

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Terminologi Graf

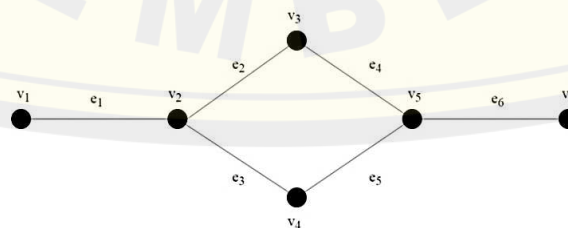
Sebuah graf G didefinisikan sebagai suatu pasangan himpunan $V(G)$ berhingga tak kosong dan himpunan $E(G)$ yang boleh kosong, dimana $V(G)$ adalah titik (*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan sisi (*edge*) yang berada di antara dua titik (Slamin, 2009). Banyaknya titik pada graf G dapat dinotasikan sebagai $|V(G)|$, sedangkan banyaknya sisi pada graf G dapat dinotasikan sebagai $|E(G)|$. Misalkan $u, v \in V(G)$ dan $uv \in E(G)$, maka u dan v dikatakan bertetangga (*adjacent*). Sisi uv dikatakan bersisian (*incident*) dengan titik u dan v . Derajat (*degree*) suatu titik v , yang dinotasikan dengan $d(v)$, adalah banyaknya sisi yang bersisian dengan titik tersebut. Derajat maksimum graf G adalah derajat terbesar dari seluruh titik pada graf, yang dilambangkan dengan $\Delta(G)$ (Chartrand & Zhang, 2008). Derajat maksimum suatu graf dinyatakan sebagai

$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}.$$

Lintasan (*path*) merupakan barisan titik yang berbeda dan dihubungkan oleh sisi-sisi yang berbeda. Panjang suatu lintasan adalah banyaknya sisi yang dilalui. Jarak (*distance*) antara dua titik u dan v , yang dinotasikan dengan $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek yang menghubungkan kedua titik tersebut (Chartrand & Zhang, 2008). Lintasan yang panjangnya sama dengan $d(u, v)$ disebut lintasan terpendek. Diameter suatu graf merupakan jarak terbesar di antara seluruh pasangan titik pada graf dan dinyatakan dengan

$$\text{diam}(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V(G)\}.$$

Sebagai ilustrasi, contoh sebuah graf G ditunjukkan pada Gambar 2.1 berikut.



Gambar 2.1 Contoh graf G

Berdasarkan Gambar 2.1, graf G memiliki himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, sehingga $|V(G)| = 6$, dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, sehingga $|E(G)| = 6$. Derajat maksimum graf G adalah $\Delta(G) = 3$. Salah satu lintasan graf G pada Gambar 2.1 adalah $\{v_1 - e_1 - v_2 - e_2 - v_3 - e_4 - v_5 - e_6 - v_6\}$, yang memiliki panjang lintasan 4.

2.2. Deskripsi dan Struktur Graf

Graf roda W_n adalah graf yang dibentuk dari sebuah graf siklus C_n dengan menambahkan satu simpul pusat yang dihubungkan ke semua simpul pada C_n . Sisi yang menghubungkan titik pusat dengan setiap titik pada siklus disebut sisi jari-jari (*spokes*), sedangkan sisi-sisi yang membentuk graf siklus C_n disebut sisi lingkaran luar (*rim edges*). Sehingga menghasilkan struktur seperti roda dengan pusat yang terhubung ke setiap siklusnya (W_n) (Rosen, 2011). Pada graf ini, n menyatakan banyaknya simpul pada siklus luar C_n , sehingga jumlah simpul graf roda adalah $n + 1$.

Graf helm H_n adalah graf yang diperoleh dari graf roda W_n dengan menambahkan satu sisi *pendant* (ranting) pada setiap simpul siklus (Weisstein, 2007). Parameter n tetap menyatakan banyaknya simpul pada siklus luar, sehingga graf helm memiliki $2n + 1$ simpul.

Graf *shell-butterfly* adalah *double shell graph* yang memiliki simpul pusat bersama dan pada titik puncaknya terdapat dua sisi *pendant* (Stanley & Jesintha, 2012). Pada graf ini, parameter n menyatakan banyaknya simpul pada masing-masing sisi *shell* yang berbagi satu simpul pusat, sedangkan angka 2 menunjukkan bahwa graf terdiri atas dua sisi *pendant*, sehingga graf *shell-butterfly* memiliki $2n + 2$ simpul.

Selanjutnya graf *octopus*, meskipun tidak terdapat definisi baku dalam literatur teori graf standar, graf *octopus* digunakan untuk menggambarkan graf dengan satu simpul pusat yang terhubung ke beberapa jalur cabang (*pendant*) yang tidak saling berhubungan satu sama lain, menyerupai struktur lengan gurita.

Parameter n menyatakan banyaknya cabang (*pendant*) yang terhubung langsung ke simpul pusat.

Graf lotus didefinisikan sebagai kelas graf baru yang dibangun melalui konstruksi tertentu dari siklus yang menciptakan struktur menyerupai pola bunga lotus (Khotimah et al., 2025). Parameter n menyatakan banyaknya batang kelopak atau unit pembentuk graf lotus sesuai konstruksi yang digunakan. Gambar graf roda, helm, *shell-butterfly*, *octopus*, dan lotus bisa dilihat pada Lampiran 1.

2.3. *Rainbow Coloring dan Strong Rainbow Coloring*

Pewarnaan pelangi (*rainbow coloring*) adalah pewarnaan sisi graf pada graf G . Misalkan G adalah graf terhubung dengan pewarnaan sisi $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$, dengan ketentuan k merupakan bagian dari bilangan asli, dimana sisi-sisi yang bertetangga dapat memiliki warna yang sama. Suatu lintasan pada graf G disebut sebagai lintasan pelangi (*rainbow path*) apabila setiap sisi pada lintasan tersebut memiliki warna yang berbeda. Graf G dikatakan memiliki *rainbow coloring* jika untuk setiap pasangan titik $u, v \in V(G)$ terdapat lintasan pelangi yang menghubungkan keduanya. Jumlah warna minimum yang diperlukan untuk menghasilkan *rainbow coloring* pada graf G disebut *rainbow connection number*, yang dinotasikan dengan $rc(G)$ (Dafik et al., 2018).

Salah satu pengembangan *rainbow coloring* adalah *strong rainbow coloring*, yang menambahkan syarat bahwa lintasan pelangi yang menghubungkan dua titik harus merupakan lintasan terpendek (Rostami et al., 2020). Dengan demikian, pewarnaan sisi $c: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ pada graf terhubung G disebut sebagai *strong rainbow coloring* apabila untuk setiap pasangan titik $u, v \in V(G)$ terdapat lintasan pelangi yang menghubungkan keduanya, dan lintasan tersebut merupakan lintasan terpendek. Jumlah warna minimum yang diperlukan untuk menghasilkan *strong rainbow coloring* pada graf G disebut *strong rainbow connection number*, yang dinotasikan dengan $src(G)$. Hasil penelitian terdahulu mengenai nilai $src(G)$ pada berbagai kelas graf disajikan pada Tabel 2.2 di halaman 13.

2.4. *Rainbow Antimagic Coloring (RAC) dan Strong Rainbow Antimagic Coloring (SRAC)*

Rainbow antimagic coloring merupakan gabungan dari konsep pelabelan antiajaib (*antimagic labeling*) dan pewarnaan pelangi (*rainbow coloring*). Misalkan graf G merupakan graf sederhana dan $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ adalah fungsi bijektif yang memberikan label pada setiap titik, bobot sisi untuk setiap $uv \in E(G)$ adalah $w(uv) = f(u) + f(v)$. Bobot sisi tersebut selanjutnya digunakan sebagai warna sisi pada graf. Suatu lintasan P disebut lintasan pelangi (*rainbow path*) apabila seluruh sisi yang membentuk lintasan tersebut memiliki bobot (warna) yang berbeda. Suatu pelabelan f dikatakan sebagai *rainbow antimagic labeling* apabila untuk setiap pasangan titik $u, v \in V(G)$ terdapat minimal satu lintasan pelangi yang menghubungkan kedua titik tersebut. Dengan demikian, *rainbow antimagic coloring* adalah pemberian warna pada sisi uv dengan bobot $w(uv)$ (Dafik et al., 2021).

Jumlah warna minimum yang diperlukan untuk membuat graf G terkoneksi pelangi antiajaib disebut *rainbow antimagic connection number*, yang dinotasikan dengan $rac(G)$. Nilai $rac(G)$ memenuhi batas bawah

$$rac(G) \geq \max \{rc(G), \Delta(G)\},$$

dengan $rc(G)$ menyatakan *rainbow connection number* dan $\Delta(G)$ menyatakan derajat maksimum graf (Dafik et al., 2021).

Setelah diperkenalkannya konsep *rainbow antimagic connection number* $rac(G)$, konsep tersebut kemudian dikembangkan menjadi *strong rainbow antimagic coloring* (SRAC) dengan menambahkan syarat bahwa lintasan pelangi yang menghubungkan setiap pasangan titik harus merupakan lintasan terpendek (*geodesic*). *Geodesic* dalam teori graf adalah lintasan terpendek antara dua titik dalam sebuah graf, tanpa mengulangi simpul. Dengan demikian, SRAC merupakan pengembangan dari *rainbow antimagic coloring* yang mengombinasikan konsep *strong rainbow coloring* dan *rainbow antimagic labeling* (Lestari et al., 2023).

Misalkan $G(V, E)$ adalah graf sederhana dan terhubung. Suatu fungsi bijektif $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)|\}$ disebut *edge-antimagic vertex labeling* apabila setiap sisi $uv \in E(G)$ memiliki bobot $w(uv) = f(u) + f(v)$, dan seluruh bobot sisi yang dihasilkan berbeda. Selanjutnya, pelabelan f disebut *strong rainbow antimagic labeling* apabila untuk setiap pasangan titik $u, v \in V(G)$ terdapat lintasan terpendek yang merupakan lintasan pelangi berdasarkan pewarnaan bobot $w(uv)$. Jumlah warna minimum atau bobot berbeda yang diperlukan untuk memenuhi kondisi tersebut disebut *strong rainbow antimagic connection number*, yang dinotasikan dengan $srac(G)$ (Lestari et al., 2023). Selain itu, *strong rainbow antimagic connection number* memiliki batas bawah berdasarkan Lemma 1 berikut ini.

Lemma 1. Misalkan G adalah sebarang graf terhubung, maka $srac(G) \geq \max\{src(G), \Delta(G)\}$ (Lestari et al., 2023).

Penelitian terdahulu telah mengkaji nilai $srac(G)$ pada berbagai kelas graf, seperti *Jahangir graph*, *semi-Jahangir graph*, *friendship graph*, *fan graph*, *star graph*, *path graph*, *cycle graph*, *book graph*, *triangular book graph*, dan *ladder graph*. Ringkasan hasil penelitian tersebut disajikan pada Tabel 2.3 di halaman 14. Hasil-hasil tersebut menunjukkan bahwa karakteristik topologi graf, seperti diameter, jumlah titik, dan derajat maksimum, berpengaruh terhadap nilai *strong rainbow antimagic connection number*. Contoh penerapan konsep *strong rainbow antimagic coloring* pada graf lotus dapat dilihat pada Gambar 4.5 Halaman 47.

2.5. Citra RGB

Citra RGB merupakan citra digital berwarna yang dibentuk oleh tiga kanal warna, yaitu merah (*red*), hijau (*green*), dan biru (*blue*). Setiap piksel direpresentasikan oleh sebuah triplet, yaitu (R, G, B) . Pada citra RGB 8-bit, setiap kanal memiliki nilai intensitas dalam rentang 0–255. Nilai 0 menunjukkan tidak adanya intensitas warna, sedangkan nilai 255 menunjukkan intensitas maksimum. Semakin besar nilai suatu kanal, semakin tinggi intensitas warna pada kanal tersebut (Putra, 2010). Secara matematis, citra RGB berukuran $(M \times N)$

direpresentasikan oleh tiga matriks yang masing-masing menyatakan kanal merah, hijau, dan biru sebagai berikut.

$$P_R = [P_R(i,j)] = \begin{bmatrix} R(1,1) & R(1,2) & \cdots & R(1,N) \\ R(2,1) & R(2,2) & \cdots & R(2,N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(M,1) & R(M,2) & \cdots & R(M,N) \end{bmatrix},$$

$$P_G = [P_G(i,j)] = \begin{bmatrix} G(1,1) & G(1,2) & \cdots & G(1,N) \\ G(2,1) & G(2,2) & \cdots & G(2,N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G(M,1) & G(M,2) & \cdots & G(M,N) \end{bmatrix},$$

$$P_B = [P_B(i,j)] = \begin{bmatrix} B(1,1) & B(1,2) & \cdots & B(1,N) \\ B(2,1) & B(2,2) & \cdots & B(2,N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(M,1) & B(M,2) & \cdots & B(M,N) \end{bmatrix}.$$

Pada representasi matriks tersebut, M menyatakan jumlah baris (tinggi) pada citra dan N menyatakan jumlah kolom (lebar) pada citra. Setiap elemen $P_R(i,j)$, $P_G(i,j)$, dan $P_B(i,j)$ menyatakan nilai intensitas warna merah, hijau, dan biru pada piksel baris ke- i dan kolom ke- j , dengan $1 \leq i \leq M$ dan $1 \leq j \leq N$. Karena setiap piksel terdiri atas tiga komponen warna, citra RGB memiliki informasi visual yang lebih lengkap dibandingkan citra keabuan (*grayscale*).

2.6. Stream Cipher pada Enkripsi dan Dekripsi Citra RGB

Stream cipher merupakan salah satu teknik kriptografi simetris yang mengenkripsi data dengan cara mengombinasikan *plaintext* dengan deret kunci (*keystream*). *Stream cipher* mengenkripsi data secara berurutan, *byte* demi *byte*, sehingga sesuai untuk data digital yang direpresentasikan sebagai deretan *byte*, termasuk citra digital (Stallings, 2017).

Operasi $\oplus$ menyatakan operasi *exclusive OR* (XOR). Operasi XOR menghasilkan nilai 1 apabila kedua bit yang dibandingkan berbeda dan menghasilkan nilai 0 apabila kedua bit tersebut sama. Dalam logika, disebut disjungsi eksklusif dalam Boolean algebra, karena hasilnya benar (1) hanya jika tepat satu input bernilai benar, bukan keduanya. Tabel kebenaran operasi XOR disajikan pada Tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1 Nilai kebenaran operasi XOR

P_i	K_i	$C_i = P_i \oplus K_i$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Operasi XOR bersifat reversibel, yaitu *ciphertext* dapat dikembalikan menjadi *plaintext* menggunakan *keystream* yang sama. Berdasarkan konsep *stream cipher* yang dikemukakan oleh Menezes et al. (1996) dan Stallings (2017), proses enkripsi dilakukan dengan operasi XOR antara *plaintext* dan *keystream*, sedangkan proses dekripsi menggunakan operasi XOR dengan *keystream* yang sama. Dalam penelitian tersebut digunakan notasi P_i untuk *plaintext*, K_i untuk *keystream*, C_i untuk *ciphertext* dan D_i menyatakan nilai hasil dekripsi. Dengan notasi tersebut, proses enkripsi dan dekripsi dapat dinyatakan sebagai

$$C_i = P_i \oplus K_i, \quad (2.1)$$

$$D_i = C_i \oplus K_i. \quad (2.2)$$

Persamaan tersebut diterapkan pada citra RGB. Proses enkripsi citra RGB dinyatakan sebagai

$$C_c(i, j) = P_c(i, j) \oplus K_c(i, j). \quad (2.3)$$

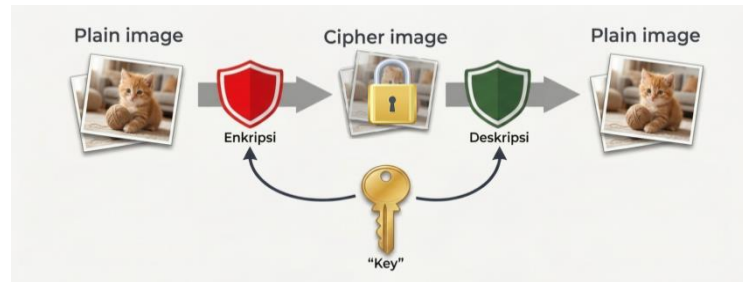
Sedangkan proses dekripsi dinyatakan sebagai

$$D_c(i, j) = C_c(i, j) \oplus K_c(i, j), \quad (2.4)$$

dimana $P_c(i, j)$ menyatakan *plaintext* pada kanal warna c , $C_c(i, j)$ menyatakan *ciphertext* pada kanal warna c , $D_c(i, j)$ menyatakan nilai piksel hasil dekripsi pada kanal c , dan $K_c(i, j)$ merupakan *keystream* berbasis bobot SRAC, dengan $c \in \{R, G, B\}$. Proses dekripsi dinyatakan berhasil apabila citra hasil dekripsi sama dengan citra asli, yaitu

$$D_c(i, j) = P_c(i, j). \quad (2.5)$$

Metode *stream cipher* dengan operasi XOR memiliki keunggulan karena sederhana, cepat, dan mudah dikembalikan ke citra asli menggunakan *keystream* yang sama. Proses enkripsi dan dekripsi *image* ditunjukkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Enkripsi dan Dekripsi

2.7. Evaluasi Kinerja Metode

Evaluasi kinerja dilakukan untuk menilai apakah algoritma mampu menyamarkan informasi visual citra asli dan apakah citra hasil dekripsi dapat kembali sama dengan citra RGB asli. Evaluasi dilakukan melalui analisis visual, histogram, serta pengukuran kuantitatif menggunakan *Mean Squared Error* (MSE), *Peak Signal-to-Noise Ratio* (PSNR), dan *Unified Average Changing Intensity* (UACI).

MSE digunakan untuk mengukur rata-rata kuadrat selisih antara citra asli dan citra hasil dekripsi. Semakin kecil nilai MSE, semakin baik kualitas citra hasil dekripsi (Gonzalez & Woods, 2018). Pada citra RGB, nilai MSE dihitung berdasarkan rata-rata kesalahan pada ketiga kanal warna, menggunakan persamaan

$$MSE = \frac{1}{3MN} \cdot \sum_{C \in \{R,G,B\}} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (P_c(i,j) - D_c(i,j))^2, \quad (2.6)$$

dengan $P_c(i,j)$ menyatakan nilai piksel asli pada kanal c , $D_c(i,j)$ menyatakan nilai piksel hasil dekripsi pada kanal c , M adalah jumlah baris, dan N adalah jumlah kolom.

PSNR digunakan untuk mengukur tingkat kemiripan antara citra hasil dekripsi dan citra asli berdasarkan nilai MSE. Semakin tinggi nilai PSNR, semakin baik kualitas citra hasil dekripsi (Gonzalez & Woods, 2018). Persamaan PSNR dituliskan sebagai

$$PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{255^2}{MSE} \right). \quad (2.7)$$

UACI digunakan untuk mengukur rata-rata perubahan intensitas piksel antara citra asli dan citra terenkripsi. Semakin tinggi nilai UACI, semakin besar

perubahan intensitas yang terjadi sehingga tingkat pengacakan citra hasil enkripsi semakin baik (Wu et al., 2011). Persamaan UACI dituliskan sebagai

$$UACI = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{|P(i,j) - C(i,j)|}{255} \times 100 \%, \quad (2.8)$$

dengan $P(i,j)$ dan $C(i,j)$ masing-masing adalah nilai piksel pada citra asli dan citra terenkripsi.

2.8. Hasil Penelitian Terdahulu

Penelitian mengenai *strong rainbow connection number* $src(G)$ dan *strong rainbow antimagic connection number* $srac(G)$ telah banyak dilakukan pada berbagai kelas graf. Ringkasan hasil penelitian tersebut disajikan pada Tabel 2.2 dan Tabel 2.3.

Tabel 2.2 Penelitian terdahulu $src(G)$

No.	Graf	Simbol	$src(G)$	Referensi
1	Wheel Graph	W_n	$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$	(Chartrand et al., 2008)
2	Splitting of 3-Path Graph	$Spl_m(P_3)$	$2m + 1$	(Septyanto & Sugeng, 2015)
3	Stellar Graph	$St_{m,n}$	$m \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$	(Shulhany & Salman, 2016)
4	Line of Sunlet Graph	$L(S_n)$	$\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$	(Zhao et al., 2018)
5	Middle of Sunlet Graph	$M(S_n)$	n	(Zhao et al., 2018)
6	Total of Sunlet Graph	$T(S_n)$	n , jika n genap $n + 1$, jika n ganjil	(Zhao et al., 2018)
7	Crystal Graph	$CR_{m,r}$	$3mr + 1$	(Lubis et al., 2019)
8	Neuron Graph	NR_m	$1 + m + \sum_{i=1}^m l_i$	(Lubis et al., 2019)
9	Möbius Ladder Graph	M_{2n}	$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$	(Khan et al., 2020)
10	Convex Polytope Graph	CP_n	$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$	(Khan et al., 2020)
11	Helm Graph	H_n	n	(Fauziah et al., 2021)
12	Jahangir Graph	J_n	4	(Lestari et al., 2023)
13	Semi-Jahangir Graph	SJ_n	4	(Lestari et al., 2023)
14	Friendship Graph	Fr_n	2	(Lestari et al., 2023)
15	Fan Graph	F_n	2	(Lestari et al., 2023)
16	Star Graph	S_n	2	(Lestari et al., 2023)
17	Path Graph	P_n	$n - 1$	(Lestari et al., 2023)
18	Book Graph	B_n	$n + 1$	(Lestari et al., 2023)
19	Triangular Book Graph	TB_n	n	(Lestari et al., 2025)
20	Ladder Graph	L_n	n	(Lestari et al., 2025)

Tabel 2.3 Penelitian terdahulu $srac(G)$

No.	Graf	Simbol	$srac(G)$	Referensi
1	<i>Jahangir Graph</i>	J_n	$n + 3$	(Lestari et al., 2023)
2	<i>Semi-Jahangir Graph</i>	SJ_n	$n + 3$	(Lestari et al., 2023)
3	<i>Friendship Graph</i>	Fr_n	$2n + 1$	(Lestari et al., 2023)
4	<i>Fan Graph</i>	F_n	$4, n = 3$ $n, n \geq 4$	(Lestari et al., 2023)
5	<i>Star Graph</i>	S_n	n	(Lestari et al., 2023)
6	<i>Path Graph</i>	P_n	$n - 1$	(Lestari et al., 2023)
7	<i>Cycle Graph</i>	C_n	$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n \equiv 1,2 \pmod{4}$ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n \equiv 0,3 \pmod{4}$	(Lestari et al., 2023)
8	<i>Book Graph</i>	B_n	$n + 1$	(Lestari et al., 2025)
9	<i>Triangular Book Graph</i>	TB_n	n	(Lestari et al., 2025)
10	<i>Ladder Graph</i>	L_n	n	(Lestari et al., 2025)

Berdasarkan penelitian-penelitian terdahulu, belum ditemukan penelitian yang memanfaatkan bobot *Strong Rainbow Antimagic Coloring* (SRAC) sebagai *keystream* pada algoritma *stream cipher* untuk proses enkripsi dan dekripsi citra RGB. Oleh karena itu, penelitian ini mengembangkan *keystream* berbasis bobot SRAC pada graf roda, graf helm, graf *shell-butterfly*, graf *octopus*, dan graf *lotus* untuk diterapkan dalam skema *stream cipher* berbasis operasi XOR.