graf lintasan, sehingga harapan dari penelitian ini akan mendapatkan bilangan kromatik pada *b-coloring* dan menemukan teorema baru sehingga nantinya dapat dijadikan referensi untuk diterapkan dalam pengaplikasian sebuah permasalahan. Selain itu, graf hasil operasi *comb* juga memiliki satu titik pelekatan sehingga mempermudah proses pencarian nilai bilangan kromatik *b-coloring*. Berdasarkan pemaparan latar belakang di atas dan *literatur review* yang telah dilakukan, pada penelitian ini penulis memberikan judul “**Analisis *b-Coloring* pada Graf Hasil Operasi *Comb* Graf Lintasan**”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pemaparan latar belakang diatas, maka dirumuskan masalah pada penelitian ini yaitu bagaimana *b-coloring* pada graf hasil operasi *comb* graf lintasan?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan pemaparan latar belakang di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah menentukan dan mengetahui hasil dari analisis *b-coloring* pada graf hasil operasi *comb* graf lintasan.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

- a. Memberikan kontribusi terhadap perkembangan ilmu dalam bidang teori graf, khususnya ruang lingkup penerapan *b-coloring* pada berbagai jenis graf;
- b. Menambah wawasan dan pengetahuan baru dalam bidang teori graf khususnya mengenai *b-coloring* sehingga dapat dijadikan sebagai sumber referensi pengembangan penelitian teori dan aplikasi tentang *b-coloring*;
- c. Memberikan inspirasi bagi peneliti lain agar dapat mengembangkan penelitian *b-coloring* pada graf dan permasalahan lainnya.

1.5 Batasan Penelitian

Menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka permasalahan dalam penelitian ini dibatasi bahwa graf yang akan dioperasikan dalam penelitian ini adalah graf Lintasan (P_n), graf Siklus (C_n), dan jenis-jenis dari keluarga graf Tangga (L_n) antara lain graf Tangga Miring (SL_n), graf Tangga Prisma (PTL_n), graf Tangga Permata (DL_n), dan graf Tangga Segitiga Pita (LSP_n). Berdasarkan hal tersebut, graf hasil operasi *comb* yang diteliti adalah graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$ dengan $n \geq 2, m \geq 3$, graf $P_n \triangleright_{v1} C_m$ dengan $n, m \geq 6$, graf $C_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan $n \geq 3, m \geq 2$, graf $SL_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan $n, m \geq 2$, graf $PTL_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan $n \geq 4, m \geq 2$, graf $DL_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan $n, m \geq 2$, graf $LSP_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan $n, m \geq 3$.

1.6 Kebaharuan Penelitian

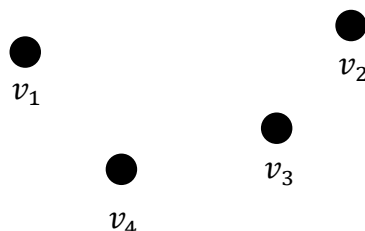
Pada penelitian sebelumnya, peneliti umumnya hanya meneliti tentang graf dengan menentukan bilangan kromatik *b-coloring* saja, tetapi belum menggunakan salah satu dari operasi graf. Selanjutnya kebaruan dalam penelitian ini yaitu membahas topik baru yang memiliki keterkaitan dengan operasi *comb* yakni menemukan *b-coloring* pada graf hasil operasi *comb* $G \triangleright_0 H$, dengan graf G yaitu graf Lintasan (P_n), graf Siklus (C_n), dan jenis-jenis dari keluarga graf tangga antara lain graf Tangga Miring (SL_n), graf Tangga Prisma (PTL_n), graf Tangga Permata (DL_n), dan graf Tangga Segitiga Pita (LSP_n), sedangkan untuk graf H yaitu graf Lintasan (P_n). Sehingga berdasarkan uraian tersebut maka graf yang akan diteliti pada penelitian ini yaitu graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$ dengan $n \geq 2, m \geq 3$, graf $P_n \triangleright_{v1} C_m$ dengan $n, m \geq 6$, graf $C_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan $n \geq 3, m \geq 2$, graf $SL_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan $n, m \geq 2$, graf $PTL_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan $n \geq 4, m \geq 2$, graf $DL_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan $n, m \geq 2$, graf $LSP_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan $n, m \geq 3$.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan Swiss yang bernama Leonard Euler pada tahun 1736, sebagai upaya menyelesaikan masalah jembatan Königsberg yang tercatat dalam sejarah untuk pertama kali menggunakan graf. Terdapat sungai dengan tujuh buah jembatan yang saling menghubungkan daratan dan apakah memungkinkan seseorang dapat melintasi semua jembatan tersebut masing-masing tepat satu kali serta dapat kembali ke titik awal. Euler menemukan pemecahan masalah tersebut dengan memodelkan ke dalam bentuk graf dan memisalkan daratan sebagai titik/simpul (*vertex*) sedangkan jembatan sebagai garis atau sisi (*edge*).

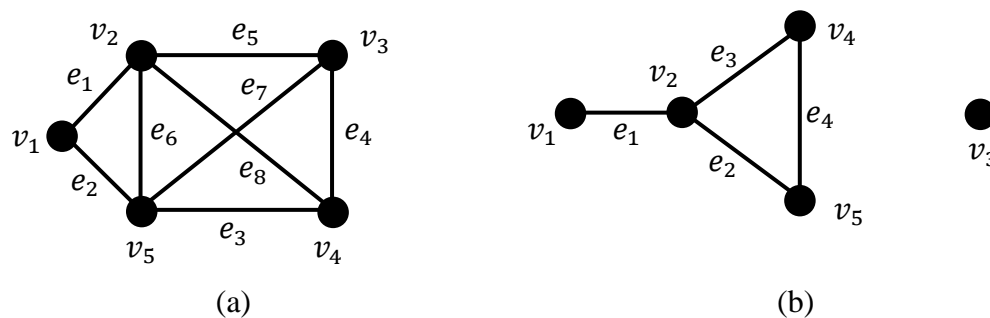
Graf tidak berarah atau bisa disebut dengan graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan terurut dari $G(V, E)$ dimana $V(G)$ merupakan himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*), sedangkan $E(G)$ merupakan himpunan berhingga dan boleh kosong dari pasangan tak terurut antara dua titik (u, v) dimana $(u, v \in V(G))$ yang disebut sisi (*edge*). Jadi $(u, v) = (v, u)$ adalah sisi yang sama. Berdasarkan definisi graf tersebut dapat disimpulkan bahwa graf dimungkinkan tidak memiliki sisi, akan tetapi harus memiliki minimal sebuah titik karena $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dan $E(G)$ adalah himpunan boleh kosong. Graf kosong (*null graph*) merupakan graf yang tidak memiliki sisi juga dikenal dengan sebutan graf *trivial* jika hanya memiliki satu titik (Munir, 2010). Berikut pada Gambar 2.1 merupakan contoh dari graf kosong (*null graph*).



Gambar 2.1 Graf Kosong (*Null Graph*)

Banyaknya titik yang dimiliki oleh suatu graf disebut dengan *order* dan dinotasikan dengan simbol $|V(G)|$. Sementara itu, banyaknya sisi yang dimiliki

oleh suatu graf disebut *size* dan dinotasikan dengan simbol $|E(G)|$ (Slamin, 2009). Suatu graf dikatakan graf terhubung (*connected graph*) apabila setiap pasang titik $u, v \in V(G)$ terdapat suatu lintasan yang menghubungkan titik u dan v (Febrianti dkk., 2019). Jika tidak terdapat sisi atau lintasan yang menghubungkan setiap titik tersebut, maka dikatakan sebagai graf tak terhubung (*disconnected graph*). Gambar 2.2 merupakan contoh dari graf terhubung dan graf tak terhubung.



Gambar 2.2 (a) Graf Terhubung dan (b) Graf Tak Terhubung

Pada Gambar 2.2 (a) jumlah titik $|V(G)| = 5$ dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $|E(G)| = 8$ dengan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Dua titik u dan v dikatakan bertetangga (*adjacent*) apabila terdapat sisi yang saling menghubungkan antara kedua titik tersebut (Balakrishnan & Rangathan, 2012). Pada Gambar 2.2 (a) titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_5 , titik v_2 bertetangga dengan titik v_1, v_3 , dan v_5 . Sisi $e = (u, v)$ dikatakan bersisian (*incident*) dengan titik u dan v apabila sisi e menghubungkan titik u dan v (Munir, 2010). Pada Gambar 2.2 (a) sisi e_1 bersisian dengan v_1 dan v_2 . Pada teori graf, istilah jalan adalah sebuah barisan berhingga antara titik dan sisi yang bergantian serta diawali dan diakhiri dengan titik dimana titik dan sisinya boleh berulang. Contoh jalan pada Gambar 2.2 (a) yaitu: $v_1, e_1, v_2, e_5, v_3, e_4, v_4, e_8, v_2$. Jalur merupakan jalan dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n pada graf G dimana sisinya tidak boleh sama. Contoh jalur pada Gambar 2.2 (a) yaitu: $v_1, e_1, v_2, e_5, v_3, e_4, v_4, e_3, v_5$. Sedangkan lintasan atau *path* merupakan jalan dari titik awal v_0 ke titik tujuan v_n pada graf G dimana titik yang dilalui hanya boleh dilewati tepat satu kali.

Derajat suatu titik atau *degree* adalah banyaknya titik yang bertetangga pada graf G dan dinyatakan dengan simbol $d(v)$ (Munir, 2010). Contoh derajat pada Gambar 2.2 (a) adalah $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 4$, dan $d(v_3) = 3$. Titik terisolasi atau *isolated vertex* merupakan sebuah titik yang memiliki derajat nol, artinya titik tersebut tidak mempunyai sisi yang berdekatan dan tidak ada titik lain yang bertetangga. Sedangkan titik tergantung atau *pendant vertex* merupakan titik yang memiliki derajat satu (Rosen, 2019).

2.2 Graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus serta termasuk ke dalam graf sederhana. Graf sederhana adalah graf yang tidak memuat *loop* dan sisi rangkap. Pada graf khusus, sisi merupakan pasangan tak urut sehingga $(u, v) = (v, u)$. Karakteristik bentuk dari graf khusus dapat digeneralisasikan sampai *orde* ke- n namun tetap simetris. Graf khusus memiliki keunikan yakni tidak isomorfis dengan graf lainnya. Beberapa jenis dari graf khusus sebagai berikut.

2.2.1 Graf Lintasan (*Path Graph*)

Sebuah graf G dengan *order* ke- n dimana $n \geq 2$ dikatakan sebagai graf lintasan yang dinotasikan dengan P_n jika titik-titik pada graf tersebut dapat dilabeli dengan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sedemikian sehingga sisi-sisinya adalah $\{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$ (Chartrand dan Zang, 2012 : 19). Kedua titik ujung pada graf lintasan merupakan *pendant*, yaitu titik dengan derajat satu, sedangkan titik yang lain berderajat dua. Contoh dari graf lintasan dapat dilihat pada Lampiran 2.2.

2.2.2 Graf Siklus (*Cycle Graph*)

Sebuah graf G dengan *order* ke- n dimana $n \geq 3$ dikatakan sebagai graf siklus yang dinotasikan dengan C_n jika titik-titik pada graf tersebut dapat dilabeli dengan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sedemikian sehingga sisi-sisinya adalah $\{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$ dan $\{v_1v_n\}$ (Chartrand dan Zang, 2012 : 19). Setiap titik pada graf siklus berderajat dua. Contoh dari graf siklus dapat dilihat pada Lampiran 2.2.

2.2.3 Graf Tangga (*Ladder Graph*)

Sebuah graf G dikatakan sebagai graf tangga yang dinotasikan dengan L_n dimana $n \geq 2$ merupakan gabungan dari graf yang dibentuk dari hasil kali kartesius graf lintasan dengan dua titik P_2 dan graf lintasan dengan n simpul sehingga $L_n = P_2 \times P_n$ (Hasmawati, 2015). Titik-titik pada graf tersebut dapat dilabeli dengan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cup \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ sedemikian sehingga sisi-sisinya adalah $\{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\} \cup \{w_1w_2, w_2w_3, \dots, w_{n-1}w_n\} \cup \{v_1w_1, v_2w_2, \dots, v_nw_n\}$. Banyaknya titik pada graf tangga adalah $2n$ dan sisi sebanyak $3n - 2$. Contoh dari graf tangga dapat dilihat pada Lampiran 2.2.

2.3 Keluarga Graf Tangga

Keluarga graf adalah pengelompokkan graf menjadi satu dimana graf-graf tersebut memiliki karakteristik atau ciri-ciri yang sama. Salah satu contoh dari keluarga graf adalah keluarga graf tangga dengan unsur penyusun utama yaitu graf tangga (L_n). Berikut ini merupakan jenis-jenis graf dari keluarga graf tangga diantaranya yaitu:

2.3.1 Graf Tangga Miring (*Skew Ladder Graph*)

Graf Tangga Miring dinotasikan sebagai SL_n dimana $n \geq 2$ merupakan graf yang terdiri dari dua jalur salinan dengan titik yang terhubung oleh sisi-sisi diagonal, bukan hanya tegak lurus. Adapun himpunan titik $V(SL_n) = \{v_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(SL_n) = \{v_iv_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_iw_i; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{w_iw_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$. Banyaknya titik pada graf tangga miring adalah $2n$ dan sisi sebanyak $3n - 3$. Bilangan kromatik pewarnaan titiknya adalah $\chi(SL_n) = 2$ (R. A. Akbar, dkk., 2022). Contoh dari graf tangga miring dapat dilihat pada Lampiran 2.3.

2.3.2 Graf Tangga Prisma (*Prism Triangle Ladder Graph*)

Graf Tangga Prisma dinotasikan sebagai PTL_n dimana $n \geq 2$ adalah graf yang dikonstruksi dari graf tangga segitiga dengan cara melenyapkan satu titik yang berderajat dua. Graf tangga prisma adalah graf dengan *orde*

$2n - 1$, yaitu graf terhubung yang memiliki satu titik yang berderajat dua, dua titik yang berderajat 3, dan yang lainnya berderajat 4 (Hasmawati, 2023). Adapun himpunan titik $V(PTL_n) = \{v_i; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{w_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(SL_n) = \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_i w_i; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{w_i w_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_i w_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$. Contoh dari graf tangga prisma dapat dilihat pada Lampiran 2.3.

2.3.3 Graf Tangga Permata

Graf Tangga Permata dinotasikan sebagai DL_n dimana $n \geq 2$ merupakan graf yang disusun oleh graf tangga dan mempunyai n permata (Prihandini dkk., 2020). Adapun himpunan titik $V(DL_n) = \{v_i, w_i, z_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2n\}$ dan himpunan sisi $E(DL_n) = \{v_i v_{i+1}, w_i w_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_i w_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}; 1 \leq j \leq 2n - 2, \text{genap}\} \cup \{v_i z_{2i-1}, v_i z_{2i}, w_i z_{2i-1}, w_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ dan banyaknya titik pada graf prisma adalah $4n$ serta sisi sebanyak $8n - 3$ (Ilham Saifudin, 2016). Contoh dari graf tangga permata dapat dilihat pada Lampiran 2.3.

2.3.4 Graf Tangga Segitiga Pita

Graf tangga segitiga pita dinotasikan sebagai LSP_n dimana $n \geq 2$ adalah graf modifikasi dari hasil graf tangga segitiga LS_n yang bentuknya diputar balik seperti bentuk belah ketupat kemudian disusun dengan mempertemukan satu titik pada satu titik di salah satu sudutnya, dan dengan menambahkan satu sisi secara berselang seling sedemikian sehingga berzigzag memanjang menyerupai pita (Kurniawan Admaja, 2021). Adapun himpunan titik $V(LSP_n) = \{u_i, v_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i w_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan himpunan sisi $E(LSP_n) = \{w_i u_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i v_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_i w_{i+1}, u_i w_{i+1}, v_i w_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_{2i-1} v_{2i}, u_{2i} u_{2i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ (Kurniawan Admaja : 4, 2021). Contoh dari graf tangga segitiga pita dapat dilihat pada Lampiran 2.3.

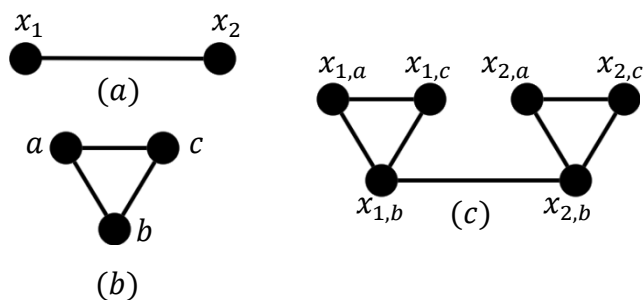
2.4 Operasi Graf Comb

Operasi graf merupakan suatu cara untuk mendapatkan graf yang berbeda dari graf pembentuknya atau menghasilkan graf baru dengan cara menggabungkan dua

atau lebih graf yang dioperasikan menggunakan jenis operasi tertentu. Operasi yang akan digunakan pada penelitian ini adalah operasi *comb*. Graf *comb* adalah istilah yang diperkenalkan oleh Yoshio Hora dan Masao Obata dalam sebuah publikasinya yang berjudul “*On Comb Graphs*” pada tahun 1974. Beberapa operasi pada graf salah satunya operasi graf *comb* adanya penggunaan suatu titik dengan nama titik tetap. Pengertian dari titik tetap pada suatu graf adalah titik yang dipilih secara khusus untuk kepentingan tertentu atau untuk mempermudah dalam membahas operasi graf.

Definisi 2.4.1 Misalkan G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_i | 1, 2, \dots, n\}$ dan H adalah sembarang graf terhubung. Hasil operasi *comb* titik dari graf G dan H dinotasikan dengan $G \triangleright_o H$ adalah graf yang diperoleh melalui penggandaan graf H sampai banyaknya graf H sama dengan kardinalitas titik pada graf G yaitu $H_1, H_2, \dots, H_{|V(G)|}$ dan memilih satu titik tetap u_i pada graf H_i , kemudian melekatkan titik tetap $u_i \forall i$, pada titik v_i di graf G (Hasmawati, 2020).

Diberikan contoh pada Gambar 2.3 dua graf sederhana dengan graf pertama adalah (a) graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{x_1, x_2\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{x_1 x_2\}$. Graf kedua yaitu (b) graf H dengan himpunan titik $V(H) = \{a, b, c\}$ dan himpunan sisi $E(H) = \{ab, bc, ac\}$. Graf G memiliki titik sebanyak 2, maka graf H akan digandakan sampai banyak graf H sama dengan kardinalitas titik pada graf G , sehingga diperoleh satu buah graf G dan graf H_1, H_2 . Setelah itu, dipilih dan ditetapkan satu titik tetap dari graf H yaitu $V(G) = \{b\}$, kemudian melekatkannya pada setiap titik yang ada pada graf G dan disimbolkan x_i . Berikut hasil dari (c) graf $G \triangleright_b H$.



Gambar 2.3 Graf G , (b) Graf H , (c) dan Graf $G \triangleright_b H$

2.5 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf adalah pemetaan dari elemen-elemen suatu graf terhadap k -warna, dimana k merupakan himpunan bilangan asli $\{1, 2, \dots, k\}$ dengan mengikuti aturan tertentu. Pada pewarnaan titik, setiap titik diberi warna sedemikian rupa sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga memiliki warna yang sama. Tujuan pewarnaan titik adalah untuk meminimalkan jumlah warna yang digunakan dan dikenal sebagai bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf.

Definisi 2.5.1 Suatu pewarnaan pada seluruh titik anggota graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan $F: V \rightarrow \mathbb{N}$ dengan ketentuan titik-titik yang bertetangga memiliki warna-warna yang berbeda di \mathbb{N} , artinya $\{v_1 v_2\} \in E$ maka $F(v_1) \neq F(v_2)$ (Rahadi, 2019).

Definisi 2.5.2 Kelas warna ialah himpunan titik-titik yang berwarna i dengan $1 \leq i \leq k$.

Bilangan kromatik graf G ialah minimum banyaknya warna yang digunakan dalam mewarnai titik-titik di G , sedemikian sehingga setiap dua titik yang berhubungan dengan satu sisi memiliki warna yang berbeda. Bilangan kromatik dari graf G dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Definisi 2.5.3 Bilangan kromatik dari graf G , dinotasikan $\chi(G)$, ialah jumlah minimum warna yang diperlukan untuk menghasilkan pewarnaan graf G yang tepat (Kornelia, 2019).

Pewarnaan graf terbagi menjadi tiga jenis antara lain pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Pada Lampiran 2.5 merupakan contoh dari jenis pewarnaan graf.

1. Pewarnaan titik pada graf G merupakan pemetaan $c : V \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ sehingga untuk setiap dua titik yang bertetangga u dan v memiliki warna berbeda $c(u) \neq c(v)$, dimana $c(v)$ merupakan warna dari titik v . Bilangan kromatik dari pewarnaan titik merupakan bilangan asli terkecil k atau minimum k yang digunakan sebagai warna titik dinotasikan dengan $\chi(G)$ (Bondy & Murty, 1976).
2. Pewarnaan sisi pada graf G merupakan pemetaan $c : E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ sehingga untuk setiap sisi yang bertetangga e dan f memiliki warna

berbeda $c(e) \neq c(f)$ dimana $c(e)$ merupakan warna sisi e . Bilangan kromatik dari pewarnaan sisi merupakan bilangan asli terkecil k atau minimum k yang digunakan sebagai warna sisi dinotasikan dengan $\chi'(G)$ (Agustin et al., 2017).

3. Pewarnaan wilayah pada graf G merupakan pemberian warna terhadap wilayah pada G dengan fungsi $c : R \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ sehingga untuk setiap dua wilayah yang bertetangga r dan s memiliki warna berbeda $c(r) \neq c(s)$ dimana $c(r)$ merupakan warna dari wilayah r (Bondy & Murty, 1976).

Salah satu contoh penerapan sederhana dari pewarnaan graf yaitu untuk mengatur agar warna setiap wilayah yang berdekatan di suatu peta tidak ada yang sama. Ada juga permasalahan membuat jadwal seseorang agar tidak memiliki jadwal di waktu yang bersamaan ketika akan mengikuti beberapa jadwal sekaligus. Pengaturan warna lampu lalu lintas yang harus hidup di pertigaan atau perempatan jalan untuk mencegah terjadinya kecelakaan juga merupakan salah satu manfaat dari pewarnaan graf. Beberapa contoh diatas dapat diketahui bahwa ada banyak sekali manfaat dari pewarnaan graf.

2.6 *b-Coloring*

b-Coloring merupakan salah satu contoh jenis pewarnaan graf yang terus berkembang dan ditemukan sepanjang waktu. Kata “*b*” dalam “*b-coloring*” merupakan singkatan dari “*bounded*” atau terbatas yang berarti pada batasan jumlah warna yang digunakan dalam pewarnaan. Ada beberapa kondisi yang harus terpenuhi dalam melakukan pewarnaan *b-coloring*, yaitu pertama tidak ada dua titik yang terhubung memiliki warna sama, dan kedua, setiap k warna yang digunakan memiliki setidaknya satu titik v yang bertetangga dengan titik-titik dari semua warna lain yang digunakan dalam graf tersebut. Titik v ini disebut titik domain untuk k warna. Misalnya, jika sebuah graf diwarnai dengan lima warna, maka setiap warna harus memiliki setidaknya satu titik yang terhubung dengan titik dari keempat warna lainnya.

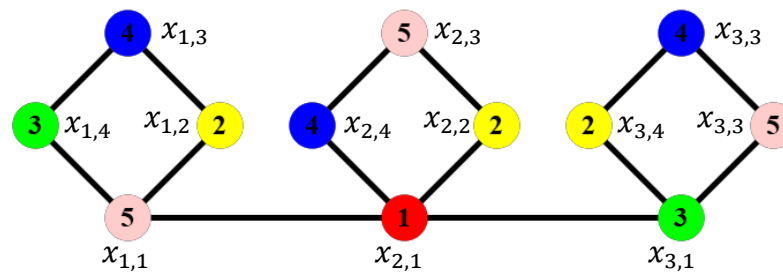
Definisi 2.6.1 *b-Coloring* dari sebuah graf G dengan k warna adalah sebuah pewarnaan titik sedemikian sehingga ada titik disetiap warna yang bertetangga dengan setidaknya satu titik di setiap kelas warna lainnya (Blidia, 20212).

Definisi 2.6.2 *b-Chromatic number* dari sebuah graf G dilambangkan dengan $\varphi(G)$, adalah bilangan terbesar k sedemikian sehingga G memiliki *b-coloring* dengan k warna (Irving & Manlove, 1999).

Lemma 2.6.1 Batas *b-coloring* graf G dengan derajat maksimum $\Delta(G)$ sebagai berikut

$$\chi(G) \leq \varphi(G) \leq \Delta(G) + 1 \text{ (Kouider \& Mahéo, 2002)}$$

$\chi(G)$ adalah bilangan kromatik dari sebuah graf G yang merupakan nilai minimum dari warna yang diperlukan untuk menghasilkan pewarnaan yang tepat dari graf G dan $\Delta(G)$ adalah derajat maksimum dari titik-titik graf G .



Gambar 2.4 Contoh *b-Coloring* Graf $P_3 \triangleright_{v1} C_4$

Gambar 2.4 merupakan contoh hasil *b-coloring* pada graf $P_3 \triangleright_{v1} S_4$ dengan $k = 5$ dimana setiap warna harus bertetangga dengan kelas warna yang lain. Terdapat 5 macam warna yang berbeda pada graf Gambar 2.4, pewarnaan yang berbeda tersebut sesuai dengan definisi *b-coloring*. Adapun kelas warna disajikan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Hasil Kelas Warna *b-Coloring* Graf $P_3 \triangleright_{v1} C_4$

Kelas Warna	1	2	3	4	5	Keterangan
1		✓	✓	✓	✓	Memenuhi definisi <i>b-coloring</i> , karena setiap kelas warna memiliki setidaknya satu titik bertetangga dengan semua kelas warna lainnya
2	✓		✓	✓	✓	Memenuhi definisi <i>b-coloring</i> , karena setiap kelas warna memiliki

					setidaknya satu titik bertetangga dengan semua kelas warna lainnya	
3	✓	✓		✓	✓	Memenuhi definisi <i>b-coloring</i> , karena setiap kelas warna memiliki setidaknya satu titik bertetangga dengan semua kelas warna lainnya
4	✓	✓	✓		✓	Memenuhi definisi <i>b-coloring</i> , karena setiap kelas warna memiliki setidaknya satu titik bertetangga dengan semua kelas warna lainnya
5	✓	✓	✓	✓		Memenuhi definisi <i>b-coloring</i> , karena setiap kelas warna memiliki setidaknya satu titik bertetangga dengan semua kelas warna lainnya

Berdasarkan Tabel 2.1 diatas, diperoleh kelompok kelas warna sebagai berikut:

1. Kelas warna $C_1 = \{x_{2,1}\}$
2. Kelas warna $C_2 = \{x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,4}\}$
3. Kelas warna $C_3 = \{x_{1,4}, x_{3,1}\}$
4. Kelas warna $C_4 = \{x_{1,3}, x_{2,4}, x_{3,3}\}$
5. Kelas warna $C_5 = \{x_{1,1}, x_{2,3}, x_{3,3}\}$

BAB 3. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Pada penelitian ini, jenis penelitian yang akan digunakan adalah penelitian eksploratif. Penelitian ini termasuk dalam penelitian eksploratif dikarenakan tujuan dari penelitian ini adalah untuk memperdalam pengetahuan, menemukan sesuatu hal baru yang ingin diketahui peneliti, dan mengkaji lebih dalam suatu permasalahan. Hasil dari penelitian ini dapat dijadikan sebagai gambaran dasar dari topik pembahasan, mengembangkan gagasan dan teori yang bersifat dapat diubah, serta membuka kemungkinan adanya penelitian lanjutan terkait topik bahasan.

3.2 Metode Penelitian

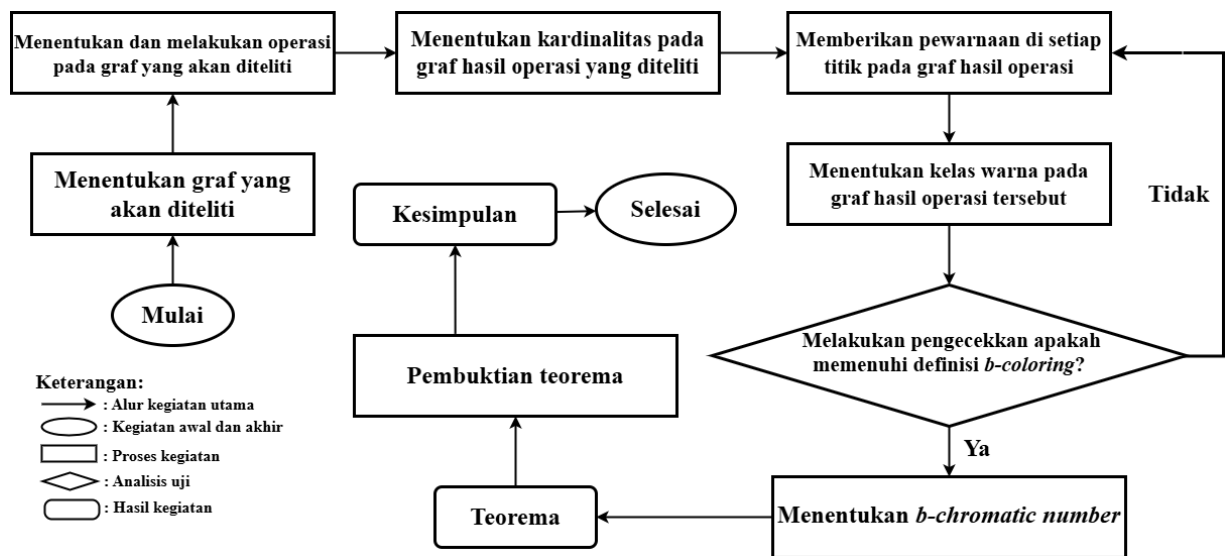
Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini ialah metode deduktif aksiomatik serta metode pengenalan pola (*pattern recognition*). Metode deduktif aksiomatik merupakan metode yang memakai prinsip-prinsip pembuktian deduktif (dari hal umum ke khusus) sesuai dengan logika matematika dengan menggunakan aksioma, teorema, dan lemma yang telah ada sebelumnya kemudian diterapkan pada *b-coloring* pada graf hasil operasi *comb* graf lintasan. Sedangkan metode pengenalan pola (*pattern recognition*) merupakan pendekatan yang digunakan untuk mengidentifikasi, mencari, serta menemukan pola *b-coloring* pada graf yang diteliti dan permasalahan yang akan diselesaikan. Penelitian ini nantinya akan diperoleh beberapa teorema *b-chromatic number* yang didapatkan dari hasil analisis lebih lanjut dari beberapa teorema atau definisi yang sudah ada sebelumnya.

3.3 Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian merupakan uraian mengenai tahapan sistematis yang dilakukan sebagai pedoman dalam melaksanakan penelitian untuk memperoleh data yang diteliti sehingga peneliti dapat memperoleh hasil sesuai dengan tujuan penelitian. Adapun prosedur penelitian yang akan dilakukan oleh penulis dalam menganalisis *b-coloring* pada graf hasil operasi *comb* graf lintasan diilustrasikan pada Gambar 3.1.

Alur prosedur dalam penelitian untuk menentukan *b-chromatic number* pada *b-coloring* graf hasil operasi *comb* graf lintasan adalah sebagai berikut:

1. Menentukan beberapa graf yang akan digunakan sebagai graf G antara lain graf Lintasan (P_n), graf Siklus (C_n), dan jenis-jenis dari keluarga graf Tangga (L_n) antara lain graf Tangga Miring (SL_n), graf Tangga Prisma (PTL_n), graf Tangga Permata (DL_n), dan graf Tangga Segitiga Pita (LSP_n). Adapun graf H yang digunakan yaitu graf Lintasan (P_n).
2. Menentukan operasi graf yang akan digunakan pada penelitian ini yaitu operasi $comb G \triangleright_o H$.
3. Mengkonstruksikan graf hasil operasi *comb* yang digunakan pada penelitian ini antara lain $P_n \triangleright_{v3} P_m$, $P_n \triangleright_{v1} C_m$, $C_n \triangleright_{v1} P_m$, $SL_n \triangleright_{v1} P_m$, $PTL_n \triangleright_{v1} P_m$, $DL_n \triangleright_{v1} P_m$, dan $LSP_n \triangleright_{v1} P_m$;
4. Menentukan kardinalitas pada graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$.
5. Memberikan pewarnaan di setiap titik pada graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$
6. Menentukan kelas warna pada graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$.
7. Melakukan pengecekan apakah sudah memenuhi syarat dari *b-coloring*, apabila belum memenuhi maka kembali ke tahap ke-5. Apabila sudah memenuhi definisi dari *b-coloring*, maka bisa dilanjutkan ke tahap selanjutnya;
8. Menentukan *b-chromatic number* yang merupakan bilangan terbesar yang dihasilkan melalui proses *b-coloring* pada graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$;
9. Memformulasikan rumus dari *b-chromatic number* graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$;
10. Merumuskan teorema terkait hasil dari *b-coloring* pada graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$;
11. Membuktikan kebenaran dari teorema yang diperoleh;
12. Mengulangi langkah ke-4 sampai ke-10 untuk graf $P_n \triangleright_{v1} C_m$, $C_n \triangleright_{v1} P_m$, $SL_n \triangleright_{v1} P_m$, $PTL_n \triangleright_{v1} P_m$, $DL_n \triangleright_{v1} P_m$, dan $LSP_n \triangleright_{v1} P_m$;
13. Menyimpulkan hasil dari penelitian;
14. Selesai.



Gambar 3.1 Prosedur Penelitian

3.4 Observasi Awal Penelitian

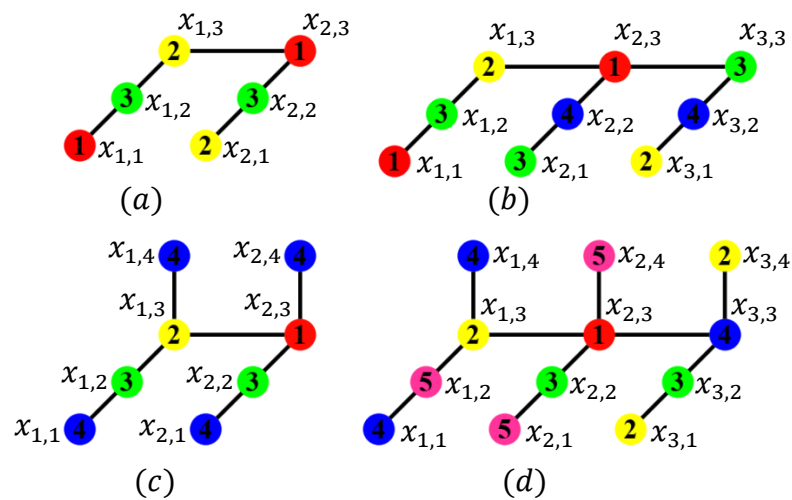
Sebelum melaksanakan penelitian ini, penulis menentukan graf yang akan diteliti. Kemudian melakukan observasi awal yaitu menentukan kardinalitas titik dan sisi yang digunakan untuk menentukan pola b -coloring pada graf hasil operasi $comb$ graf lintasan. Hal ini bertujuan untuk menentukan batasan permasalahan yang akan dibahas. Jenis-Jenis Graf yang akan diteliti adalah beberapa graf hasil operasi $comb$ graf lintasan yang dapat dilihat pada Lampiran 3.4 beserta kardinalitas dari setiap graf tersebut.

3.4.1 Contoh Observasi Awal

Sebelum melanjutkan melakukan penelitian pada graf yang akan diteliti, peneliti melakukan observasi awal pada salah satu graf yang akan diteliti yaitu graf Lintasan (P_n) $comb$ graf Lintasan (P_m) dengan titik pelekatan ke- v_3 yaitu $P_n \triangleright_{v_3} P_m$ dengan $n \leq 2$ dan $m \leq 3$. Hal ini dilakukan untuk menentukan b -coloring dan juga pola pewarnaan yang tepat. Setelah melakukan observasi awal, peneliti menemukan pola b -coloring pada salah satu graf yang diobservasi. Berikut langkah-langkah observasi awal:

1. Memilih graf yang akan diteliti yaitu graf Lintasan (P_n) *comb* graf Lintasan (P_m) titik pelekatan ke- v_3 yaitu $P_n \triangleright_{v_3} P_m$ dimulai dari $n \leq 2$ dan $m \leq 3$;
2. Dilanjutkan dengan melakukan pewarnaan di setiap titik pada graf $P_2 \triangleright_{v_3} P_3$ sesuai definisi *b-coloring*;
3. Kemudian menentukan kelas warna pada graf $P_2 \triangleright_{v_3} P_3$.
4. Memeriksa ulang hasil pewarnaan apakah sudah sesuai dengan syarat *b-coloring*;
5. Menentukan *b-chromatic number* dari graf $P_2 \triangleright_{v_3} P_3$ yang telah didapatkan.
6. Melakukan pewarnaan ulang seperti langkah 2 sampai 5 pada graf $P_n \triangleright_{v_3} P_m$ order lainnya;

Hasil observasi awal bilangan *b-coloring* pada graf $P_n \triangleright_{v_3} P_m$ dimulai dari $n \leq 2$ dan $m \leq 3$ dapat dilihat pada Gambar 3.2 berikut ini:



Gambar 3.2 Hasil Observasi *b-Coloring* Graf (a) $P_2 \triangleright_{v_3} P_3$, (b) $P_2 \triangleright_{v_3} P_4$, (c) $P_3 \triangleright_{v_3} P_3$, dan (d) $P_3 \triangleright_{v_3} P_4$

Berdasarkan langkah-langkah observasi awal yang telah dilakukan, penulis telah menemukan nilai *b-chromatic number* pada:

$$\text{graf } P_2 \triangleright_{v_3} P_3 \text{ yaitu } \varphi(P_2 \triangleright_{v_3} P_3) = 3;$$

graf $P_2 \triangleright_{v_3} P_4$ yaitu $\varphi(P_2 \triangleright_{v_3} P_4) = 4$;

graf $P_3 \triangleright_{v_3} P_3$ yaitu $\varphi(P_3 \triangleright_{v_3} P_3) = 4$;

graf $P_3 \triangleright_{v_3} P_4$ yaitu $\varphi(P_3 \triangleright_{v_3} P_4) = 5$;

Dari hasil observasi diatas berdasarkan tahapan-tahapan *b-coloring* yang telah dilakukan, selanjutnya ditemukan *b-chromatic number* dari graf $P_n \triangleright_{v_3} P_m$ dimulai dari $n \leq 2$ dan $m \leq 3$ yaitu

$$\varphi(P_n \triangleright_{v_3} P_m) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n = 2, m = 3 \\ 4, & \text{jika } n, m = 3 \\ & \text{jika } n = 2, m = 4 \\ 5, & \text{jika } n \geq 3, m \geq 4 \end{cases}$$

Sehingga peneliti dapat melanjutkan penelitian dalam menentukan *b-coloring* pada graf lain yang telah ditentukan hingga ekspansi ke- n dan ke- m . Observasi selanjutnya mengikuti tahapan yang telah dilakukan pada observasi awal untuk menentukan *b-chromatic number* pada graf hasil operasi *comb* graf lintasan antara lain $P_n \triangleright_{v_1} C_m$, $C_n \triangleright_{v_1} P_m$, $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$, $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$, $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$, dan $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$.

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan tentang hasil penelitian mengenai analisis *b-coloring* pada graf hasil operasi *comb* graf lintasan. Dalam penelitian ini akan dihasilkan teorema $\varphi(G)$ dengan melakukan pewarnaan titik sesuai ketentuan *b-coloring*. penelitian diawali dengan menentukan graf yang akan diteliti. Graf yang digunakan pada penelitian ini antara lain graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$ dengan $n \geq 2, m \geq 3$, graf $P_n \triangleright_{v1} C_m$ dengan $n, m \geq 6$, graf $C_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan $n \geq 3, m \geq 2$, graf $SL_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan $n, m \geq 2$, graf $PTL_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan $n \geq 4, m \geq 2$, graf $DL_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan $n, m \geq 2$, graf $LSP_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan $n, m \geq 3$. Penelitian dilanjutkan dengan menentukan kardinalitas himpunan titik dan himpunan sisi dari graf yang diteliti. Tahap selanjutnya yaitu memberikan warna pada setiap titik sesuai ketentuan *b-coloring*. Apabila telah memenuhi ketentuan *b-coloring*, langkah selanjutnya adalah menentukan *b-chromatic number*. Kemudian menyusun fungsi pewarnaan titik.

4.1 Hasil Penelitian *b-Coloring*

Pada penelitian ini didapatkan tujuh teorema *b-chromatic number* yang diperoleh melalui eksperimental mengenai *b-coloring* graf hasil operasi *comb*. Penyajian dalam penelitian ini yaitu diawali dengan pernyataan teorema $\varphi(G)$, kemudian dilanjutkan dengan pembuktian teorema disertai gambar ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran teorema. Berikut ini teorema yang dihasilkan dalam penelitian ini antara lain:

Observasi 4.1. *Bilangan kromatik pada graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$ untuk $n \geq 2, m \geq 3$ adalah*

$$\chi(P_n \triangleright_{v3} P_m) = 2$$

Teorema 4.1. *b -Chromatic number pada graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$ untuk $n \geq 2, m \geq 3$ adalah*

$$\varphi(P_n \triangleright_{v3} P_m) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n = 2, m = 3 \\ 4, & \text{jika } n, m = 3 \\ & \text{jika } n = 2, m = 4 \\ 5, & \text{jika } n \geq 3, m \geq 4 \end{cases}$$

Bukti: Graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$ memiliki himpunan titik yaitu $V(P_n \triangleright_{v3} P_m) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \triangleright_{v3} P_m) = \{x_{i,3}x_{i+1,3}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m - 1\}$. Kardinallitas dari himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$ adalah $|V(P_n \triangleright_{v3} P_m)| = nm$ dan $|E(P_n \triangleright_{v3} P_m)| = nm - 1$. Dianalisis batas atas *b-chromatic number* dari graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$ dengan $n \geq 2, m \geq 3$ untuk menentukan *b-chromatic number* dari graf tersebut.

Berdasarkan Definisi 2.6.1 dan Lemma 2.6.1, diperoleh $\chi(P_n \triangleright_{v3} P_m) \leq \varphi(P_n \triangleright_{v3} P_m) \leq \Delta(P_n \triangleright_{v3} P_m) + 1$. Maka menurut definisi *b-chromatic number* pembuktian ini akan dibagi menjadi empat kasus.

Kasus 1: untuk $n = 2$ dan $m = 3$ terdapat pada Lampiran 4.1.

Kasus 2: untuk $n, m = 3$ terdapat pada Lampiran 4.1.

Kasus 3: untuk $n = 2$ dan $m = 4$ terdapat pada Lampiran 4.1.

Kasus 4: untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 4$

Akan ditunjukkan fungsi pewarnaan $f: V(P_n \triangleright_{v3} P_m) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ untuk setiap titik pada graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$ dengan $n \geq 3, m \geq 4$:

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3} \\ 2, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3} \\ & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3} \\ 3, & \text{jika } i \equiv 0, 2 \pmod{3}, j \equiv 2 \pmod{3} \\ 4, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3} \\ & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3} \\ 5, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3} \\ & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 2.5.2 dan fungsi titik, diperoleh lima kelas warna pada graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 4$ yaitu $C_1 = \{x_{i,j} | i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3}\}$, $C_2 = \{x_{i,j} | 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3}; 1 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3}\}$, $C_3 = \{x_{i,j} | i \equiv 0, 2 \pmod{3}, j \equiv 2 \pmod{3}\}$, $C_4 = \{x_{i,j} | i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3}; i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3}\}$, dan $C_5 = \{x_{i,j} | i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3}; i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 2 \pmod{3}\}$.

Ada $x_{2,3} \in C_1$ dan $x_{1,3} \in C_2$, $x_{2,2} \in C_3$, $x_{3,3} \in C_4$, $x_{2,4} \in C_5$ sehingga $x_{2,3}x_{1,3}, x_{2,3}x_{2,2}, x_{2,3}x_{3,3}, x_{2,3}x_{2,4} \in E(P_n \triangleright_{v_3} P_m)$. Ada $x_{1,3}, x_{3,1} \in C_2$ dan $x_{3,2} \in C_3$, $x_{1,4} \in C_4$, $x_{1,2} \in C_5$ sehingga $x_{3,1}x_{3,2}, x_{1,3}x_{1,4}, x_{1,3}x_{1,2} \in E(P_n \triangleright_{v_3} P_m)$. Ada $x_{2,2}, x_{3,2} \in C_3$, $x_{3,3} \in C_4$, $x_{2,1} \in C_5$ sehingga $x_{3,2}x_{3,3}, x_{2,2}x_{2,1} \in E(P_n \triangleright_{v_3} P_m)$. Ada $x_{1,1} \in C_4$ dan $x_{1,2} \in C_5$ sehingga $x_{1,1}x_{1,2} \in E(P_n \triangleright_{v_3} P_m)$.

Berdasarkan kelas warna tersebut maka graf $P_n \triangleright_{v_3} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 4$ memenuhi definisi *b-coloring*. Selanjutnya akan dicari untuk *b-chromatic number* pada graf $P_n \triangleright_{v_3} P_m$ dengan $n \geq 3, m \geq 4$.

- Akan dibuktikan bahwa bahwa $\chi(P_n \triangleright_{v_3} P_m) = 2$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $P_n \triangleright_{v_3} P_m$. Asumsikan bahwa $\varphi(P_n \triangleright_{v_3} P_m) = 5$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$2 = \chi(P_n \triangleright_{v_3} P_m) \leq \varphi(P_n \triangleright_{v_3} P_m) = 5 \quad (4.1.4)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.1.4, terbukti bahwa $\chi(P_n \triangleright_{v_3} P_m) = 2$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $P_n \triangleright_{v_3} P_m$.

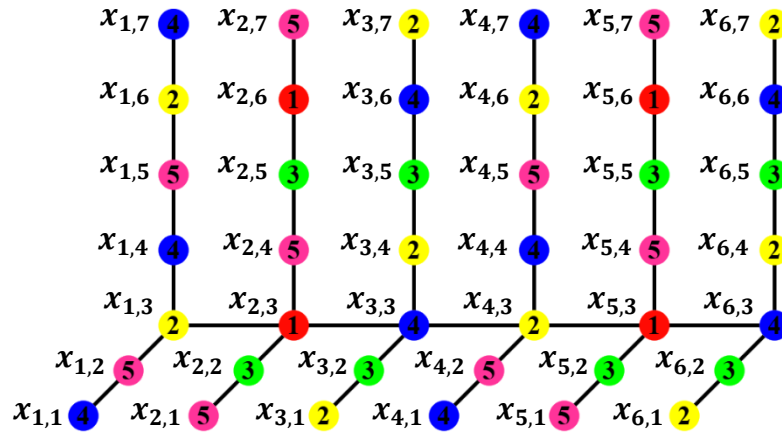
Terdapat titik-titik yang berderajat 4, sehingga :

- Akan dibuktikan bahwa $\varphi(P_n \triangleright_{v_3} P_m) = 5$ untuk $n \geq 3, m \geq 4$ dan $\Delta(P_n \triangleright_{v_3} P_m) + 1$ merupakan batas atas dari *b-chromatic number* graf $P_n \triangleright_{v_3} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 4$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \varphi(P_n \triangleright_{v_3} P_m) &\leq \Delta(P_n \triangleright_{v_3} P_m) + 1 \\ \varphi(P_n \triangleright_{v_3} P_m) &\leq 4 + 1 \\ \varphi(P_n \triangleright_{v_3} P_m) &\leq 5 \end{aligned} \quad (4.1.4.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.1.4.1, diperoleh $\varphi(P_n \triangleright_{v_3} P_m) \leq 5$. Menurut definisi *b-chromatic number*, nilai *b-chromatic number* diperoleh dari nilai maksimum pada kelas warna graf $P_n \triangleright_{v_3} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 4$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\varphi(P_n \triangleright_{v_3} P_m) = 5$, maka terbukti . ■

Ilustrasi *b-coloring* dari graf $P_n \triangleright_{v_3} P_m$ untuk $n \geq 2, m \geq 3$ dapat dilihat pada Gambar 4.1 berikut ini.

Gambar 4.1 b -Coloring pada Graf $P_6 \triangleright_{v_3} P_7$

Observasi 4.2. Bilangan kromatik pada graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$ untuk $n, m \geq 6$ adalah

$$\chi(P_n \triangleright_{v_1} C_m) = 2$$

Teorema 4.2. b -Chromatic number pada graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$ untuk $n, m \geq 6$ adalah

$$\varphi(P_n \triangleright_{v_1} C_m) = 5$$

Bukti: Graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$ memiliki himpunan titik, yaitu $V(P_n \triangleright_{v_1} C_m) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(P_n \triangleright_{v_1} C_m) = \{x_{i,1}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{i,m}x_{i,1}; 1 \leq i \leq n\}$. Kardinalitas dari himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$ adalah $|V(P_n \triangleright_{v_1} C_m)| = nm$ dan $|E(P_n \triangleright_{v_1} C_m)| = nm + n - 1$. Dianalisis batas atas b -chromatic number dari graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$ dengan $n, m \geq 6$ untuk menentukan b -chromatic number dari graf tersebut.

Berdasarkan Definisi 2.6.1 dan Lemma 2.6.1, diperoleh $\chi(P_n \triangleright_{v_1} C_m) \leq \varphi(P_n \triangleright_{v_1} C_m) \leq \Delta(P_n \triangleright_{v_1} C_m) + 1$. Maka menurut definisi b -chromatic number berikut pembuktian untuk $n, m \geq 6$.

Akan ditunjukkan fungsi pewarnaan $f: V(P_n \triangleright_{v_1} C_m) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ untuk setiap titik pada graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$ dengan $n, m \geq 6$:

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{5}, j \equiv 1, 5 \pmod{6} \\ & \text{jika } i \equiv 3 \pmod{5}, j \equiv 2, 4 \pmod{6} \\ & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{5}, j \equiv 0, 3 \pmod{6} \\ 2, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{5}, j \equiv 2, 4 \pmod{6} \\ & \text{jika } i \equiv 4 \pmod{5}, j \equiv 0, 3 \pmod{6} \\ & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{5}, j \equiv 1, 5 \pmod{6} \\ 3, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{5}, j \equiv 2, 4 \pmod{6} \\ & \text{jika } i \equiv 3 \pmod{5}, j \equiv 0, 3 \pmod{6} \\ & \text{jika } i \equiv 4 \pmod{5}, j \equiv 1, 5 \pmod{6} \\ 4, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{5}, j \equiv 0, 3 \pmod{6} \\ & \text{jika } i \equiv 3 \pmod{5}, j \equiv 1, 5 \pmod{6} \\ & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{5}, j \equiv 2, 4 \pmod{6} \\ 5, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{5}, j \equiv 0, 3 \pmod{6} \\ & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{5}, j \equiv 1, 5 \pmod{6} \\ & \text{jika } i \equiv 4 \pmod{5}, j \equiv 2, 4 \pmod{6} \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 2.5.2 dan fungsi titik, diperoleh lima kelas warna pada graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$ untuk $n, m \geq 6$ yaitu $C_1 = \{x_{i,j} | i \equiv 1 \pmod{5}, j \equiv 1, 5 \pmod{6}; i \equiv 3 \pmod{5}, j \equiv 2, 4 \pmod{6}; i \equiv 0 \pmod{5}, j \equiv 0, 3 \pmod{6}\}$, $C_2 = \{x_{i,j} | i \equiv 2 \pmod{5}, j \equiv 2, 4 \pmod{6}; i \equiv 4 \pmod{5}, j \equiv 0, 3 \pmod{6}; i \equiv 0 \pmod{5}, j \equiv 1, 5 \pmod{6}\}$, $C_3 = \{x_{i,j} | i \equiv 1 \pmod{5}, j \equiv 2, 4 \pmod{6}; i \equiv 3 \pmod{5}, j \equiv 0, 3 \pmod{6}; i \equiv 4 \pmod{5}, j \equiv 1, 5 \pmod{6}\}$, $C_4 = \{x_{i,j} | i \equiv 2 \pmod{5}, j \equiv 0, 3 \pmod{6}; i \equiv 3 \pmod{5}, j \equiv 1, 5 \pmod{6}; i \equiv 0 \pmod{5}, j \equiv 2, 4 \pmod{6}\}$, dan $C_5 = \{x_{i,j} | i \equiv 1 \pmod{5}, j \equiv 0, 3 \pmod{6}; i \equiv 2 \pmod{5}, j \equiv 1, 5 \pmod{6}; i \equiv 4 \pmod{5}, j \equiv 2, 4 \pmod{6}\}$.

Ada $x_{6,1}, x_{1,1}, x_{3,2} \in C_1$ dan $x_{5,1} \in C_2$, $x_{1,2} \in C_3$, $x_{3,1} \in C_4$, $x_{2,1} \in C_5$ sehingga $x_{6,1}x_{5,1}, x_{1,1}x_{1,2}, x_{3,2}x_{3,1}, x_{1,1}x_{2,1} \in E(P_n \triangleright_{v_1} C_m)$. Ada $x_{5,1}, x_{2,2} \in C_2$ dan $x_{4,1} \in C_3$, $x_{5,2} \in C_4$, $x_{2,1} \in C_5$ sehingga $x_{5,1}x_{4,1}, x_{5,1}x_{5,2}, x_{2,2}x_{2,1} \in E(P_n \triangleright_{v_1} C_m)$. Ada $x_{4,1} \in C_3$ dan $x_{3,1} \in C_4$, $x_{4,2} \in C_5$ sehingga $x_{4,1}x_{3,1}, x_{4,1}x_{4,2} \in E(P_n \triangleright_{v_1} C_m)$. Ada $x_{3,1} \in C_4$ dan $x_{2,1} \in C_5$ sehingga $x_{3,1}x_{2,1} \in E(P_n \triangleright_{v_1} C_m)$.

Berdasarkan kelas warna tersebut maka graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$ untuk $n, m \geq 6$ memenuhi definisi *b-coloring*. Selanjutnya akan dicari untuk *b-chromatic number* pada graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$ dengan $n, m \geq 6$.

- Akan dibuktikan bahwa $\chi(P_n \triangleright_{v_1} C_m) = 2$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$. Asumsikan bahwa $\varphi(P_n \triangleright_{v_1} C_m) = 5$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$2 = \chi(P_n \triangleright_{v_1} C_m) \leq \varphi(P_n \triangleright_{v_1} C_m) = 5 \quad (4.2.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.2.1, terbukti bahwa $\chi(P_n \triangleright_{v_1} C_m) = 2$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$.

Terdapat titik-titik yang berderajat 4, sehingga :

- Akan dibuktikan bahwa $\varphi(P_n \triangleright_{v_1} C_m) = 5$ untuk $n, m \geq 6$ dan $\Delta(P_n \triangleright_{v_1} C_m) + 1$ merupakan batas atas dari *b-chromatic number* graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$ untuk $n, m \geq 6$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

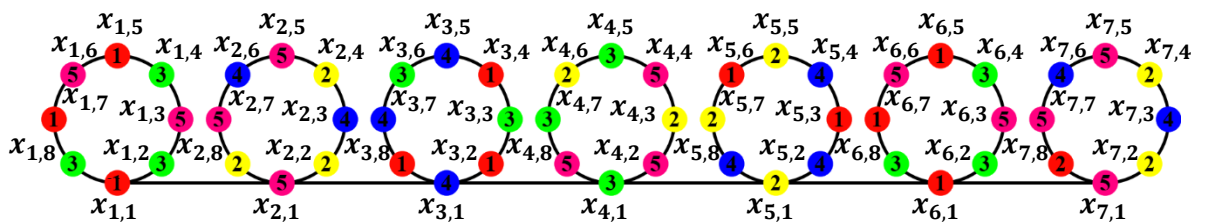
$$\varphi(P_n \triangleright_{v_1} C_m) \leq \Delta(P_n \triangleright_{v_1} C_m) + 1$$

$$\varphi(P_n \triangleright_{v_1} C_m) \leq 4 + 1$$

$$\varphi(P_n \triangleright_{v_1} C_m) \leq 5 \quad (4.2.1.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.2.1.1, diperoleh $\varphi(P_n \triangleright_{v_1} C_m) \leq 5$. Menurut definisi *b-chromatic number*, nilai *b-chromatic number* diperoleh dari nilai maksimum pada kelas warna graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$ untuk $n, m \geq 6$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\varphi(P_n \triangleright_{v_1} C_m) = 5$, maka terbukti. ■

Ilustrasi *b-coloring* dari graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$ untuk $n, m \geq 6$ dapat dilihat pada Gambar 4.2 berikut ini.



Gambar 4.2 *b-Coloring* pada Graf $P_7 \triangleright_{v_1} C_8$

Observasi 4.3. *Bilangan kromatik pada graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 3$ adalah*

$$\chi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = \begin{cases} 2, & \text{jika } n \text{ genap} \\ 3, & \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Teorema 4.3. *b-Chromatic number pada graf $C_n \triangleright_{v1} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$ adalah*

$$\varphi(C_n \triangleright_{v1} P_m) = 4$$

Bukti: Graf $C_n \triangleright_{v1} P_m$ memiliki himpunan titik, yaitu $V(C_n \triangleright_{v1} P_m) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(C_n \triangleright_{v1} P_m) = \{x_{i,1}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_{n,1}x_{1,1}\}$. Kardinallitas dari himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $C_n \triangleright_{v1} P_m$ adalah $|V(C_n \triangleright_{v1} P_m)| = nm$ dan $|E(C_n \triangleright_{v1} P_m)| = m + (n - 1)m$. Dianalisis batas atas *b-chromatic number* dari graf $C_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan $n \geq 3, m \geq 2$ untuk menentukan *b-chromatic number* dari graf tersebut.

Berdasarkan Definisi 2.6.1 dan Lemma 2.6.1, diperoleh $\chi(C_n \triangleright_{v1} P_m) \leq \varphi(C_n \triangleright_{v1} P_m) \leq \Delta(C_n \triangleright_{v1} P_m) + 1$. Maka menurut definisi *b-chromatic number* berikut pembuktian untuk $n \geq 3, m \geq 2$ akan dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1: untuk n ganjil

Akan ditunjukkan fungsi pewarnaan $f: V(C_n \triangleright_{v1} P_m) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ untuk setiap titik pada graf $C_n \triangleright_{v1} P_m$ dengan n ganjil $\geq 3, m \geq 2$:

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 2, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 3, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 4, & \text{jika } i \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 2.5.2 dan fungsi titik, diperoleh empat kelas warna pada graf $C_n \triangleright_{v1} P_m$ untuk n ganjil $\geq 3, m \geq 2$ yaitu $C_1 = \{x_{i,j} | i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2}\}$, $C_2 = \{x_{i,j} | i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2}\}$, $C_3 = \{x_{i,j} | i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2}\}$, dan $C_4 = \{x_{i,j} | i \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2}\}$.

Ada $x_{1,1}, x_{4,1} \in C_1$ dan $x_{3,1} \in C_2$, $x_{2,1} \in C_3$, $x_{1,2} \in C_4$ sehingga $x_{1,1}x_{3,1}, x_{4,1}x_{2,1}, x_{1,1}x_{1,2} \in E(C_n \triangleright_{v1} P_m)$. Ada $x_{3,1} \in C_2$ dan $x_{2,1} \in C_3$, $x_{3,2} \in C_4$ sehingga $x_{3,1}x_{2,1}, x_{3,1}x_{3,2} \in E(C_n \triangleright_{v1} P_m)$. Ada $x_{2,1} \in C_3$ dan $x_{2,2} \in C_4$ sehingga $x_{2,1}x_{2,2} \in E(C_n \triangleright_{v1} P_m)$.

Berdasarkan kelas warna tersebut maka graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \text{ ganjal} \geq 3, m \geq 2$ memenuhi definisi *b-coloring*. Selanjutnya akan dicari untuk *b-chromatic number* pada graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n \text{ ganjal} \geq 3, m \geq 2$.

- Akan dibuktikan bahwa $\chi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = 3$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$. Asumsikan bahwa $\varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = 4$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$3 = \chi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq \varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = 4 \quad (4.3.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.3.1, terbukti bahwa $\chi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = 3$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$.

Terdapat titik-titik yang berderajat 3, sehingga :

- Akan dibuktikan bahwa $\varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = 4$ untuk $n \text{ ganjal} \geq 3, m \geq 2$ dan $\Delta(C_n \triangleright_{v_1} P_m) + 1$ merupakan batas atas dari *b-chromatic number* graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \text{ ganjal} \geq 3, m \geq 2$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) &\leq \Delta(C_n \triangleright_{v_1} P_m) + 1 \\ \varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) &\leq 3 + 1 \\ \varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) &\leq 4 \end{aligned} \quad (4.3.1.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.3.1.1, diperoleh $\varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq 4$. Menurut definisi *b-chromatic number*, nilai *b-chromatic number* diperoleh dari nilai maksimum pada kelas warna graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \text{ ganjal} \geq 3, m \geq 2$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = 4$, maka terbukti bahwa $\varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = 4$. ■

Kasus 2: untuk n genap terdapat pada Lampiran 4.3.

Ilustrasi *b-coloring* dari graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$ dapat dilihat pada Lampiran 4.3.

Observasi 4.4. *Bilangan kromatik pada graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 4$ adalah*

$$\chi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 2$$

Teorema 4.4. *b-Chromatic number pada graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n, m \geq 2$ adalah*

$$\varphi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \begin{cases} 4, & \text{jika } n = 2, m \geq 2 \\ 5, & \text{jika } n \geq 3, m \geq 2 \end{cases}$$

Bukti: Graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$ memiliki himpunan titik, yaitu $V(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{x_{i,1}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{i,1}y_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i+1,1}y_{i,1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Kardinalitas dari himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$ adalah $|V(SL_n \triangleright_{v_1} P_m)| = 2nm$ dan $|E(SL_n \triangleright_{v_1} P_m)| = 2nm + 2$. Dianalisis batas atas *b-chromatic number* dari graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n, m \geq 2$ untuk menentukan *b-chromatic number* dari graf tersebut.

Berdasarkan Definisi 2.6.1 dan Lemma 2.6.1, diperoleh $\chi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq \varphi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq \Delta(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) + 1$. Maka menurut definisi *b-chromatic number* berikut pembuktian untuk $n, m \geq 2$ akan dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1: untuk $n = 2$ dan $m \geq 2$ terdapat pada Lampiran 4.4.

Kasus 2: untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$

Akan ditunjukkan fungsi pewarnaan $f: V(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ untuk setiap titik pada graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n \geq 3, m \geq 2$:

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 2, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 3, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 4, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 5, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$$f(y_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 2, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 3, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 4, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 5, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 2.5.2 dan fungsi titik, diperoleh lima kelas warna pada graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$ yaitu $C_1 = \{x_{i,j} | i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv$

$1 \pmod 2\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 1 \pmod 3, j \equiv 0 \pmod 2\}$, $C_2 = \{x_{i,j} | i \equiv 1 \pmod 3, j \equiv 0 \pmod 2\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 1 \pmod 3, j \equiv 1 \pmod 2; i \equiv 0 \pmod 3, j \equiv 0 \pmod 2\}$, $C_3 = \{x_{i,j} | i \equiv 1 \pmod 3, j \equiv 1 \pmod 2; i \equiv 0 \pmod 3, j \equiv 0 \pmod 2\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 2 \pmod 3, j \equiv 0 \pmod 2\}$, $C_4 = \{x_{i,j} | i \equiv 2 \pmod 3, j \equiv 0 \pmod 2\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 2 \pmod 3, j \equiv 1 \pmod 2\}$, dan $C_5 = \{x_{i,j} | i \equiv 0 \pmod 3, j \equiv 1 \pmod 2\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 0 \pmod 3, j \equiv 1 \pmod 2\}$.

Ada $x_{2,1} \in C_1$ dan $y_{1,1} \in C_2$, $x_{1,1} \in C_3$, $y_{2,1} \in C_4$, $x_{3,1} \in C_5$ sehingga $x_{2,1}y_{1,1}, x_{2,1}x_{1,1}, x_{2,1}y_{2,1}, x_{2,1}x_{3,1} \in E(SL_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $x_{1,2}, y_{1,1}, y_{3,2} \in C_2$ dan $x_{1,1} \in C_3$, $y_{2,1} \in C_4$, $y_{3,1} \in C_5$ sehingga $x_{1,2}x_{1,1}, y_{1,1}y_{2,1}, y_{3,2}y_{3,1} \in E(SL_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $x_{3,2}, y_{2,2} \in C_3$ dan $y_{2,1} \in C_4$, $x_{3,1} \in C_5$ sehingga $y_{2,2}y_{2,1}, x_{3,2}x_{3,1} \in E(SL_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $y_{2,1} \in C_4$ dan $y_{3,1} \in C_5$ sehingga $y_{2,1}y_{3,1} \in E(SL_n \triangleright_{v_1} P_m)$.

Berdasarkan kelas warna tersebut maka graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$ memenuhi definisi *b-coloring*. Selanjutnya akan dicari untuk *b-chromatic number* pada graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n \geq 3, m \geq 2$.

- Akan dibuktikan bahwa $\chi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 2$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$. Asumsikan bahwa $\varphi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 5$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$2 = \chi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq \varphi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 5 \quad (4.4.2)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.4.2, terbukti bahwa $\chi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 2$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$.

Terdapat titik-titik yang berderajat 4, sehingga :

- Akan dibuktikan bahwa $\varphi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 5$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$ dan $\Delta(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) + 1$ merupakan batas atas dari *b-chromatic number* graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

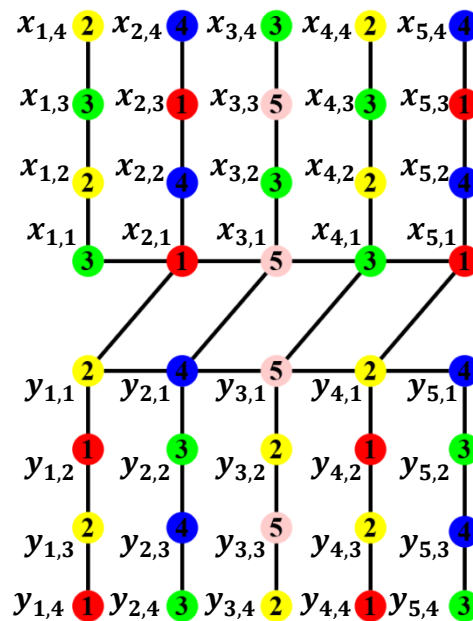
$$\varphi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq \Delta(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) + 1$$

$$\varphi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq 4 + 1$$

$$\varphi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq 5 \quad (4.4.2.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.4.2.1, diperoleh $\varphi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq 5$. Menurut definisi *b-chromatic number*, nilai *b-chromatic number* diperoleh dari nilai maksimum pada kelas warna graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\varphi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 5$, maka terbukti bahwa $\varphi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 5$. ■

Ilustrasi *b-coloring* dari graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$ dapat dilihat pada Gambar 4.3 berikut ini.



Gambar 4.3 *b-Coloring* pada Graf $SL_5 \triangleright_{v_1} P_4$

Observasi 4.5. Bilangan kromatik pada graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 4$ adalah

$$\chi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 3$$

Teorema 4.5. *b-Chromatic number* pada graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 4, m \geq 2$ adalah

$$\varphi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 6$$

Bukti: Graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$ memiliki himpunan titik, yaitu $V(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{x_{i,1}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{i,1}y_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup$

$\{x_{i,1}y_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,1}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Kardinallitas dari himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$ adalah $|V(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m)| = (2n - 1)m$ dan $|E(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m)| = 6n - m - 4$. Dianalisis batas atas *b-chromatic number* dari graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n \geq 4, m \geq 2$ untuk menentukan *b-chromatic number* dari graf tersebut.

Berdasarkan Definisi 2.6.1 dan Lemma 2.6.1, diperoleh $\chi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq \varphi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq \Delta(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) + 1$. Maka menurut definisi *b-chromatic number* berikut pembuktian untuk $n \geq 4, m \geq 2$.

Akan ditunjukkan fungsi pewarnaan $f: V(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ untuk setiap titik pada graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n \geq 4, m \geq 2$:

$$f(x_{i,j}) \begin{cases} 2, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 3, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 4, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 5, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 6, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$$f(y_{i,j}) \begin{cases} 1, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 3, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 4, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 5, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 6, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 2.5.2 dan fungsi titik, diperoleh 6 kelas warna pada graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 4, m \geq 2$ yaitu $C_1 = \{y_{i,j} | i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2}\}$, $C_2 = \{x_{i,j} | i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2}\}$, $C_3 = \{x_{i,j} | i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2}; i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2}\}$, $C_4 = \{x_{i,j} | i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2}; i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2}\}$, $C_5 = \{x_{i,j} | i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2}\}$, dan $C_6 = \{x_{i,j} | i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2}\}$.

Ada $y_{2,1} \in C_1$ dan $x_{3,1} \in C_2$, $x_{2,1} \in C_3$, $y_{3,1} \in C_4$, $y_{1,1} \in C_5$, $y_{2,2} \in C_6$ sehingga $y_{2,1}x_{3,1}, y_{2,1}x_{2,1}, y_{2,1}y_{3,1}, y_{2,1}y_{1,1}, y_{2,1}y_{2,2} \in E(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada

$x_{3,1} \in C_2$ dan $x_{2,1} \in C_3$, $y_{3,1} \in C_4$, $x_{3,2} \in C_5$, $x_{4,1} \in C_6$ sehingga $x_{3,1}x_{2,1}, x_{3,1}y_{3,1}, x_{3,1}x_{3,2}, x_{3,1}x_{4,1} \in E(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $x_{2,1}, x_{4,2} \in C_3$ dan $x_{2,2} \in C_4$, $y_{1,1} \in C_5$, $x_{4,1} \in C_6$ sehingga $x_{2,1}x_{2,2}, x_{2,1}y_{1,1}, x_{4,2}x_{4,1} \in E(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $y_{3,1} \in C_4$ dan $y_{4,1} \in C_5$, $x_{4,1} \in C_6$ sehingga $y_{3,1}y_{4,1}, y_{3,1}x_{4,1} \in E(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $y_{4,1} \in C_5$ dan $x_{4,1} \in C_6$ sehingga $y_{4,1}x_{4,1} \in E(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m)$.

Berdasarkan kelas warna tersebut maka graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 4, m \geq 2$ memenuhi definisi *b-coloring*. Selanjutnya akan dicari untuk *b-chromatic number* pada graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n \geq 4, m \geq 2$.

- Akan dibuktikan bahwa $\chi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 3$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$. Asumsikan bahwa $\varphi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 6$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$3 = \chi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq \varphi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 6 \quad (4.5.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.5.1, terbukti bahwa $\chi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 3$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$.

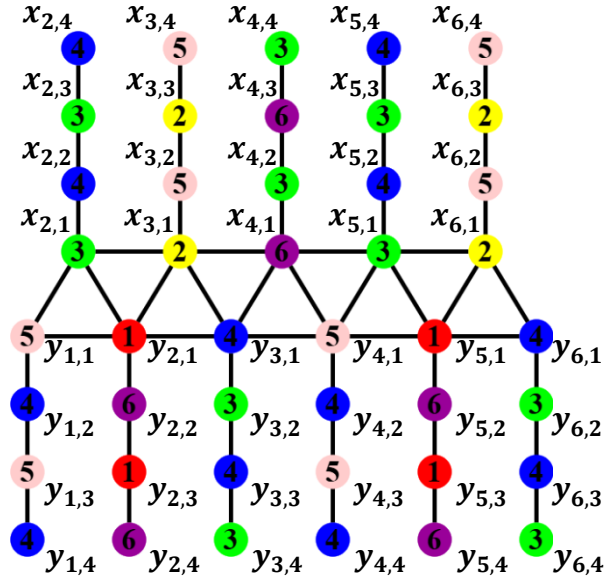
Terdapat titik-titik yang berderajat 5, sehingga :

- Akan dibuktikan bahwa $\varphi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 6$ untuk $n \geq 4, m \geq 2$ dan $\Delta(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) + 1$ merupakan batas atas dari *b-chromatic number* graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 4, m \geq 2$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \varphi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) &\leq \Delta(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) + 1 \\ \varphi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) &\leq 5 + 1 \\ \varphi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) &\leq 6 \end{aligned} \quad (4.5.1.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.5.1.1, diperoleh $\varphi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq 6$. Menurut definisi *b-chromatic number*, nilai *b-chromatic number* diperoleh dari nilai maksimum pada kelas warna graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 4, m \geq 2$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\varphi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 6$, maka terbukti bahwa $\varphi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 6$. ■

Ilustrasi b -coloring dari graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 4, m \geq 2$ dapat dilihat pada Gambar 4.4 berikut ini.



Gambar 4.4 b -Coloring pada Graf $PTL_6 \triangleright_{v_1} P_4$

Observasi 4.6. Bilangan kromatik pada graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n, m \geq 2$ adalah

$$\chi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 3$$

Teorema 4.6. b -Chromatic number pada graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n, m \geq 2$ adalah

$$\varphi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \begin{cases} 6, & \text{jika } n = 2, m \geq 2 \\ 7, & \text{jika } n \geq 3, m \geq 2 \end{cases}$$

Bukti: Graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$ memiliki himpunan titik, yaitu $V(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) =$

$$\begin{aligned} & \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{z_{i,j}; 1 \leq i \leq \\ & 2n, 1 \leq j \leq 2m\} \text{ dan himpunan sisi } E(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{x_{i,1}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n - \\ & 1\} \cup \{x_{i,1}y_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,1}z_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,1}z_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \\ & \{y_{i,1}y_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_{i,1}z_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,1}z_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \\ & \{z_{i,1}z_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \\ & \{y_{i,j}y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{z_{i,j}z_{i,j+1}; 1 \leq i \leq 2n; 1 \leq j \leq m - 1\}. \end{aligned}$$

Kardinalitas dari himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$ adalah

$$|V(DL_n \triangleright_{v_1} P_m)| = 4nm \quad \text{dan} \quad |E(DL_n \triangleright_{v_1} P_m)| = 4n(m - 1) + 8n - 3.$$

Dianalisis batas atas *b-chromatic number* dari graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n, m \geq 2$ untuk menentukan *b-chromatic number* dari graf tersebut.

Berdasarkan Definisi 2.6.1 dan Lemma 2.6.1, diperoleh $\chi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq \varphi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq \Delta(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) + 1$. Maka menurut definisi *b-chromatic number* berikut pembuktian untuk $n, m \geq 2$ akan dibagi menjadi dua kasus.

Kasus 1: untuk $n = 2$ dan $m \geq 2$ terdapat pada Lampiran 4.6.

Kasus 2: untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$

Akan ditunjukkan fungsi pewarnaan $f: V(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ untuk setiap titik pada graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n \geq 3, m \geq 2$:

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 2, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 3, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 6, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 7, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

$$f(y_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{2}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 3, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{2}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 6, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{2}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 7, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{2}, j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$$f(z_{i,j}) = \begin{cases} 4, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{2}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{2}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 5, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{2}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{2}, j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 2.5.2 dan fungsi titik, diperoleh enam kelas warna pada graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$ yaitu $C_1 = \{x_{i,j} | i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 1 \pmod{2}, j \equiv 0 \pmod{2}\}$, $C_2 = \{x_{i,j} | i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2}; i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2}\}$, $C_3 = \{z_{i,j} | i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 0 \pmod{2}, j \equiv 0 \pmod{2}\}$, $C_4 = \{z_{i,j} | i \equiv 1 \pmod{2}, j \equiv 1 \pmod{2}; i \equiv 0 \pmod{2}, j \equiv 0 \pmod{2}\}$, $C_5 = \{z_{i,j} | i \equiv 1 \pmod{2}, j \equiv 0 \pmod{2}; i \equiv 0 \pmod{2}, j \equiv 1 \pmod{2}\}$, $C_6 = \{x_{i,j} | i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 0 \pmod{2}, j \equiv 1 \pmod{2}\}$, dan $C_7 = \{x_{i,j} | i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{2}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 1 \pmod{2}, j \equiv 1 \pmod{2}\}$.

Ada $x_{2,1} \in C_1$ dan $x_{1,1} \in C_2$, $x_{3,1} \in C_3$, $z_{3,1} \in C_4$, $z_{4,1} \in C_5$, $y_{2,1} \in C_6$, $x_{2,2} \in C_7$ sehingga $x_{2,1}x_{1,1}, x_{2,1}x_{3,1}, x_{2,1}z_{3,1}, x_{2,1}z_{4,1}, x_{2,1}y_{2,1}, x_{2,1}x_{2,2} \in E(DL_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $x_{1,1}, x_{3,2} \in C_2$ dan $x_{3,1} \in C_3$, $z_{1,1} \in C_4$, $z_{2,1} \in C_5$, $x_{1,2} \in C_6$, $y_{1,1} \in C_7$ sehingga $x_{3,2}x_{3,1}, x_{1,1}z_{1,1}, x_{1,1}z_{2,1}, x_{1,1}x_{1,2}, x_{1,1}y_{1,1} \in E(DL_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $x_{3,1}, y_{2,2} \in C_3$ dan $z_{5,1} \in C_4$, $z_{6,1} \in C_5$, $y_{2,1} \in C_6$, $y_{3,1} \in C_7$ sehingga $x_{3,1}z_{5,1}, x_{3,1}z_{6,1}, y_{2,2}y_{2,1}, x_{3,1}y_{3,1} \in E(DL_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $z_{1,1}, z_{3,1} \in C_4$ dan $z_{2,1} \in C_5$, $y_{2,1} \in C_6$, $y_{1,1} \in C_7$ sehingga $z_{3,1}z_{2,1}, z_{3,1}y_{2,1}, z_{1,1}y_{1,1} \in E(DL_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $z_{2,1}, z_{4,1} \in C_5$ dan $y_{2,1} \in C_6$, $y_{1,1} \in C_7$ sehingga $z_{4,1}y_{2,1}, z_{2,1}y_{1,1} \in E(DL_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $y_{2,1} \in C_6$ dan $y_{1,1} \in C_7$ sehingga $y_{2,1}y_{1,1} \in E(DL_n \triangleright_{v_1} P_m)$.

Berdasarkan kelas warna tersebut maka graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$ memenuhi definisi *b-coloring*. Selanjutnya akan dicari untuk *b-chromatic number* pada graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n \geq 3, m \geq 2$.

- Akan dibuktikan bahwa $\chi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 3$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$. Asumsikan bahwa $\varphi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 7$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$3 = \chi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq \varphi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 7 \quad (4.6.2)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.6.2, terbukti bahwa $\chi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 3$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$.

Terdapat titik-titik yang berderajat 6, sehingga :

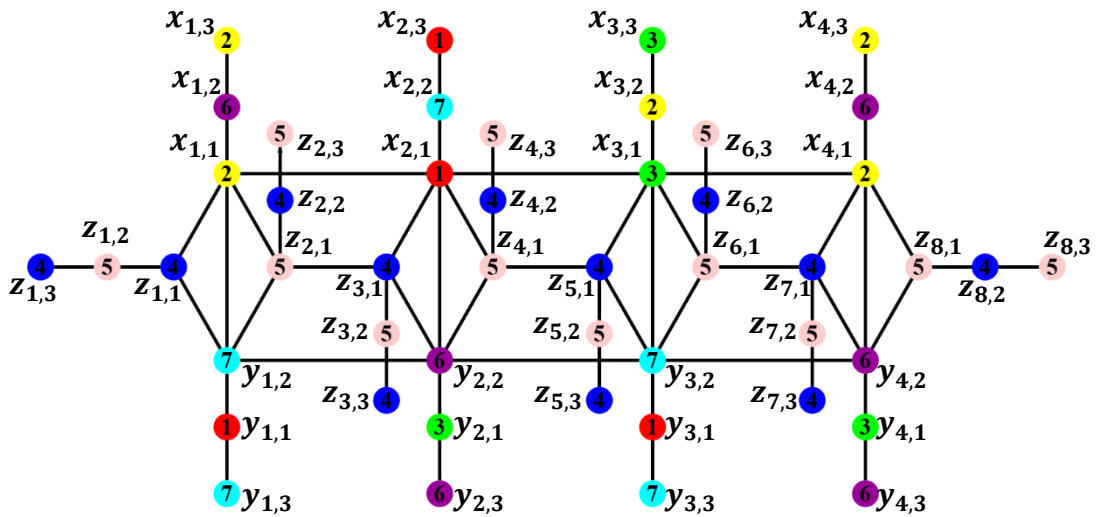
- Akan dibuktikan bahwa $\varphi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 7$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$ dan $\Delta(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) + 1$ merupakan batas atas dari *b-chromatic number* graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \varphi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) &\leq \Delta(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) + 1 \\ \varphi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) &\leq 6 + 1 \\ \varphi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) &\leq 7 \end{aligned} \quad (4.6.2.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.6.2.1, diperoleh $\varphi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq 7$. Menurut definisi *b-chromatic number*, nilai *b-chromatic number* diperoleh dari nilai maksimum pada kelas warna graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$. Sehingga

dapat disimpulkan bahwa $\varphi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 7$, maka terbukti bahwa $\varphi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 7$. ■

Ilustrasi b -coloring dari graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$ dapat dilihat pada Gambar 4.5 berikut.



Gambar 4.5 b -Coloring pada Graf $DL_4 \triangleright_{v_1} P_3$

Observasi 4.7. Bilangan kromatik pada graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n, m \geq 3$ adalah

$$\chi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = 3$$

Teorema 4.7. b -Chromatic number pada graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n, m \geq 3$ adalah

$$\varphi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = 8$$

Bukti: Graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$ memiliki himpunan titik, yaitu $V(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{x_{i,j}, y_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{z_{i,j}, z_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{z_{i,1}x_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{i,1}y_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{i,1}z_{i+1,1}, x_{i,1}z_{i+1,1}, y_{i,1}z_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{2i-1,1}y_{2i,1}, x_{2i,1}x_{2i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{z_{i,j}z_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n+1; 1 \leq j \leq m-1\}$. Kardinallitas dari himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$ adalah $|V(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m)| = (3n+1)m$ dan $|E(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m)| = (6n-1) + (3n+1)(m-1)$. Dianalisis batas atas b -chromatic number dari graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n, m \geq 3$ untuk menentukan b -chromatic number dari graf tersebut.

Berdasarkan Definisi 2.6.1 dan Lemma 2.6.1, diperoleh $\chi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq \varphi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq \Delta(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) + 1$. Maka menurut definisi *b-chromatic number* berikut pembuktian untuk $n, m \geq 3$.

Akan ditunjukkan fungsi pewarnaan $f: V(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ untuk setiap titik pada graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n, m \geq 3$:

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3} \\ 3, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 2 \pmod{3} \\ 4, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3} \\ & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 2 \pmod{3} \\ 6, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3} \\ 7, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3} \\ & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3} \\ 8, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 2 \pmod{3} \\ & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

$$f(y_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3} \\ 4, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3} \\ & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 2 \pmod{3} \\ 5, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3} \\ 6, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3} \\ 7, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3} \\ & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 2 \pmod{3} \\ & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3} \\ 8, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$$f(z_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3} \\ 2, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3} \\ 3, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3} \\ 5, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 2 \pmod{3} \\ & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3} \\ 6, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3} \\ & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3} \\ 8, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 2 \pmod{3} \\ & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 2.5.2 dan fungsi titik, diperoleh delapan kelas warna pada graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n, m \geq 3$ yaitu $C_1 = \{x_{i,j} | i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 0 \pmod{3}\} \cup \{z_{i,j} | i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3}\}$, $C_2 = \{z_{i,j} | i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3}\}$, $C_3 = \{x_{i,j} | i \equiv 2 \pmod{3}, j \equiv 2 \pmod{3}\} \cup \{z_{i,j} | i \equiv 1 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3}\}$, $C_4 = \{x_{i,j} | i \equiv 0 \pmod{3}, j \equiv 1 \pmod{3}; i \equiv$

$1 \bmod 3, j \equiv 2 \bmod 3\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 1 \bmod 3, j \equiv 1 \bmod 3; i \equiv 0 \bmod 3, j \equiv 2 \bmod 3\}$,
 $C_5 = \{y_{i,j} | i \equiv 2 \bmod 3, j \equiv 1 \bmod 3\} \cup \{z_{i,j} | i \equiv 1 \bmod 3, j \equiv 2 \bmod 3; i \equiv 0 \bmod 3, j \equiv 0 \bmod 3\}$,
 $C_6 = \{x_{i,j} | i \equiv 2 \bmod 3, j \equiv 1 \bmod 3\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 2 \bmod 3, j \equiv 0 \bmod 3\} \cup \{z_{i,j} | i \equiv 1 \bmod 3, j \equiv 0 \bmod 3; i \equiv 2 \bmod 3, j \equiv 0 \bmod 3\}$,
 $C_7 = \{x_{i,j} | i \equiv 1 \bmod 3, j \equiv 1 \bmod 3; i \equiv 0 \bmod 3, j \equiv 0 \bmod 3\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 0 \bmod 3, j \equiv 1 \bmod 3; i \equiv 2 \bmod 3, j \equiv 2 \bmod 3; i \equiv 1 \bmod 3, j \equiv 0 \bmod 3\}$,
 dan $C_8 = \{x_{i,j} | i \equiv 0 \bmod 3, j \equiv 2 \bmod 3; i \equiv 2 \bmod 3, j \equiv 0 \bmod 3\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 1 \bmod 3, j \equiv 2 \bmod 3\} \cup \{z_{i,j} | i \equiv 2 \bmod 3, j \equiv 2 \bmod 3; i \equiv 0 \bmod 3, j \equiv 2 \bmod 3\}$.

Ada $z_{2,1} \in C_1$ dan $z_{3,1} \in C_2$, $z_{1,1} \in C_3$, $y_{1,1} \in C_4$, $y_{2,1} \in C_5$, $x_{2,1} \in C_6$, $x_{1,1} \in C_7$, $z_{2,2} \in C_8$ sehingga $z_{2,1}z_{3,1}, z_{2,1}z_{1,1}, z_{2,1}y_{1,1}, z_{2,1}y_{2,1}, z_{2,1}x_{2,1}, z_{2,1}x_{1,1}, z_{2,1}z_{2,2} \in E(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $z_{3,1} \in C_2$ dan $z_{4,1} \in C_3$, $x_{3,1} \in C_4$, $y_{2,1} \in C_5$, $x_{2,1} \in C_6$, $y_{3,1} \in C_7$, $z_{3,2} \in C_8$ sehingga $z_{3,1}z_{4,1}, z_{3,1}x_{3,1}, z_{3,1}y_{2,1}, z_{3,1}x_{2,1}, z_{3,1}y_{3,1}, z_{3,1}z_{3,2} \in E(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $x_{2,2}, z_{1,1}, z_{4,1} \in C_3$ dan $y_{1,1} \in C_4$, $z_{4,2} \in C_5$, $x_{2,1} \in C_6$, $x_{1,1} \in C_7$, $x_{2,3} \in C_8$ sehingga $z_{1,1}y_{1,1}, z_{4,1}z_{4,2}, x_{2,2}x_{2,1}, z_{1,1}x_{1,1}, x_{2,2}x_{2,3} \in E(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $x_{1,2}, x_{3,1}, y_{1,1} \in C_4$ dan $y_{2,1} \in C_5$, $x_{2,1} \in C_6$, $x_{1,1} \in C_7$, $y_{1,2} \in C_8$ sehingga $y_{1,1}y_{2,1}, x_{3,1}x_{2,1}, x_{1,2}x_{1,1}, y_{1,1}y_{1,2} \in E(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $y_{2,1}, z_{1,2}, z_{3,3} \in C_5$ dan $z_{1,3} \in C_6$, $y_{2,2} \in C_7$, $z_{3,2} \in C_8$ sehingga $z_{1,2}z_{1,3}, y_{2,1}y_{2,2}, z_{3,3}z_{3,2} \in E(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $y_{2,3}, z_{2,3} \in C_6$ dan $y_{2,2} \in C_7$, $z_{2,2} \in C_8$ sehingga $y_{2,3}y_{2,2}, z_{2,3}z_{2,2} \in E(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $y_{1,3} \in C_7$ dan $y_{1,2} \in C_8$ sehingga $y_{1,3}y_{1,2} \in E(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m)$.

Berdasarkan kelas warna tersebut maka graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n, m \geq 3$ memenuhi definisi *b-coloring*. Selanjutnya akan dicari untuk *b-chromatic number* pada graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n, m \geq 3$.

- Akan dibuktikan bahwa $\chi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = 3$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$. Asumsikan bahwa $\varphi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = 8$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$3 = \chi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq \varphi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = 8 \quad (4.7.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.7.1, terbukti bahwa $\chi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = 3$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$.

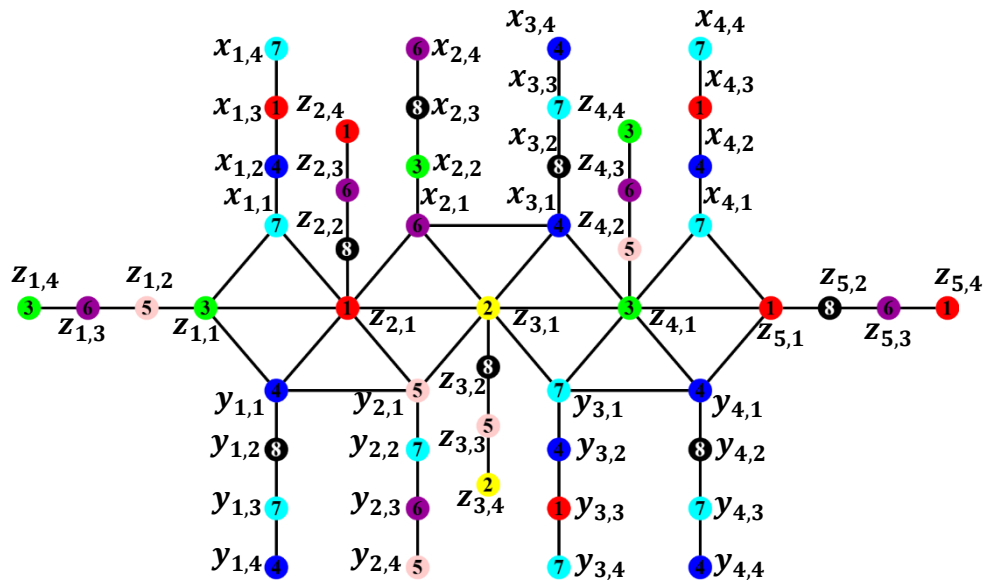
Terdapat titik-titik yang berderajat 7, sehingga :

- Akan dibuktikan bahwa $\varphi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = 8$ untuk $n, m \geq 3$ dan $\Delta(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) + 1$ merupakan batas atas dari *b-chromatic number* graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n, m \geq 3$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \varphi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) &\leq \Delta(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) + 1 \\ \varphi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) &\leq 7 + 1 \\ \varphi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) &\leq 8 \end{aligned} \tag{4.7.1.1}$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.7.1.1, diperoleh $\varphi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq 8$. Menurut definisi *b-chromatic number*, nilai *b-chromatic number* diperoleh dari nilai maksimum pada kelas warna graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n, m \geq 3$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\varphi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = 8$, maka terbukti bahwa $\varphi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = 8$. ■

Ilustrasi *b-coloring* dari graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n, m \geq 3$ dapat dilihat pada gambar berikut ini.



Gambar 4.6 *b-Coloring* pada Graf $LSP_4 \triangleright_{v_1} P_4$

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dijelaskan pada bab empat, diperoleh tujuh teorema baru mengenai b -coloring pada graf hasil operasi $comb$ graf lintasan. Teorema yang dihasilkan antara lain :

Teorema 1. b -Chromatic number pada graf $P_n \triangleright_{v_3} P_m$ untuk $n \geq 2, m \geq 3$ adalah

$$\varphi(P_n \triangleright_{v_3} P_m) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n = 2, m = 3 \\ 4, & \text{jika } n, m = 3 \\ & \text{jika } n = 2, m = 4 \\ 5, & \text{jika } n \geq 3, m \geq 4 \end{cases}$$

Teorema 2. b -Chromatic number pada graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$ untuk $n, m \geq 6$ adalah

$$\varphi(P_n \triangleright_{v_1} C_m) = 5$$

Teorema 3. b -Chromatic number pada graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$ adalah

$$\varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = 4$$

Teorema 4. b -Chromatic number pada graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n, m \geq 2$ adalah

$$\varphi(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \begin{cases} 4, & \text{jika } n = 2, m \geq 2 \\ 5, & \text{jika } n \geq 3, m \geq 2 \end{cases}$$

Teorema 5. b -Chromatic number pada graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 4, m \geq 2$ adalah

$$\varphi(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 6$$

Teorema 6. b -Chromatic number pada graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n, m \geq 2$ adalah

$$\varphi(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \begin{cases} 6, & \text{jika } n = 2, m \geq 2 \\ 7, & \text{jika } n \geq 3, m \geq 2 \end{cases}$$

Teorema 7. b -Chromatic number pada graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n, m \geq 3$ adalah

$$\varphi(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = 8$$

5.2 Saran

Berdasarkan yang telah dilakukan terkait b -coloring dalam mencari nilai b -chromatic number pada graf $P_n \triangleright_{v_3} P_m$ dengan $n \geq 2, m \geq 3$, graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$

dengan $n, m \geq 6$, graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n \geq 3, m \geq 2$, graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n, m \geq 2$, graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n \geq 4, m \geq 2$, graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n, m \geq 2$, graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $n, m \geq 3$ maka peneliti memberi saran kepada peneliti lain untuk melakukan penelitian mengenai *b-coloring* pada graf hasil operasi lainnya. Selain itu, peneliti juga menyarankan untuk menerapkan *b-coloring* pada pengaplikasian dalam sebuah permasalahan.

DAFTAR PUSTAKA

- Afrose, A. S., & Fathima, S. J. (2020). b-Coloring of the Product of Paths and Cycles. *International Journal of Mathematics Trends and Technology-IJMTT*, 66.
- Akalyadevi, K., & Ramaswamy, A. S. (2019). On b-chromatic number of Net graph. *International Journal of Research and Analytical*, 41.
- Ansari, N., Chandel, R. S., & Jamal, R. (2018). On b-chromatic Number of Prism Graph Families. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, 13(1), 20.
- Atmadja, K. (2021). Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga Segitiga Pita. *Jurnal Sains dan Matematika Unpam*, 4(1), 1-6.
- Bhavanari, S., Devanaboina, S., & Bhavanari, M. (2016). Star number of a graph. *Research Journal of Science and IT Management*, 5(11), 18-22.
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (1976). *Graph theory with applications* (Vol. 290). London: Macmillan.
- Chartrand, G., dan Zang, P. (2012). *A First Course in Graph Theory*. New York: Dover Publication, Inc.
- Fauziyyah, R. Z. (2020). *Dimensi Metrik Dominasi Pada Graf Hasil Operasi Comb* (Doctoral dissertation, UNIVERSITAS AIRLANGGA).
- Febrianti, F., L. Yulianti, dan N. Narwen. (2019). Dimensi Metrik Pada Amalgamasi Tangga Segitiga Diperumum Homogen. *Jurnal Matematika UNAND*. 8(1): 84-90.
- Hasmawati. (2015). *Bahan Ajar Teori Graf*. Universitas Hasanuddin, Makassar.
- Hasmawati. (2020). *Bahan Ajar Teori Graf*. Makassar: UPT Unhas Press.
- Irving, R. W., & Manlove, D. F. (1999). The b-chromatic number of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 91(1-3), 127-141.

- Joyner, dkk. (2013). *Algorithmic Graph Theory*. Free Software Foundation.
- Kouider, M., & Mahéo, M. (2002). Some bounds for the b-chromatic number of a graph. *Discrete Mathematics*, 256(1-2), 267-277.
- Kornelia, P., Noviani, E., & Fran, F. (2019). BILANGAN B-KROMATIK PADA GRAF ORIGAMI, GRAF LINTANG, DAN GRAF TADPOLE. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 8(4).
- Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit Revisi Keempat*. Informatika Bandung, Bandung.
- Nagarathinam, R., & Parvathi, N. (2021, May). b-Coloring on Graph Operators. *In Journal of Physics: Conference Series* (Vol.1850, No. 1, p. 012080). IOP Publishing.
- Saifudin, A. (2016). Dimensi Matrik dan Dimensi Partisi dari Famili Graf Tangga. *Jurnal Sistem & Teknologi Informasi Indonesia*, 1(2), 105-112.
- Slamin. (2009). *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.
- Rahadi, A. P. (2019). Penjadwalan Mata Kuliah Menggunakan Pewarnaan Graf Dengan Algoritma Largest First. *Jurnal Padeagogik*.
- Rosen, K. H., & Krithivasan, K. (1999). *Discrete mathematics and its applications* (Vol. 6). New York: McGraw-Hill.
- Waluyo, E., Wahab, A. A., & Rudi, M. (2023). PEWARNAAN GRACEFUL PADA GRAF HASIL OPERASI COMB GRAF SIKLUS DAN GRAF STAR. *Kadikma*, 14(1), 9-19.

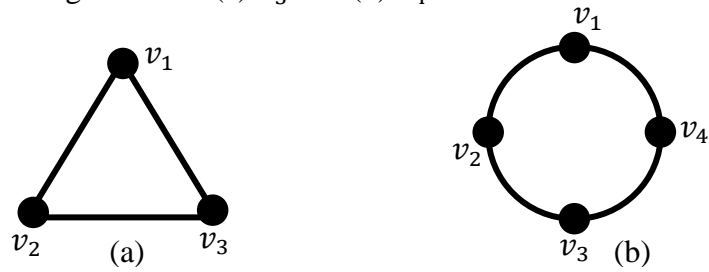
LAMPIRAN

Lampiran 2.2 Graf Khusus

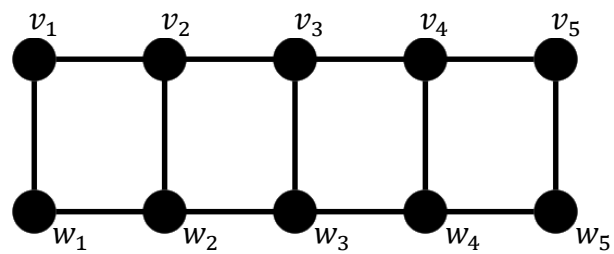
- 1) Contoh graf Lintasan (a) P_5 dan (b) P_4



- 2) Contoh graf Siklus (a) C_3 dan (b) C_4

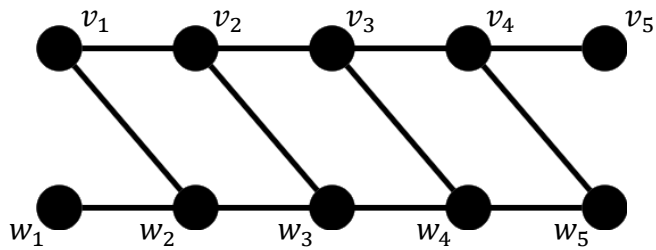


- 3) Contoh Graf Tangga L_5

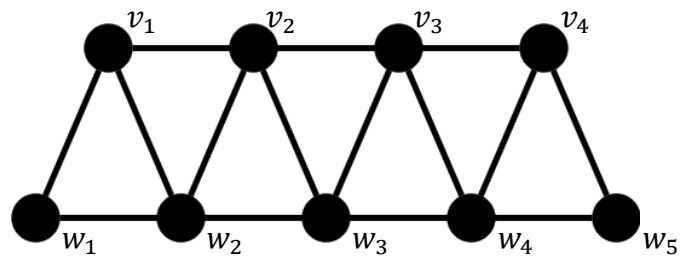


Lampiran 2.3 Keluarga Graf Tangga

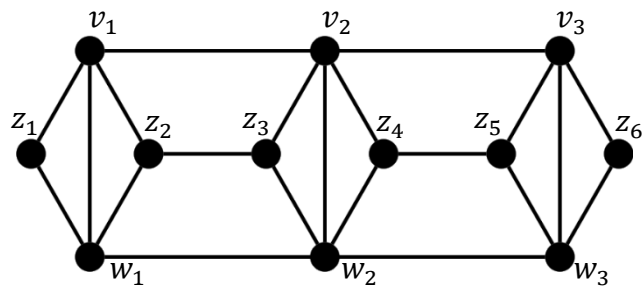
- 1) Contoh Graf Tangga Miring SL_5



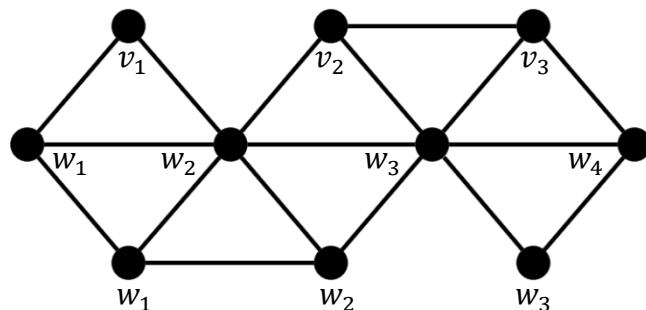
- 2) Contoh Graf Tangga Prisma PTL_5



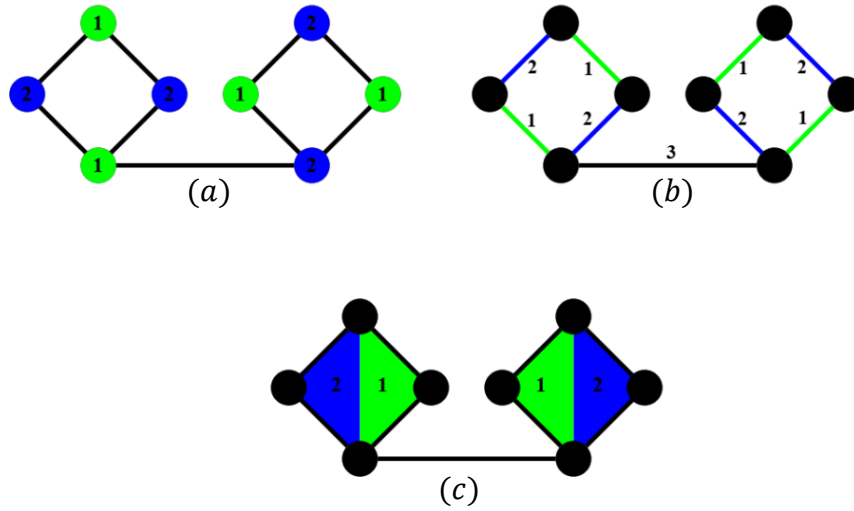
- 3) Contoh Graf Tangga Permata DL_3



- 4) Contoh Graf Tangga Segitiga Pita LSP_3



Lampiran 2.5 Contoh Jenis Pewarnaan Graf



Contoh (a) Pewarnaan Titik, (b) Pewarnaan Sisi, dan (c) Pewarnaan Wilayah

Lampiran 3.4 Jenis-Jenis Graf dan Kardinalitas Graf

Graf yang akan diteliti pada penelitian ini adalah beberapa graf hasil operasi *comb* graf lintasan antara lain $P_n \triangleright_{v_3} P_m$, $P_n \triangleright_{v_1} C_m$, $C_n \triangleright_{v_1} P_m$, $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$, $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$, $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$, dan $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$. Berikut ini adalah kardinalitas dari setiap graf yang akan diteliti:

1. Graf Lintasan (P_n) *comb* graf Lintasan dengan titik pelekatan ke- v_3 dari graf Lintasan (P_m) yaitu $P_n \triangleright_{v_3} P_m$. Berikut ini kardinalitas dari graf $P_n \triangleright_{v_3} P_m$ dapat dilihat pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Kardinalitas dari Graf $P_n \triangleright_{v_3} P_m$

Graf	Kardinalitas
$P_n \triangleright_{v_3} P_m$	<ul style="list-style-type: none"> - $V(P_n \triangleright_{v_3} P_m) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ - $E(P_n \triangleright_{v_3} P_m) = \{x_{i,3}x_{i+1,3}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup$ $\{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$ - $V(P_n \triangleright_{v_3} P_m) = nm$ - $E(P_n \triangleright_{v_3} P_m) = nm - 1$

2. Graf Lintasan (P_n) *comb* graf Siklus dengan titik pelekatan ke- v_1 dari graf Sikel (C_m) yaitu $P_n \triangleright_{v_1} C_m$. Berikut ini kardinalitas dari graf $P_n \triangleright_{v_1} C_m$ dapat dilihat pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Kardinalitas dari Graf $P_n \triangleright_{v_1} P_m$

Graf	Kardinalitas
$P_n \triangleright_{v_1} C_m$	<ul style="list-style-type: none"> - $V(P_n \triangleright_{v_1} C_m) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ - $E(P_n \triangleright_{v_1} C_m) = \{x_{i,1}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup$ $\{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup$ $\{x_{i,m}x_{i,1}; 1 \leq i \leq n\}$ - $V(P_n \triangleright_{v_1} C_m) = nm$ - $E(P_n \triangleright_{v_1} C_m) = nm + n - 1$

3. Graf Siklus (C_n) *comb* graf Lintasan (P_m) dengan titik pelekatan ke $-v_1$ dari graf Lintasan (P_m) yaitu $C_n \triangleright_{v_1} P_m$. Berikut ini kardinalitas dari graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ dapat dilihat pada Tabel 3.2.

Tabel 3.3 Kardinalitas dari Graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$

Graf	Kardinalitas
$C_n \triangleright_{v_1} P_m$	<ul style="list-style-type: none"> - $V(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ - $E(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{x_{i,1}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{n,1}x_{1,1}\}$ - $V(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = nm$ - $E(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = m + (n-1)m$

4. Graf Tangga Miring (SL_n) *comb* graf Lintasan (P_m) dengan titik pelekatan ke $-v_1$ dari graf Lintasan (P_m) yaitu $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$. Berikut kardinalitas dari graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$ dapat dilihat pada Tabel 3.4.

Tabel 3.4 Kardinalitas dari Graf $SL_n \triangleright_{v_1} P_m$

Graf	Kardinalitas
$SL_n \triangleright_{v_1} P_m$	<ul style="list-style-type: none"> - $V(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ - $E(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{x_{i,1}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{i,1}y_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i+1,1}y_{i,1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ - $V(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 2nm$ - $E(SL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 2nm + 2$

5. Graf Tangga Prisma (PTL_n) *comb* graf Lintasan (P_m) dengan titik pelekatan ke $-v_1$ dari graf Lintasan (P_m) yaitu $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$. Berikut ini kardinalitas dari graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$ dapat dilihat pada Tabel 3.5.

Tabel 3.5 Kardinalitas dari Graf $PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$

Graf	Kardinalitas
$PTL_n \triangleright_{v_1} P_m$	<ul style="list-style-type: none"> - $V(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ - $E(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{x_{i,1}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_{i,1}y_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{i,1}y_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,1}x_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ - $V(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = (2n-1)m$ - $E(PTL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 6n - m - 4$

6. Graf Tangga Permata (DL_n) *comb* graf Lintasan (P_m) dengan titik pelekatan ke- v_1 dari graf Lintasan (P_m) yaitu $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$. Berikut ini kardinalitas dari graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$ dapat dilihat pada Tabel 3.6.

Tabel 3.6 Kardinalitas dari Graf $DL_n \triangleright_{v_1} P_m$

Graf	Kardinalitas
$DL_n \triangleright_{v_1} P_m$	<ul style="list-style-type: none"> - $V(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{z_{i,j}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 2m\}$ - $E(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{x_{i,1}x_{i+1,1}, y_{i,1}y_{i+1,1}, z_{i,1}z_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,1}y_{i,1}, x_{i,1}z_{i,1}, y_{i,1}z_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{i,1}z_{i+1,1}, x_{i,1}z_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}, y_{i,j}y_{i,j+1}, z_{i,j}z_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\}$ - $V(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 4nm$ - $E(DL_n \triangleright_{v_1} P_m) = 4n(m-1) + 8n - 3$

7. Graf Tangga Segitiga Pita (LSP_n) *comb* graf Lintasan (P_m) dengan titik pelekatan ke v_1 dari graf Lintasan (P_m) yaitu $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$. Berikut ini kardinalitas dari graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$ dapat dilihat pada Tabel 3.7.

Tabel 3.7 Kardinalitas dari Graf $LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$

Graf	Kardinalitas
$LSP_n \triangleright_{v_1} P_m$	<ul style="list-style-type: none"> - $V(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{x_{i,j}, y_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{z_{i,j}, z_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ - $E(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = \{z_{i,1}x_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{i,1}y_{i,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{i,1}z_{i+1,1}, x_{i,1}z_{i+1,1}, y_{i,1}z_{i+1,1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{2i-1,1}y_{2i,1}, x_{2i,1}x_{2i+1,1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}, y_{i,j}y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{z_{i,j}z_{i,j+1}; 1 \leq i \leq n+1; 1 \leq j \leq m-1\}$ - $V(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = (3n+1)m$ - $E(LSP_n \triangleright_{v_1} P_m) = (6n-1) + 3nm - 3n + m - 1$

Lampiran 4.1 Pembuktian Kasus b -Chromatic number pada Graf $P_n \triangleright_{v3} P_m$ untuk $n \geq 2, m \geq 3$

Kasus 1: untuk $n = 2$ dan $m = 3$

Akan ditunjukkan fungsi pewarnaan $f: V(P_2 \triangleright_{v3} P_3) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ untuk setiap titik pada graf $P_2 \triangleright_{v3} P_3$:

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & x_{2,1}, x_{2,3} \\ 2, & x_{1,1}, x_{1,3} \\ 3, & x_{1,2}, x_{2,2} \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 2.5.2 dan fungsi titik, diperoleh tiga kelas warna pada graf $P_2 \triangleright_{v3} P_3$ yaitu $C_1 = \{x_{2,1}, x_{2,3}\}$, $C_2 = \{x_{1,1}, x_{1,3}\}$, dan $C_3 = \{x_{1,2}, x_{2,2}\}$.

Ada $x_{2,3} \in C_1$ dan $x_{1,3} \in C_2$, $x_{2,2} \in C_3$ sehingga $x_{2,3}x_{1,3}, x_{2,3}x_{2,2} \in E(P_2 \triangleright_{v3} P_3)$. Ada $x_{1,3} \in C_2$ dan $x_{1,2} \in C_3$ sehingga $x_{1,3}x_{1,2} \in E(P_2 \triangleright_{v3} P_3)$.

Berdasarkan kelas warna tersebut, maka graf $P_2 \triangleright_{v3} P_3$ memenuhi definisi b -coloring. Selanjutnya akan dicari untuk b -chromatic number pada graf $P_2 \triangleright_{v3} P_3$.

- Akan dibuktikan bahwa $\chi(P_2 \triangleright_{v3} P_3) = 2$ merupakan batas bawah dari b -chromatic number graf $P_2 \triangleright_{v3} P_3$. Asumsikan bahwa $\varphi(P_2 \triangleright_{v3} P_3) = 3$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$2 = \chi(P_2 \triangleright_{v3} P_3) \leq \varphi(P_2 \triangleright_{v3} P_3) = 3 \quad (4.1.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.1.1, terbukti bahwa $\chi(P_2 \triangleright_{v3} P_3) = 2$ merupakan batas bawah dari b -chromatic number graf $P_2 \triangleright_{v3} P_3$.

Terdapat titik-titik yang berderajat 2, sehingga :

- Akan dibuktikan bahwa $\varphi(P_2 \triangleright_{v3} P_3) = 3$ dan $\Delta(P_2 \triangleright_{v3} P_3) + 1$ merupakan batas atas dari b -chromatic number graf $P_2 \triangleright_{v3} P_3$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \varphi(P_2 \triangleright_{v3} P_3) &\leq \Delta(P_2 \triangleright_{v3} P_3) + 1 \\ \varphi(P_2 \triangleright_{v3} P_3) &\leq 2 + 1 \\ \varphi(P_2 \triangleright_{v3} P_3) &\leq 3 \end{aligned} \quad (4.1.1.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.1.1.1, diperoleh $\varphi(P_2 \triangleright_{v3} P_3) \leq 3$. Menurut definisi b -chromatic number, nilai b -chromatic number diperoleh dari nilai

maksimum pada kelas warna graf $P_2 \triangleright_{v_3} P_3$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\varphi(P_2 \triangleright_{v_3} P_3) = 3$, maka terbukti bahwa $\varphi(P_2 \triangleright_{v_3} P_3) = 3$. ■

Kasus 2: untuk $n, m = 3$

Akan ditunjukkan fungsi pewarnaan $f: V(P_3 \triangleright_{v_3} P_3) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ untuk setiap titik pada graf $P_3 \triangleright_{v_3} P_3$:

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & x_{2,3} \\ 2, & x_{1,1}, x_{1,3}, x_{3,2} \\ 3, & x_{1,2}, x_{2,2} \\ 4, & x_{2,1}, x_{3,1}, x_{3,3} \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 2.5.2 dan fungsi titik, diperoleh empat kelas warna pada graf $P_3 \triangleright_{v_3} P_3$ yaitu $C_1 = \{x_{2,3}\}$, $C_2 = \{x_{1,1}, x_{1,3}, x_{3,2}\}$, $C_3 = \{x_{1,2}, x_{2,2}\}$, dan $C_4 = \{x_{2,1}, x_{3,1}, x_{3,3}\}$.

Ada $x_{2,3} \in C_1$ dan $x_{1,3} \in C_2$, $x_{2,2} \in C_3$, $x_{3,3} \in C_4$ sehingga $x_{2,3}x_{1,3}, x_{2,3}x_{2,2}, x_{2,3}x_{3,3} \in E(P_3 \triangleright_{v_3} P_3)$. Ada $x_{1,3}, x_{3,2} \in C_2$ dan $x_{1,2} \in C_3$, $x_{3,3} \in C_4$ sehingga $x_{1,3}x_{1,2}, x_{3,2}x_{3,3} \in E(P_3 \triangleright_{v_3} P_3)$. Ada $x_{2,2} \in C_3$ dan $x_{2,1} \in C_4$ sehingga $x_{2,2}x_{2,1} \in E(P_3 \triangleright_{v_3} P_3)$.

Berdasarkan kelas warna tersebut maka graf $P_3 \triangleright_{v_3} P_3$ memenuhi definisi *b-coloring*. Selanjutnya akan dicari untuk *b-chromatic number* pada graf $P_3 \triangleright_{v_3} P_3$.

- Akan dibuktikan bahwa $\chi(P_3 \triangleright_{v_3} P_3) = 2$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $P_3 \triangleright_{v_3} P_3$. Asumsikan bahwa $\varphi(P_3 \triangleright_{v_3} P_3) = 4$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$2 = \chi(P_3 \triangleright_{v_3} P_3) \leq \varphi(P_3 \triangleright_{v_3} P_3) = 4 \quad (4.1.2)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.1.2, terbukti bahwa $\chi(P_3 \triangleright_{v_3} P_3) = 2$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $P_3 \triangleright_{v_3} P_3$.

Terdapat titik-titik yang berderajat 3, sehingga :

- Akan dibuktikan bahwa $\varphi(P_3 \triangleright_{v_3} P_3) = 4$ dan $\Delta(P_3 \triangleright_{v_3} P_3) + 1$ merupakan batas atas dari *b-chromatic number* graf $P_3 \triangleright_{v_3} P_3$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$\varphi(P_3 \triangleright_{v_3} P_3) \leq \Delta(P_3 \triangleright_{v_3} P_3) + 1$$

$$\varphi(P_3 \triangleright_{v_3} P_3) \leq 3 + 1$$

$$\varphi(P_3 \triangleright_{v_3} P_3) \leq 4 \quad (4.1.2.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.1.2.1, diperoleh $\varphi(P_3 \triangleright_{v_3} P_3) \leq 4$. Menurut definisi *b-chromatic number*, nilai *b-chromatic number* diperoleh dari nilai maksimum pada kelas warna graf $P_3 \triangleright_{v_3} P_3$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\varphi(P_3 \triangleright_{v_3} P_3) = 4$, maka terbukti bahwa $\varphi(P_3 \triangleright_{v_3} P_3) = 4$. ■

Kasus 3: untuk $n = 2$ dan $m = 4$

Akan ditunjukkan fungsi pewarnaan $f: V(P_2 \triangleright_{v_3} P_4) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ untuk setiap titik pada graf $P_2 \triangleright_{v_3} P_4$:

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & x_{2,3} \\ 2, & x_{1,3} \\ 3, & x_{1,2}, x_{2,2} \\ 4, & x_{1,1}, x_{1,4}, x_{2,1}, x_{2,4} \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 2.5.2 dan fungsi titik, diperoleh empat kelas warna pada graf $P_2 \triangleright_{v_3} P_4$ yaitu $C_1 = \{x_{2,3}\}$, $C_2 = \{x_{1,3}\}$, $C_3 = \{x_{1,2}, x_{2,2}\}$, dan $C_4 = \{x_{1,1}, x_{1,4}, x_{2,1}, x_{2,4}\}$.

Ada $x_{2,3} \in C_1$ dan $x_{1,3} \in C_2$, $x_{2,2} \in C_3$, $x_{2,4} \in C_4$ sehingga $x_{2,3}x_{1,3}, x_{2,3}x_{2,2}, x_{2,3}x_{2,4} \in E(P_2 \triangleright_{v_3} P_4)$. Ada $x_{1,3} \in C_2$ dan $x_{1,2} \in C_3$, $x_{1,4} \in C_4$ sehingga $x_{1,3}x_{1,2}, x_{1,3}x_{1,4} \in E(P_2 \triangleright_{v_3} P_4)$. Ada $x_{2,2} \in C_3$ dan $x_{2,1} \in C_4$ sehingga $x_{2,2}x_{2,1} \in E(P_2 \triangleright_{v_3} P_4)$.

Berdasarkan kelas warna tersebut maka graf $P_2 \triangleright_{v_3} P_4$ memenuhi definisi *b-coloring*. Selanjutnya akan dicari untuk *b-chromatic number* pada graf $P_2 \triangleright_{v_3} P_4$.

- Akan dibuktikan bahwa $\chi(P_2 \triangleright_{v_3} P_4) = 2$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $P_2 \triangleright_{v_3} P_4$. Asumsikan bahwa $\varphi(P_2 \triangleright_{v_3} P_4) = 4$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$2 = \chi(P_2 \triangleright_{v_3} P_4) \leq \varphi(P_2 \triangleright_{v_3} P_4) = 4 \quad (4.1.3)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.1.3, terbukti bahwa $\chi(P_2 \triangleright_{v_3} P_4) = 2$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $P_2 \triangleright_{v_3} P_4$.

Terdapat titik-titik yang berderajat 3, sehingga :

- Akan dibuktikan bahwa $\varphi(P_2 \triangleright_{v_3} P_4) = 4$ dan $\Delta(P_2 \triangleright_{v_3} P_4) + 1$ merupakan batas atas dari *b-chromatic number* graf $P_2 \triangleright_{v_3} P_4$.

Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

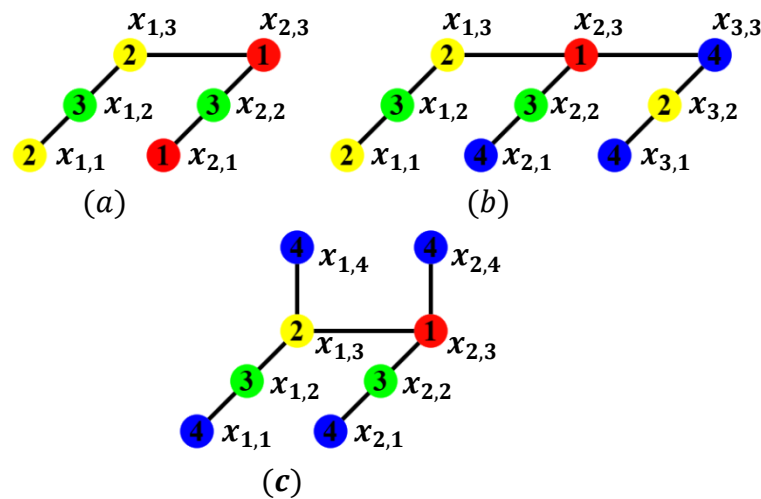
$$\varphi(P_2 \triangleright_{v_3} P_4) \leq \Delta(P_2 \triangleright_{v_3} P_4) + 1$$

$$\varphi(P_2 \triangleright_{v_3} P_4) \leq 3 + 1$$

$$\varphi(P_2 \triangleright_{v_3} P_4) \leq 4 \quad (4.1.3.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.1.3.1, diperoleh $\varphi(P_2 \triangleright_{v_3} P_4) \leq 4$. Menurut definisi *b-chromatic number*, nilai *b-chromatic number* diperoleh dari nilai maksimum pada kelas warna graf $P_2 \triangleright_{v_3} P_4$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\varphi(P_2 \triangleright_{v_3} P_4) = 4$, maka terbukti bahwa $\varphi(P_2 \triangleright_{v_3} P_4) = 4$. ■

Ilustrasi *b-coloring* dari graf $P_n \triangleright_{v_3} P_m$ untuk (a) $n = 2, m = 3$, (b) $n, m = 3$, dan (c) $n = 2, m = 4$ dapat dilihat pada gambar dibawah ini.



Gambar *b-Coloring* pada graf (a) $P_2 \triangleright_{v_3} P_3$, (b) $P_3 \triangleright_{v_3} P_3$, dan (c) $P_2 \triangleright_{v_3} P_4$

Lampiran 4.3 Pembuktian Kasus b -Chromatic number pada Graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$

Kasus 2: untuk n genap

Akan ditunjukkan fungsi pewarnaan $f: V(C_n \triangleright_{v_1} P_m) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ untuk setiap titik pada graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan n genap $\geq 3, m \geq 2$:

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \equiv 1 \pmod{4}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 2, & \text{jika } i \equiv 3 \pmod{4}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ & \text{jika } i \equiv 0, 1 \pmod{4}, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 3, & \text{jika } i \equiv 2 \pmod{4}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 4, & \text{jika } i \equiv 0 \pmod{4}, j \equiv 1 \pmod{2} \\ & \text{jika } i \equiv 2, 3 \pmod{4}, j \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 2.5.2 dan fungsi titik, diperoleh empat kelas warna pada graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk n genap $\geq 3, m \geq 2$ yaitu $C_1 = \{x_{i,j} | i \equiv 1 \pmod{4}, j \equiv 1 \pmod{2}\}$, $C_2 = \{x_{i,j} | i \equiv 3 \pmod{4}, j \equiv 1 \pmod{2}; i \equiv 0, 1 \pmod{4}, j \equiv 0 \pmod{2}\}$, $C_3 = \{x_{i,j} | i \equiv 2 \pmod{4}, j \equiv 1 \pmod{2}\}$, dan $C_4 = \{x_{i,j} | i \equiv 0 \pmod{4}, j \equiv 1 \pmod{2}; 2, 3 \pmod{4}, j \equiv 0 \pmod{2}\}$.

Ada $x_{1,1} \in C_1$ dan $x_{1,2} \in C_2$, $x_{2,1} \in C_3$, $x_{8,1} \in C_4$ sehingga $x_{1,1}x_{1,2}, x_{1,1}x_{2,1}, x_{1,1}x_{8,1} \in E(C_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $x_{3,1} \in C_2$ dan $x_{2,1} \in C_3$, $x_{4,1} \in C_4$ sehingga $x_{3,1}x_{2,1}, x_{3,1}x_{4,1} \in E(C_n \triangleright_{v_1} P_m)$. Ada $x_{2,1} \in C_3$ dan $x_{2,2} \in C_4$ sehingga $x_{2,1}x_{2,2} \in E(C_n \triangleright_{v_1} P_m)$.

Berdasarkan kelas warna tersebut maka graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk n genap $\geq 3, m \geq 2$ memenuhi definisi b -coloring. Selanjutnya akan dicari untuk b -chromatic number pada graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ dengan n genap $\geq 3, m \geq 2$.

- Akan dibuktikan bahwa $\chi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = 2$ merupakan batas bawah dari b -chromatic number graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$. Asumsikan bahwa $\varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = 4$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$2 = \chi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq \varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = 4 \quad (4.3.2)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.3.2, terbukti bahwa $\chi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = 2$ merupakan batas bawah dari b -chromatic number graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$.

Terdapat titik-titik yang berderajat 3, sehingga :

- Akan dibuktikan bahwa $\varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = 4$ untuk n genap $\geq 3, m \geq 2$ dan $\Delta(C_n \triangleright_{v_1} P_m) + 1$ merupakan batas atas dari b -chromatic number graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk n genap $\geq 3, m \geq 2$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

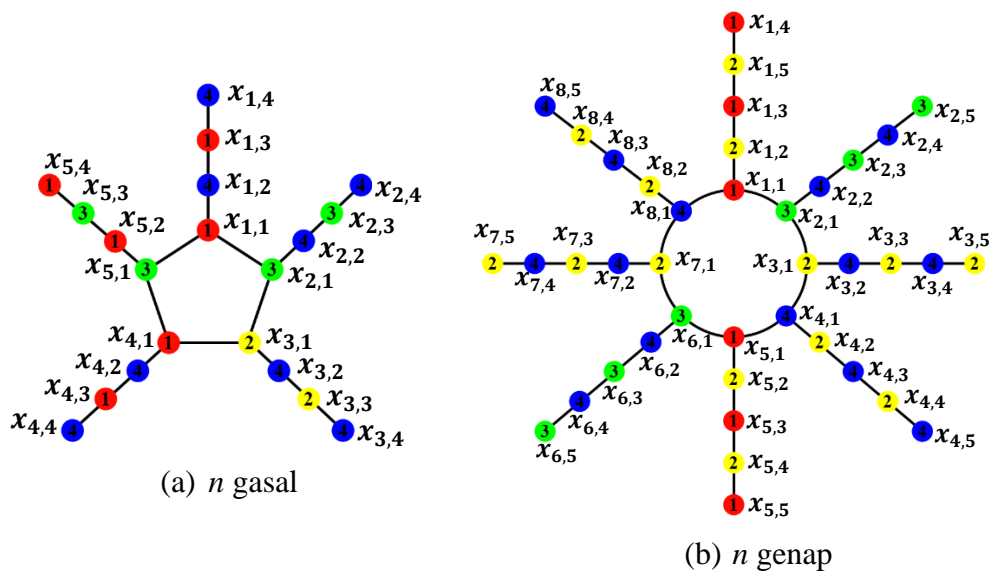
$$\varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq \Delta(C_n \triangleright_{v_1} P_m) + 1$$

$$\varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq 3 + 1$$

$$\varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq 4 \quad (4.3.2.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.3.2.1, diperoleh $\varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) \leq 4$. Menurut definisi b -chromatic number, nilai b -chromatic number diperoleh dari nilai maksimum pada kelas warna graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk n genap $\geq 3, m \geq 2$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = 4$, maka terbukti bahwa $\varphi(C_n \triangleright_{v_1} P_m) = 4$. ■

Ilustrasi b -coloring dari graf $C_n \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$ dapat dilihat pada gambar dibawah ini.



Gambar b -Coloring pada graf (a) $C_5 \triangleright_{v_1} P_4$ dan (b) $C_8 \triangleright_{v_1} P_5$

Lampiran 4.4 Pembuktian Kasus b -Chromatic number pada Graf $SL_n \triangleright_{v1} P_m$ untuk $n, m \geq 2$

Kasus 1: untuk $n = 2$ dan $m \geq 2$

Akan ditunjukkan fungsi pewarnaan $f: V(SL_2 \triangleright_{v1} P_m) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ untuk setiap titik pada graf $SL_2 \triangleright_{v1} P_m$ dengan $m \geq 2$:

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \equiv 2, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 2, & \text{jika } i \equiv 1, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 3, & \text{jika } i \equiv 1, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 4, & \text{jika } i \equiv 2, j \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

$$f(y_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \equiv 1, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 2, & \text{jika } i \equiv 1, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 3, & \text{jika } i \equiv 2, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 4, & \text{jika } i \equiv 2, j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 2.5.2 dan fungsi titik, diperoleh empat kelas warna pada graf $SL_2 \triangleright_{v1} P_m$ untuk $m \geq 2$ yaitu $C_1 = \{x_{i,j} | i \equiv 2, j \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 1, j \equiv 0 \pmod{2}\}$, $C_2 = \{x_{i,j} | i \equiv 1, j \equiv 0 \pmod{2}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 1, j \equiv 1 \pmod{2}\}$, $C_3 = \{x_{i,j} | i \equiv 1, j \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 2, j \equiv 0 \pmod{2}\}$, dan $C_4 = \{x_{i,j} | i \equiv 2, j \equiv 0 \pmod{2}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 2, j \equiv 1 \pmod{2}\}$.

Ada $x_{2,1} \in C_1$ dan $y_{1,1} \in C_2$, $x_{1,1} \in C_3$, $x_{2,2} \in C_4$ sehingga $x_{2,1}y_{1,1}, x_{2,1}x_{1,1}, x_{2,1}x_{2,2} \in E(SL_2 \triangleright_{v1} P_m)$. Ada $x_{1,2}, y_{1,1} \in C_2$ dan $x_{1,1} \in C_3$, $y_{2,1} \in C_4$ sehingga $x_{1,2}x_{1,1}, y_{1,1}y_{2,1} \in E(SL_2 \triangleright_{v1} P_m)$. Ada $y_{2,2} \in C_3$ dan $y_{2,1} \in C_4$ sehingga $y_{2,2}y_{2,1} \in E(SL_2 \triangleright_{v1} P_m)$.

Berdasarkan kelas warna tersebut maka graf $SL_2 \triangleright_{v1} P_m$ untuk $m \geq 2$ memenuhi definisi b -coloring. Selanjutnya akan dicari untuk b -chromatic number pada graf $SL_2 \triangleright_{v1} P_m$ dengan $m \geq 2$.

- Akan dibuktikan bahwa $\chi(SL_2 \triangleright_{v1} P_m) = 2$ merupakan batas bawah dari b -chromatic number graf $SL_2 \triangleright_{v1} P_m$. Asumsikan bahwa $\varphi(SL_2 \triangleright_{v1} P_m) = 4$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$2 = \chi(SL_2 \triangleright_{v1} P_m) \leq \varphi(SL_2 \triangleright_{v1} P_m) = 4 \quad (4.4.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.4.1, terbukti bahwa $\chi(SL_2 \triangleright_{v_1} P_m) = 2$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $SL_2 \triangleright_{v_1} P_m$.

Terdapat titik-titik yang berderajat 3, sehingga :

- Akan dibuktikan bahwa $\varphi(SL_2 \triangleright_{v_1} P_m) = 4$ untuk $m \geq 2$ dan $\Delta(SL_2 \triangleright_{v_1} P_m) + 1$ merupakan batas atas dari *b-chromatic number* graf $SL_2 \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $m \geq 2$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

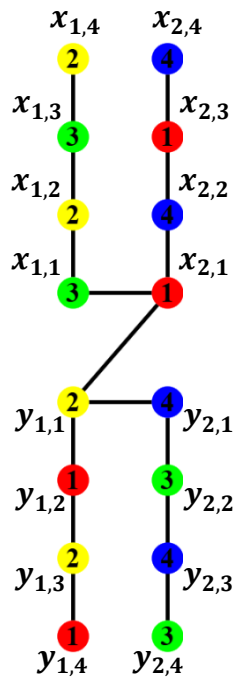
$$\varphi(SL_2 \triangleright_{v_1} P_m) \leq \Delta(SL_2 \triangleright_{v_1} P_m) + 1$$

$$\varphi(SL_2 \triangleright_{v_1} P_m) \leq 3 + 1$$

$$\varphi(SL_2 \triangleright_{v_1} P_m) \leq 4 \quad (4.4.1.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.4.1.1, diperoleh $\varphi(SL_2 \triangleright_{v_1} P_m) \leq 4$. Menurut definisi *b-chromatic number*, nilai *b-chromatic number* diperoleh dari nilai maksimum pada kelas warna graf $SL_2 \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $m \geq 2$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\varphi(SL_2 \triangleright_{v_1} P_m) = 4$, maka terbukti. ■

Ilustrasi *b-coloring* dari graf $SL_2 \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $m \geq 2$ dapat dilihat pada gambar dibawah ini.



Gambar *b-Coloring* pada graf $SL_2 \triangleright_{v_1} P_4$

Lampiran 4.6 Pembuktian Kasus b -Chromatic number pada Graf $DL_n \triangleright_{v1} P_m$ untuk $n, m \geq 2$

Kasus 1: untuk $n = 2$ dan $m \geq 2$

Akan ditunjukkan fungsi pewarnaan $f: V(DL_2 \triangleright_{v1} P_m) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ untuk setiap titik pada graf $DL_2 \triangleright_{v1} P_m$ dengan $m \geq 2$:

$$f(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \equiv 2, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 2, & \text{jika } i \equiv 1, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 5, & \text{jika } i \equiv 1, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 6, & \text{jika } i \equiv 2, j \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

$$f(y_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \equiv 1, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 2, & \text{jika } i \equiv 2, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 5, & \text{jika } i \equiv 2, j \equiv 1 \pmod{2} \\ 6, & \text{jika } i \equiv 1, j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$$f(z_{i,j}) = \begin{cases} 3, & \text{jika } i \equiv 1, j \equiv 1 \pmod{2} \\ & \text{jika } i \equiv 2, j \equiv 0 \pmod{2} \\ 4, & \text{jika } i \equiv 1, j \equiv 0 \pmod{2} \\ & \text{jika } i \equiv 2, j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 2.5.2 dan fungsi titik, diperoleh enam kelas warna pada graf $DL_2 \triangleright_{v1} P_m$ untuk $m \geq 2$ yaitu $C_1 = \{x_{i,j} | i \equiv 2, j \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 1, j \equiv 0 \pmod{2}\}$, $C_2 = \{x_{i,j} | i \equiv 1, j \equiv 1 \pmod{2}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 1, j \equiv 1 \pmod{2}\}$, $C_3 = \{z_{i,j} | i \equiv 1, j \equiv 1 \pmod{2}; i \equiv 2, j \equiv 0 \pmod{2}\}$, $C_4 = \{z_{i,j} | i \equiv 1, j \equiv 0 \pmod{2}; i \equiv 2, j \equiv 1 \pmod{2}\}$, $C_5 = \{x_{i,j} | i \equiv 1, j \equiv 0 \pmod{2}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 2, j \equiv 1 \pmod{2}\}$, dan $C_6 = \{x_{i,j} | i \equiv 2, j \equiv 0 \pmod{2}\} \cup \{y_{i,j} | i \equiv 1, j \equiv 1 \pmod{2}\}$.

Ada $x_{2,1} \in C_1$ dan $x_{1,1} \in C_2$, $z_{3,1} \in C_3$, $z_{4,1} \in C_4$, $y_{2,1} \in C_5$, $x_{2,2} \in C_6$ sehingga $x_{2,1}x_{1,1}, x_{2,1}z_{3,1}, x_{2,1}z_{4,1}, x_{2,1}y_{2,1}, x_{2,1}x_{2,2} \in E(DL_n \triangleright_{v1} P_m)$. Ada $x_{1,1} \in C_2$ dan $z_{1,1} \in C_3$, $z_{2,1} \in C_4$, $x_{1,2} \in C_5$, $y_{1,1} \in C_6$ sehingga $x_{1,1}z_{1,1}, x_{1,1}z_{2,1}, x_{1,1}x_{1,2}, x_{1,1}y_{1,1} \in E(DL_n \triangleright_{v1} P_m)$. Ada $z_{1,1}, z_{3,1} \in C_3$ dan $z_{1,2} \in C_4$, $y_{2,1} \in C_5$, $y_{1,1} \in C_6$ sehingga $z_{1,1}z_{1,2}, z_{3,1}y_{2,1}, z_{1,1}y_{1,1} \in E(DL_n \triangleright_{v1} P_m)$. Ada $z_{2,1}, z_{4,1} \in C_4$ dan $y_{2,1} \in C_5$, $y_{1,1} \in C_6$ sehingga $z_{4,1}y_{2,1}, z_{2,1}y_{1,1} \in E(DL_n \triangleright_{v1} P_m)$. Ada $y_{2,1} \in C_5$ dan $y_{1,1} \in C_6$ sehingga $y_{2,1}y_{1,1} \in E(DL_n \triangleright_{v1} P_m)$.

Berdasarkan kelas warna tersebut maka graf $DL_2 \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $m \geq 2$ memenuhi definisi *b-coloring*. Selanjutnya akan dicari untuk *b-chromatic number* pada graf $DL_2 \triangleright_{v_1} P_m$ dengan $m \geq 2$.

- Akan dibuktikan bahwa $\chi(DL_2 \triangleright_{v_1} P_m) = 3$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $DL_2 \triangleright_{v_1} P_m$. Asumsikan bahwa $\varphi(DL_2 \triangleright_{v_1} P_m) = 6$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut :

$$3 = \chi(DL_2 \triangleright_{v_1} P_m) \leq \varphi(DL_2 \triangleright_{v_1} P_m) = 6 \quad (4.6.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.6.1, terbukti bahwa $\chi(DL_2 \triangleright_{v_1} P_m) = 3$ merupakan batas bawah dari *b-chromatic number* graf $DL_2 \triangleright_{v_1} P_m$.

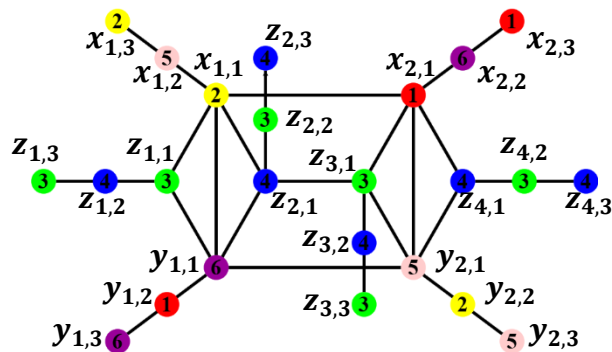
Terdapat titik-titik yang berderajat 5, sehingga :

- Akan dibuktikan $\varphi(DL_2 \triangleright_{v_1} P_m) = 6$ untuk $m \geq 2$ dan $\Delta(DL_2 \triangleright_{v_1} P_m) + 1$ merupakan batas atas dari *b-chromatic number* graf $DL_2 \triangleright_{v_1} P_m$. Berdasarkan Lemma 2.6.1 diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned} \varphi(DL_2 \triangleright_{v_1} P_m) &\leq \Delta(DL_2 \triangleright_{v_1} P_m) + 1 \\ \varphi(DL_2 \triangleright_{v_1} P_m) &\leq 5 + 1 \\ \varphi(DL_2 \triangleright_{v_1} P_m) &\leq 6 \end{aligned} \quad (4.6.1.1)$$

Berdasarkan pertidaksamaan 4.6.1.1, diperoleh $\varphi(DL_2 \triangleright_{v_1} P_m) \leq 6$. Menurut definisi *b-chromatic number*, nilai *b-chromatic number* diperoleh dari nilai maksimum pada kelas warna graf $DL_2 \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $m \geq 2$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\varphi(DL_2 \triangleright_{v_1} P_m) = 6$, maka terbukti .■

Ilustrasi *b-coloring* dari graf $DL_2 \triangleright_{v_1} P_m$ untuk $m \geq 2$ dapat dilihat pada gambar dibawah ini.



Gambar *b-Coloring* pada graf $DL_2 \triangleright_{v_1} P_3$

Lampiran Matriks Penelitian

Judul	Rumusan Masalah	Variabel	Indikator	Sumber Data	Metode
Analisis <i>b-Coloring</i> pada Graf Hasil Operasi <i>Comb</i> Graf Lintasan	Bagaimana <i>b-coloring</i> pada hasil operasi <i>comb</i> graf lintasan?	<ol style="list-style-type: none"> 1. Graf lintasan 2. Operasi <i>comb</i> 3. <i>b-Coloring</i> 	Untuk mengetahui <i>b-coloring</i> pada hasil operasi <i>comb</i> graf lintasan	Kepustakaan	<ol style="list-style-type: none"> 1. Metode pengenalan pola. 2. Metode deduktif aksiomatik.