

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan hasil penelitian mengenai analisis *strong rainbow antimagic coloring* dan aplikasinya pada enkripsi citra RGB menggunakan *stream cipher*. Penelitian ini menghasilkan teorema $src(G)$ dan $srac(G)$ dengan melakukan pelabelan sesuai ketentuan *strong rainbow connection number* dan *strong rainbow antimagic connection number*.

4.1 Nilai Strong Rainbow Coloring (SRC)

Untuk menentukan *strong rainbow antimagic connection number*, terlebih dahulu diperlukan *strong rainbow connection number*. Karena nilai src untuk graf *shell-butterfly* $BF_{2,n}$, graf *octopus* O_n , dan graf lotus L_n belum pernah dikaji sebelumnya, maka akan ditentukan melalui teorema berikut.

4.1.1 Strong Rainbow Coloring pada Graf Shell-Butterfly

Teorema 4.1. Misalkan $BF_{2,n}$ adalah graf *shell-butterfly* dengan $n \geq 4$, maka *strong rainbow connection number* dari $BF_{2,n}$ adalah $src(BF_{2,n}) = 2n + 2$.

Pembuktian. Graf *shell-butterfly* adalah graf terhubung dengan $V(BF_{2,n}) = \{a\} \cup \{a_i; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(BF_{2,n}) = \{aa_i; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{ay_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Kardinalitas dari $BF_{2,n}$ adalah $|V(BF_{2,n})| = 2n + 3$ dan $|E(BF_{2,n})| = 4n$. Selanjutnya didefinisikan fungsi pewarnaan sisi $c: E(BF_{2,n}) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(BF_{2,n})|\}$ sebagai berikut

$$c(e) = \begin{cases} c(aa_i) = i, & 1 \leq i \leq 2, \\ c(ax_i) = i + 2, & 1 \leq i \leq n, \\ c(ay_i) = i + 2, & 1 \leq i \leq n, \\ c(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \text{ ganjil,} \\ 2, & \text{jika } i \text{ genap,} \end{cases} \\ c(y_i y_{i+1}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \text{ ganjil,} \\ 2, & \text{jika } i \text{ genap.} \end{cases} \end{cases}$$

Karena fungsi pewarnaan sisi mencapai nilai maksimum $2n + 2$, diperoleh batas atas $src(BF_{2,n}) \leq 2n + 2$. Selanjutnya, berdasarkan definisi koneksi *strong rainbow*, setiap lintasan terpendek antara dua titik u dan v harus melalui sisi-sisi dengan warna berbeda, sehingga berlaku $src(BF_{2,n}) \geq diam(BF_{2,n})$. Karena $diam(BF_{2,n}) = 2n + 2$, maka diperoleh $src(BF_{2,n}) \geq 2n + 2$. Dengan menggabungkan kedua batas tersebut diperoleh $src(BF_{2,n}) = 2n + 2$.

Untuk memverifikasi bahwa setiap pasangan titik memiliki lintasan terpendek dengan warna yang saling berbeda, dapat dilihat pada Tabel 4.3 di Halaman 41. Adapun ilustrasi pewarnaan *strong rainbow* pada graf *shell-butterfly* $BF_{2,4}$ disajikan pada Lampiran 2. Sebagai contoh, graf $BF_{2,4}$ memiliki 10 warna sisi dan setiap pasangan titiknya memiliki lintasan terpendek dengan warna sisi yang berbeda, sehingga diperoleh $src(BF_{2,4}) = 10$. Ilustrasi tersebut menunjukkan bahwa pewarnaan yang diberikan memenuhi Teorema 4.1.

4.1.2 Strong Rainbow Coloring pada Graf Octopus

Teorema 4.2. Misalkan O_n adalah graf octopus dengan $n \geq 2$, maka *strong rainbow connection number* dari O_n adalah $src(O_n) = 2n$.

Pembuktian. Graf octopus adalah graf terhubung dengan $V(O_n) = \{x\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(O_n) = \{xx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{xy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Kardinalitas dari O_n adalah $|V(O_n)| = 2n + 1$ dan $|E(O_n)| = 3n - 1$. Selanjutnya didefinisikan fungsi pewarnaan sisi $c: E(O_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(O_n)|\}$ sebagai berikut

$$c(e) = \begin{cases} c(xx_i) = i + n, & 1 \leq i \leq n, \\ c(xy_i) = i, & 1 \leq i \leq n, \\ c(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \text{ ganjil,} \\ 2, & \text{jika } i \text{ genap.} \end{cases} \end{cases}$$

Karena fungsi pewarnaan sisi mencapai nilai maksimum $2n$, diperoleh batas atas $src(O_n) \leq 2n$. Selanjutnya, berdasarkan definisi koneksi *strong rainbow*, setiap lintasan terpendek antara dua titik u dan v harus melalui sisi-sisi dengan warna berbeda, sehingga berlaku $src(O_n) \geq diam(O_n)$. Karena

$diam(O_n) = 2n$, maka diperoleh $src(O_n) \geq 2n$. Dengan menggabungkan kedua batas tersebut diperoleh $src(O_n) = 2n$.

Untuk memverifikasi bahwa setiap pasangan titik memiliki lintasan terpendek dengan warna yang saling berbeda, dapat dilihat pada Tabel 4.4 di Halaman 44. Adapun ilustrasi pewarnaan *strong rainbow* pada graf octopus O_n disajikan pada Lampiran 2. Sebagai contoh, graf O_4 memiliki 8 warna sisi dan setiap pasangan titiknya memiliki lintasan terpendek dengan warna sisi yang berbeda, sehingga diperoleh $src(O_4) = 8$. Ilustrasi tersebut menunjukkan bahwa pewarnaan yang diberikan memenuhi Teorema 4.2.

4.1.3 Strong Rainbow Coloring pada Graf Lotus

Teorema 4.3. Misalkan L_n adalah graf lotus dengan $n \geq 2$, maka *strong rainbow connection number* dari L_n adalah $src(L_n) = n + 1$.

Pembuktian. Graf lotus adalah graf terhubung dengan $V(L_n) = \{x\} \cup \{y\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n-1\}$ dan $E(L_n) = \{xy\} \cup \{xx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Kardinalitas dari L_n adalah $|V(L_n)| = 2n + 1$ dan $|E(L_n)| = 3n - 1$. Selanjutnya didefinisikan fungsi pewarnaan sisi $c: E(L_n) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(L_n)|\}$ sebagai berikut.

$$c(e) = \begin{cases} c(xy) = 1, \\ c(xx_i) = i + 1, & 1 \leq i \leq n, \\ c(x_iy_i) = 1, & 1 \leq i \leq n, \\ c(y_ix_{i+1}) = 2, & 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Karena fungsi pewarnaan sisi mencapai nilai maksimum $n + 1$, diperoleh batas atas $src(L_n) \leq n + 1$. Selanjutnya, berdasarkan definisi koneksi *strong rainbow*, setiap lintasan terpendek antara dua titik u dan v harus melalui sisi-sisi dengan warna berbeda, sehingga berlaku $src(L_n) \geq diam(L_n)$. Karena $diam(L_n) = n + 1$, maka diperoleh $src(L_n) \geq n + 1$. Dengan menggabungkan kedua batas tersebut diperoleh $src(L_n) = n + 1$.

Untuk memverifikasi bahwa setiap pasangan titik memiliki lintasan terpendek dengan warna yang saling berbeda, dapat dilihat pada Tabel 4.5 di Halaman 47. Adapun ilustrasi pewarnaan *strong rainbow* pada graf lotus L_n

disajikan pada Lampiran 2. Sebagai contoh, graf L_n memiliki 5 warna sisi dan setiap pasangan titiknya memiliki lintasan terpendek dengan warna sisi yang berbeda, sehingga diperoleh $src(L_4) = 5$. Ilustrasi tersebut menunjukkan bahwa pewarnaan yang diberikan memenuhi Teorema 4.3.

4.2 Nilai *Strong Rainbow Antimagic Coloring* (SRAC)

Penelitian ini menghasilkan lima teorema tentang *strong rainbow antimagic connection number*. Berikut hasil teorema dan pembuktian tentang *strong rainbow antimagic connection number* pada graf roda W_n , graf helm H_n , graf *shell-butterfly* $BF_{2,n}$, graf *octopus* O_n , dan graf lotus L_n .

4.2.1 *Strong Rainbow Antimagic Coloring* pada Graf Roda

Teorema 4.4. Misalkan W_n adalah graf roda (*wheel graph*), maka *strong rainbow antimagic connection number* dari W_n untuk $n \geq 3$ adalah $src(W_n) = n + 1$.

Bukti. Graf W_n adalah graf roda yang memiliki himpunan simpul $V(W_n) = \{x\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(W_n) = \{xx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$. Dengan demikian, $|V(W_n)| = n + 1$, $|E(W_n)| = 2n$ dan $\Delta(W_n) = n$ dan $src(W_n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Untuk membuktikan bahwa $src(W_n) = n + 1$, ditunjukkan batas bawah dan batas atas. Berdasarkan Lemma 1, diperoleh batas bawah

$$src(W_n) \geq \max\{src(W_n), \Delta(W_n)\} = \max\left\{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor, n\right\} = n.$$

Penggunaan hanya n warna tidak cukup karena seluruh n sisi jari-jari (*spokes*) harus memiliki warna yang berbeda agar lintasan terpendek melalui pusat bersifat *rainbow*. Akibatnya, tidak ada warna tersisa untuk sisi lingkaran luar (*rim edges*), sehingga beberapa pasangan titik pada siklus tidak memiliki lintasan terpendek *rainbow*. Dengan menambahkan satu warna, diperoleh $src(W_n) = n + 1$. Selanjutnya, untuk menunjukkan batas atas $src(W_n) \leq n + 1$, definisikan pelabelan simpul $f: V(W_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(W_n)|\}$.

Kasus 1. Jika n genap, maka

$$f(x) = \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor,$$

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & \text{jika } i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-1, \\ n+2 - \frac{i}{2}, & \text{jika } i \text{ genap}, 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Kita dapat menentukan bobot sisi dari pelabelan simpul, untuk n genap yaitu

$$w(xx_i) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n+i+3}{2} \right\rfloor, & \text{jika } i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-1, \\ \frac{3n+6-i}{2}, & \text{jika } i \text{ genap}, 2 \leq i \leq n, \end{cases}$$

$$w(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} n+2, & \text{jika } i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-1, \\ n+3, & \text{jika } i \text{ genap}, 2 \leq i \leq n-2, \end{cases}$$

$$w(x_n x_1) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3, \text{ untuk } i = n.$$

Bobot sisi yang telah ditentukan membentuk suatu pewarnaan *strong rainbow antimagic* pada graf, sehingga banyaknya bobot sisi yang berbeda dapat ditentukan sebagai berikut

$$W_1^{\text{ganjil}} = \{w(xx_i)\} = \left\{ \frac{n+4}{2}, \frac{n+6}{2}, \frac{n+8}{2}, \dots, n+1 \right\},$$

$$U(W_1^{\text{ganjil}}) = a + (|W_1^{\text{ganjil}}| - 1) \cdot b,$$

$$n+1 = \frac{n+4}{2} + (|W_1^{\text{ganjil}}| - 1) \cdot 1,$$

$$n+1 = \frac{n+4}{2} + |W_1^{\text{ganjil}}| - 1,$$

$$|W_1^{\text{ganjil}}| = \frac{2n+2-n-4}{2} + 1 = \frac{n}{2},$$

$$W_1^{\text{genap}} = \{w(xx_i)\} = \left\{ \frac{3n+4}{2}, \frac{3n+2}{2}, \frac{3n}{2}, \dots, n+3 \right\},$$

$$U(W_1^{\text{genap}}) = a + (|W_1^{\text{genap}}| - 1) \cdot b,$$

$$n+3 = \frac{3n+4}{2} + (|W_1^{\text{genap}}| - 1) \cdot (-1),$$

$$n+3 = \frac{3n+4}{2} - |W_1^{\text{genap}}| + 1,$$

$$|W_1^{\text{genap}}| = \frac{3n+4-2n-6}{2} + 1 = \frac{n}{2}.$$

Dengan demikian,

$$|W_1| = |W_1^{\text{ganjil}}| + |W_1^{\text{genap}}| = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

Selain itu,

$$W_2 = \{w(x_i x_{i+1})\} = \{n+2, n+3\}, \text{ jadi } |W_2| = 2.$$

Terakhir,

$$W_3 = \{w(x_n x_i)\} = \left\{\left\lfloor \frac{n}{2} + 3 \right\rfloor\right\}, \text{ untuk } i = n, \text{ sehingga } |W_3| = 1.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa irisan dari ketiga himpunan W_1, W_2 , dan W_3 adalah kosong, yaitu $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \emptyset$. Untuk membuktikannya, terlebih dahulu dianalisis struktur masing-masing himpunan. Himpunan W_1 dapat dituliskan sebagai $W_1 = \left\{\frac{n}{2} + 2, \dots, \frac{3n}{2} + 2\right\}$ karena merupakan gabungan dari $W_1^{ganjil} = \left\{\frac{n}{2} + 2, \dots, n + 1\right\}$ dan $W_1^{genap} = \left\{n + 3, \dots, \frac{3n}{2} + 2\right\}$. Dengan demikian, $W_1 = \left\{\frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 3, \dots, \frac{3n}{2} + 2\right\}$, dengan $|W_1| = n$. Sementara itu, $W_2 = \{n + 2, n + 3\}$ dan karena n genap, maka $\left\lfloor \frac{n}{2} + 3 \right\rfloor = \frac{n}{2} + 3$ sehingga diperoleh $W_3 = \left\{\frac{n}{2} + 3\right\}$.

Dengan membandingkan rentang nilainya, elemen tunggal pada W_3 berada dalam rentang W_1 , karena $\frac{n}{2} + 2 \leq \frac{n}{2} + 3 \leq n + 1 \leq \frac{3n}{2} + 2$, maka $W_3 \subseteq W_1$ dan $W_3 \subseteq W_1 \cup W_2$. Sebaliknya, elemen pada W_3 tidak termasuk dalam W_2 , karena $\frac{n}{2} + 3 < n + 2, \forall n > 2$. Akibatnya, diperoleh $W_2 \cap W_3 = \emptyset$, sehingga $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \emptyset$. Selanjutnya, dengan membandingkan rentang W_1 dan W_2 , diperoleh bahwa $n + 3 \in W_1$, sedangkan $n + 2 \notin W_1$. Dengan demikian, $W_1 \cap W_2 = \{n + 3\}$. Karena $|W_1| = n, |W_2| = 2$, dan $|W_1 \cap W_2| = 1$ maka total banyaknya bobot berbeda adalah

$$|W_1 \cup W_2| = |W_1| + |W_2| - |W_1 \cap W_2| = n + 2 - 1 = n + 1.$$

Penambahan himpunan W_3 tidak mengubah jumlah tersebut karena $W_3 \subseteq W_1$, sehingga jumlah akhir bobot sisi yang berbeda tetap $|W_1 \cup W_2| \cup W_3| = n + 1$.

Kasus 2. Jika n ganjil, maka

$$f(x) = \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor,$$

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & \text{jika } i \text{ ganjil}, 1 \leq i < n, \\ \frac{i+5}{2}, & \text{jika } i \text{ ganjil}, i = n, \\ n + 2 - \frac{i}{2}, & \text{jika } i \text{ genap}, 2 \leq i < n - 1, \\ \frac{n+1}{2}, & \text{jika } i \text{ genap}, i = n - 1. \end{cases}$$

Untuk n ganjil, bobot sisi ditentukan sebagai berikut

$$w(xx_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+i+3}{2} \right\rceil, & \text{jika } i \text{ ganjil}, 1 \leq i < n, \\ i + 4, & \text{jika } i \text{ ganjil}, i = n, \\ \frac{3n+6-i}{2}, & \text{jika } i \text{ genap}, 2 \leq i < n - 1, \\ \left\lceil \frac{2n+3}{2} \right\rceil, & \text{jika } i \text{ genap}, i = n - 1, \end{cases}$$

$$w(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} n + 2, & \text{jika } i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n - 2, \\ i + 2, & \text{jika } i \text{ ganjil}, i = n - 2, \\ n + 3, & \text{jika } i \text{ genap}, 2 \leq i < n - 1, \end{cases}$$

$$w(x_n x_1) = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + 3, \text{ untuk } i = n.$$

Bobot sisi yang telah ditentukan membentuk suatu pewarnaan *strong rainbow antimagic* pada graf, sehingga banyaknya bobot sisi berbeda untuk n ganjil dapat ditentukan sebagai berikut

$$W_{1,1}^{ganjil} = \{w(xx_i)\} = \left\{ \frac{n+5}{2}, \frac{n+7}{2}, \frac{n+9}{2}, \dots, n+1 \right\}, 1 \leq i < n,$$

$$U(W_{1,1}^{ganjil}) = a + (|W_{1,1}^{ganjil}| - 1) \cdot b,$$

$$n+1 = \frac{n+5}{2} + (|W_{1,1}^{ganjil}| - 1) \cdot 1,$$

$$n+1 = \frac{n+5}{2} + |W_{1,1}^{ganjil}| - 1,$$

$$|W_{1,1}^{ganjil}| = \frac{2n+2-n-5}{2} + 1 = \frac{n-1}{2},$$

$$|W_{1,2}^{ganjil}| = 1,$$

$$|W_{1,3}^{genap}| = \{w(xx_i)\} = \left\{ \frac{3n+5}{2}, \frac{3n+3}{2}, \frac{3n+1}{2}, \dots, n+5 \right\}, 2 \leq i < n-1,$$

$$U(W_{1,3}^{genap}) = a + (|W_{1,3}^{genap}| - 1) \cdot b,$$

$$n+5 = \frac{3n+5}{2} + (|W_{1,3}^{genap}| - 1) \cdot (-1),$$

$$\begin{aligned}
n + 5 &= \frac{3n + 5}{2} - |W_{1,3}^{genap}| + 1, \\
|W_{1,3}^{genap}| &= \frac{3n + 5 - 2n - 10}{2} + 1 = \frac{n - 3}{2}, \\
W_{1,4}^{genap} &= \left\{ \left\lceil \frac{2n + 3}{2} \right\rceil \right\}, i = n - 1, \\
|W_{1,4}^{genap}| &= 1.
\end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$|W_1| = |W_{1,1}^{ganjil}| + |W_{1,2}^{ganjil}| + |W_{1,3}^{genap}| + |W_{1,4}^{genap}| = n.$$

Selain itu,

$$W_2 = \{w(x_i x_{i+1})\} = \{n + 2, n + 3\}, \text{ maka } |W_2| = 2.$$

Terakhir,

$$W_3 = \{w(x_n x_i)\} = \left\{ \left\lceil \frac{n}{2} + 3 \right\rceil \right\}, i = n, \text{ maka } |W_3| = 1.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa irisan dari ketiga himpunan W_1, W_2 dan W_3 adalah kosong, yaitu $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \emptyset$. Untuk membuktikannya, terlebih dahulu dianalisis struktur masing-masing himpunan. Untuk n ganjil, himpunan W_1 dapat diuraikan menjadi empat bagian yaitu $W_1 = W_{1,1} \cup W_{1,2} \cup W_{1,3} \cup W_{1,4}$ dengan seluruh rentangnya $W_1 = \left\{ \frac{n+5}{2}, \dots, \frac{3n+5}{2} \right\}$, karena $|W_{1,1}| = \frac{n-1}{2}, |W_{1,2}| = 1, |W_{1,3}| = \frac{n-3}{2}, |W_{1,4}| = 1$. Sementara itu, diperoleh $W_2 = \{n + 2, n + 3\}$ dan $W_3 = \left\{ \frac{n+7}{2} \right\}$.

Dengan membandingkan rentang nilainya, elemen tunggal pada W_3 berada dalam rentang W_1 , karena $\frac{n+7}{2} < n + 2, \forall n > 1$. Akan tetapi, W_3 tidak memiliki elemen yang sama dengan W_2 , sehingga diperoleh $W_2 \cap W_3 = \emptyset$, dan akibatnya $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \emptyset$. Selanjutnya, dari komponen $W_{1,4} = \{n + 2\} \subset W_1$, serta karena $W_{1,1}$ dan $W_{1,3}$ tidak memuat elemen $n + 3$, maka diperoleh $n + 2 \in W_1 \cap W_2$ sedangkan $n + 3 \notin W_1$. Dengan demikian $W_1 \cap W_2 = \{n + 2\}$. Karena $|W_1| = n, |W_2| = 2$, dan $|W_1 \cap W_2| = 1$ maka jumlah bobot sisi berbeda adalah

$$|W_1 \cup W_2| = |W_1| + |W_2| - |W_1 \cap W_2| = n + 2 - 1 = n + 1.$$

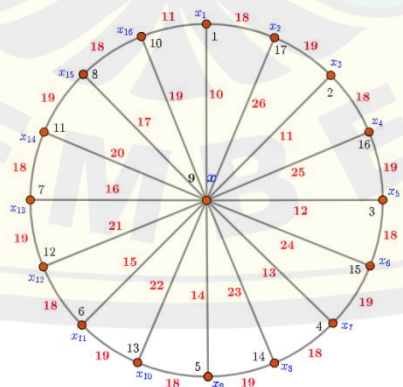
Penambahan himpunan W_3 tidak mengubah jumlah tersebut karena $W_3 \subseteq W_1$ sehingga $|W_1 \cup W_2 \cup W_3| = n + 1$.

Hal ini menunjukkan bahwa fungsi bobot sisi $f: V(W_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(W_n)|\} = \{1, 2, 3, \dots, n + 1\}$ menginduksi suatu pewarnaan *strong rainbow antimagic* dengan $n + 1$ warna. Oleh karena itu $srac(W_n) \leq n + 1$. Dengan menggabungkan kedua batas yang diperoleh, didapatkan nilai eksak $srac(W_n) = n + 1$.

Untuk menunjukkan bahwa setiap pasangan titik memiliki lintasan terpendek dengan warna sisi yang berbeda, dapat dilihat pada Tabel 4.1. Berdasarkan tabel tersebut, seluruh pasangan titik pada W_n memenuhi kondisi lintasan *strong rainbow*. Oleh karena itu, dari fungsi bobot sisi yang telah didefinisikan dapat disimpulkan bahwa $srac(W_n) = n + 1$. Ilustrasi pewarnaan *strong rainbow antimagic* pada graf roda W_{16} dapat dilihat pada Gambar 4.1. Pada graf tersebut digunakan 17 warna sisi, dan setiap pasangan titik terhubung oleh lintasan terpendek dengan warna yang berbeda. Hal ini menunjukkan bahwa $srac(W_{16}) = 17$. Dengan demikian, ilustrasi tersebut telah memenuhi Teorema 4.4.

Tabel 4.1 Lintasan *strong rainbow* setiap dua simpul pada graf roda

Kasus	Simpul Awal	Simpul Akhir	Jalur Terpendek	Kondisi
1	x	x_i	xx_i	$1 \leq i \leq n$
2	x_i	x_{i+1}	$x_i x_{i+1}$	$1 \leq i \leq n - 1$
3	x_i	x_j	x_i, x, x_j	$i \neq j, i - j \geq 2$
4	x_n	x_1	$x_n x_1$	Penutup siklus



Gambar 4.1 *Strong rainbow antimagic coloring* pada graf roda W_{16}

4.2.2 Strong Rainbow Antimagic Coloring pada Graf Helm

Teorema 4.5. Misalkan H_n adalah graf helm dengan $n \geq 4$, maka *strong rainbow antimagic connection number* dari H_n adalah $\text{srac}(H_n) \leq 2n - \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor$.

Pembuktian. Graf H_n adalah graf helm yang memiliki himpunan simpul $V(H_n) = \{x\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(H_n) = \{xx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n\}$. Dengan demikian, $|V(H_n)| = 2n + 1$, $|E(H_n)| = 3n$ dan $\Delta(H_n) = n$. Kita definisikan pelabelan simpul $f: V(H_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(H_n)|\}$.

Kasus 1. Jika n genap, maka

$$\begin{aligned} f(x) &= \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor, \\ f(x_i) &= \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & i \text{ ganjil}, \\ n+2 - \frac{i}{2}, & i \text{ genap}, \end{cases} \\ f(y_i) &= \begin{cases} n+1 + \left(\frac{i+1}{2}\right), & i \text{ ganjil}, \\ 2n+2 - \left(\frac{i}{2}\right), & i \text{ genap}. \end{cases} \end{aligned}$$

Kita dapat menentukan bobot sisi dari pelabelan simpul, untuk n genap yaitu

$$\begin{aligned} w(xx_i) &= \begin{cases} \left\lfloor \frac{n+i+3}{2} \right\rfloor, & i \text{ ganji}, \\ \frac{3n+6-i}{2}, & i \text{ genap}, \end{cases} \\ w(x_iy_i) &= \begin{cases} n+i+2, & i \text{ ganjil}, \\ 3n+4-i, & i \text{ genap}, \end{cases} \\ w(x_ix_{i+1}) &= \begin{cases} n+2, & i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-1, \\ n+3, & i \text{ genap}, 1 \leq i < n-1, \end{cases} \\ w(x_nx_1) &= \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 3. \end{aligned}$$

Bobot sisi yang telah ditentukan membentuk suatu pewarnaan *strong rainbow antimagic* pada graf, sehingga banyaknya bobot sisi yang berbeda untuk n genap dapat ditentukan sebagai berikut

$$W_1^{\text{ganjil}} = \{w(xx_i)\} = \left\{ \frac{n+4}{2}, \frac{n+6}{2}, \frac{n+8}{2}, \dots, n+1 \right\},$$

$$U(W_1^{ganjil}) = a + (|W_1^{ganjil}| - 1) \cdot b,$$

$$n + 1 = \frac{n + 4}{2} + (|W_1^{ganjil}| - 1) \cdot 1,$$

$$n + 1 = \frac{n + 4}{2} + |W_1^{ganjil}| - 1,$$

$$|W_1^{ganjil}| = \frac{2n + 2 - n - 4}{2} + 1 = \frac{n}{2},$$

$$W_1^{genap} = \{w(xx_i)\} = \left\{ \frac{3n + 4}{2}, \frac{3n + 2}{2}, \frac{3n}{2}, \dots, n + 3 \right\},$$

$$U(W_1^{genap}) = a + (|W_1^{genap}| - 1) \cdot b,$$

$$n + 3 = \frac{3n + 4}{2} + (|W_1^{genap}| - 1)(-1),$$

$$n + 3 = \frac{3n + 4}{2} - |W_1^{genap}| + 1,$$

$$|W_1^{genap}| = \frac{3n + 4 - 2n - 6}{2} + 1 = \frac{n}{2}.$$

Dengan demikian,

$$|W_1| = ||W_1^{ganjil}|| + ||W_1^{genap}|| = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

Selanjutnya,

$$W_2^{ganjil} = \{w(x_i y_i)\} = \{n + 3, n + 5, n + 7, \dots, 2n + 1\},$$

$$U(W_2^{ganjil}) = a + (|W_2^{ganjil}| - 1) \cdot b,$$

$$2n + 1 = n + 3 + (|W_2^{ganjil}| - 1) \cdot 2,$$

$$2n + 1 = n + 1 + 2|W_2^{ganjil}|,$$

$$|W_2^{ganjil}| = \frac{2n + 1 - n - 1}{2} = \frac{n}{2},$$

$$W_2^{genap} = \{w(x_i y_i)\} = \{3n + 2, 3n, 3n - 2, \dots, 2n + 4\},$$

$$U(W_2^{genap}) = a + (|W_2^{genap}| - 1) \cdot b,$$

$$2n + 4 = 3n + 3 + (|W_2^{genap}| - 1) \cdot (-2),$$

$$2n + 4 = 3n + 2 - 2(|W_2^{genap}| - 1),$$

$$2(|W_2^{genap}| - 1) = n - 2,$$

$$|W_2^{genap}| = \frac{n - 2}{2} + 1 = \frac{n}{2}.$$

Dengan demikian,

$$|W_2| = |W_2^{ganjil}| + |W_2^{genap}| = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

Selain itu,

$$W_3 = \{w(x_i x_{i+1})\} = \{n+2, n+3\}, \text{ maka } |W_3| = 2.$$

Terakhir,

$$W_4 = \{w(x_n x_i)\} = \left\{ \left\lfloor \frac{n}{2} + 3 \right\rfloor \right\}, i = n, \text{ maka } |W_4| = 1.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa irisan dari keempat himpunan W_1, W_2, W_3 dan W_4 adalah kosong, yaitu $W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap W_4 = \emptyset$. Untuk membuktikannya, terlebih dahulu dianalisis struktur masing-masing himpunan.

Untuk n genap, himpunan bobot W_1 memiliki rentang $W_1 = \left\{ \frac{n}{2} + 2, \dots, \frac{3n}{2} + 2 \right\}$,

sehingga merupakan interval bilangan bulat $W_1 = \left\{ \frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 3, \dots, \frac{3n}{2} + 2 \right\}$

dengan $|W_1| = n$. Himpunan W_2 terdiri dari dua barisan yang saling berselang-seling, yaitu bagian ganjil dari $n+3$ sampai $2n+1$ dan bagian genap dari $2n+4$ sampai $3n+2$, sehingga rentangnya adalah $W_2 = \{n+2, \dots, 3n+2\}$ dengan $|W_2| = n$. Sementara itu, diperoleh $W_3 = \{n+2, n+3\}$ dan $W_4 = \left\{ \frac{n}{2} + 3 \right\}$. Karena $\frac{n}{2} + 2 \leq \frac{n}{2} + 3 \leq \frac{3n}{2} + 2$, maka $W_4 \subseteq W_1$, sehingga secara

langsung diperoleh $W_4 \subseteq W_3 \cup W_1$. Sebaliknya, elemen pada W_4 lebih kecil dari elemen minimum pada W_3 , yaitu $\frac{n}{2} + 3 < n+2$, maka $W_4 \cap W_3 = \emptyset$.

Selanjutnya, berdasarkan rentang W_1 terlihat bahwa $n+3 \in W_1$, sedangkan $n+2 \notin W_1$ karena W_1 langsung berpindah dari $n+1$ ke $n+3$. Maka $W_1 \cap W_3 = \{n+3\}$.

Struktur aritmetika dari barisan-barisan tersebut menyebabkan duplikasi bobot terjadi secara periodik, dengan reduksi satu blok pada setiap siklus sepanjang 5, yaitu sebanyak $\left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor$. Karena itu, jumlah akhir bobot berbeda diperoleh dari total kandidat awal $2n$ dikurangi jumlah duplikasi tersebut. Dengan demikian, banyaknya bobot sisi berbeda pada graf untuk n genap adalah

$$|W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4| = 2n - \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor.$$

Kasus 2. Jika n ganjil, maka

$$f(x) = \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor,$$

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, & i \text{ ganjil}, 1 \leq i < n, \\ \frac{i+5}{2}, & i \text{ ganjil}, i = n, \\ n + 2 - \frac{i}{2}, & i \text{ genap}, 1 \leq i < n-1, \\ \frac{n+1}{2}, & i \text{ genap}, i = n-1, \end{cases}$$

$$f(y_i) = \begin{cases} n + 1 + \left(\frac{i+1}{2}\right), & i \text{ ganjil}, \\ 2n + 2 - \left(\frac{i}{2}\right), & i \text{ genap}. \end{cases}$$

Untuk n ganjil, bobot sisi ditentukan sebagai berikut

$$w(xx_i) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n+i+3}{2} \right\rfloor, & i \text{ ganjil}, 1 \leq i < n, \\ i + 4, & i \text{ ganjil}, i = n, \\ \frac{3n+6-i}{2}, & i \text{ genap}, 1 \leq i < n-1, \\ \left\lfloor \frac{2n+3}{2} \right\rfloor, & i \text{ genap}, i = n-1, \end{cases}$$

$$w(x_i y_i) = \begin{cases} n + i + 2, & i \text{ ganjil}, 1 \leq i < n, \\ 2n + 4, & i \text{ ganjil}, i = n, \\ 3n + 4 - i, & i \text{ genap}, 1 \leq i < n-1, \\ 2n + 3, & i \text{ genap}, i = n-1, \end{cases}$$

$$w(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} n + 2, & i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n-2, \\ i + 2, & i \text{ ganjil}, i = n-2, \\ n + 3, & i \text{ genap}, 1 \leq i < n-1, \end{cases}$$

$$w(x_n x_1) = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + 3.$$

Bobot sisi yang telah ditentukan membentuk suatu pewarnaan *strong rainbow antimagic* pada graf, sehingga banyaknya bobot sisi berbeda untuk n ganjil dapat ditentukan sebagai berikut.

$$W_{1,1}^{ganjil} = \{w(xx_i)\} = \left\{ \frac{n+5}{2}, \frac{n+7}{2}, \frac{n+9}{2}, \dots, \frac{2n+1}{2} \right\}, 1 \leq i < n,$$

$$U(W_{1,1}^{ganjil}) = a + (|W_{1,1}^{ganjil}| - 1) \cdot b,$$

$$\frac{2n+1}{2} = \frac{n+5}{2} + (|W_{1,1}^{ganjil}| - 1) \cdot 1,$$

$$|W_{1,1}^{ganjil}| - 1 = \frac{2n+1}{2} - \frac{n+5}{2},$$

$$|W_{1,1}^{ganjil}| = \frac{n-4}{2} + 1 = \frac{n-2}{2},$$

$$W_{1,2}^{ganjil} = \{w(xx_i)\} = \{n+4\}, i = n \text{ maka } |W_{1,2}^{ganjil}| = 1,$$

$$W_{1,3}^{genap} = \{w(xx_i)\} = \left\{ \frac{3n+5}{2}, \frac{3n+3}{2}, \frac{3n+1}{2}, \dots, \frac{2n+10}{2} \right\}, 1 \leq i < n-1,$$

$$U(W_{1,3}^{genap}) = a + (|W_{1,3}^{genap}| - 1) \cdot b,$$

$$\frac{2n+10}{2} = \frac{3n+5}{2} + (|W_{1,3}^{genap}| - 1)(-1),$$

$$|W_{1,3}^{genap}| = \frac{n-5}{2} + 1 = \frac{n-3}{2},$$

$$W_{1,4}^{genap} = \{w(xx_i)\} = \{n+2\}, i = n-1 \text{ maka } |W_{1,4}^{genap}| = 1.$$

Dengan demikian,

$$W_1 = W_{1,1}^{ganjil} + W_{1,2}^{ganjil} + W_{1,3}^{genap} + W_{1,4}^{genap} = n.$$

Selanjutnya,

$$W_{2,1}^{ganjil} = \{w(x_i y_i)\} = \{n+3, n+5, n+7, \dots, 2n\}, 1 \leq i < n,$$

$$U(W_{2,1}^{ganjil}) = a + (|W_{2,1}^{ganjil}| - 1) \cdot b,$$

$$2n = n+3 + (|W_{2,1}^{ganjil}| - 1) \cdot 2,$$

$$2|W_{2,1}^{ganjil}| - 2 = n-3,$$

$$|W_{2,1}^{ganjil}| = \frac{n-1}{2},$$

$$W_{2,2}^{ganjil} = \{w(x_i y_i)\} = \{n+4\}, i = n \text{ maka } |W_{2,2}^{ganjil}| = 1,$$

$$W_{2,3}^{genap} = \{w(x_i y_i)\} = \{3n+2, 3n, 3n-2, \dots, 2n+7\}, 1 \leq i < n-1,$$

$$U(W_{2,3}^{genap}) = a + (|W_{2,3}^{genap}| - 1) \cdot b,$$

$$2n+7 = 3n+2 + (|W_{2,3}^{genap}| - 1)(-2),$$

$$|W_{2,3}^{genap}| = \frac{n-3}{2},$$

$$W_{2,4}^{genap} = \{w(x_i y_i)\} = \{2n+3\}, i = n-1 \text{ maka } |W_{2,4}^{genap}| = 1.$$

Dengan demikian,

$$W_2 = |W_{2,1}^{ganjil}| + |W_{2,2}^{ganjil}| + |W_{2,3}^{genap}| + |W_{2,4}^{genap}| = n.$$

Selain itu,

$$W_3 = \{w(x_i x_{i+1})\} = \{n+2, n+3\} \text{ maka } |W_3| = 2.$$

Terakhir,

$$W_4 = \{w(x_n x_i)\} = \left\{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3\right\}, i = n \text{ maka } |W_4| = 1.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa irisan dari keempat himpunan W_1, W_2, W_3 dan W_4 adalah kosong, yaitu $W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap W_4 = \emptyset$. Untuk n ganjil, himpunan W_1 dibangun dari empat komponen sehingga memiliki rentang $W_1 = \left\{\frac{n+5}{2}, \frac{n+7}{2}, \dots, \frac{3n+5}{2}\right\}$ dengan $|W_1| = n$. Himpunan W_2 terdiri atas barisan ganjil dari $n+3$ sampai $2n$, barisan genap dari $2n+7$ sampai $3n+2$ serta elemen tunggal $n+4$ dan $2n+3$. Oleh karena itu, rentang W_2 adalah $W_2 = \{n+3, \dots, 3n+2\}$ dengan $|W_2| = n$. Sementara itu, diperoleh $W_3 = \{n+2, n+3\}$ dan $W_4 = \left\{\frac{n+7}{2}\right\}$. Karena elemen pada W_4 berada dalam rentang W_1 , maka $W_4 \subseteq W_1$ sehingga langsung diperoleh $W_4 \subseteq W_3 \cup W_1$. Sebaliknya, karena $\frac{n+7}{2} < n+2$ maka tidak mungkin ada elemen yang sama antara W_4 dan W_3 . Dengan demikian, $W_3 \cap W_4 = \emptyset$, sehingga tidak mungkin terdapat elemen yang muncul secara bersamaan dalam keempat himpunan. Oleh karena itu, $W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap W_4 = \emptyset$. Selanjutnya, berdasarkan struktur komponen W_1 , terlihat bahwa $n+2 \in W_1$, sedangkan $n+3 \notin W_1$. Dengan demikian, $W_1 \cap W_3 = \{n+2\}$.

Struktur aritmetika dari barisan-barisan tersebut menyebabkan duplikasi bobot muncul secara periodik, dengan penghematan blok pada setiap siklus sepanjang 5, yaitu sebanyak $\left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor$. Sehingga jumlah akhir bobot sisi berbeda adalah

$$|W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4| = 2n - \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor.$$

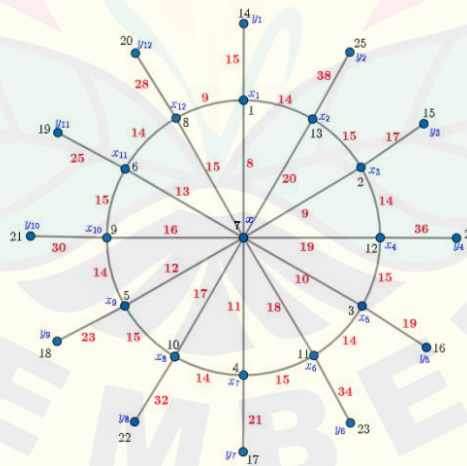
Langkah berikutnya adalah menghitung banyaknya bobot sisi berbeda yang menghasilkan pewarnaan *strong rainbow antimagic* pada graf helm H_n . Bobot sisi tersebut berada pada himpunan $w(xx_i) \cup w(x_i x_{i+1}) \cup w(x_i y_i)$. Dengan demikian, jumlah total warna berbeda dari himpunan tersebut adalah $2n - \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor$. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi bobot sisi $f: V(H_n) \rightarrow$

$\{1, 2, 3, \dots, |V(H_n)|\} = \{1, 2, 3, \dots, 2n + 1\}$ menghasilkan pewarnaan *strong rainbow antimagic* dengan $2n - \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor$ warna. Oleh karena itu, $srac(H_n) \leq 2n - \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor$.

Untuk menunjukkan bahwa setiap pasangan titik memiliki lintasan terpendek dengan warna sisi yang berbeda, dapat dilihat pada Tabel 4.2. Berdasarkan tabel tersebut, seluruh pasangan titik pada H_n memenuhi kondisi lintasan *strong rainbow*. Oleh karena itu, dari fungsi bobot sisi yang telah didefinisikan dapat disimpulkan bahwa $srac(H_n) \leq 2n - \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor$.

Tabel 4.2 Lintasan *strong rainbow* setiap dua simpul pada graf helm

Kasus	Simpul Awal	Simpul Akhir	Jalur Terpendek	Kondisi
1	x	x_i	x, x_i	$1 \leq i \leq n$
2	x	y_i	x, x_i, y_i	$1 \leq i \leq n$
3	x_i	x_{i+1}	x_i, x_{i+1}	$1 \leq i \leq n - 1$
4	x_i	x_j	x_i, x, x_j	$i \neq j, i - j \geq 2$
5	x_i	y_i	x_i, y_i	$1 \leq i \leq n$
6	x_i	y_j	x_i, y_i	$1 \leq i \leq n$
7	x_i	y_j	x_i, x, x_j, y_j	$i \neq j$
8	y_i	y_j	y_i, x_i, x, x_j, y_j	$i \neq j$



Gambar 4.2 *Strong rainbow antimagic coloring* pada graf helm H_{12}

Ilustrasi pewarnaan *strong rainbow antimagic* pada graf helm H_{12} dapat dilihat pada Gambar 4.2. Pada graf tersebut digunakan 22 warna sisi, dan setiap pasangan titik terhubung oleh lintasan terpendek dengan warna yang berbeda. Hal

ini menunjukkan bahwa $srac(H_{12}) = 22$. Dengan demikian, ilustrasi tersebut telah memenuhi Teorema 4.5.

4.2.3 Strong Rainbow Antimagic Coloring pada Graf Shell-Butterfly

Teorema 4.6. Misalkan $BF_{2,n}$ adalah graf shell-butterfly, maka *strong rainbow antimagic connection number* dari $BF_{2,n}$ untuk $n \geq 4$ adalah $srac(BF_{2,n}) = 2n + 2$.

Pembuktian. Graf $BF_{(m,n)}$ adalah graf *shell-butterfly* yang memiliki himpunan simpul $V(BF_{2,n}) = \{a\} \cup \{a_i; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(BF_{2,n}) = \{aa_i; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{ay_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Dengan demikian, $|V(BF_{2,n})| = 2n + 3$, $|E(BF_{2,n})| = 4n$, $\Delta(BF_{2,n}) = 2n + 2$, dan $src(BF_{2,n}) = \Delta = 2n + 2$. Untuk membuktikan bahwa $srac(BF_{2,n}) = 2n + 2$, ditunjukkan batas bawah dan batas atas. Berdasarkan Lemma 1, diperoleh batas bawah

$$srac(BF_{2,n}) \geq \max\{src(BF_{2,n}), \Delta(BF_{2,n})\} = \max\{2n + 2, 2n + 2\} = 2n + 2$$

Selanjutnya, untuk menunjukkan batas atas kita gunakan pelabelan simpul berikut. Kita definisikan pelabelan simpul $f: V(BF_{2,n}) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(BF_{2,n})|\}$.

Kasus 1. Jika n genap, maka

$$\begin{aligned} f(a) &= 2 \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 5, \\ f(a_i) &= i, 1 \leq i \leq n, \\ f(x_i) &= \begin{cases} 2 \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 4, & i = 1, \\ i + 1, & i \text{ genap}, \\ 2n - i + 6, & i \text{ ganjil}, 3 \leq i < n, \end{cases} \\ f(y_i) &= \begin{cases} 2 \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3, & i = 1, \\ i + 3, & i \text{ genap}, \\ 2n - i + 5, & i \text{ ganjil}, 3 \leq i < n - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Kita dapat menentukan bobot sisi dari pelabelan simpul, untuk n genap yaitu

$$w(aa_i) = (i + 5) + 2 \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, 1 \leq i \leq 2,$$

$$w(ax_i) = \begin{cases} (i+6) + 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & i \text{ genap}, \\ 2n+9, & i \text{ ganjil}, i=1, \\ 3n+11-i, & i \text{ ganjil}, 3 \leq i \leq n, \end{cases}$$

$$w(ay_i) = \begin{cases} (i+7) + 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & i \text{ genap}, \\ 2n+8, & i \text{ ganjil}, i=1, \\ 3n+10-i, & i \text{ ganjil}, 3 \leq i \leq n, \end{cases}$$

$$w(x_i x_{i+1}) = w(y_i y_{i+1}) = \begin{cases} n+7, & i=1, \\ 2n+6, & i \text{ genap}, 2 \leq i \leq n, \\ 2n+8, & i \text{ ganjil}, 2 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Bobot sisi yang telah ditentukan membentuk suatu pewarnaan *strong rainbow antimagic* pada graf, sehingga banyaknya bobot sisi berbeda untuk n genap dapat ditentukan sebagai berikut

$$W_1 = \{w(aa_i)\} = \{n+6, n+7\}, 1 \leq i \leq 2 \text{ maka } |W_1| = 2.$$

Selanjutnya,

$$W_{2,1}^{genap} = \{w(ax_i)\} = \{n+8, n+10, n+12, \dots, 2n+6\},$$

$$U(W_{2,1}^{genap}) = a + (|W_{2,1}^{genap}| - 1) \cdot b,$$

$$2n+6 = n+8 + (|W_{2,1}^{genap}| - 1) \cdot 2,$$

$$2(|W_{2,1}^{genap}| - 1) = n - 2,$$

$$|W_{2,1}^{genap}| = \frac{n}{2},$$

$$W_{2,2}^{ganjil} = \{w(ax_i)\} = \{3n+8, 3n+6, 3n+4, \dots, 2n+12\},$$

$$U(W_{2,2}^{ganjil}) = a + (|W_{2,2}^{ganjil}| - 1) \cdot b,$$

$$2n+12 = 3n+8 + (|W_{2,2}^{ganjil}| - 1)(-2),$$

$$2(|W_{2,2}^{ganjil}| - 1) = n - 4,$$

$$|W_{2,2}^{ganjil}| = \frac{n-4}{2} + 1 = \frac{n-2}{2},$$

$$W_{2,3}^{ganjil} = \{w(ax_i)\} = \{2n+9\}, i=1 \text{ maka } |W_{2,3}^{ganjil}| = 1.$$

Dengan demikian,

$$|W_2| = |W_{2,1}^{genap}| + |W_{2,2}^{ganjil}| + |W_{2,3}^{ganjil}| = \frac{n}{2} + \frac{n-2}{2} + 1 = n.$$

Selain itu,,

$$W_{3,1}^{genap} = \{w(ay_i)\} = \{n + 9, n + 11, n + 13, \dots, 2n + 7\},$$

$$U(W_{3,1}^{genap}) = a + (|W_{3,1}^{genap}| - 1) \cdot b,$$

$$2n + 7 = n + 9 + (|W_{3,1}^{genap}| - 1) \cdot 2,$$

$$2(|W_{3,1}^{genap}| - 1) = n - 2,$$

$$|W_{3,1}^{genap}| = \frac{n}{2},$$

$$W_{3,2}^{ganjil} = \{w(ay_i)\} = \{3n + 7, 3n + 5, 3n + 3, \dots, 2n + 11\},$$

$$U(W_{3,2}^{ganjil}) = a + (|W_{3,2}^{ganjil}| - 1) \cdot b,$$

$$2n + 11 = 3n + 7 + (|W_{3,2}^{ganjil}| - 1)(-2),$$

$$2(|W_{3,2}^{ganjil}| - 1) = n - 4,$$

$$|W_{3,2}^{ganjil}| = \frac{n - 4}{2} + 1 = \frac{n - 2}{2},$$

$$W_{3,3}^{ganjil} = \{w(ay_i)\} = \{2n + 8\}, i = 1 \text{ maka } |W_{3,3}^{ganjil}| = 1.$$

Dengan demikian,

$$|W_3| = |W_{3,1}^{genap}| + |W_{3,2}^{ganjil}| + |W_{3,3}^{ganjil}| = \frac{n}{2} + \frac{n - 2}{2} + 1 = n.$$

Terakhir,

$$W_4 = \{w(x_i x_{i+1})\} \cup \{w(y_i y_{i+1})\} = \{n + 7, 2n + 6, 2n + 8\} \text{ maka } |W_4| = 3.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa irisan dari keempat himpunan W_1, W_2, W_3 dan W_4 adalah kosong, yaitu $W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap W_4 = \emptyset$. Untuk membuktikannya, terlebih dahulu dianalisis struktur masing-masing himpunan. Untuk n genap, himpunan bobot W_1 memiliki rentang $W_1 = \{n + 6, n + 7\}$, dengan $|W_1| = 2$. Himpunan bobot W_2 memiliki rentang $W_2 = \{n + 8, \dots, 2n + 9, \dots, 3n + 8\}$, dengan $|W_2| = n$. Selanjutnya, himpunan bobot W_3 memiliki rentang $W_3 = \{n + 9, \dots, 2n + 8, \dots, 3n + 7\}$, dengan $|W_3| = n$. Sementara itu, diperoleh $W_4 = \{n + 7, 2n + 6, 2n + 8\}$. Setiap elemen dalam W_4 termuat dalam W_1, W_2 atau W_3 , sehingga $W_4 \subseteq W_1 \cup W_2 \cup W_3$. Selain itu, karena $W_1^{max} = n + 7 < n + 8 = W_2^{min}$, maka $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ dan $W_2 \cap W_3 = \emptyset$. Akibatnya, tidak terdapat elemen yang dapat muncul bersamaan pada keempat himpunan. Oleh karena itu, $W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap W_4 = \emptyset$.

Dengan demikian, W_1, W_2 dan W_3 saling lepas dengan $|W_1| = 2, |W_2| = n$, dan $|W_3| = n$. Karena $W_4 \subseteq W_1 \cup W_2 \cup W_3$, maka diperoleh $|W_1 \cup W_2 \cup W_3| = |W_1| + |W_2| + |W_3| = 2n + 2$. Dengan demikian, banyaknya bobot sisi berbeda pada graf untuk n genap adalah $2n + 2$.

Kasus 2. Jika n ganjil, maka

$$f(a) = 2 \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 5,$$

$$f(a_i) = i, 1 \leq i \leq n,$$

$$f(x_i) = \begin{cases} 2 \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 4, & i = 1, \\ i + 1, & i \text{ genap}, \\ 2n - i + 6, & i \text{ ganjil}, 3 \leq i < n - 1, \\ n + 3, & i \text{ ganjil}, i = n, \end{cases}$$

$$f(x_i) = \begin{cases} 2 \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3, & i = 1, \\ i + 2, & i \text{ genap}, \\ 2n - i + 5, & i \text{ ganjil}, 3 \leq i < n - 1, \\ n + 2, & i \text{ ganjil}, i = n. \end{cases}$$

Untuk n ganjil, bobot sisi ditentukan sebagai berikut

$$w(aa_i) = (i + 5) + 2 \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, 1 \leq i \leq 2,$$

$$w(ax_i) = \begin{cases} (i + 6) + 2 \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & i \text{ genap}, \\ 2n + 11, & i \text{ ganjil}, i = 1, \\ 3n + 12 - i, & i \text{ ganjil}, 3 \leq i \leq n - 2, \\ 2n + 9, & i \text{ ganjil}, i = n, \end{cases}$$

$$w(ay_i) = \begin{cases} (i + 7) + 2 \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & i \text{ genap}, \\ 2n + 10, & i \text{ ganjil}, i = 1, \\ 3n + 11 - i, & i \text{ ganjil}, 3 \leq i \leq n - 2, \\ 2n + 8, & i \text{ ganjil}, i = n, \end{cases}$$

$$w(x_i x_{i+1}) = w(y_i y_{i+1}) = \begin{cases} n + 8, & i = 1, \\ 2n + 6, & i \text{ genap}, 2 \leq i \leq n - 2, \\ 2n + 8, & i \text{ ganjil}, 2 \leq i \leq n - 1, \\ 2n + 3, & i \text{ ganjil}, i = n - 1. \end{cases}$$

Bobot sisi yang telah ditentukan membentuk pewarnaan *strong rainbow antimagic* pada graf, sehingga banyaknya bobot sisi yang berbeda untuk n ganjil dapat ditentukan sebagai berikut.

$$W_1 = \{w(aa_i)\} = \{n + 7, n + 8\}, 1 \leq i \leq 2, \text{ maka } |W_1| = 2.$$

Selanjutnya,

$$W_{2,1}^{genap} = \{w(ax_i)\} = \{n + 9, n + 11, n + 13, \dots, 2n + 6\},$$

$$U(W_{2,1}^{genap}) = a + (|W_{2,1}^{genap}| - 1) \cdot b,$$

$$2n + 6 = n + 9 + (|W_{2,1}^{genap}| - 1) \cdot 2,$$

$$2(|W_{2,1}^{genap}| - 1) = n - 3,$$

$$|W_{2,1}^{genap}| = \frac{n - 3}{2} + 2 = \frac{n - 1}{2},$$

$$W_{2,2}^{ganjil} = \{w(ax_i)\} = \{3n + 9, 3n + 7, 3n + 5, \dots, 2n + 14\},$$

$$U(W_{2,2}^{ganjil}) = a + (|W_{2,2}^{ganjil}| - 1) \cdot b,$$

$$2n + 14 = 3n + 9 + (|W_{2,2}^{ganjil}| - 1)(-2),$$

$$2(|W_{2,2}^{ganjil}| - 1) = n - 5,$$

$$|W_{2,2}^{ganjil}| = \frac{n - 5}{2} + 1 = \frac{n - 3}{2},$$

$$W_{2,3}^{ganjil} = \{w(ax_i)\} = \{2n + 9\}, i = n, \text{ maka } |W_{2,3}^{ganjil}| = 1,$$

$$W_{2,4}^{ganjil} = \{w(ax_i)\} = \{2n + 10\}, i = 1, \text{ maka } |W_{2,4}^{ganjil}| = 1.$$

Dengan demikian,

$$|W_2| = |W_{2,1}^{genap}| + |W_{2,2}^{ganjil}| + |W_{2,3}^{ganjil}| + |W_{2,4}^{ganjil}| = n.$$

Selain itu,

$$W_{3,1}^{genap} = \{w(ay_i)\} = \{n + 10, n + 12, n + 14, \dots, 2n + 7\},$$

$$U(W_{3,1}^{genap}) = a + (|W_{3,1}^{genap}| - 1) \cdot b,$$

$$2n + 7 = n + 10 + (|W_{3,1}^{genap}| - 1) \cdot 2,$$

$$2(|W_{3,1}^{genap}| - 1) = n - 3,$$

$$|W_{3,1}^{genap}| = \frac{n - 3}{2} + 2 = \frac{n - 1}{2},$$

$$W_{3,2}^{ganjil} = \{w(ay_i)\} = \{3n + 8, 3n + 6, 3n + 4, \dots, 2n + 13\},$$

$$U(W_{3,2}^{ganjil}) = a + (|W_{3,2}^{ganjil}| - 1) \cdot b,$$

$$2n + 13 = 3n + 8 + (|W_{3,2}^{ganjil}| - 1)(-2),$$

$$2(|W_{3,2}^{ganjil}| - 1) = n - 5,$$

$$|W_{3,2}^{ganjil}| = \frac{n-5}{2} + 1 = \frac{n-3}{2},$$

$$W_{3,3}^{ganjil} = \{w(ay_i)\} = \{2n+10\}, i=1, \text{ maka } |W_{3,3}^{ganjil}| = 1,$$

$$W_{3,4}^{ganjil} = \{w(ay_i)\} = \{2n+8\}, i=1, \text{ maka } |W_{3,4}^{ganjil}| = 1.$$

Dengan demikian,

$$|W_3| = |W_{3,1}^{genap}| + |W_{3,2}^{ganjil}| + |W_{3,3}^{ganjil}| + |W_{3,4}^{ganjil}| = n.$$

Terakhir,

$$W_4 = \{w(x_i x_{i+1})\} \cup \{y_i y_{i+1}\} = \{n+8, 2n+6, 2n+8, 2n+3\}, \text{ maka } |W_4| = 4$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa irisan dari keempat himpunan W_1, W_2, W_3 dan W_4 adalah kosong, yaitu $W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap W_4 = \emptyset$. Untuk membuktikannya, terlebih dahulu dianalisis struktur masing-masing himpunan. Untuk n ganjil, himpunan bobot W_1 memiliki rentang $W_1 = \{n+7, n+8\}$, dengan $|W_1| = 2$. Himpunan bobot W_2 memiliki rentang $W_2 = \{n+9, \dots, 2n+9, 2n+10, \dots, 3n+9\}$, dengan $|W_2| = n$. Selanjutnya, himpunan bobot W_3 memiliki rentang $W_3 = \{n+10, \dots, 2n+8, 2n+10, \dots, 3n+8\}$ dengan $|W_3| = n$. Sementara itu, diperoleh $W_4 = \{n+8, 2n+6, 2n+8, 2n+3\}$. Setiap elemen dalam W_4 termuat pada W_1, W_2 , atau W_3 , sehingga $W_4 \subseteq W_1 \cup W_2 \cup W_3$. Selain itu, karena $W_1^{max} = n+8 < n+9 = W_2^{min}$, maka $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ dan $W_2 \cap W_3 = \emptyset$. Akibatnya, tidak terdapat elemen yang dapat muncul bersamaan pada keempat himpunan. Oleh karena itu $W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap W_4 = \emptyset$.

Dengan demikian W_1, W_2 dan W_3 saling lepas dengan $|W_1| = 2, |W_2| = n$, dan $|W_3| = n$. Karena $W_4 \subseteq W_1 \cup W_2 \cup W_3$, maka diperoleh $|W_1 \cup W_2 \cup W_3| = |W_1| + |W_2| + |W_3| = 2n+2$. Dengan pelabelan di atas, semua sisi pada graf *shell-butterfly* memiliki bobot berbeda dan memenuhi syarat pewarnaan *strong rainbow antimagic*. Oleh karena itu, banyak warna pada graf *shell-butterfly* adalah $srac(BF_{2,n}) = 2n+2$.

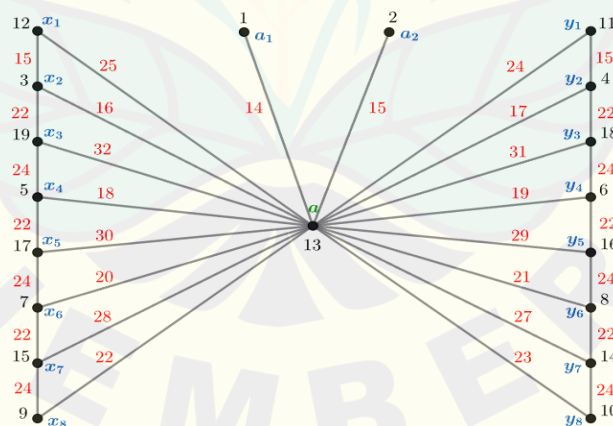
Untuk menunjukkan bahwa setiap pasangan titik memiliki lintasan terpendek dengan warna sisi yang berbeda, dapat dilihat pada Tabel 4.3.

Berdasarkan tabel tersebut, seluruh pasangan titik pada $BF_{2,n}$ memenuhi kondisi

lintasan *strong rainbow*. Oleh karena itu, dari fungsi bobot sisi yang telah didefinisikan dapat disimpulkan bahwa $srac(BF_{2,n}) = 2n + 2$. Ilustrasi pewarnaan *strong rainbow antimagic* pada graf shell-butterfly $BF_{2,8}$ dapat dilihat pada Gambar 4.3. Pada graf tersebut digunakan 18 warna sisi, dan setiap pasangan titik terhubung oleh lintasan terpendek dengan warna yang berbeda. Hal ini menunjukkan bahwa $srac(BF_{2,8}) = 18$. Dengan demikian, ilustrasi tersebut telah memenuhi Teorema 4.6.

Tabel 4.3 Lintasan *strong rainbow* setiap dua simpul pada graf *shell-butterfly*

Kasus	Simpul Awal	Simpul Akhir	Jalur Terpendek	Kondisi
1	a	a_i	a, a_i	$1 \leq i \leq 2$
2	a	x_i	a, x_i	$1 \leq i \leq n$
3	a	y_i	a, y_i	$1 \leq i \leq n$
4	x_i	x_{i+1}	x_i, x_{i+1}	$1 \leq i \leq n - 1$
5	x_i	x_j	x_i, a, x_j	$i \neq j$ atau $ i - j \geq 3$
6	y_i	y_{i+1}	y_i, y_{i+1}	$1 \leq i \leq n - 1$
7	y_i	y_j	y_i, a, y_j	$i \neq j$ atau $ i - j \geq 3$
8	x_i	y_i	x_i, a, y_i	$1 \leq i \leq n$
9	x_i	y_j	x_i, a, y_j	$i \neq j$
10	a_j	x_i atau y_i	aa_i, ax_i atau aa_i, ay_i	$a \leq i \leq n$ dan $1 \leq i \leq 2$



Gambar 4.3 *Strong rainbow antimagic coloring* pada graf *shell-butterfly* $BF_{2,8}$

4.2.4 Strong Rainbow Antimagic Coloring pada Graf Octopus

Teorema 4.7. Misalkan O_n adalah graf octopus, untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 2$ maka *strong rainbow antimagic connection number* dari O_n adalah $srac(O_n) = 2n$.

Pembuktian. Graf O_n adalah graf Octopus yang memiliki himpunan simpul $V(O_n) = \{x\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(O_n) = \{xx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{xy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Dengan demikian, $|V(O_n)| = 2n + 1$, $|E(O_n)| = 3n - 1$, $\Delta(O_n) = 2n$, dan $src(O_n) = 2n$. Berdasarkan Lemma 1 kita peroleh batas bawah sebesar

$$srac(O_n) \geq \max\{src(O_n), \Delta(O_n)\} = \max\{2n, 2n\} = 2n$$

Selanjutnya, untuk menunjukkan batas atas kita gunakan pelabelan simpul berikut. Kita definisikan pelabelan simpul $f: V(O_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(O_n)|\}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, \\ f(x_i) &= \begin{cases} \frac{i+3}{2}, & i \text{ ganjil}, \\ n+2-\frac{i}{2}, & i \text{ genap}, \end{cases} \\ f(y_i) &= n+i+1. \end{aligned}$$

Kita dapat menentukan bobot sisi dari pelabelan simpul diatas

$$\begin{aligned} w(xx_i) &= \begin{cases} \frac{i+5}{2}, & i \text{ ganjil}, \\ n+3-\frac{i}{2}, & i \text{ genap}, \end{cases} \\ w(xy_i) &= n+i+2, \\ w(x_i x_{i+1}) &= \begin{cases} n+3, & i \text{ ganjil}, \\ n+4, & i \text{ genap}. \end{cases} \end{aligned}$$

Bobot sisi yang telah ditentukan membentuk suatu pewarnaan *strong rainbow antimagic* pada graf, sehingga banyaknya bobot sisi yang berbeda dapat ditentukan sebagai berikut

$$\begin{aligned} W_1^{ganjil} &= \{w(xx_i)\} = \left\{3, 4, 5, \dots, \frac{n+5}{2}\right\}, \\ U(W_1^{ganjil}) &= a + (|W_1^{ganjil}| - 1) \cdot b, \end{aligned}$$

$$\frac{n+5}{2} = 3 + (|W_1^{ganjil}| - 1) \cdot 1,$$

$$|W_1^{ganjil}| = \frac{n-1}{2},$$

$$W_1^{genap} = \{w(xx_i)\} = \left\{n+2, n+1, n, \dots, \frac{n+6}{2}\right\},$$

$$U(W_1^{genap}) = a + (|W_1^{genap}| - 1) \cdot b,$$

$$\frac{n+6}{2} = n+2 + (|W_1^{genap}| - 1) \cdot (-1),$$

$$\frac{n+6}{2} = n+3 - |W_1^{ganjil}|,$$

$$|W_1^{genap}| = \frac{n}{2}.$$

Dengan demikian,

$$|W_1| = |W_1^{ganjil}| + |W_1^{genap}| = \frac{n-1}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

Selanjutnya,

$$W_2 = \{w(xy_i)\} = \{n+3, n+4, n+5, \dots, 2n+2\},$$

$$U(W_2) = a + (|W_2| - 1) \cdot b,$$

$$2n+2 = n+3 + (|W_2| - 1) \cdot 1,$$

$$2n+2 = n+2 + |W_2|,$$

$$|W_2| = n.$$

Terakhir,

$$W_3 = \{w(x_i x_{i+1})\} = \{n+3, n+4\}, \text{ maka } |W_3| = 2.$$

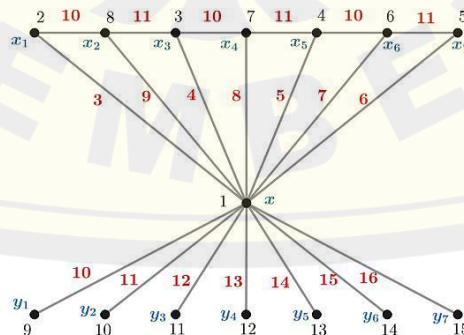
Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa irisan dari ketiga himpunan W_1, W_2 , dan W_3 adalah kosong, yaitu $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \emptyset$. Untuk membuktikannya, terlebih dahulu dianalisis struktur masing-masing himpunan. Himpunan W_1 memiliki rentang $W_1 = \{3, 4, 5, \dots, n+2\}$ dengan $|W_1| = n$. Himpunan W_2 memiliki rentang $W_2 = \{n+3, n+4, \dots, 2n+2\}$ dengan $|W_2| = n$. Sementara itu, diperoleh $W_3 = \{n+3, n+4\}$. Karena $W_3 \subseteq W_2$, maka secara langsung diperoleh $W_3 \subseteq W_1 \cup W_2$. Selanjutnya, karena $W_1^{max} = n+2 < n+3 = W_2^{min}$, maka $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Selain itu, karena $W_3 \subseteq W_2$, maka $W_1 \cap W_3 = \emptyset$. Akibatnya, $|W_1 \cap W_2 \cap W_3| = 0$. Karena ketiga himpunan tidak memiliki elemen bersama,

jumlah total bobot sisi yang berbeda adalah $|W_1 \cup W_2| = |W_1| + |W_2| = n + n = 2n$. Penambahan himpunan W_3 tidak mengubah jumlah tersebut karena $W_3 \subseteq W_2$, sehingga jumlah akhir bobot sisi yang berbeda tetap $|(W_1 \cup W_2) \cup W_3| = 2n$. Dengan pelabelan di atas, semua sisi pada graf *octopus* memiliki bobot unik dan memenuhi syarat pewarnaan *strong rainbow antimagic*. Oleh karena itu, banyak warna pada graf *octopus* adalah $srac(O_n) = 2n$.

Untuk menunjukkan bahwa setiap pasangan titik memiliki lintasan terpendek dengan warna sisi yang berbeda, dapat dilihat pada Tabel 4.4. Berdasarkan tabel tersebut, seluruh pasangan titik pada O_n memenuhi kondisi lintasan *strong rainbow*. Oleh karena itu, dari fungsi bobot sisi yang telah didefinisikan dapat disimpulkan bahwa $srac(O_n) = 2n$. Ilustrasi pewarnaan *strong rainbow antimagic* pada graf *octopus* O_7 dapat dilihat pada Gambar 4.4. Pada graf tersebut digunakan 14 warna sisi, dan setiap pasangan titik terhubung oleh lintasan terpendek dengan warna yang berbeda. Hal ini menunjukkan bahwa $srac(O_7) = 14$. Dengan demikian, ilustrasi tersebut telah memenuhi Teorema 4.7.

Tabel 4.4 Lintasan *strong rainbow* setiap dua simpul pada graf *octopus*

Kasus	Simpul Awal	Simpul Akhir	Jalur Terpendek	Kondisi
1	x	x_i	x, x_i	$1 \leq i \leq n$
2	x	y_i	x, y_i	$1 \leq i \leq n$
3	x_i	x_{i+1}	x_i, x_{i+1}	$1 \leq i \leq n - 1$
4	x_i	x_j	x_i, x, x_j	$i < j$
5	x_i	y_i	x_i, x, y_i	$1 \leq i \leq n$
6	x_i	y_j	x_i, x, y_j	$i \neq j$
7	y_i	y_j	y_i, x, y_j	$i \neq j$



Gambar 4.4 *Strong rainbow antimagic coloring* pada graf *octopus* O_7

4.2.5 Strong Rainbow Antimagic Coloring pada Graf Lotus

Teorema 4.8. Misalkan L_n adalah graf lotus, untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 2$ maka *strong rainbow antimagic connection number* dari L_n adalah $srac(L_n) = n + 1$.

Pembuktian. Graf L_n adalah graf lotus yang memiliki himpunan simpul $V(L_n) = \{x\} \cup \{y\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n-1\}$ dan himpunan sisi $E(L_n) = \{xy\} \cup \{xx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$.

Dengan demikian, $|V(L_n)| = 2n + 1$, $|E(L_n)| = 3n - 1$, $\Delta(L_n) = n + 1$, dan $src(L_n) = n + 1$. Berdasarkan Lemma 1 kita peroleh batas bawah sebesar

$$srac(L_n) \geq \max\{src(L_n), \Delta(L_n)\} = \max\{n + 1, n + 1\} = n + 1$$

Selanjutnya, untuk menunjukkan batas atas kita gunakan pelabelan simpul berikut. Kita definisikan pelabelan simpul $f: V(L_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, |V(L_n)|\}$.

$$f(x) = n,$$

$$f(y) = i,$$

$$f(x_i) = 2n - i + 2,$$

$$f(y_i) = i.$$

Kita dapat menentukan bobot sisi dari pelabelan simpul diatas

$$w(xy) = 2n + 1,$$

$$w(xx_i) = 3n - i + 2,$$

$$w(x_i y_i) = 2n + 2,$$

$$w(y_i x_{i+1}) = 2n + 1.$$

Bobot sisi yang telah ditentukan membentuk suatu pewarnaan *strong rainbow antimagic* pada graf L_n , sehingga banyaknya bobot sisi yang berbeda dapat ditentukan sebagai berikut

$$W_1 = \{w(xy)\} = \{2n + 1\}, \text{ maka } |W_1| = 1.$$

Selanjutnya,

$$W_2 = \{w(xx_i)\} = \{3n + 1, 3n, 3n - 1, \dots, 2n + 2\},$$

$$U(W_2) = a + (|W_2| - 1) \cdot b,$$

$$2n + 2 = 3n + 1 + (|W_2| - 1) \cdot (-1),$$

$$2n + 2 = 2n + 2 - |W_2|,$$

$$|W_2| = n.$$

Selain itu,

$$W_3 = \{w(x_i y_i)\} = \{2n + 2\}, \text{ maka } |W_3| = 1.$$

Terakhir,

$$W_4 = \{w(y_i x_{i+1})\} = \{2n + 1\}, \text{ maka } |W_4| = 1.$$

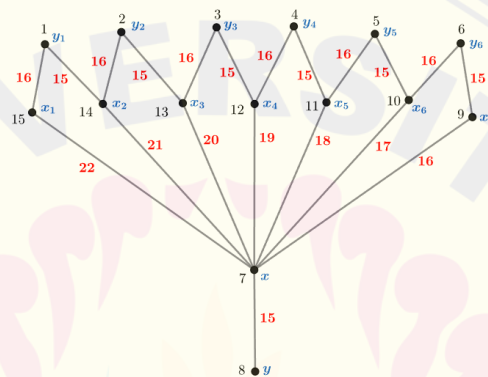
Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa irisan dari ketiga himpunan W_1, W_2 , dan W_3 adalah kosong, yaitu $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \emptyset$. Untuk membuktikannya, terlebih dahulu dianalisis struktur masing-masing himpunan. Himpunan $W_1 = \{2n + 1\}$, himpunan W_2 memiliki rentang $W_2 = \{2n + 2, 2n + 3, \dots, 3n + 1\}$, himpunan $W_3 = \{2n + 2\}$, dan himpunan $W_4 = \{2n + 1\}$. Terlihat bahwa $W_4 = W_1$ dan $W_3 \subseteq W_2$. Selain itu, karena $W_1^{max} = 2n + 1 < 2n + 2 = W_2^{min}$, maka $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Karena $W_3 \subseteq W_2$, maka $W_1 \cap W_3 = \emptyset$. Akibatnya $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \emptyset$.

Penambahan himpunan W_3 tidak mengubah jumlah tersebut karena $W_3 \subseteq W_2$, begitu pula penambahan W_4 tidak menambah bobot baru karena $W_4 = W_1$, sehingga jumlah akhir bobot sisi yang berbeda tetap $|W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4| = |W_1| + |W_2| = n + 1$. Dengan pelabelan di atas, semua sisi pada graf *lotus* memiliki bobot unik dan memenuhi syarat pewarnaan *strong rainbow antimagic*. Oleh karena itu, banyak warna pada graf *octopus* adalah $srac(L_n) = n + 1$.

Untuk menunjukkan bahwa setiap pasangan titik memiliki lintasan terpendek dengan warna sisi yang berbeda, dapat dilihat pada Tabel 4.5. Berdasarkan tabel tersebut, seluruh pasangan titik pada L_n memenuhi kondisi lintasan *strong rainbow*. Oleh karena itu, dari fungsi bobot sisi yang telah didefinisikan dapat disimpulkan bahwa $srac(L_n) = n + 1$. Ilustrasi pewarnaan *strong rainbow antimagic* pada graf *octopus* L_7 dapat dilihat pada Gambar 4.5. Pada graf tersebut digunakan 8 warna sisi, dan setiap pasangan titik terhubung oleh lintasan terpendek dengan warna yang berbeda. Hal ini menunjukkan bahwa $srac(L_7) = 8$. Dengan demikian, ilustrasi tersebut telah memenuhi Teorema 4.8.

Tabel 4.5 Lintasan *strong rainbow* setiap dua simpul pada graf lotus

Kasus	Simpul Awal	Simpul Akhir	Jalur Terpendek	Kondisi
1	x	x_i	x, x_i	$1 \leq i \leq n$
2	x	y_i	x, x_i, y_i	$1 \leq i \leq n$
3	x_i	x_j	x_i, x, x_j	$i \neq j$
4	x_i	y_i	x_i, y_i	$1 \leq i \leq n$
5	x_i	y_j	x_i, x, x_j, y_j	$i \neq j$
6	y_i	y_{i+1}	y_i, y_{i+1}	$1 \leq i \leq n - 1$
7	y_i	y_j	y_i, x_i, x, x_j, y_j	$i < j$

Gambar 4.5 *Strong rainbow antimagic coloring* pada graf lotus L_7

4.3 Implementasi Bobot SRAC sebagai *Keystream* pada *Stream Cipher*

Dalam subbab ini akan membahas tentang bagaimana penerapan bobot *strong rainbow antimagic coloring* sebagai *keystream* dalam proses mengenkripsi dan mendekripsi sebuah gambar menggunakan *stream cipher*. Data yang digunakan pada penelitian ini adalah *biometric image* yang merupakan representasi visual dari data biometrik seseorang seperti wajah, suara, sidik jari, DNA, atau data lainnya. Objek biometrik yang akan digunakan sebagai *plain image* yakni objek wajah. Misalkan *plain image* berupa citra Liska yang ditunjukkan pada Gambar 4.6 berformat jpeg dengan ukuran asli 1912×2390 pixel.

Karena *plain image* Liska adalah RGB, maka setiap piksel terdiri dari 3 nilai (R, G, dan B). Matriks RGB pada Tabel 4.6 merupakan matriks potongan *plain image* Liska dengan ukuran 5×5 pixel. Baris yang diambil untuk dilakukan perhitungan manual yakni dari baris 1193-1197 dan kolom 954-958. Berikut

disajikan matriks *plain image* berukuran 5×5. Ukuran ini diambil karena untuk melakukan perhitungan manual sebelum melakukan perhitungan yang kompleks.



Gambar 4.6 *Plain image* Liska

Tabel 4.6 Matriks *pixel RGB plain image* berukuran 5×5

<i>Pixel</i>	954	955	956	957	958
1193	(158, 5, 0)	(160, 9, 2)	(163, 11, 6)	(166, 15, 8)	(167, 15, 10)
1194	(156, 0, 0)	(154, 0, 0)	(155, 0, 0)	(154, 1, 0)	(154, 0, 0)
1195	(160, 0, 0)	(158, 0, 0)	(158, 0, 0)	(156, 1, 0)	(157, 2, 0)
1196	(162, 0, 0)	(158, 0, 0)	(157, 0, 0)	(157, 0, 0)	(158, 0, 0)
1197	(168, 4, 5)	(162, 0, 0)	(160, 0, 0)	(157, 0, 0)	(158, 0, 0)

Setiap piksel citra RGB dikonversi menjadi satu nilai intensitas menggunakan metode luminance (*luma transform*) untuk memudahkan perhitungan manual. Metode ini menggabungkan nilai pada ketiga kanal berdasarkan bobot yang mencerminkan sensitivitas mata manusia terhadap masing-masing warna. Berikut disajikan matriks *plain image* berukuran 5×5 dengan satu nilai intensitas

$$P_c = \begin{bmatrix} 50 & 53 & 55 & 59 & 59 \\ 46 & 46 & 46 & 46 & 46 \\ 47 & 47 & 47 & 47 & 48 \\ 48 & 47 & 46 & 46 & 47 \\ 53 & 48 & 47 & 46 & 47 \end{bmatrix}.$$

4.3.1 Konstruksi Bobot SRAC sebagai *Keystream*

Kunci enkripsi pada penelitian ini menggunakan matriks *adjacency* yang dibangun berdasarkan bobot *strong rainbow antimagic coloring* (SRAC) dari lima graf yang telah dibuktikan. Nilai bobot setiap sisi diperoleh melalui fungsi bobot

SRAC, kemudian disusun menjadi matriks *keystream* yang ukurannya disesuaikan dengan ukuran citra yang akan dienkripsi. *Plain image* Liska pada Gambar 4.1 berukuran 1912×2390 *pixel*. Sehingga, matriks *keystream* juga dibentuk dengan ukuran 1912×2390 . Apabila jumlah bobot graf lebih sedikit daripada jumlah piksel citra, maka nilai bobot disusun kembali secara berulang (*cyclic repetition*) hingga membentuk matriks *keystream* yang berukuran sama dengan citra. Matriks *keystream* tersebut kemudian digunakan sebagai kunci pada proses enkripsi dan dekripsi melalui operasi XOR. Pada perhitungan manual, digunakan potongan *plain image* Liska dengan ukuran 5×5 *pixel*. Sehingga *keystream* dibentuk dengan ukuran 5×5 . *Keystream* menggunakan bobot *strong rainbow antimagic coloring* pada graf lotus dengan $n = 8$ dan bobot warna berbeda $srac(L_8) = \{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$. Melalui *cyclic repetition* diperoleh matriks *keystream* berukuran 5×5 sebagai berikut

$$K_c = \begin{bmatrix} 17 & 25 & 24 & 23 & 22 \\ 21 & 20 & 19 & 18 & 18 \\ 17 & 17 & 25 & 24 & 23 \\ 22 & 21 & 20 & 19 & 18 \\ 18 & 17 & 17 & 25 & 24 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, implementasi secara penuh dilakukan menggunakan *software* Python 3 pada Google Colab untuk mengolah citra RGB berukuran asli, yaitu 1912×2390 piksel. Implementasi tersebut mengikuti tahapan yang sama seperti pada ilustrasi manual, namun seluruh proses dilakukan secara otomatis sehingga mampu menangani data citra berukuran besar.

4.3.2 Proses Enkripsi

Proses enkripsi pada penelitian ini dilakukan melalui dua tahap utama, yaitu transformasi data menggunakan operasi *swap* 4–4 bit dan proses pengacakan lanjutan menggunakan operasi XOR dengan *keystream*. Pada tahap awal, setiap nilai *plaintext* dikonversikan terlebih dahulu ke dalam bentuk biner 8-bit. Selanjutnya, dilakukan operasi pertukaran *nibble* (*swap* 4 bit kiri dengan 4 bit kanan) sehingga diperoleh nilai baru yang disebut sebagai nilai *swap*. Transformasi ini bertujuan untuk memberikan efek difusi awal terhadap data, sehingga posisi bit pada setiap karakter mengalami perubahan struktur sebelum

proses pengacakan lebih lanjut dilakukan. Setelah diperoleh nilai *swap*, proses enkripsi dilanjutkan dengan operasi XOR antara nilai *swap* dengan *keystream* yang telah ditentukan. Operasi XOR dilakukan secara *bitwise* antara representasi biner nilai *swap* dan *keystream*, sehingga menghasilkan *ciphertext* sebagai keluaran akhir proses enkripsi. Berikut ditampilkan perhitungan manual proses enkripsi pada baris kelima, bisa dilihat pada Tabel 4.7.

Tabel 4.7 Perhitungan proses enkripsi pada baris kelima

Plain	Biner Plain	Swap 4-4 bit	Nilai Swap	Keystream	Biner Key	XOR	Cipher
53	00110101	01010011	83	18	00010010	01000001	65
48	00110000	00000011	3	17	00010001	00010010	18
47	00101111	11110010	242	17	00010001	11100011	227
46	00101110	11100010	226	25	00011001	11111011	251
47	00101111	11110010	242	24	00011000	11101010	234

Perhitungan manual proses enkripsi dengan operasi XOR pada matriks berukuran 5×5 dapat dilihat pada Lampiran 3. Berikut matriks *ciphertext* 5×5 hasil enkripsi menggunakan operasi XOR

$$C_c = \begin{bmatrix} 50 & 74 & 107 & 164 & 165 \\ 247 & 246 & 241 & 240 & 240 \\ 227 & 227 & 235 & 234 & 20 \\ 21 & 231 & 246 & 241 & 224 \\ 65 & 18 & 227 & 251 & 223 \end{bmatrix}$$

Pada implementasi menggunakan *software* Python 3 pada Google Colab, tahapan enkripsi dilakukan secara identik dengan proses manual. Berdasarkan hasil proses enkripsi, *cipher image* diperoleh tingkat pengacakan sudah baik sehingga *plain image* Liska tidak dapat dikenali, bisa dilihat pada Gambar 4.7 berikut.



Gambar 4.7 *Cipher image*

4.3.3 Proses Dekripsi

Proses dekripsi pada penelitian ini dilakukan dengan memanfaatkan sifat reversibel dari operasi XOR, sehingga *ciphertext* dapat dikembalikan ke bentuk *plaintext* melalui dua tahap utama, yaitu operasi XOR antara *ciphertext* dan *keystream*, serta proses *inverse swap* 4–4 bit. Pada tahap awal dekripsi, setiap nilai *ciphertext* dikonversikan ke dalam bentuk biner 8-bit, kemudian dilakukan operasi XOR dengan *keystream* yang sama seperti pada proses enkripsi. Hasil dari operasi XOR ini menghasilkan nilai antara (*intermediate value*) yang disebut sebagai hasil *swap decryption*. Selanjutnya, nilai tersebut dikembalikan ke bentuk semula melalui operasi *inverse swap* 4–4 bit, yaitu dengan menukar kembali 4 bit bagian kiri dan kanan, sehingga diperoleh kembali nilai *plaintext*. Berikut ditampilkan perhitungan manual proses dekripsi pada baris kelima, bisa dilihat pada Tabel 4.8.

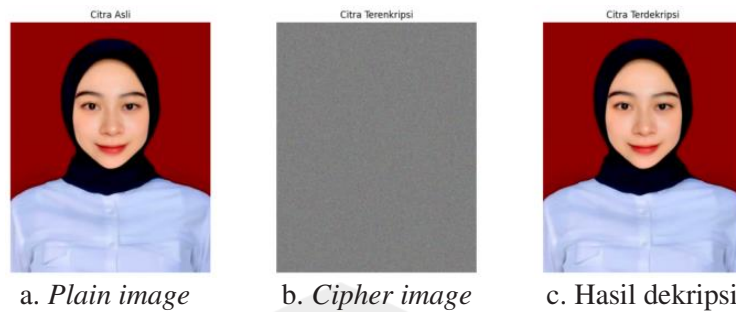
Tabel 4.8 Perhitungan proses dekripsi pada baris kelima

Cipher	Biner Cipher	Keystream	Biner Key	XOR (Decryption)	Nilai D (Swap)	Inverse Swap	Plain
65	01000001	18	00010010	01010011	83	00110101	53
18	00010010	17	00010001	00000011	3	00110000	48
227	11100011	17	00010001	11110010	242	00101111	47
251	11111011	25	00011001	11100010	226	00101110	46
234	11101010	24	00011000	11110010	242	00101111	47

Perhitungan manual proses dekripsi dengan operasi XOR pada matriks berukuran 5×5 dapat dilihat pada Lampiran 4. Berikut matriks hasil dekripsi 5×5 menggunakan operasi XOR

$$D_c = \begin{bmatrix} 50 & 53 & 55 & 59 & 59 \\ 46 & 46 & 46 & 46 & 46 \\ 47 & 47 & 47 & 47 & 48 \\ 48 & 47 & 46 & 46 & 47 \\ 53 & 48 & 47 & 46 & 47 \end{bmatrix}.$$

Implementasi dekripsi menggunakan *software* Python 3 pada Google Colab dilakukan dengan tahapan yang sama seperti ilustrasi manual. Berdasarkan hasil proses dekripsi, diperoleh *cipher image* identik dengan *plain image* Liska, bisa dilihat pada Gambar 4.8.



Gambar 4.8 Hasil implementasi enkripsi dan dekripsi *plain image* Liska

Hasil implementasi proses enkripsi dan dekripsi *plain image* Liska menggunakan Python 3 pada Google Colab. *Plain Image* pada Gambar 4.8(a) berhasil dienkripsi menjadi *cipher image* pada Gambar 4.8(b) menggunakan *keystream* berbasis bobot SRAC sehingga tampilan visual citra berubah secara signifikan. Selanjutnya, proses dekripsi menghasilkan citra pada Gambar 4.8(c) yang memiliki kemiripan sangat tinggi dengan *plain image*. Hasil ini menunjukkan bahwa implementasi algoritma yang dikembangkan mampu melakukan proses enkripsi dan dekripsi secara benar serta mempertahankan integritas data citra setelah proses dekripsi.

4.3.4 Analisis Hasil Enkripsi dan Dekripsi

Subbab ini menyajikan hasil dan analisis proses enkripsi serta dekripsi citra menggunakan *keystream* yang dibangun dari lima graf, yaitu graf roda W_n , graf helm H_n , graf shell-butterfly $BF_{2,n}$, graf octopus O_n , atau graf lotus L_n . Proses enkripsi dan dekripsi dilakukan menggunakan bantuan *software* Python 3 pada Google Colab. Hasil enkripsi dan dekripsi dari masing-masing *keystream* menghasilkan *cipher image* yang disajikan pada Lampiran 5. Berdasarkan pengamatan visual, kelima *cipher image* telah menunjukkan tingkat pengacakan yang baik sehingga tidak lagi memperlihatkan karakteristik citra asli. Untuk memperoleh penilaian yang lebih objektif, dilakukan evaluasi menggunakan analisis standar *stream cipher*, yaitu MSE, PSNR, dan UACI. Hasil pengukuran ketiga parameter tersebut untuk masing-masing *cipher image* disajikan pada Tabel 4.9.

Tabel 4.9 Analisis *cipher image*

Eksperimen	MSE	PSNR	UACI
Graf W_8	0.00001	94.8919	49.9936
Graf H_8	0.00002	95.2195	49.993
Graf $BF_{2,8}$	0.00002	95.0138	49.9967
Graf O_8	0.00001	95.3013	49.9985
Graf L_8	0.00001	95.3345	49.9904

Berdasarkan tabel, seluruh eksperimen menghasilkan nilai MSE yang sangat kecil, yaitu 0,0001 – 0,0002, serta nilai PSNR yang tinggi, yaitu 94,8919 – 95,3345 dB. Hal ini menunjukkan bahwa citra hasil dekripsi memiliki kualitas yang sangat baik dan hampir identik dengan *plain image*. Selain itu, nilai UACI yang mendekati 50% menunjukkan bahwa *cipher image* mengalami perubahan intensitas piksel yang signifikan terhadap *plain image*.

Berdasarkan hasil pengujian, *keystream* yang dibangkitkan dari graf lotus L_8 memberikan kinerja terbaik dengan nilai PSNR tertinggi, yaitu 95,3345 dB, nilai MSE sebesar 0,00001, dan nilai UACI sebesar 49,9904%. Nilai PSNR yang paling tinggi menunjukkan bahwa citra hasil dekripsi memiliki tingkat kemiripan paling tinggi terhadap *plain image*, sedangkan nilai MSE yang sangat kecil menunjukkan kesalahan rekonstruksi yang sangat rendah. Sementara itu, nilai UACI yang tetap mendekati 50% menunjukkan bahwa proses enkripsi mampu menghasilkan perubahan intensitas piksel yang tinggi sehingga keamanan citra tetap terjaga.

Secara keseluruhan, penggunaan lima teorema *strong rainbow antimagic coloring* sebagai pembangkit *keystream* pada algoritma *stream cipher* mampu menghasilkan proses enkripsi yang efektif sekaligus mempertahankan kualitas citra setelah proses dekripsi.