



**PEWARNAAN TITIK KETAKTERATURAN LOKAL HASIL OPERASI  
*SHACKLE* PADA KELUARGA GRAF RODA**

**SKRIPSI**

**Oleh :**

**Prima Teguh Novasetiyono**

**NIM 210210101127**

**KEMENTRIAN PENDIDIKAN TINGGI, SAINS, DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS JEMBER  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
JEMBER  
2025**



**PEWARNAAN TITIK KETAKTERATURAN LOKAL HASIL OPERASI  
*SHACKLE* PADA KELUARGA GRAF RODA**

**SKRIPSI**

**Oleh :**

**Prima Teguh Novasetiyono**

**NIM 210210101127**

Dosen Pembimbing 1 : Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.

Dosen Pembimbing 2 : Saddam Hussien, S.Pd., M.Pd.

Dosen Penguji 1 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Dosen Penguji 2 : Lioni Anka Monalisa, S.Pd., M.Pd.

**KEMENTERIAN PENDIDIKAN TINGGI, SAINS, DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS JEMBER  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
JEMBER  
2025**

## **HALAMAN PERSEMBAHAN**

Segala puji bagi Allah, dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, tak lupa pula sholawat serta salam selalu tucurahkan kepada Nabi Muhammad SAW. Saya persembahkan kebahagiaan dan ucapkan terimakasih atas terselesaikannya skripsi ini kepada:

1. Orang tua saya, Ayah Rokani dan Ibu Titik Rohani yang telah mendukung, memberikan doa, memotivasi, dan memenuhi segala kebutuhan saya;
2. Seluruh keluarga besar dan kerabat yang senantiasa mendukung dan mendoakan yang terbaik;
3. Dosen pembimbing saya, Ibu Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd. dan Bapak Saddam Hussien, S.Pd., M.Pd. yang senantiasa meluangkan waktu di tengah kesibukan untuk memberikan bimbingan serta arahan;
4. Dosen penguji saya, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. dan Ibu Lioni Anka Monalisa, S.Pd., M.Pd. yang telah memberikan banyak saran serta kritik sehingga penulisan skripsi ini menjadi lebih baik lagi;
5. Mario, M. Wildan, Nurhardianti dan teman-teman yang selalu memberikan semangat, membantu dalam kesulitan, dan saling mengingatkan satu sama lain;
6. Seluruh pihak yang membantu dalam pengerjaan skripsi ini;
7. Almamater Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

## **MOTO**

“Usaha dan keberanian tidak cukup tanpa adanya tujuan dan arah perencanaan.”

– John F. Kennedy

“Orang yang meraih kesuksesan tidak selalu orang yang pintar. Orang yang selalu meraih kesuksesan adalah orang yang gigih dan pantang menyerah.” – Susi

Pudjiastuti

## HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS

Saya yang bertandatangan dibawah ini:

Nama : Prima Teguh Novasetiyono

NIM : 210210101127

menyatakan dengan bersungguh-sungguh bahwa skripsi yang berjudul “Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Hasil Operasi *Shackle* Pada Keluarga Graf Roda” adalah benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 10 Januari 2025

Yang menyatakan,

Prima Teguh Novasetiyono

NIM. 210210101127

## HALAMAN PERSETUJUAN

Skripsi berjudul “Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Hasil Operasi *Shackle* Pada Keluarga Graf Roda” telah diuji oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember Pada:

Hari : Jum’at

Tanggal : 10 Januari 2025

Tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

### Pembimbing

### Tanda Tangan

#### 1. Pembimbing Utama

Nama : Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd. (.....)

NIP : 19760502 200604 2 001

#### 2. Pembimbing Anggota

Nama : Saddam Hussien, S.Pd., M.Pd. (.....)

NRP : 760017071

### Penguji

#### 3. Penguji Utama

Nama : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. (.....)

NIP : 19680802 199303 1 004

#### 4. Penguji Anggota

Nama : Lioni Anka Monalisa, S.Pd., M.Pd. (.....)

NIP : 19880819 202421 2 020

## ABSTRAK

Misalkan  $G(V, E)$  adalah graf sederhana dan terhubung dengan  $V(G)$  adalah himpunan titik dan  $E(G)$  adalah himpunan sisi. Pemetaan  $l : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  sebagai fungsi label dan  $w : V(G) \rightarrow N$  adalah fungsi bobot pewarnaan titik ketakteraturan lokal, dengan  $w(u) = \sum_{v \in N(u)} l(v)$ . Jumlah minimum warna yang dihasilkan dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf  $G$  disebut bilangan kromatik ketakteraturan lokal dilambangkan dengan  $X_{lis}(G)$ . Dalam penelitian ini, kita mempelajari pewarnaan titik ketakteraturan lokal dan menentukan bilangan kromatik dari hasil operasi *shackle* titik pada keluarga graf roda.

## RINGKASAN

Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Hasil Operasi *Shackle* pada Keluarga Graf Roda, Prima Teguh Novasetiyono, 210210101127; 2025: 35 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Topik yang diangkat dalam skripsi ini adalah salah satu topik dalam bidang teori graf, khususnya dalam bidang pewarnaan graf, yaitu pewarnaan titik ketakteraturan lokal. Pewarnaan merupakan salah satu konsep dalam pelabelan. Ada tiga macam pewarnaan dalam graf yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal adalah memberikan warna pada titik dengan syarat warna titik bertetanggan berbeda. Operasi graf merupakan salah satu cara untuk membentuk suatu graf baru dengan cara menggabungkan satu graf dengan graf lainnya yang nantinya akan membentuk suatu graf baru. Operasi *shackle* terdiri dari operasi *shackle* titik dan operasi *shackle* sisi. Operasi *shackle* sendiri sangat menarik untuk diteliti karena merupakan operasi yang sederhana dimana hanya memerlukan satu jenis graf saja.

Graf yang diteliti dalam skripsi ini adalah keluarga graf roda. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan pewarnaan titik ketakteraturan lokal hasil operasi *shackle* titik pada keluarga graf roda. Penelitian ini memperoleh lima teorema sebagai berikut:

- i. Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(W_n, v, p)$  dengan  $n \geq 4$  dan  $n$  genap adalah  $X_{lis}Shack(W_n, v, p) = 4$
- ii. Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(CH_n, v, p)$  dengan  $n \geq 4$  adalah

$$X_{lis}Shack(CH_n, v, p) = \begin{cases} 8, & \text{untuk } n \geq \text{gasal} \\ 5, & \text{untuk } n \geq \text{genap} \end{cases}$$

- iii. Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(Fl_n, v, p)$  dengan  $n \geq 4$  dan  $n$  genap adalah  $X_{lis}Shack(Fl_n, v, p) = 4$
- iv. Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(Le_n, v, p)$  dengan  $n \geq 4$  dan  $n$  genap adalah  $X_{lis}Shack(Le_n, v, p) = 4$

- v. Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack\left(\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right)$  dengan  $n = 5$ ,  $m \geq 3$  adalah  $X_{lis}Shack\left(\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right) = 4$

## PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat, hidayah, dan karunia-Nya sehingga dapat terselesaikannya skripsi yang berjudul “Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Hasil Operasi *Shackle* Pada Keluarga Graf Roda”. Skripsi ini diajukan guna memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan dan bimbingan berbagai pihak. Oleh karena itu, saya menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Universitas Jember;
3. Koordinator Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Dosen pembimbing, Ibu Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd. dan Bapak Saddam Hussien, S.Pd., M.Pd. yang senantiasa meluangkan waktu di tengah kesibukan untuk memberikan bimbingan serta arahan;
5. Dosen penguji, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. dan Ibu Lioni Anka Monalisa, S.Pd., M.Pd. yang telah memberikan banyak kritik serta saran sehingga penulisan skripsi ini menjadi lebih baik lagi;
6. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
7. Teman-teman seperjuangan mahasiswa Pendidikan Matematika angkatan 2021 yang selalu memberikan dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini;
8. Semua pihak yang terlibat atas terselesaikannya skripsi ini.

Jember, 10 Januari 2025  
Prima Teguh Novasetiyono

## DAFTAR ISI

Halaman

|   |             |
|---|-------------|
| <b>HALAMAN PERSEMBAHAN .....</b>                      | <b>i</b>    |
| <b>MOTO .....</b>                                     | <b>ii</b>   |
| <b>HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS .....</b>          | <b>iii</b>  |
| <b>HALAMAN PERSETUJUAN .....</b>                      | <b>iv</b>   |
| <b>ABSTRAK .....</b>                                  | <b>v</b>    |
| <b>RINGKASAN .....</b>                                | <b>vi</b>   |
| <b>PRAKATA .....</b>                                  | <b>viii</b> |
| <b>DAFTAR ISI.....</b>                                | <b>ix</b>   |
| <b>DAFTAR GAMBAR.....</b>                             | <b>xi</b>   |
| <b>DAFTAR TABEL .....</b>                             | <b>xii</b>  |
| <b>DAFTAR LAMBANG .....</b>                           | <b>xiii</b> |
| <b>BAB 1. PENDAHULUAN .....</b>                       | <b>1</b>    |
| <b>1.1 Latar Belakang .....</b>                       | <b>1</b>    |
| <b>1.2 Rumusan Masalah .....</b>                      | <b>2</b>    |
| <b>1.3 Tujuan Penelitian .....</b>                    | <b>2</b>    |
| <b>1.4 Manfaat Penelitian .....</b>                   | <b>2</b>    |
| <b>1.5 Batasan Masalah.....</b>                       | <b>3</b>    |
| <b>1.6 Kebaharuan Penelitian .....</b>                | <b>3</b>    |
| <b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA.....</b>                   | <b>4</b>    |
| <b>2.1 Terminologi Dasar Graf.....</b>                | <b>4</b>    |
| <b>2.2 Jenis-Jenis Graf .....</b>                     | <b>5</b>    |
| 2.2.1 Graf Roda .....                                 | 5           |
| 2.2.2 Graf Helm Tertutup.....                         | 5           |
| 2.2.3 Graf Bunga .....                                | 6           |
| 2.2.4 Graf Kincir Angin Belanda .....                 | 6           |
| 2.2.5 Graf Lemon .....                                | 7           |
| <b>2.3 Operasi Graf .....</b>                         | <b>7</b>    |
| <b>2.4 Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal .....</b> | <b>9</b>    |
| <b>2.5 Hasil Penelitian Sebelumnya .....</b>          | <b>11</b>   |
| <b>BAB 3. METODE PENELITIAN.....</b>                  | <b>12</b>   |
| <b>3.1 Jenis Penelitian .....</b>                     | <b>12</b>   |

|  |  |           |
|--|--|-----------|
| <b>3.2</b>                               | <b>Metode Penelitian .....</b>             | <b>12</b> |
| <b>3.3</b>                               | <b>Definisi Operasional .....</b>          | <b>12</b> |
| 3.3.1                                    | Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal ..... | 12        |
| 3.3.2                                    | Keluarga Graf Roda .....                   | 13        |
| <b>3.4</b>                               | <b>Prosedur Penelitian .....</b>           | <b>13</b> |
| <b>3.5</b>                               | <b>Observasi Awal .....</b>                | <b>15</b> |
| <b>BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN .....</b> |  | <b>19</b> |
| <b>4.1</b>                               | <b>Hasil Penelitian.....</b>               | <b>19</b> |
| <b>BAB 5. PENUTUP.....</b>               |  | <b>34</b> |
| <b>5.2</b>                               | <b>Kesimpulan .....</b>                    | <b>34</b> |
| <b>5.2</b>                               | <b>Saran.....</b>                          | <b>34</b> |
| <b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>              |  | <b>35</b> |

## DAFTAR GAMBAR

|  | Halaman |
|--|---------|
| Gambar 2.1 Contoh Graf $G$ .....   | 4       |
| Gambar 2.2 Graf Roda $W_8$ .....   | 5       |
| Gambar 2.3 Graf Helm tertutup $CH_4$ .....                                 | 6       |
| Gambar 2.4 Graf Bunga $Fl_4$ .....   | 6       |
| Gambar 2.5 Graf Kincir Angin Belanda $D_5^{(4)}$ .....                     | 7       |
| Gambar 2.6 Graf Lemon $Le_4$ .....   | 7       |
| Gambar 2.7 Graf $Shack(W_8, v, 4)$ .....                                   | 8       |
| Gambar 2.8 Graf $Shack(Fl_4, v, 4)$ .....                                  | 8       |
| Gambar 2.9 Graf $Shack(Le_4, v, 4)$ .....                                  | 8       |
| Gambar 2.10 Graf $Shack(CH_4, v, 4)$ .....                                 | 8       |
| Gambar 2.11 Graf $Shack(D_5^{(4)}, v, 3)$ .....                            | 8       |
| Gambar 2.12 Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Graf Lintasan $P_3$ ..... | 10      |
| Gambar 3.1 Prosedur Penelitian .....                                       | 14      |
| Gambar 3.2 Observasi Awal $X_{lis}Shack(Le_4, v, 4) = 4$ .....             | 18      |
| Gambar 4.1 $X_{lis}Shack(W_8, v, 5) = 4$ .....                             | 20      |
| Gambar 4.2 $X_{lis}Shack(CH_5, v, 4) = 8$ .....                            | 22      |
| Gambar 4.3 $X_{lis}Shack(CH_4, v, 4) = 5$ .....                            | 23      |
| Gambar 4.4 $X_{lis}(Fl_4) = 4$ .....                                       | 25      |
| Gambar 4.5 $X_{lis}Shack(Fl_4, v, 4) = 4$ .....                            | 26      |
| Gambar 4.6 $X_{lis}(Le_4) = 3$ .....                                       | 28      |
| Gambar 4.7 $X_{lis}Shack(Le_4, v, 4) = 4$ .....                            | 30      |
| Gambar 4.8 $X_{lis}(D_5^{(3)}) = 3$ .....                                  | 31      |
| Gambar 4.9 $X_{lis}Shack((D_5^{(3)}), v, 3) = 4$ .....                     | 33      |

## DAFTAR TABEL

|  | Halaman |
|--|---------|
| Tabel 2.1 Bobot Titik Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal ..... | 10      |
| Tabel 2.2 Hasil Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal .....       | 11      |
| Tabel 3.1 Kardinalitas Titik pada Keluarga Graf Roda .....       | 15      |

## DAFTAR LAMBANG

|                  |   |
|------------------|---|
| $G$              | = Graf $G$  |
| $V(G)$           | = Himpunan titik pada graf $G$  |
| $E(G)$           | = Himpunan sisi pada graf $G$   |
| $ V(G) $         | = Banyaknya titik pada graf $G$   |
| $ E(G) $         | = Banyaknya sisi pada graf $G$  |
| $d(v)$           | = Derajat titik $v$   |
| $\Delta(G)$      | = Derajat maksimum graf $G$   |
| $\delta(G)$      | = Derajat minimum graf $G$  |
| $N(v)$           | = Persekitaran titik $v$  |
| $l_i$            | = Label titik ke- $i$ pada graf $G$   |
| $w_i$            | = Bobot titik ke- $i$ pada graf $G$   |
| $v_i$            | = Titik ke- $i$ pada suatu graf $G$   |
| $X(G)$           | = Bilangan kromatik pada graf $G$   |
| $X_{lis}(G)$     | = Bilangan kromatik titik ketakteraturan lokal pada graf $G$                            |
| $Opt(l)$         | = Nilai fungsi label maksimum   |
| $P_n$            | = Graf lintasan dengan $n$ titik  |
| $W_n$            | = Graf roda dengan $n$ titik  |
| $Fl_n$           | = Graf bunga dengan $n$ titik   |
| $CH_n$           | = Graf helm tertutup dengan $n$ titik   |
| $D_n^{(m)}$      | = Graf kincir angin belanda dengan $m$ salinan graf lingkaran $C_5$                     |
| $Le_n$           | = Graf lemon dengan $n$ titik   |
| $Shack(G, v, p)$ | = Graf $G$ hasil operasi <i>shackle</i> , $v$ sebagai titik hubung sebanyak $p$ salinan |

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Teori graf sendiri ditemukan dari permasalahan jembatan Königsberg yang dipecahkan oleh Leonhard Euler. Seorang matematikawan asal Swiss pada tahun 1736. Permasalahan tersebut berawal dari munculnya masalah dunia graf. Dengan berjalannya zaman, banyak ilmuwan berlomba-lomba untuk membuat solusi baru dari kasus Leonhard Euler. Graf dapat merepresentasikan berbagai macam objek diskrit dan mencari hubungan yang dimiliki oleh objek-objek tersebut. Secara formal, graf terdiri dari himpunan tak kosong berhingga dari titik-titik yang biasa disebut dengan simpul dan himpunan sisi yang merupakan bagian 2 elemen dari titik yang biasa di sebut dengan *edge*, sehingga sebuah graf  $G$  adalah pasangan terurut dari himpunan titik dan sisi.

Pewarnaan graf berarti setiap elemen dalam graf  $G$  memiliki warna yang berbeda, sehingga elemen yang berdekatan memiliki warna yang berbeda. Titik, sisi, dan wilayah adalah beberapa jenis pewarnaan graf (Chartrand dkk., 2012). kromatik adalah banyaknya warna minimal yang bisa digunakan untuk mewarnai titik-titik pada suatu graf. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal merupakan topik yang berasal dari penggabungan konsep pelabelan jarak tak teratur dan pewarnaan titik pada graf. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal maksudnya adalah untuk setiap titik yang diwarnai tidak boleh memiliki bobot yang sama sehingga warna dari setiap titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda.

Pelabelan jarak tak teratur pada suatu graf merupakan pemetaan bilangan asli pada himpunan titik sehingga bobot yang dihitung pada setiap titiknya berbeda. Bobot dari sebuah titik didapat dari menjumlahkan label titik yang bertetangga. Operasi graf merupakan salah satu cara untuk membentuk suatu graf baru dengan cara menggabungkan satu graf dengan graf lainnya. Terdapat berbagai operasi graf untuk membentuk suatu graf baru, contohnya terdapat operasi amalgamasi, operasi corona, dan operasi *shackle*, lalu yang akan digunakan pada penelitian kali ini yaitu operasi *shackle*. Operasi *shackle* terdiri dari operasi *shackle* titik dan operasi

*shackle* sisi. Operasi *shackle* sendiri sangat menarik untuk diteliti karena merupakan operasi yang sederhana dimana hanya memerlukan satu jenis graf saja.

Berdasarkan uraian diatas, sangat menarik untuk dilakukan penelitian pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf hasil operasi *shackle* titik. Pada penelitian ini akan dibahas pengembangan dari teori pewarnaan titik ketakteraturan lokal dan bilangan kromatiknya pada keluarga graf roda hasil operasi *shackle* titik yaitu graf roda, graf bunga, graf kincir angin belanda, graf helm tertutup dan graf lemon. Sehingga, pada penelitian ini penulis memberi judul **“Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Hasil Operasi *Shackle* Pada Keluarga Graf Roda”**.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, didapat rumusan masalah adalah bagaimana pewarnaan titik ketakteraturan lokal hasil operasi *shackle* titik pada graf roda, graf bunga, graf kincir angin belanda, graf helm tertutup dan graf lemon.

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, didapat tujuan masalah dalam penelitian ini adalah untuk menentukan bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf hasil operasi *shackle* titik yaitu graf roda, graf bunga, graf kincir angin belanda, graf helm tertutup dan graf lemon.

## **1.4 Manfaat Penelitian**

Manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini adalah.

1. Menambah pengetahuan dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada keluarga graf roda hasil operasi *shackle* titik yaitu graf roda, graf bunga, graf kincir angin belanda, graf helm tertutup dan graf lemon.
2. Hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai landasan kajian dalam pengembangan atau perluasan ilmu pengetahuan di bidang graf dan aplikasinya yang berkaitan dengan pewarnaan titik ketakteraturan lokal hasil operasi *shackle* titik.

3. Konsep pewarnaan titik ketakaturan lokal ini dapat di terapkan pada graf lainnya.

### 1.5 Batasan Masalah

Batasan pada penelitian ini terdapat pada graf yang digunakan. Graf yang akan diteliti yaitu sebagai berikut:

1.  $Shack(W_n, v, p)$ , pemilihan titik terhubung ( $v$ ) yaitu salah satu titik luar graf  $W_n$ ;
2.  $Shack(Fl_n, v, p)$ , pemilihan titik terhubung ( $v$ ) yaitu salah satu titik luar graf  $Fl_n$ ;
3.  $Shack(CH_n, v, p)$ , pemilihan titik terhubung ( $v$ ) yaitu salah satu titik luar graf  $CH_n$ ;
4.  $Shack(D_n^{(m)}, v, p)$ , pemilihan titik terhubung ( $v$ ) yaitu salah satu titik luar graf  $D_n^{(m)}$ ;
5.  $Shack(Le_n, v, p)$ , pemilihan titik terhubung ( $v$ ) yaitu salah satu titik luar graf  $Le_n$ ;

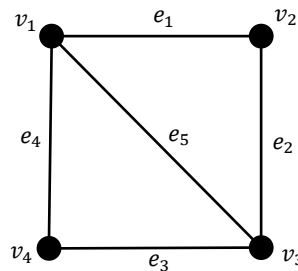
### 1.6 Kebaharuan Penelitian

Kebaharuan dalam penelitian ini adalah menemukan bilangan kromatik ketakaturan lokal hasil operasi *shackle* titik pada keluarga graf roda yaitu graf roda, graf bunga, graf kincir angin belanda, graf helm tertutup dan graf lemon.

## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf  $G$  adalah himpunan pasangan berhingga tak kosong  $(V, E)$ , dimana  $V$  adalah himpunan tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik (*vertex*), dan  $E$  adalah himpunan dari pasangan tidak terurut dari titik-titik yang berbeda di  $V$  yang disebut sisi (*edge*). Graf  $G$  memiliki setidaknya satu titik, dan mungkin tidak memiliki sisi (Aprilianto, 2020). Notasi untuk banyaknya titik pada graf  $G$  disebut *order*  $|V(G)|$ , sedangkan banyaknya sisi disebut *edge*  $|E(G)|$ . Jika  $u$  dan  $v$  adalah elemen dari  $V(G)$ , maka  $u, v \in V(G)$ , dan jika  $uv$  adalah elemen dari  $E(G)$ , maka bisa dituliskan  $uv \in E(G)$ . Dalam konteks ini  $u$  dan  $v$  dikatakan bertetangga (*adjacent*), dan titik  $u$  dan  $v$  dikatakan terkait (*incident*) dengan sisi  $uv$ . Contoh dari graf  $G$  dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Contoh Graf  $G$

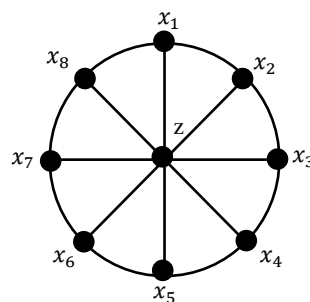
Pada Gambar 2.1,  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ , banyak titik graf  $G$  yaitu  $|V(G)| = 4$  dan  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ , banyak sisi graf  $G$  yaitu  $|E(G)| = 5$ . Titik  $v_2$  dan  $v_3$  bertetangga dan titik  $v_1$  dan  $v_2$  terkait dengan  $e_1$ . Banyaknya titik pada graf  $G$  yang bertetangga disebut derajat titik  $v$  pada graf  $G$ . Derajat titik  $v$  biasanya dilambangkan  $d(v)$ . Derajat maksimum graf  $G$  adalah derajat terbesar titik pada graf  $G$  dilambangkan dengan  $\Delta(G)$ . Derajat minimum graf  $G$  adalah derajat terkecil titik pada graf  $G$  dilambangkan dengan  $\delta(G)$  (Chartrand & Zhang, 2009). Persekitaran titik graf  $G$  adalah himpunan titik yang bertetangga dilambangkan dengan  $N(v)$ . Pada Gambar 2.1 dapat dilihat bahwa  $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$ ,  $N(v_2) = \{v_1, v_3\}$ ,  $N(v_3) = \{v_1, v_2, v_4\}$ ,  $N(v_4) = \{v_1, v_3\}$  sehingga  $d(v_1) = 3$ ,  $d(v_2) = 2$ ,  $d(v_3) = 3$ ,  $d(v_4) = 2$ .

Dalam teori graf, terdapat beberapa konsep yang penting terkait dengan jalan (*walk*) dan lintasan (*path*): Jalan (*walk*) merupakan urutan titik dan sisi dalam graf di mana setiap sisi terhubung oleh dua titik yang berdekatan (sebelum dan sesudah sisi tersebut). Panjang jalan adalah jumlah sisi yang membentuk jalan tersebut. Pada Gambar 2.1, jalan  $\{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_1, e_5, v_3\}$  memiliki panjang jalan 5, karena terdapat 5 sisi yang membentuk deretan titik dan sisi tersebut. Lintasan (*path*) merupakan urutan titik dalam graf dimana setiap titik berbeda terhubung oleh tepat satu sisi. Panjang lintasan adalah jumlah sisi yang membentuk lintasan tersebut. Dalam Gambar 2.1, lintasan  $\{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_4, v_4\}$  memiliki panjang lintasan 3, karena terdapat 3 sisi yang menghubungkan titik-titik tersebut. Lintasan memiliki titik dan sisi yang unik tanpa pengulangan, sementara jalan memperbolehkan pengulangan titik dan sisi dalam deretannya.

## 2.2 Jenis-Jenis Graf

### 2.2.1 Graf Roda

Graf roda dengan jari-jari sebanyak  $n$  dinotasikan dengan  $(W_n)$  merupakan graf yang terdiri dari sebuah graf lingkaran dengan *order*  $n$  dan satu tambahan titik yang beradjasensi dengan semua titik pada lingkaran tersebut (Bacak-turan & Demirtekin, 2017). Sisi yang berkorespondensi dengan lingkaran disebut sisi *rim*, dan sisi yang berinsidensi dengan titik pusat dinamakan sisi *spoke* (Vaidya & Pandit, 2016). Graf roda dapat dilihat pada Gambar 2.2

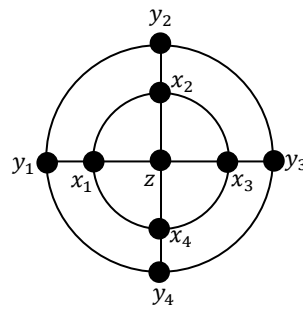


Gambar 2.2 Graf Roda  $W_8$

### 2.2.2 Graf Helm Tertutup

Graf helm tertutup dinotasikan dengan  $CH_n$  dimana  $n \geq 4$ , merupakan suatu graf yang diperoleh dari sebuah graf roda dengan tambahan sebuah sisi *pendant* pada masing-masing titik yang berada di sisi *rim* dan penambahan sisi diantara titik

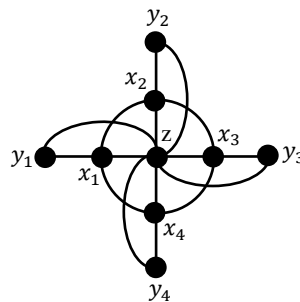
*pendant* (Ghodasara dan Vaghasiya, 2014). *Pendant* merupakan sisi yang terbentuk dari titik yang berada di lingkaran dengan satu titik tambahan, sisi yang berkorespondensi dengan lingkaran disebut sisi *rim* (Vaidya dan Pandit, 2016). Graf helm tertutup dapat dilihat pada gambar 2.3



Gambar 2.3 Graf Helm Tertutup  $CH_4$

### 2.2.3 Graf Bunga

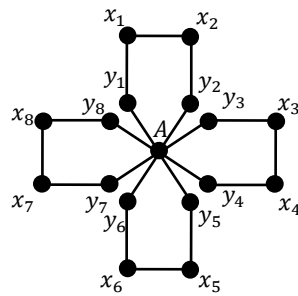
Graf Bunga dinotasikan dengan  $(Fl_n)$  dimana  $n \geq 3$ , merupakan sebuah graf yang diperoleh dari sebuah graf roda dengan tambahan sebuah sisi pendant pada masing-masing titik yang berada di sisi rim serta menghubungkan setiap titik pendant ke titik pusat (Basavanagoud dan Sayyed, 2020). Graf bunga dapat dilihat pada Gambar 2.4



Gambar 2.4 Graf Bunga  $Fl_4$

### 2.2.4 Graf Kincir Angin Belanda

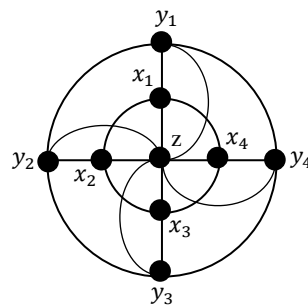
Graf kincir angin Belanda dinotasikan dengan  $D_n^{(m)}$  adalah graf yang diperoleh dari  $m$  salinan graf lingkaran  $(C_n)$  dengan satu titik yang sama. Graf kincir angin belanda juga dikenal sebagai graf persahabatan ketika  $n = 3$ . Graf ini terdiri dari  $(n - 1)m + 1$  titik dan  $mn$  sisi (Kanna, 2016). Graf kincir angin belanda dapat dilihat pada Gambar 2.5



Gambar 2.5 Graf Kincir Angin Belanda  $D_5^{(4)}$

### 2.2.5 Graf Lemon

Graf Lemon dengan  $n$  titik dapat dinotasikan dengan  $Le_n$  graf ini dibangun dari graf helm  $H_n$  dengan menghubungkan titik  $y_1$  ke titik pusat serta menghubungkan titik  $y_1$  dengan titik  $y_2$  dan titik  $y_1$  dengan titik  $y_4$  (Kumala, 2019). Graf lemon dapat dilihat pada Gambar 2.6

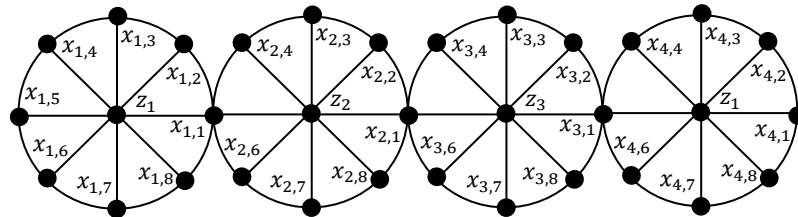
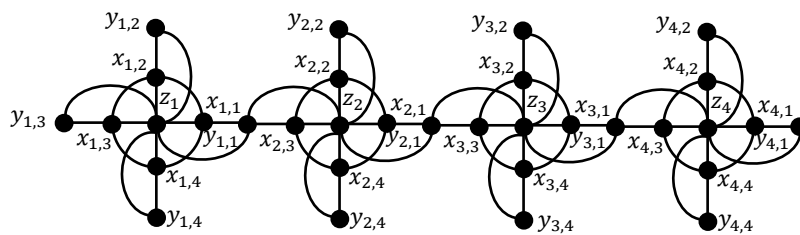
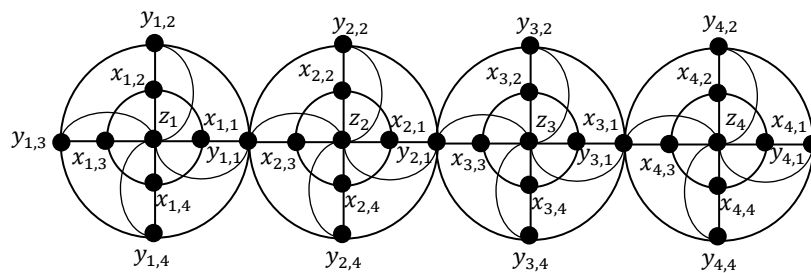
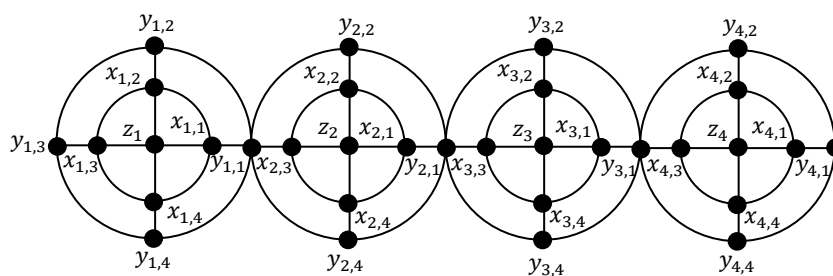
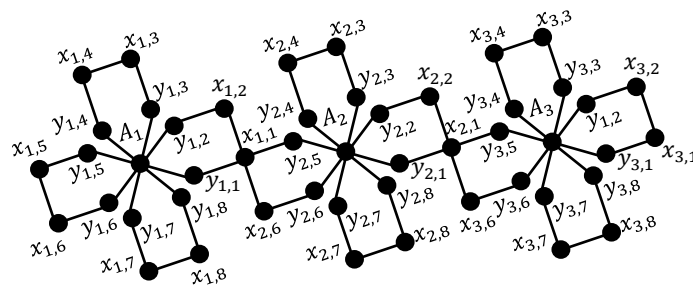


Gambar 2.6 Graf Lemon  $Le_4$

## 2.3 Operasi Graf

Operasi graf merupakan salah satu metode untuk membentuk suatu graf baru dengan cara mengoperasikan graf tersebut. Operasi graf yang digunakan pada penelitian ini yaitu operasi *shackle* titik.

**Definisi 2.3.1** Dimisalkan  $k \geq 2$  adalah bilangan bulat. *Shackle* dari suatu graf  $G$  didefinisikan sebagai graf yang dibangun dari graf non-trivial terhubung  $G_1, G_2, \dots, G_k$  sedemikian hingga  $G_s$  dan  $G_t$  tidak memiliki titik terhubung yang sama untuk setiap  $1 \leq s, t \leq k$  dengan  $|s - t| \geq 2$ , dan untuk setiap  $1 \leq i \leq k - 1$ ,  $G_1$  dan  $G_{i+1}$  berbagi tepat satu titik yang sama, disebut titik penghubung (*vertex linkage*), dan titik penghubung  $k - 1$  semua berbeda (Maryati dkk, 2010).

Gambar 2.7 Graf Shack ( $W_8, v, 4$ )Gambar 2.8 Graf Shack ( $FL_4, v, 4$ )Gambar 2.9 Graf Shack ( $Le_4, v, 4$ )Gambar 2.10 Graf Shack ( $CH_4, v, 4$ )Gambar 2.11 Graf Shack ( $D_5^{(4)}, v, 3$ )

Operasi *shackle* terdiri dari *shackle* titik dan *shackle* sisi. Operasi *shackle* titik dinotasikan dengan *Shack*  $(G, v, p)$  maksudnya graf terdiri dari sembarang graf  $G$  sebanyak  $p$  salinan dan  $v$  sebagai *linkage vertex*. Sedangkan operasi *shackle* sisi dinotasikan dengan *Shack*  $(G, e, p)$  maksudnya graf terdiri dari sembarang graf  $G$  sebanyak  $p$  salinan dan  $e$  sebagai *linkage edge* (Umilasari, 2017).

## 2.4 Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal

Pewarnaan graf adalah pemberian label pada graf dengan memberikan warna yang berbeda disetiap titik, sisi atau wilayah yang bertetangga. Pewarnaan titik graf  $G$  merupakan pemberian warna setiap titik graf  $G$ , dimana titik-titik yang bertetangga atau berdekatan memiliki warna yang berbeda sehingga tidak ada dua titik yang memiliki warna yang sama jika saling bertetangga. Warna yang digunakan dalam pewarnaan graf adalah himpunan bilangan asli  $\{1, 2, \dots, k\}$  Jumlah warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan graf disebut bilangan kromatik graf  $G$  yang dilambangkan dengan  $X(G)$ . Jika graf  $G$  memiliki  $k$  warna, maka bilangan kromatiknya adalah bilangan  $k$  atau jumlah warna terkecil sehingga dua titik, sisi atau wilayah yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Pelabelan graf  $G$  didefinisikan sebagai fungsi  $l: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  dimana fungsi  $l$  adalah pelabelan titik. Selanjutnya pada penelitian ini dikembangkan pewarnaan titik ketakteraturan lokal. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal merupakan gabungan dari konsep lokal dan konsep ketakteraturan, konsep lokal diambil dari topik pewarnaan titik lokal anti ajaib dan konsep ketakteraturan diambil dari topik pelabelan ketakteraturan jarak. Maka konsep tersebut diselesaikan dengan cara meminimumkan label titik dan meminimumkan jumlah warna titik graf.

Adapun definisi dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal yang digunakan dipenelitian ini dapat dilihat pada definisi berikut ini (Kristiana dkk, 2019).

**Definisi 2.4.1** Misalkan  $l: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  merupakan fungsi label dan fungsi bobot  $w: V(G) \rightarrow N$  didefinisikan sebagai  $w(u) = \sum_{v \in N(u)} l(v)$ . Fungsi  $w$  disebut pewarnaan titik ketakteraturan lokal, jika:

- (i)  $Opt(l) = \min \{\max (l_i); l_i, \text{fungsi label}\}$
- (ii) Setiap titik  $uv \in E(G), w(u) \neq w(v)$ .

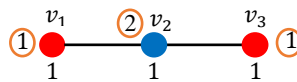
**Definisi 2.4.2** Bilangan kromatik ketakteraturan lokal dinotasikan dengan  $X_{lis}(G)$  didefinisikan sebagai  $X_{lis}(G) = \min \{|w(V(G))|; w \text{ pewarnaan titik ketakteraturan lokal}\}$ .

**Lemma 2.4.1** Untuk graf  $G$  sederhana dan terhubung  $X_{lis}(G) \geq X(G)$ .

**Observasi 2.4.1** Suatu graf  $G$  dengan derajat titik yang sama memiliki optimal pelabelan lebih besar sama dengan 1 atau  $opt(l) = 1$ .

**Observasi 2.4.2** Suatu graf  $G$  dengan derajat titik yang sama memiliki optimal pelabelan lebih besar sama dengan 2 atau  $opt(l) \geq 2$ .

Berikut ini adalah contoh dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf lintasan  $P_n$  dapat dilihat pada Gambar 2.12



Gambar 2.12 Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Graf Lintasan  $P_3$

Berdasarkan ilustrasi dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf dapat dilihat pada Gambar 2.12, setiap titik diberi label 1 yang artinya  $opt(l) = 1$ . Untuk penjelasan lebih lengkap dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Bobot Titik Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal

| $v_i$ | $l(v_i)$ | $w(v_i)$                      |
|-------|----------|-------------------------------|
| $v_1$ | 1        | $l(v_2) = 1$                  |
| $v_2$ | 1        | $l(v_1) + l(v_3) = 1 + 1 = 2$ |
| $v_3$ | 1        | $l(v_2) = 1$                  |

Berdasarkan Tabel 2.1 telah ditemukan pelabelan pada setiap titik di sebuah graf lintasan, selanjutnya menghitung bobot setiap titik pada graf lintasan dan diperoleh  $|w(v_i)| = 2$  maka didapatkan bilangannya adalah 2 atau bisa dinotasikan  $X_{lis}(G) = 2$ .

## 2.5 Hasil Penelitian Sebelumnya

Di bagian ini akan disuguhkan beberapa hasil penelitian dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal yang dapat dijadikan sebagai rujukan. Beberapa hasil penelitian tersebut dapat dilihat pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Hasil Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal

| Graf $G$                            | Hasil $X_{lis}$   | Keterangan           |
|-------------------------------------|---|----------------------|
| Graf Helm<br>( $H_n$ )              | $X_{lis}(H_n) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 6, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$                              | Kristiana, dkk. 2019 |
| Graf Helm<br>Tertutup<br>( $CH_n$ ) | $X_{lis}(CH_n) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } n = 4 \\ 5, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 6, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$ | Kristiana, dkk. 2019 |
| Graf Gear<br>( $G_n$ )              | $X(G_n) = 3, n \geq 4$  | Kristiana, dkk. 2019 |
| Graf<br>Lingkaran<br>( $C_n$ )      | $X_{lis}(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$                              | Kristiana, dkk, 2019 |
| Graf Kipas<br>( $F_n$ )             | $X_{lis}(F_n) = 4, \text{ untuk } n \geq 4$   | Kristiana, dkk, 2019 |
| Graf Roda<br>( $W_n$ )              | $X_{lis}(W_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ 4, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$                              | Kristiana, dkk. 2019 |

## **BAB 3. METODE PENELITIAN**

### **3.1 Jenis Penelitian**

Penelitian ini merupakan penelitian eksploratif dan terapan. Penelitian eksploratif merupakan penelitian yang mengkaji dan meneliti hal-hal baru dan hasil penelitiannya dapat dijadikan sebagai dasar penelitian selanjutnya. Penelitian terapan merupakan penelitian yang tujuannya untuk memberikan penyelesaian secara praktis dalam permasalahan tertentu. Penelitian ini dikategorikan dalam penelitian eksploratif dan terapan karena penelitian ini bertujuan untuk menjadikan topik baru menjadi lebih dikenal oleh masyarakat luar dan memberikan wawasan terkait pewarnaan titik ketakteraturan lokal yang dioperasikan menggunakan operasi *shackle* titik, serta sebagai contoh peneliti selanjutnya untuk menentukan arah dan teknik yang akan digunakan dalam penelitian selanjutnya.

### **3.2 Metode Penelitian**

Terdapat dua metode penelitian dalam penelitian ini yaitu metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksi pola. Metode deduktif aksiomatik merupakan salah satu metode penelitian dengan menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan teorema, aksioma, dan lemma yang sudah ada lalu diterapkan ke dalam pewarnaan titik ketakteraturan lokal hasil operasi *shackle* titik pada keluarga graf roda. Metode pendeteksian pola digunakan untuk merumuskan pola dan menentukan bilangan kromatik ketakteraturan lokal hasil operasi *shackle* titik pada keluarga graf roda.

### **3.3 Definisi Operasional**

Definisi operasional digunakan untuk memberikan informasi yang sistematis dalam penelitian bisa juga digunakan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian atau makna. Definisi operasional penelitian ini sebagai berikut.

#### **3.3.1 Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal**

Pewarnaan titik ketakteraturan lokal menggabungkan konsep pewarnaan titik dan pelabelan titik pada graf. Pewarnaan titik ketakteraturan lokal merupakan bobot

titik ditentukan dengan menjumlahkan label titik-titik bertetangga tetapi tidak dengan menjumlahkan pada dirinya sendiri. Pewarnaan dilakukan seminimal mungkin sehingga titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda (Kristiana dkk, 2019).

### 3.3.2 Keluarga Graf Roda

Keluarga graf roda (*Some Wheel Related Graphs*) terdiri dari beberapa graf yang mempunyai struktur terkait dengan graf roda. Ciri khas dari keluarga graf roda ini adalah adanya satu titik pusat yang beradajensi dengan semua titik yang ada pada lingkarannya. Beberapa graf dari keluarga graf roda yang digunakan dalam penelitian ini yaitu graf roda ( $W_n$ ), graf bunga ( $Fl_n$ ), graf kincir angin belanda  $D_n^{(m)}$ , graf helm tertutup ( $CH_n$ ), dan graf lemon ( $Le_n$ ).

## 3.4 Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian yaitu penjelasan mengenai langkah-langkah yang akan dilakukan sebagai acuan dalam melaksanakan penelitian agar hasil yang dicapai sesuai dengan tujuan penelitian. Pada penelitian ini prosedur penelitian yang digunakan sebagai berikut:

- a. Menentukan graf yang akan diteliti;

Bertujuan untuk mencari pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada keluarga graf roda yaitu graf roda, graf helm tertutup, graf bunga, graf kincir angin belanda, dan graf lemon;

- b. Melakukan pelabelan titik di setiap titik pada graf lemon;

Pada langkah ini dilakukan pemberian label ketakteraturan lokal pada setiap titik graf lemon hasil operasi *shackle* titik dengan ketentuan pelabelan pada titik diperbolehkan berulang karena topik ini memuat ketakteraturan lokal.

- c. Menghitung bobot pada setiap titik pada graf lemon;

Setelah diberi label, selanjutnya akan dihitung bobot total titik pada graf lemon hasil operasi *shackle* titik. Bobot pada setiap titik diperoleh dari penjumlahan label titik yang bertetangga sesuai definisi ketakteraturan lokal.

- d. Memeriksa apakah sudah sesuai definisi;

Setelah menghitung bobot dari graf lemon hasil operasi *shackle* titik, kemudian graf tersebut diamati apakah sudah sesuai dengan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal. Apabila tidak sesuai dengan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal maka kembali ke langkah b;

- e. Menghitung jumlah warna yang terbentuk ( $X_{lis}$ );

Pada langkah ini, akan dihitung jumlah pewarnaan titik ketakteraturan lokal  $X_{lis}$  pada graf lemon hasil operasi *shackle* titik dilihat dari berapa banyak bobot yang dihasilkan

- f. Menentukan notasi titik, himpunan titik, dan kardinalitas bobot titik;

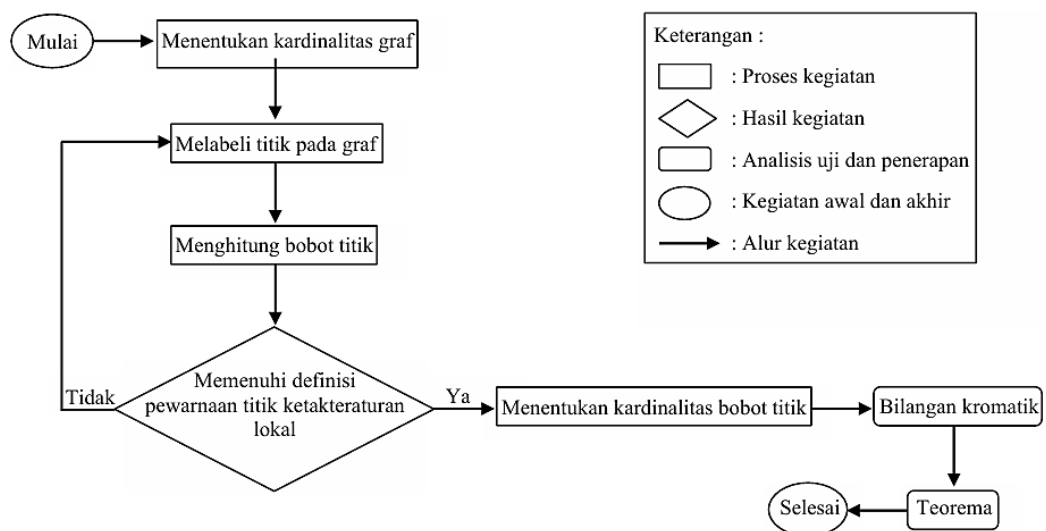
Pada langkah ini, graf yang telah dipilih ditentukan notasi titiknya. Dari penotasian diperoleh himpunan titik dan sisinya, sehingga akan diketahui kardinalitasnya.

- g. Menentukan teorema hasil pewarnaan titik ketakteraturan lokal pada graf lemon hasil operasi *shackle* titik;

- h. Mengulangi langkah ke-b sampai ke-g untuk graf roda, graf helm tertutup, graf bunga, dan graf kincir angin belanda;

- i. Selesai.

Berikut merupakan skema dari rancangan penelitian, perhatikan Gambar 3.1



Gambar 3.1 Prosedur Penelitian

### 3.5 Observasi Awal

Sebelum melaksanakan penelitian ini, penulis telah melakukan observasi awal hasil operasi *shackle* titik pada keluarga graf roda yang meliputi graf roda ( $W_n$ ), graf bunga ( $Fl_n$ ), graf helm tertutup ( $CH_n$ ), graf lemon ( $Le_n$ ), dan graf kincir angin Belanda ( $D_n^{(m)}$ ). Kardinalitas tersebut dapat dilihat pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Kardinalitas Titik pada Keluarga Graf Roda

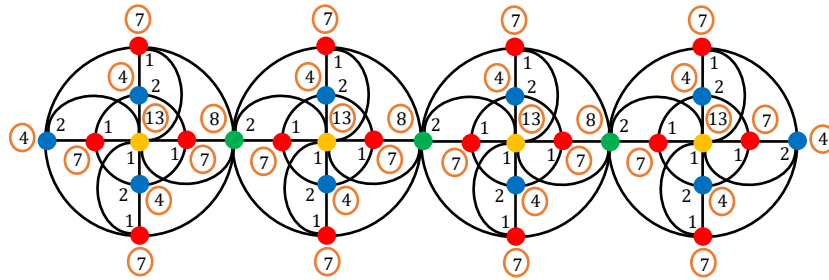
| Graf                               | Kardinalitas  |
|------------------------------------|---|
| Graf <b>Shack</b> ( $W_n, v, p$ )  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>V(\text{Shack}(W_n, v, p)) = \{z_i; 1 \leq i \leq p\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq p(n-1) + 1\}</math></li> <li>• <math>E(\text{Shack}(W_n, v, p)) = \{z_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{z_1 x_{1,n}\} \cup \{z_{i+1} x_{i,j}; 1 \leq i \leq p-1, j = \frac{n}{2}\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i, \frac{n}{2}} x_{i+1, n-1}; 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{x_{i, \frac{n}{2}} x_{i+1, 1}; 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{x_{1,j} x_{1,j+1}; j = 3\} \cup \{x_{1,j} x_{1,j+5}; j = 1\}</math></li> <li>• <math> V(\text{Shack}(W_n, v, p))  = np + 1</math></li> <li>• <math> E(\text{Shack}(W_n, v, p))  = 2np</math></li> </ul>  |
| Graf <b>Shack</b> ( $Fl_n, v, p$ ) | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>V(\text{Shack}(Fl_n, v, p)) = \{z_i; 1 \leq i \leq p\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{y_{i,j}; 2 \leq i \leq p; \frac{n+4}{2} \leq j \leq n\}</math></li> <li>• <math>E(\text{Shack}(Fl_n, v, p)) = \{z_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j} y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,1} x_{i,n}; 1 \leq i \leq p\} \cup \{z_i y_{i,j}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i y_{i,j}; 2 \leq i \leq p; \frac{n+4}{2} \leq j \leq n\} \cup \{z_{i+1} y_{i+1}; 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{x_{1,j} y_{1,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j} y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x_{i,j} y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, \frac{n+4}{2} \leq j \leq n\} \cup \{x_{i+1, \frac{n+2}{2}} y_{i,1}; 1 \leq i \leq p-1\}</math></li> <li>• <math> V(\text{Shack}(Fl_n, v, p))  = 2np + 1</math></li> <li>• <math> E(\text{Shack}(Fl_n, v, p))  = 4np</math></li> </ul> |

| Graf                                   | Kardinalitas  |
|--|---|
| Graf $\mathbf{Shack}(D_n^{(m)}, v, p)$ | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>V(\mathbf{Shack}(D_n^{(m)})) = \{A_i; 1 \leq i \leq p\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq 2m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq 2m\}</math></li> <li>• <math>E(\mathbf{Shack}(D_n^{(m)})) = \{A_i; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq 2m\} \cup \{x_{i,j}y_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq 2m, x_{i,j} \neq y_{i,j} \text{ dan } x_{i,6} \leq j \leq 2m\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq 2m - 1 \text{ untuk } j = \text{ganjil}\} \cup \{x_{i,1}y_{i+1,m+2} \text{ untuk } m \text{ genap dan } x_{i,1}x_{i+1,m+1} \text{ untuk } m \text{ ganjil}; 1 \leq i \leq p\} \cup \{x_{i,1}y_{i+1,m+1} \text{ untuk } m \text{ genap dan } x_{i,1}y_{i+1,m} \text{ untuk } m \text{ ganjil}; 1 \leq i \leq p - 1\}</math></li> <li>• <math> V(\mathbf{Shack}(D_n^{(m)}, v, p))  = 4mp + n</math></li> <li>• <math> E(\mathbf{Shack}(D_n^{(m)}, v, p))  = 5mp</math></li> </ul> |
| Graf $\mathbf{Shack}(CH_n, v, p)$      | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>V(\mathbf{Shack}(CH_n, v, p)) = \{z_i; 1 \leq i \leq p\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n - 2\} \cup \{y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, j = n\}</math></li> <li>• <math>E(\mathbf{Shack}(CH_n, v, p)) = \{z_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j}y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i+1}x_{i+n}; 1 \leq i \leq p\} \cup \{x_{1,j}y_{1,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j}y_{i+j}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n - 2\} \cup \{x_{i,j}y_{i-1,j-2}; 2 \leq i \leq p, j = n - 1\} \cup \{x_{i,n}y_{i,n}; 2 \leq i \leq p\} \cup</math></li> </ul>  |

| Graf                               | Kardinalitas   |
|------------------------------------|--|
|                                    | $\{y_{1,j}y_{2,j+1}; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1}; 2 \leq i \leq p, j = 1\} \cup \{y_{i,j}y_{i-1,j-1}; 2 \leq i \leq p, j = 2\} \cup \{y_{i,1}y_{i+1,n}; 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{y_{i,1}y_{i,j}; 2 \leq i \leq p\}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math> V(\text{Shack}(CH_n, v, p))  = 2np + 1</math></li> <li>• <math> E(\text{Shack}(CH_n, v, p))  = 4np</math></li> </ul>   |
| Graf <b>Shack</b> ( $Le_n, v, p$ ) | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>V(\text{Shack}(Le_n, n, p)) = \{z_i; 1 \leq i \leq p\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{1,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, \frac{n+4}{2} \leq j \leq n\}</math></li> <li>• <math>E(\text{Shack}(Le_n, v, p)) = \{z_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j} y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,1} x_{i,n}; 1 \leq i \leq p\} \cup \{z_i y_{i,j}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{z_i y_{i,j}; 2 \leq i \leq p; \frac{n+4}{2} \leq j \leq n\} \cup \{z_{i+1} y_{i+1}; 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{x_{1,j} y_{1,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j} y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x_{i,j} y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, \frac{n+4}{2} \leq j \leq n\} \cup \{x_{i+1, \frac{n+2}{2}} y_{i,1}; 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{y_{1,j} y_{2,j+1}; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{y_{i,1} y_{i,n}; 1 \leq i \leq p\} \cup \{y_{i,j} y_{i,j+1}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{y_{i+1, \frac{n}{2}} y_{i,1}; 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{y_{i,1} y_{i+n, \frac{n+4}{2}}; 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{y_{i,j} y_{i+2}; 2 \leq i \leq p, \frac{n+4}{2} \leq j \leq n-1\}</math></li> <li>• <math> V(\text{Shack}(Le_n, v, p))  = 2np + 1</math></li> <li>• <math> E(\text{Shack}(Le_n, v, p))  = 5np</math></li> </ul> |

Observasi awal dengan menentukan kardinalitas graf dilakukan untuk menemukan pola pewarnaan ketakteraturann lokal pada graf. Setelah itu, dilakukan pelabelan pada setiap titik graf  $\text{Shack}(Le_n, v, p)$ . Pelabelan yang digunakan harus seminimal mungkin sehingga digunakan label (1, 2) pada graf  $\text{Shack}(Le_n, v, p)$

Selanjutnya yaitu menghitung bobot pada setiap titik pada graf  $Shack(Le_n, v, p)$ . Bobot setiap titik yang bertetangga haruslah berbeda. Jika bobot setiap titik yang bertetangga telah berbeda, kemudian hitung jumlah bilangan kromatik ketakteraturan lokal  $X_{lis}$  pada graf *shackle* hasil operasi titik. Observasi awal dengan menggunakan  $Shack(Le_4, v, 4)$  dapat dilihat pada Gambar 3.2



Gambar 3.2 Observasi Awal  $X_{lis}Shack(Le_4, v, 4) = 4$

Berdasarkan tahapan-tahapan pewarnaan titik ketakteraturan lokal yang telah dilakukan pada observasi awal diatas, penulis telah menemukan bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(Le_4, v, 4)$  adalah  $X_{lis} = 4$ . Sehingga dapat dilanjutkan untuk menentukan bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf hasil operasi *shackle* pada graf roda, graf helm tertutup, graf bunga, dan graf kincir angin belanda dengan mengikuti langkah-langkah pada observasi awal.

## BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 4.1 Hasil Penelitian

Pada penelitian ini didapatkan lima teorema baru yang diperoleh melalui eksperimental mengenai bilangan kromatik ketakteraturan lokal hasil operasi *shackle* titik pada keluarga graf roda. Format penyajian teorema dalam bab ini diawali dengan pernyataan teorema, kemudian dilanjutkan dengan pembuktian teorema dan beberapa contoh gambar sebagai bentuk visualisasi dari teorema yang dihasilkan. Berikut ini teorema yang dihasilkan dalam penelitian ini:

**Teorema 4.1.** Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(W_n, v, p)$  dengan  $n \geq 4$  dan  $n$  genap adalah  $X_{lis}Shack(W_n, v, p) = 4$

**Bukti.** Diketahui graf  $Shack(W_n, v, p)$  dengan himpunan titik  $V(Shack(W_n, v, p)) = \{z_i; 1 \leq i \leq p\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq p(n-1) + 1\}$  dengan  $|V(Shack(W_n, v, p))| = np + 1$  dan himpunan sisinya  $E(Shack(W_n, v, p)) = \{z_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{z_1 x_{1,n}\} \cup \{z_{i+1} x_{i,j}; 1 \leq i \leq p-1, j = \frac{n}{2}\} \cup \{x_{i,j} x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i, \frac{n}{2}} x_{i+1, n-1}; 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{x_{i, \frac{n}{2}} x_{i+1, 1}; 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{x_{1,j} x_{1,j+1}; j = 3\} \cup \{x_{1,j} x_{1,j+5}; j = 1\}$

dengan  $|E(Shack(W_n, v, p))| = 2np$ . Pada graf roda dengan  $n \geq 4$  dan  $n$  genap akan dibuktikan batas atas dan batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(W_n, v, p)$ . Pertama membuktikan batas bawah terlebih dahulu. Berdasarkan Lemma 2.4.1 batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal adalah  $X_{lis}(G) \geq X(G)$ , sehingga batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(W_n, v, p)$  adalah 4 untuk  $n \geq 4$ .

Selanjutnya membuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(W_n, v, p)$ . Berdasarkan Observasi 2.4.2 bahwa suatu graf  $G$  dengan derajat titik yang sama memiliki optimal pelabelan lebih besar sama dengan 2 atau  $opt(l) \geq 2$ . Maka setiap  $vShack(W_n, v, p)$  dilabeli dengan  $\{1, 2\}$  atau  $l: vShack(W_n, v, p) = \{1, 2\}$ . Sehingga bobot titik yang diperoleh dengan menjumlahkan label yang bertetangga adalah sebagai berikut;

$$l(z_i) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq p$$

$$l(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } j \text{ ganjal} \\ 2, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

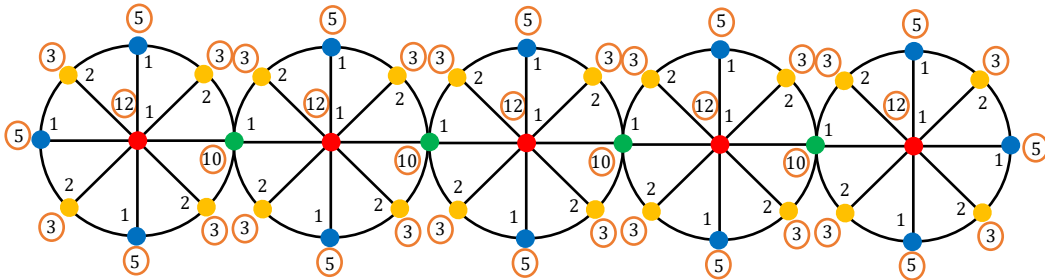
Sehingga bobot titik yang diperoleh berdasarkan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal adalah sebagai berikut;

$$w(z_i) = \frac{3n}{2}$$

$$w(x_{i,j}) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } j \text{ ganjal} \\ 3, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

$$w(x_{i,1}) = 10, \text{ untuk } 1 \leq i \leq p - 1$$

Berdasarkan hasil penghitungan bobot titik diatas didapatkan  $|wShack(W_n, v, p)| \leq 4$  sebagai batas atas untuk graf roda dengan  $n$  genap dan  $n \geq 4$ . Dalam hal ini telah didapatkan batas bawah melalui Lemma 2.4.1 dan batas atas melalui fungsi bobot titik dihasilkan nilai  $4 \leq X_{lis}Shack(W_n, v, p) \leq 4$ , sedemikian hingga  $X_{lis}Shack(W_n, v, p) = 4$ . Terbukti.  $\square$



Gambar 4.1  $X_{lis}Shack(W_8, v, 5) = 4$

Gambar 4.1 merupakan ilustrasi dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal hasil operasi graf  $Shack(W_8, v, 5)$  dengan  $n = 8$  dan didapatkan hasil bilangan kromatik ketakteraturan lokal  $X_{lis}Shack(W_n, v, p) = 4$ .

**Teorema 4.2.** Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(CH_n, v, p)$  dengan  $n \geq 4$  adalah

$$X_{lis}Shack(CH_n, v, p) = \begin{cases} 8, & \text{untuk } n \text{ ganjal} \\ 5, & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

**Bukti.** Diketahui graf  $Shack(CH_n, v, p)$  dengan himpunan titik

$$V(Shack(CH_n, v, p)) = \{z_i; 1 \leq i \leq p\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n\} \cup$$

$$\{y_{i,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n - 2\} \cup \{y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, j = n\}$$

dengan  $|V(Shack(CH_n, v, p))| = 2np + 1$  dan himpunan sisinya

$E(Shack(CH_n, v, p)) = \{z_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j} y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i+1} x_{i+n}; 1 \leq i \leq p\} \cup \{x_{1,j} y_{1,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j} y_{i+j}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n-2\} \cup \{x_{i,j} y_{i-1,j-2}; 2 \leq i \leq p, j = n-1\} \cup \{x_{i,n} y_{i,n}; 2 \leq i \leq p\} \cup \{y_{1,j} y_{2,j+1}; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{y_{i,j} y_{i,j+1}; 2 \leq i \leq p, j = 1\} \cup \{y_{i,j} y_{i-1,j-1}; 2 \leq i \leq p, j = 2\} \cup \{y_{i,1} y_{i+1,n}; 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{y_{i,1} y_{i,n}; 2 \leq i \leq p\}$  dengan  $|E(Shack(CH_n, v, p))| = 4np$ . Pembuktian Teorema 4.2 terbagi menjadi 2 kasus yaitu ketika  $n$  ganjil dan  $n$  genap.

**Kasus 1.** Untuk  $n$  ganjil

Pada graf helm tertutup dengan  $n \geq 5$  akan dibuktikan batas atas dan batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(CH_n, v, p)$ . Pertama membuktikan batas bawah terlebih dahulu. Berdasarkan Lemma 2.4.1 batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal adalah  $X_{lis}(G) \geq X(G)$ , sehingga batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(CH_n, v, p)$  adalah 8 untuk  $n \geq 5$ .

Selanjutnya membuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(CH_n, v, p)$ . Berdasarkan Observasi 2.4.2 bahwa suatu graf  $G$  dengan derajat titik yang sama memiliki optimal pelabelan lebih besar sama dengan 2 atau  $opt(l) \geq 2$ . Maka setiap  $vShack(CH_n, v, p)$  dilabeli dengan  $\{1,2,3\}$  atau  $l: vShack(CH_n, v, p) = \{1,2,3\}$ . Sehingga bobot titik yang diperoleh dengan menjumlahkan label yang bertetangga adalah sebagai berikut;

$$l(z_i) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq p$$

$$l(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } j \text{ genap} \\ 2, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ 3, & \text{untuk } j = n \end{cases}$$

$$l(y_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ 2, & \text{untuk } j \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } j = n \end{cases}$$

Sehingga bobot titik yang diperoleh berdasarkan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal adalah sebagai berikut;

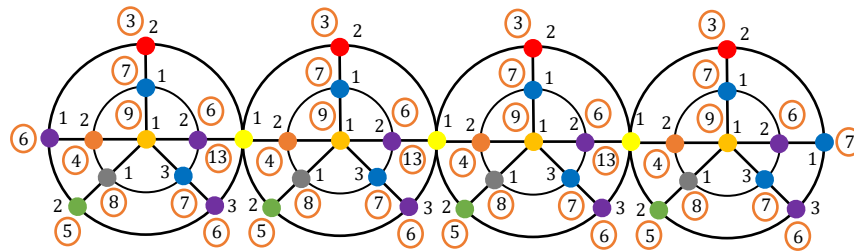
$$w(z_i) = \frac{3(n+1)}{2}$$

$$w(x_{i,j}) = \begin{cases} 6, & \text{untuk } j = 1 \\ 7, & \text{untuk } j \text{ genap dan } j = n \\ 4, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ 8, & \text{untuk } j = n - 1 \end{cases}$$

$$w(y_{i,j}) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } j \text{ genap} \\ 5, & \text{untuk } j = n - 1 \\ 6, & \text{untuk } j \text{ ganjil dan } j = n \\ 7, & \text{untuk } j = 1 \end{cases}$$

$$w(y_{i,1}) = 13, \text{ untuk } 1 \leq i \leq p - 1$$

Berdasarkan hasil penghitungan bobot titik diatas didapatkan  $|wShack(CH_n, v, p)| \leq 8$  sebagai batas atas untuk graf helm tertutup dengan  $n$  gasal. Dalam hal ini telah didapatkan batas bawah dan batas atas melalui fungsi bobot titik dihasilkan nilai  $8 \leq X_{lis}Shack(CH_n, v, p) \leq 8$ , sedemikian hingga  $X_{lis}Shack(CH, v, p) = 8$ . Terbukti.  $\square$



Gambar 4.2  $X_{lis}Shack(CH_5, v, 4) = 8$

Gambar 4.2 merupakan ilustrasi dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal hasil operasi graf  $Shack(CH_n, v, p)$  dengan  $n = 5$  dan didapatkan hasil bilangan kromatik ketakteraturan lokal  $X_{lis}Shack(CH_n, v, p) = 8$ .

**Kasus 2.** Untuk  $n$  genap

Pada graf helm tertutup dengan  $n \geq 4$  dan akan dibuktikan batas atas dan batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(CH_n, v, p)$ . Pertama membuktikan batas bawah terlebih dahulu. Berdasarkan Lemma 2.4.1 batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal adalah  $X_{lis}(G) \geq X(G)$ , sehingga batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(CH_n, v, p)$  adalah 5 untuk  $n \geq 4$ .

Selanjutnya membuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(CH_n, v, p)$ . Berdasarkan Observasi 2.4.2 bahwa suatu graf  $G$  dengan derajat titik yang sama memiliki optimal pelabelan lebih besar sama dengan 2 atau  $opt(l) \geq 2$ . Maka setiap  $vShack(CH_n, v, p)$  dilabeli dengan  $\{1, 2\}$  atau  $l: vShack(CH_n, v, p) = \{1, 2\}$ . Sehingga bobot titik yang diperoleh dengan menjumlahkan label yang bertetangga adalah sebagai berikut;

$$l(z_i) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq p$$

$$l(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } j \text{ genap} \\ 2, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$l(y_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ 2, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

Sehingga bobot titik yang diperoleh berdasarkan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal adalah sebagai berikut;

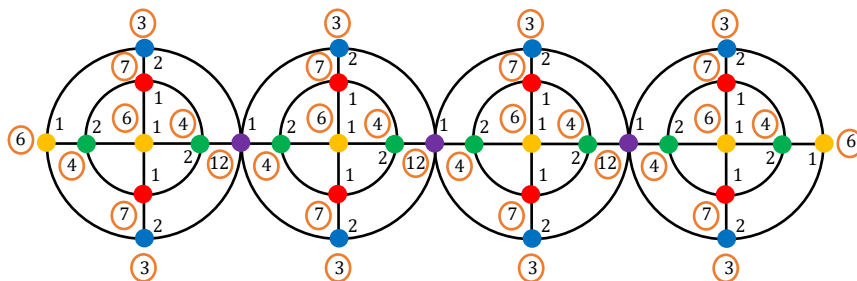
$$w(z_i) = \frac{3n}{2}$$

$$w(x_{i,j}) = \begin{cases} 7, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ 4, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

$$w(y_{i,j}) = \begin{cases} 6, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ 3, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

$$w(y_{i,1}) = 12, \text{ untuk } 1 \leq i \leq p - 1$$

Berdasarkan hasil penghitungan bobot titik diatas didapatkan  $|wShack(CH_n, v, p)| \leq 5$  sebagai batas atas untuk graf helm tertutup dengan  $n \geq 4$ . Dalam hal ini telah didapatkan batas bawah dan batas atas melalui fungsi bobot titik dihasilkan nilai  $5 \leq X_{lis}Shack(CH_n, v, p) \leq 5$ , sedemikian hingga  $X_{lis}Shack(CH_n, v, p) = 5$ . Terbukti.  $\square$



Gambar 4.3  $X_{lis}Shack(CH_4, v, 4) = 5$

Gambar 4.3 merupakan ilustrasi dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal hasil operasi graf  $Shack(CH_n, v, p)$  dengan  $n = 4$  dan didapatkan hasil bilangan kromatik ketakteraturan lokal  $X_{lis}Shack(CH_n, v, p) = 5$

**Observasi 4.1.** Diberikan  $(Fl_n)$  adalah graf bunga dengan  $n \geq 4$  dan  $n$  genap didapatkan bilangan kromatik ketakteraturan lokal adalah  $X_{lis}(Fl_n) = 4$

**Bukti.** Diketahui graf bunga  $(Fl_n)$  dengan himpunan titik  $V(Fl_n) = \{z\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$  dengan  $|V(Fl_n)| = 2n + 1$  dan himpunan sisinya  $E(Fl_n) = \{zx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{zy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_nx_1\}$  dengan  $|E(Fl_n)| = 4n$ . Pada graf bunga dengan  $n \geq 4$  dan akan dibuktikan batas atas dan batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $(Fl_n)$ . Pertama membuktikan batas bawah terlebih dahulu. Berdasarkan Lemma 2.4.1 batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal adalah  $X_{lis}(G) \geq X(G)$ , sehingga batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $(Fl_n)$  adalah 4 untuk  $n \geq 4$ .

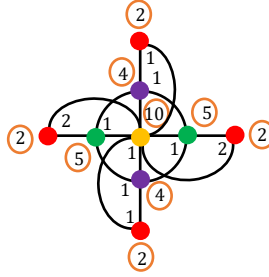
Selanjutnya membuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $(Fl_n)$ . Berdasarkan Observasi 2.4.2 bahwa suatu graf  $G$  dengan derajat titik yang sama memiliki optimal pelabelan lebih besar sama dengan 2 atau  $opt(l) \geq 2$ . Maka setiap  $(Fl_n)$  dilabeli dengan  $\{1,2\}$  atau  $l: v(Fl_n) = \{1,2\}$ . Sehingga fungsi label titik adalah sebagai berikut;

$$\begin{aligned} l(z) &= 1 \\ l(x_i) &= 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \\ l(y_i) &= \begin{cases} 2, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 1, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases} \end{aligned}$$

Sehingga bobot titik yang diperoleh berdasarkan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal adalah sebagai berikut;

$$\begin{aligned} w(z) &= 2n + \frac{n}{2} \\ w(x_i) &= \begin{cases} 5, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 4, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases} \\ w(y_i) &= 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil penghitungan bobot titik diatas didapatkan  $|w(Fl_n)| \leq 4$  sebagai batas atas untuk graf bunga dengan  $n \geq 4$ . Dalam hal ini telah didapatkan batas bawah dan batas atas melalui fungsi bobot titik dihasilkan nilai  $4 \leq X_{lis}(Fl_n) \leq 4$ , sedemikian hingga  $X_{lis}(Fl_n) = 4$ . Terbukti.  $\square$



Gambar 4.4  $X_{lis}(Fl_4) = 4$

Gambar 4.4 merupakan ilustrasi dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal graf bunga ( $Fl_n$ ) dengan  $n = 4$  didapatkan hasil bilangan kromatik ketakteraturan lokal  $X_{lis}(Fl_n) = 4$ .

**Teorema 4.3.** Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(Fl_n, v, p)$  dengan  $n \geq 4$  dan  $n$  genap adalah  $X_{lis}Shack(Fl_n, v, p) = 4$

**Bukti.** Diketahui graf  $Shack(Fl_n, v, p)$  dengan himpunan titik  $V(Shack(Fl_n, v, p)) = \{z_i; 1 \leq i \leq p\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{y_{i,j}; 2 \leq i \leq p; \frac{n+4}{2} \leq j \leq n\}$  dengan  $|V(Shack(Fl_n, v, p))| = 2np + 1$  dan himpunan sisinya  $E(Shack(Fl_n, v, p)) = \{z_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j} y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,1} x_{i,n}; 1 \leq i \leq p\} \cup \{z_i y_{i,j}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{z_i y_{i,j}; 2 \leq i \leq p; \frac{n+4}{2} \leq j \leq n\} \cup \{z_{i+1} y_{i+1,1}; 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{x_{1,j} y_{1,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j} y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x_{i,j} y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, \frac{n+4}{2} \leq j \leq n\} \cup \{x_{i+1, \frac{n+2}{2}} y_{i,1}; 1 \leq i \leq p-1\}$  dengan  $|E(Shack(Fl_n, v, p))| = 4np$ . Pada graf

bunga dengan  $n \geq 4$  dan  $n$  genap akan dibuktikan batas atas dan batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(Fl_n, v, p)$ . Pertama membuktikan batas bawah terlebih dahulu. Berdasarkan Lemma 2.4.1 batas bawah

dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal adalah  $X_{lis}(G) \geq X(G)$ , sehingga batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(Fl_n, v, p)$  adalah 4 untuk  $n \geq 4$ .

Selanjutnya membuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(Fl_n, v, p)$ . Berdasarkan Observasi 2.4.2 bahwa suatu graf  $G$  dengan derajat titik yang sama memiliki optimal pelabelan lebih besar sama dengan 2 atau  $opt(l) \geq 2$ . Maka setiap  $vShack(Fl, v, p)$  dilabeli dengan  $\{1, 2\}$  atau  $l: vShack(Fl_n, v, p) = \{1, 2\}$ . Sehingga bobot titik yang diperoleh dengan menjumlahkan label yang bertetangga adalah sebagai berikut;

$$l(z_i) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq p$$

$$l(x_{i,j}) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq 2n + \frac{n}{2}$$

$$l(y_{i,j}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ 1, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

Sehingga bobot titik yang diperoleh berdasarkan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal adalah sebagai berikut;

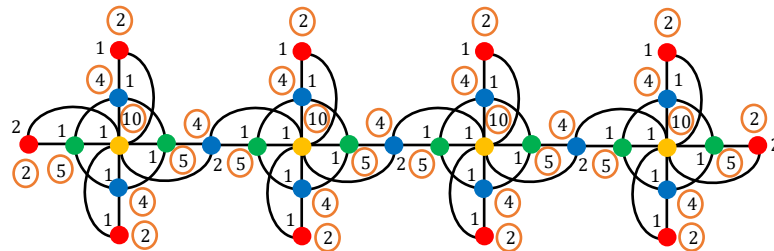
$$w(z_i) = 2n + \frac{n}{2}$$

$$w(x_{i,j}) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ 4, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

$$w(y_{i,j}) = 2, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

$$w(y_{i,1}) = 4 \text{ untuk } 1 \leq i \leq p - 1$$

Berdasarkan hasil penghitungan bobot titik diatas didapatkan  $|wShack(Fl_n, v, p)| \leq 4$  sebagai batas atas untuk graf bunga dengan  $n \geq 4$ . Dalam hal ini telah didapatkan batas bawah dan batas atas melalui fungsi bobot titik dihasilkan nilai  $4 \leq X_{lis}Shack(Fl_n, v, p) \leq 4$ , sedemikian hingga  $X_{lis}Shack(Fl_n, v, p) = 4$ . Terbukti.  $\square$



Gambar 4.5  $X_{lis}Shack(Fl_4, v, 4) = 4$

Gambar 4.5 merupakan ilustrasi dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal hasil operasi graf  $Shack(Fl_n, v, p)$  dengan  $n = 4$  dan didapatkan hasil bilangan kromatik ketakteraturan lokal  $X_{lis}Shack(Fl_n, v, p) = 4$

**Observasi 4.2.** Diberikan  $(Le_n)$  adalah graf lemon dengan  $n \geq 4$  dan  $n$  genap didapatkan bilangan kromatik ketakteraturan lokal adalah  $X_{lis}(Le_n) = 3$

**Bukti.** Diketahui graf lemon  $(Le_n)$  dengan himpunan titik  $V(Le_n) = \{z\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$  dengan  $|V(Le_n)| = 2n$  dan himpunan sisinya  $E(Le_n) = \{zx_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{zy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_ix_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1x_n\} \cup \{y_iy_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_1y_n\}$  dengan  $|E(Le_n)| = 5n$ .

Pada graf lemon dengan  $n \geq 4$  dan akan dibuktikan batas atas dan batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $(Le_n)$ . Pertama membuktikan batas bawah terlebih dahulu. Berdasarkan Lemma 2.4.1 batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal adalah  $X_{lis}(G) \geq X(G)$ , sehingga batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $(Le_n)$  adalah 3 untuk  $n \geq 4$ .

Selanjutnya membuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $(Le_n)$ . Berdasarkan Observasi 2.4.2 bahwa suatu graf  $G$  dengan derajat titik yang sama memiliki optimal pelabelan lebih besar sama dengan 2 atau  $opt(l) \geq 2$ . Maka setiap  $(Le_n)$  dilabeli dengan  $\{1,2\}$  atau  $l: v(Le_n) = \{1,2\}$ . Sehingga bobot titik yang diperoleh dengan menjumlahkan label yang bertetangga adalah sebagai berikut;

$$l(z) = 1$$

$$l(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$l(y_i) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 1, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

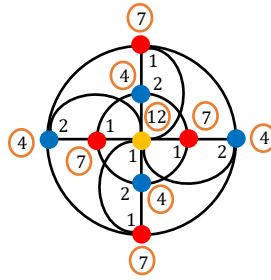
Sehingga bobot titik yang diperoleh berdasarkan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal adalah sebagai berikut;

$$w(z) = 3n$$

$$w(x_i) = \begin{cases} 7, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 4, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 7, & \text{untuk } i \text{ genap} \\ 4, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

Berdasarkan hasil penghitungan bobot titik diatas didapatkan  $|w(Le_n)| \leq 3$  sebagai batas atas untuk graf lemon dengan  $n \geq 4$ . Dalam hal ini telah didapatkan batas bawah dan batas atas melalui fungsi bobot titik dihasilkan nilai  $3 \leq X_{lis}(Le_n) \leq 3$ , sedemikian hingga  $X_{lis}(Le_n) = 3$ . Terbukti.  $\square$



Gambar 4.6  $X_{lis}(Le_4) = 3$

Gambar 4.6 merupakan ilustrasi dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal graf lemon ( $Le_n$ ) dengan  $n = 4$  dan didapatkan hasil bilangan kromatik ketakteraturan lokal  $X_{lis}(Le_n) = 3$

**Teorema 4.4.** Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(Le_n, v, p)$  dengan  $n \geq 4$  dan  $n$  genap adalah  $X_{lis}Shack(Le_n, v, p) = 4$

**Bukti.** Diketahui graf  $Shack(Le_n, v, p)$  dengan himpunan titik  $V(Shack(Le_n, v, p)) = \{z_i; 1 \leq i \leq p\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{1,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, \frac{n+4}{2} \leq j \leq n\}$  dengan  $|V(Shack(Le_n, v, p))| = 2np + 1$  dan himpunan sisinya  $E(Shack(Le_n, v, p)) = \{z_i x_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j} y_{i,j+1}; 1 \leq i \leq p; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,1} x_{i,n}; 1 \leq i \leq p\} \cup \{z_i y_{i,j}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{z_i y_{i,j}; 2 \leq i \leq p; \frac{n+4}{2} \leq j \leq n\} \cup \{z_{i+1} y_{i+1}; 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{x_{1,j} y_{1,j}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_{i,j} y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x_{i,j} y_{i,j}; 2 \leq i \leq p, \frac{n+4}{2} \leq j \leq n\} \cup \{x_{i+1, \frac{n+2}{2}} y_{i,1}; 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{y_{1,j} y_{2,j+1}; 1 \leq j \leq n-1\} \cup$

$\{y_{i,1}y_{i,n}; 1 \leq i \leq p\} \cup \{y_{i,j}y_{i,j+1}; 2 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{y_{i+1,\frac{n}{2}}y_{i,1}; 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{y_{i,1}y_{i+n,\frac{n+4}{2}}; 1 \leq i \leq p-1\} \cup \{y_{i,j}y_{i+2}; 2 \leq i \leq p, \frac{n+4}{2} \leq j \leq n-1\}$  dengan  $|E(Shack(Le_n, v, p))| = 4np$ . Pada graf lemon dengan  $n \geq 4$  akan dibuktikan batas atas dan batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(Le, v, p)$ . Pertama membuktikan batas bawah terlebih dahulu. Berdasarkan Lemma 2.4.1 batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal adalah  $X_{lis}(G) \geq X(G)$ , sehingga batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(Le_n, v, p)$  adalah 4 untuk  $n \geq 4$ . Selanjutnya membuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(Le_n, v, p)$ . Berdasarkan Observasi 2.4.2 bahwa suatu graf  $G$  dengan derajat titik yang sama memiliki optimal pelabelan lebih besar sama dengan 2 atau  $opt(l) \geq 2$ . Maka setiap  $vShack(Le_n, v, p)$  dilabeli dengan  $\{1,2\}$  atau  $l: vShack(Le_n, v, p) = \{1,2\}$ . Sehingga bobot titik yang diperoleh dengan menjumlahkan label yang bertetangga adalah sebagai berikut;

$$l(z_i) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq p$$

$$l(x_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ 2, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

$$l(y_{i,j}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ 1, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

Sehingga bobot titik yang diperoleh berdasarkan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal adalah sebagai berikut;

$$w(z_i) = 3n$$

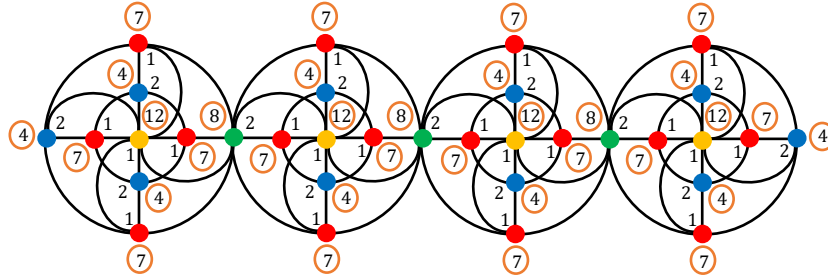
$$w(x_{i,j}) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } j \text{ genap} \\ 7, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$w(y_{i,j}) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } j \text{ ganjil} \\ 7, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

$$w(y_{i,1}) = 8, \text{ untuk } 1 \leq i \leq p-1$$

Berdasarkan hasil penghitungan bobot titik diatas didapatkan  $|wShack(Le_n, v, p)| \leq 4$  sebagai batas atas untuk graf lemon dengan  $n \geq 4$ . Dalam hal ini telah didapatkan batas bawah dan batas atas melalui fungsi bobot titik

dihasilkan nilai  $4 \leq X_{lis}Shack(Le_n, v, p) \leq 4$ , sedemikian hingga  $X_{lis}Shack(Le_n, v, p) = 4$ . Terbukti.  $\square$



Gambar 4.7  $X_{lis}Shack(Le_4, v, 4) = 4$

Gambar 4.7 merupakan ilustrasi dari pewarnaan titik ketakaturan lokal graf  $Shack(Le_n, v, p)$  dengan  $n = 4$  didapatkan hasil bilangan kromatik ketakaturan lokal  $X_{lis}Shack(Le_n, v, p) = 4$

**Observasi 4.3.** Diberikan  $(D_n^{(m)})$  adalah graf kincir angin belanda dengan  $n = 5$ ,  $m \geq 3$  didapatkan bilangan kromatik ketakaturan lokal adalah  $X_{lis}(D_n^{(m)}) = 3$

**Bukti.** Diketahui graf kincir angin belanda  $(D_n^{(m)})$  dengan himpunan titik  $V(D_n^{(m)}) = \{A\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq 2m\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq 2m\}$  dengan  $|V(D_n^{(m)})| = 4m + n$  dan himpunan sisinya  $E(D_n^{(m)}) = \{x_1x_{i+1}; 1 \leq i \leq m, i = \text{ganjil}\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq 2m\} \cup \{Ay_i; 1 \leq i \leq 2m\}$  dengan  $|E(D_n^{(m)})| = 5m$ . Pada graf kincir angin belanda dengan  $m \geq 3$  dan akan dibuktikan batas atas dan batas bawah dari bilangan kromatik ketakaturan lokal pada graf  $(D_n^{(m)})$  Pertama membuktikan batas bawah terlebih dahulu. Berdasarkan Lemma 2.4.1 batas bawah dari bilangan kromatik ketakaturan lokal adalah  $X_{lis}(G) \geq X(G)$ , sehingga batas bawah dari bilangan kromatik ketakaturan lokal pada graf  $(D_n^{(m)})$  adalah 3 untuk  $m \geq 3$ .

Selanjutnya membuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakaturan lokal pada graf  $(D_n^{(m)})$  Berdasarkan Observasi 2.4.2 bahwa suatu graf  $G$  dengan derajat

titik yang sama memiliki optimal pelabelan lebih besar sama dengan 2 atau  $opt(l) \geq 2$ . Maka setiap  $(D_n^{(m)})$  dilabeli dengan  $\{1,2\}$  atau  $l: v(D_n^{(m)}) = \{1,2\}$ . Sehingga bobot titik yang diperoleh dengan menjumlahkan label yang bertetangga adalah sebagai berikut;

$$l(A) = 1$$

$$l(x_i) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 1, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$l(y_i) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n$$

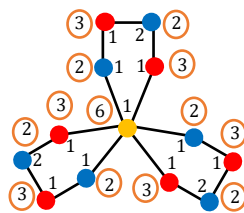
Sehingga bobot titik yang diperoleh berdasarkan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal adalah sebagai berikut;

$$w(A) = 2m$$

$$w(x_i) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 3, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

$$w(y_i) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2, & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

Berdasarkan hasil penghitungan bobot titik diatas didapatkan  $|w(D_n^{(m)})| \leq 3$  sebagai batas atas untuk graf kincir angin belanda dengan  $m \geq 3$ . Dalam hal ini telah didapatkan batas bawah dan batas atas melalui fungsi bobot titik dihasilkan nilai  $3 \leq X_{lis}(D_n^{(m)}) \leq 3$ , sedemikian hingga  $X_{lis}(D_n^{(m)}) = 3$ . Terbukti.  $\square$



Gambar 4.8  $X_{lis}(D_5^{(3)}) = 3$

Gambar 4.8 merupakan ilustrasi dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal graf kincir angin belanda  $(D_n^{(m)})$  dengan  $m = 3$  dan didapatkan hasil bilangan kromatik ketakteraturan lokal  $X_{lis}(D_n^{(m)}) = 3$ .

**Teorema 4.5.** Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack\left(\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right)$  dengan  $n = 5, m \geq 3$  adalah  $X_{lis}Shack\left(\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right) = 4$

**Bukti.** Diketahui graf kincir angin belanda  $\left(D_n^{(m)}\right)$  dengan himpunan titik

$$V\left(Shack\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right) = \{A_i; 1 \leq i \leq p\} \cup \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq 2m\} \cup$$

$$y_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq 2m\} \text{ dengan } |V\left(Shack\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right)| = 4mp + n \text{ dan}$$

$$\text{himpunan sisinya } E\left(Shack\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right) = \{A_i; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq 2m\} \cup$$

$$\{x_{i,j}y_{i,j}; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq 2m, x_{i,j} \neq y_{i,5} \text{ dan } x_{i,6} \leq j \leq 2m\} \cup \{x_{i,j}x_{i,j+1};$$

$$1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq 2m - 1 \text{ untuk } j = \text{ganjil}\} \cup \{x_{i,1}x_{i+1}$$

$$\text{untuk } m \text{ genap dan } x_{i,1}x_{i+1,m+1} \text{ untuk } m \text{ ganjil}; 1 \leq i \leq p\} \cup \{x_{i,1}y_{i+1,m+1} \text{ untuk } m \text{ genap dan}$$

$$x_{i,1}y_{i+1,m} \text{ untuk } m \text{ ganjil}; 1 \leq i \leq p - 1\} \text{ dengan } |E\left(Shack\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right)| =$$

$5mp$ . Pada graf kincir angin belanda dengan  $m \geq 3$  dan akan dibuktikan batas atas

dan batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada

graf  $Shack\left(\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right)$ . Pertama membuktikan batas bawah terlebih dahulu.

Berdasarkan Lemma 2.4.1 batas bawah dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal

adalah  $X_{lis}(G) \geq X(G)$ , sehingga batas bawah dari bilangan kromatik

ketakteraturan lokal pada graf  $Shack\left(\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right)$  adalah 4 untuk  $m \geq 3$ .

Selanjutnya membuktikan batas atas dari bilangan kromatik ketakteraturan lokal

pada graf  $Shack\left(\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right)$ . Berdasarkan Observasi 2.4.2 bahwa suatu graf  $G$

dengan derajat titik yang sama memiliki optimal pelabelan lebih besar sama dengan

2 atau  $opt(l) \geq 2$ . Maka setiap  $vShack\left(\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right)$  dilabeli dengan  $\{1,2\}$  atau

$l: vShack\left(\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right) = \{1,2\}$ . Sehingga bobot titik yang diperoleh dengan

menjumlahkan label yang bertetangga adalah sebagai berikut;

$$l(A_i) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq p$$

$$l(x_{i,j}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } j \text{ ganjal} \\ 1, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

$$l(y_{i,j}) = 1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq 2m$$

Sehingga bobot titik yang diperoleh berdasarkan definisi pewarnaan titik ketakteraturan lokal adalah sebagai berikut;

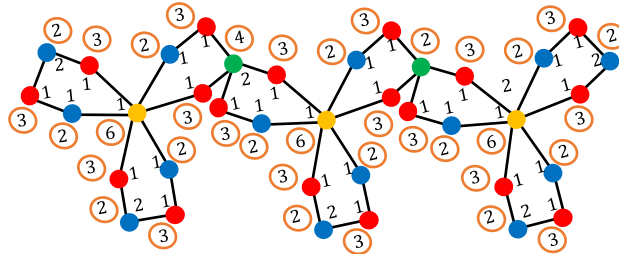
$$w(A_i) = 2m$$

$$w(x_{i,j}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } j \text{ gasal} \\ 3, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

$$w(x_{i,1}) = 4, \text{ untuk } 1 \leq i \leq p - 1$$

$$w(y_{i,j}) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } j \text{ gasal} \\ 2, & \text{untuk } j \text{ genap} \end{cases}$$

Berdasarkan hasil penghitungan bobot titik diatas didapatkan  $|wShack\left(\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right)| \leq 4$  sebagai batas atas untuk graf kincir angin belanda dengan  $m \geq 3$ . Dalam hal ini telah didapatkan batas bawah dan batas atas melalui fungsi bobot titik dihasilkan nilai  $4 \leq X_{lis}Shack\left(\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right) \leq 4$ , sedemikian hingga  $X_{lis}Shack\left(\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right) = 4$ . Terbukti.  $\square$



Gambar 4.9  $X_{lis}Shack\left(\left(D_5^{(3)}\right), v, 3\right) = 4$

Gambar 4.9 merupakan ilustrasi dari pewarnaan titik ketakteraturan lokal graf kincir angin belanda  $Shack\left(\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right)$  dengan  $m = 3$  dan didapatkan hasil bilangan kromatik ketakteraturan lokal  $X_{lis}Shack\left(\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right) = 4$ .

## BAB 5. PENUTUP

### 5.2 Kesimpulan

Berdasarkan Bab 4, diperoleh lima teorema baru bilangan kromatik ketakteraturan lokal hasil operasi *shackle* titik pada keluarga graf roda sebagai berikut :

**Teorema 1.** Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(W_n, v, p)$  dengan  $n \geq 4$  dan  $n$  genap adalah  $X_{lis}Shack(W_n, v, p) = 4$

**Teorema 2.** Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(CH_n, v, p)$  dengan  $n \geq 4$  adalah

$$X_{lis}Shack(CH_n, v, p) = \begin{cases} 8, & \text{untuk } n \geq \text{gasal} \\ 5, & \text{untuk } n \geq \text{genap} \end{cases}$$

**Teorema 3.** Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(Fl_n, v, p)$  dengan  $n \geq 4$  dan  $n$  genap adalah  $X_{lis}Shack(Fl_n, v, p) = 4$

**Teorema 4.** Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack(Le_n, v, p)$  dengan  $n \geq 4$  dan  $n$  genap adalah  $X_{lis}Shack(Le_n, v, p) = 4$

**Teorema 5.** Bilangan kromatik ketakteraturan lokal pada graf  $Shack\left(\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right)$  dengan  $n = 5, m \geq 3$  adalah  $X_{lis}Shack\left(\left(D_n^{(m)}\right), v, p\right) = 4$

### 5.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, masalah terbuka untuk penelitian selanjutnya adalah menemukan bilangan kromatik ketakteraturan lokal inklusif pada hasil operasi *shackle* pada keluarga graf roda dan keluarga graf lainnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Aprilianto, B., Dafik, & Albirri, E. R. (2020). Dimensi Metrik Sisi pada Beberapa Graf Unicyclic. *CGANT*, 58-64.
- Bacak-turan, G., & Demirtekin, E. (2017). Neighbor Rupture Degree of Gear Graphs. *Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 13(2), 319-323.
- Basavanagoud, B., dan Sayyed, M. 2020. Hub-integrity and Edge-integrity Of Some Wheel Related Graphs. *GANITA*. Vol. 71(1) : 1771-1778
- Chartrand, G., and Zang, P. (2012). *A First Course in Graph Theory*.
- Ghudasara, G. V., dan Vaghasiya, S. M. 2014. Product Cordial Labeling of Graphs Related to Helm, Closed Helm and Gear Graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. Vol 9(4), 495-504
- Kristiana, A. L., Dafik, Utoyo, M. I, Slamin, Alfarisi, R., Agustin, L. H., and M. Venkatachalam. 2019. Local Irregularity Vertex Coloring of Graphs. *International Journal of Civil Engineering and Technology*, 10(4):451-461
- Kristiana, A. I., Datik, Agustin 1. H., Utoyo, M. 1, Alfarisi R., and Waluyo E. 2019. On the Chromatic Number Local Irregularity of Related Wheel Graph. *IOP Conf. Series: Journal of Physics*. Conf. Series. 1211.0120003
- Kumala, I. S. 2019. Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Bunga dan Graf Lemon. *Matematika dan Pendidikan Matematika*. 4(1):39-48
- Maryati, T. K., Salman, A., Baskoro, E. T., Ryan, J. Miller, M 2010. On H Super Magic Labellings For Certain Shakles And Amalgamsi Of Connected Graph Antimagic Total Labellings for Shackle A Connected Graph. *Utilitas Math Bull. (83):333-342*.
- Umilasari, Reni. 2017. Bilangan Dominasi Jarak Dua Pada Graf Operasi Shackle. *JUSTINDO, Jurnal Sistem & Teknologi Informasi Indonesia*. 2(2):121-127
- Vaidya, S. K., & Pandit, R. M. (2016). Global Equitable Domination Number of Some Wheel Related Graphs. 3, 77±85



KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN,  
RISET, DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS JEMBER  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
Jalan Kalimantan Nomor 37 Kampus Bumi Tegalboto Jember 68121  
Telepon: 0331- 334988, 330738 Faks: 0331-334988  
Laman: [www.fkip.unej.ac.id](http://www.fkip.unej.ac.id)

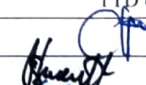
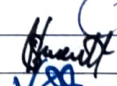


**LEMBAR REVISI SKRIPSI**

NAMA MAHASISWA : Prima Teguh Novasetiyono  
NIM : 210210101127  
JUDUL SKRIPSI : **Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Hasil Operasi *Shackle* Pada Keluarga Graf Roda**  
TANGGAL UJIAN : 10 Januari 2025  
PEMBIMBING : Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.  
Saddam Hussien, S.Pd., M.Pd.


**MATERI PEMBETULAN / PERBAIKAN**

| No. | HALAMAN | HAL-HAL YANG HARUS DIPERBAIKI   |
|-----|---------|---|
| 1.  | iv      | Perbaikan halaman persetujuan masih format lama.                            |
| 2.  | ix-x    | Perbaikan daftar isi masih ada yang belum menggunakan font Times New Roman. |
| 3.  | 21-22   | Perbaikan pada teorema 4.2 terdapat typo angka dan simbol bobot.            |
| 4.  | 24      | Perbaikan fungsi bobot pada observasi 4.1.                                  |
| 5.  | 25-26   | Perbaikan pada teorema 4.3 terdapat salah angka.                            |
| 6.  | 15-17   | Perbaikan pada daftar tabel belum repeat header                             |


**PERSETUJUAN TIM PENGUJI**

| JABATAN    | NAMA TIM PENGUJI                        | TTD dan Tanggal   |
|------------|---|---|
| Ketua      | Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd. |  16/1/25  |
| Sekretaris | Saddam Hussien, S.Pd., M.Pd.            |  17/1/25   |
| Anggota    | Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.          |  15/1/2025 |
|            | Lioni Anka Monalisa, S.Pd., M.Pd.       |  13/1/2025 |

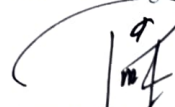
Dosen Pembimbing I,

  
Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.  
NIP. 19760502 200604 2 001

Jember, 13 Januari 2025  
Mengetahui / menyetujui :  
Dosen Pembimbing II,

  
Saddam Hussien, S.Pd., M.Pd.  
NRP. 760017071

Mahasiswa Yang Bersangkutan

  
Prima Teguh Novasetiyono  
NIM. 210210101127

Mengetahui,  
Ketua Jurusan P.MIPA

  
Dr. Ertan Yudianto, S.Pd., M.Pd.  
NIP. 19850316 201504 1 001