STUDI TENTANG GRAF MODE

SKRIPSI

Diajukan untuk memenuhi Persyaratan Penyelesaian Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh :
ADI SUMIARTO
NIM. 971810101099

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2004

MOTTO

Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan suatu kaum sehingga mereka mengubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri.

(Q.S Ar-Ra'd: 11)

Bukanlah suatu aib jika anda gagal dalam suatu usaha, yang merupakan aib ialah jika anda tidak berusaha bangkit dari kegagalan itu.

(Ali bin Abi Thalib)

Carilah tanpa mencari-cari karena apa yang ingin kau capai ada dalam dirimu

(Word Banks)

PERSEMBAHAN

Aku persembahkan karya ini pada:

1. *Yang kuhormati dan kusayangi, Alm. Ayahanda Marsudi dan Ibunda Siti Sundari yang memberi kasih sayang, do'a restu dan dorongan semangat.*
2. *Yang kusayangi kakakku Arie Sumardoko, yang selalu memberi perhatian.*
3. *Saudara, sahabat dan teman, terima kasih atas dukungannya.*
4. *Ilmu Pengetahuan dan Almamater tercinta Universitas Jember yang kubanggakan.*

DEKLARASI

Skripsi ini berisi hasil kerja/penelitian mulai bulan Oktober 2002 sampai dengan bulan Desember 2003. Bersama ini saya menyatakan bahwa isi skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan skripsi ini belum pernah diajukan pada institusi lain.

Jember, Desember 2003

Adi Sumiarto

ABSTRAK

"***Studi tentang Graf Mode***", Adi Sumiarto, NIM. 971810101099, Skripsi, Desember 2003, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Sebuah graf mode adalah graf terhubung yang setiap titiknya merupakan titik mode. Setiap graf yang bukan graf mode dapat dibuat suatu graf mode dengan penambahan titik dan sisi atau hanya dengan penambahan sisi. Senter dari graf G, $Cen(G)$, adalah subgraf yang di induksi dari titik-titik sentral pada graf G. Titik sentral dari graf G adalah titik yang mempunyai eksentrisitas sama dengan jari-jari di G. Keliling dari G, $Per(G)$, adalah subgraf yang di induksi dari titik keliling pada graf G. Titik keliling pada graf G adalah titik yang mempunyai eksentrisitas sama dengan diameter pada graf G. Dalam menghasilkan senter dan keliling dari suatu graf mode dapat dilakukan suatu proses yang sama dengan perlakuan untuk memperoleh suatu graf mode yaitu dengan penambahan titik dan sisi, sehingga graf asli menjadi sebuah senter atau keliling. Eksentrisitas titik di dalam hasil kali kartesius dari dua graf $G_1 \times G_2$ bisa lebih mudah dihitung daripada eksentrisitas titik dalam G_1 dan G_2. Jika G_1 adalah graf mode dan G_2 adalah graf *self-centered*, maka hasil kali kartesius dari G_1 dan G_2 menghasilkan suatu graf mode. Penjumlahan dua graf $G_1 + G_2$ dapat menghasilkan graf mode-(1,2), jika G_1 adalah graf lengkap dan G_2 adalah graf dengan $rad(G_2) \geq 2$ serta banyaknya himpunan titik di G_1 sama dengan banyaknya himpunan titik di G_2.

Kata kunci : eksentrisitas, senter, keliling, titik mode, graf mode

PENGESAHAN

Skripsi ini diterima oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

Hari : JUM'AT

Tanggal : 30 JAN 2004

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji,

Ketua (DPU)

Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si
NIP. 132 258 180

Sekretaris (DPA)

Agustina Pradjaningsih, S.Si, M.Si
NIP. 132 257 933

Anggota I

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si
NIP. 132 206 019

Anggota II

M. Fatekurohman, S.Si, M.Si
NIP. 132 210 538

Mengesahkan,
Plh. Dekan FMIPA Univ. Jember

Drs. Sujito, Ph. D
NIP. 131 756 172

KATA PENGANTAR

Alhamdulilah puji syukur yang tak terhingga penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, barokah, hidayah dan inayah-Nya, sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Penulisan skripsi yang berjudul ***"Studi tentang Graf Mode"*** ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar kesarjanaan Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis telah banyak mendapatkan bantuan dan dorongan baik secara langsung maupun tidak langsung dari berbagai pihak. Untuk itu penulis menyampaikan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada:

1. Kristiana Wijaya, M.Si selaku Dosen Pembimbing Utama dan Agustina Pradjaningsih, M.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah memberikan bimbingan dan arahan serta memahami keterbatasan penulis, sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
2. Kosala Dwidja Purnomo, S.Si, dan M. Fatekurohman, M.Si selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik, saran dan masukan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
3. Drs. Kusno, DEA, Ph.D selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.
4. Seluruh Dosen dan Civitas Akademika dilingkungan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.
5. Orang tuaku, kakakku dan saudara-saudaraku yang telah memberikan bantuan materiil dan dorongan semangat selama penulisan skripsi ini.
6. Teman-temanku: Rina, Yui, Andam, Jati, Wirid, Yudhi, Bahrul, Didit dan lainnya terima kasih atas dukungan semangatnya.
7. Teman-teman seperjuangan angkatan '97 dan adik angkatan Jurusan Matematika serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan namanya satu persatu yang telah memberikan bantuan dan dorongan selama penulisan karya tulis ilmiah ini.

Oleh karena itu kritik dan saran yang konstruktif selalu diharapkan dari pembaca sehingga skripsi ini dapat memberi konstribusi terhadap kemajuan ilmu pengetahuan khususnya bidang Matematika dan semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembacanya.

Jember, Desember 2003

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu bidang matematika yang selama beberapa dekade ini mengalami perkembangan pesat. Berawal pada tahun 1736, teori graf diperkenalkan pertama kali oleh seorang ahli matematika asal Swiss, Leornado Euler. Teori graf banyak digunakan sebagai alat untuk mencari solusi beberapa permasalahan, diantaranya masalah Jembatan Königsberg, masalah optimasi dan sebagainya. [3]

Dalam teori graf terdapat topik-topik menarik yang dimunculkan, salah satunya mengenai graf mode yang diperkenalkan pertama kali pada tahun 2000 oleh Boland. [1]

Misalkan G adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Jarak antara titik u ke v didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek dari u ke v. *Eksentrisitas* titik v, dinotasikan dengan $ec(v)$ dalam graf terhubung G adalah jarak terjauh dari titik v ke setiap titik lain dalam graf G. Titik v dinamakan *titik eksentrik* dari u jika jarak dari titik v ke titik u sama dengan eksentrisitas dari titik u ke titik v. Titik eksentrisitas yang paling sering terjadi dalam barisan eksentrisitas dalam graf terhubung G dinamakan *titik mode*. Graf mode adalah graf terhubung yang setiap titiknya merupakan titik mode.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang diajukan dalam skripsi ini adalah:

1. bagaimana mengkonstruksi sebuah graf menjadi graf mode dengan penambahan titik dan sisi tanpa mengubah eksentrisitas dari graf asli;
2. membuktikan bahwa setiap graf dapat dinyatakan sebagai senter dari suatu graf mode;

   bagaimana mendapatkan suatu graf mode dari operasi graf khususnya pada hasil kali kartesius dan penjumlahan dua graf.

1.3 Batasan Masalah

Pada skripsi ini graf yang akan dikaji adalah graf sederhana dan graf hingga, dimana graf yang digunakan bukan graf berbobot, sehingga jarak setiap titik pada graf dianggap 1.

1.4 Tujuan

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk:

1. mendapatkan graf mode dengan penambahan titik dan sisi;
2. mendapatkan senter dari suatu graf mode;
3. mendapatkan suatu graf mode dari operasi graf khususnya pada hasil kali kartesius dan penjumlahan dua graf.

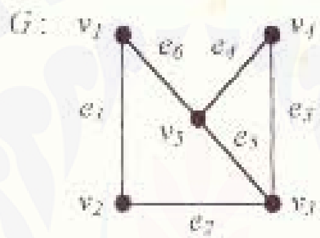
1.5 Manfaat

Graf mode dapat diaplikasikan dalam jasa pengiriman barang dan bermanfaat bagi distributor barang dalam pengiriman barang dan memperluas area pengiriman barang serta menentukan banyaknya barang yang dikirim.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengertian Graf

Graf tak berarah (*undirected graph*) G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang dinamakan *titik* (*vertex*), dan $E(G)$ adalah himpunan (yang mungkin kosong) dari pasangan tak terurut (u,v) dari titik-titik u,v di $V(G)$ yang dinamakan *sisi* (*edge*). Selanjutnya sisi $e = (u,v)$ dari graf G di tulis $e = uv$ dan graf tak berarah G disebut graf G saja. Contoh dari graf ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Graf G dengan 5 titik dan 6 sisi

2.2 Konsep Dasar

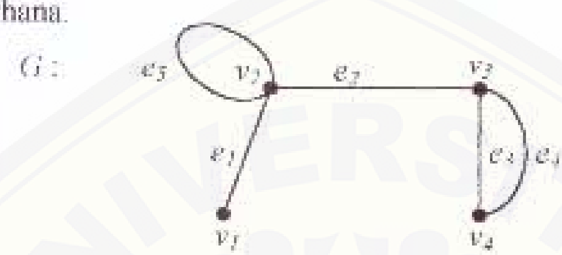
Dalam teori graf terdapat banyak definisi dan notasi, berikut beberapa diantaranya yang berkaitan dengan skripsi ini.

2.2.1 Definisi dan Notasi

Banyaknya titik pada graf G disebut *order* dari graf G. Graf yang memiliki order hingga dinamakan *graf hingga*. Sebagai contoh, Gambar 2.2 adalah graf berorder 4.

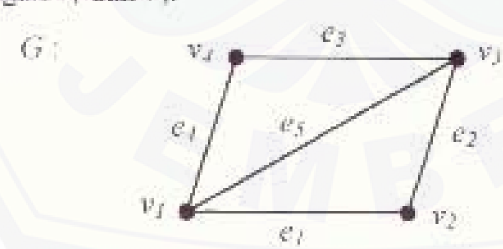
Gambar 2.2 Graf-graf berorder 4

Dalam suatu graf G, jika suatu titik v dihubungkan dengan dirinya sendiri atau $e = vv$, maka sisi e dinamakan *loop*. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi-sisi tersebut dinamakan *sisi rangkap* (*multiple edges*). Graf yang tidak memuat loop dan sisi rangkap dinamakan *graf sederhana* (*simple graph*). Gambar 2.3 menunjukkan e_5 adalah loop dan e_3, e_4 adalah sisi rangkap. Semua graf yang dibahas dalam skripsi ini adalah graf hingga dan graf sederhana.



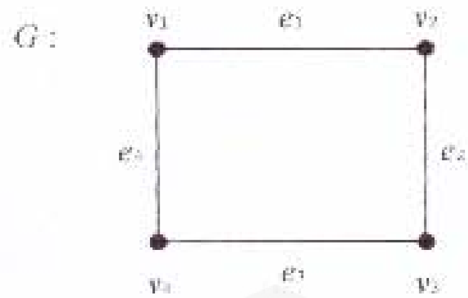
Gambar 2.3 Graf dengan loop dan sisi rangkap

Jika dua titik u dan v di graf G dihubungkan oleh suatu sisi e, maka titik u dan v dikatakan *tetangga* (*adjacent*) dan sisi e pada graf G dikatakan *menempel* (*incident*) dengan kedua titik yang dihubungkan. Pada Gambar 2.4 titik-titik yang bertetangga adalah v_1 dengan v_2, v_2 dengan v_3, v_4 dengan v_3, dan v_1 dengan v_4 sedangkan sisi e_1 menempel dengan v_1 dan v_2, sisi e_2 menempel dengan v_2 dan v_3, sisi e_3 menempel dengan v_3 dan v_4, sisi e_4 menempel dengan v_1 dan v_4, dan sisi e_5 menempel dengan v_1 dan v_3.



Gambar 2.4 Graf untuk ilustrasi adjacent dan incident

Derajat (*degree*) dari titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel dengan titik v, yang dinotasikan dengan $deg\ (v)$. Jika setiap titik dalam graf G mempunyai derajat yang sama, maka graf tersebut dinamakan *graf reguler*. Graf G dikatakan *r-reguler* jika setiap titik pada graf G mempunyai derajat r. Gambar 2.5 menunjukkan $deg\ (v_1) = deg\ (v_2) = deg\ (v_3) = deg\ (v_4) = 2$, sehingga dinamakan graf 2-reguler.

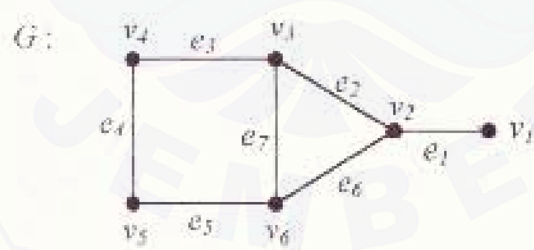


Gambar 2.5 Graf 2-reguler

Sebuah *jalan* (*walk*) pada graf G yang dinotasikan dengan $W(G)$ adalah barisan berhingga yang diawali dan diakhiri dengan titik, yaitu:

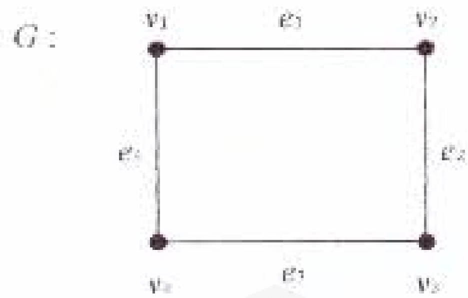
$W(G) = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ dengan $n \geq 0$

dengan elemen-elemennya saling bergantian antara titik dan sisi, sedemikian hingga (v_i, v_{i+1}) adalah sisi di G, untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Jika $v_0 = v_n$, maka $W(G)$ disebut *jalan tertutup* dan dikatakan *terbuka* jika $v_0 \neq v_n$. Sebuah jalan yang semua titiknya berbeda atau barisan titik-titiknya tidak ada pengulangan dinamakan *lintasan* (*path*), tetapi jika yang berbeda adalah sisi-sisinya, maka jalan tersebut dinamakan *jejak* (*trail*). *Sikel* (*cycle*) didefinisikan sebagai suatu lintasan yang tertutup. Sebagai contoh, pada Gambar 2.6



Gambar 2.6 Graf G untuk mengilustrasikan jalan

v_2-e_2-v_3-e_3-v_4-e_4-v_5-e_5-v_6-e_7-v_3-e_2-v_2-e_1-v_1 merupakan jalan terbuka, v_2-e_2-v_3-e_3-v_4-e_4-v_5-e_5-v_6-e_6-v_2 adalah jalan tertutup, v_1-e_1-v_2-e_2-v_3-e_3-v_4-e_4-v_5-e_5-v_6 adalah suatu lintasan, sedangkan v_3-e_3-v_4-e_4-v_5-e_5-v_6-e_7-v_3-e_2-v_2-e_6-v_6 dinamakan jejak dan v_3-e_3-v_4-e_4-v_5-e_5-v_6-e_7-v_3 adalah sikel.

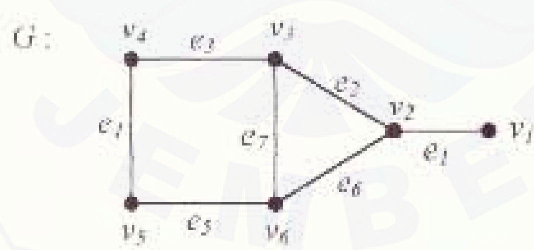


Gambar 2.5 Graf 2-reguler

Sebuah *jalan* (*walk*) pada graf G yang dinotasikan dengan $W(G)$ adalah barisan berhingga yang diawali dan diakhiri dengan titik, yaitu:

$W(G) = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ dengan $n \geq 0$

dengan elemen-elemennya saling bergantian antara titik dan sisi, sedemikian hingga (v_i, v_{i+1}) adalah sisi di G, untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Jika $v_0 = v_n$, maka $W(G)$ disebut *jalan tertutup* dan dikatakan *terbuka* jika $v_0 \neq v_n$. Sebuah jalan yang semua titiknya berbeda atau barisan titik-titiknya tidak ada pengulangan dinamakan *lintasan* (*path*), tetapi jika yang berbeda adalah sisi-sisinya, maka jalan tersebut dinamakan *jejak* (*trail*). *Sikel* (*cycle*) didefinisikan sebagai suatu lintasan yang tertutup. Sebagai contoh, pada Gambar 2.6

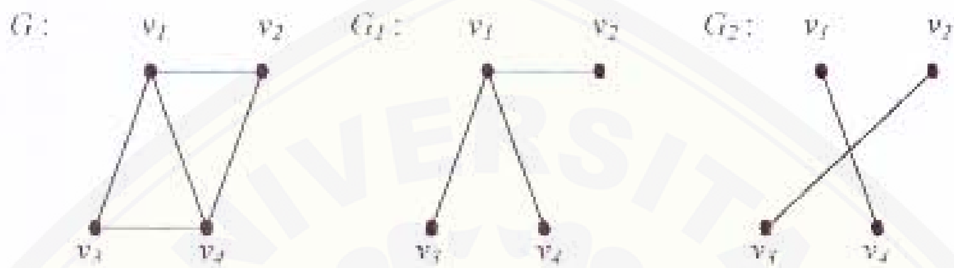


Gambar 2.6 Graf G untuk mengilustrasikan jalan

v_2-e_2-v_3-e_3-v_4-e_4-v_5-e_5-v_6-e_7-v_3-e_2-v_2-e_1-v_1 merupakan jalan terbuka, v_2-e_2-v_3-e_3-v_4-e_4-v_5-e_5-v_6-e_6-v_2 adalah jalan tertutup, v_1-e_1-v_2-e_2-v_3-e_3-v_4-e_4-v_5-e_5-v_6 adalah suatu lintasan, sedangkan v_3-e_3-v_4-e_4-v_5-e_5-v_6-e_7-v_3-e_2-v_2-e_6-v_6 dinamakan jejak dan v_3-e_3-v_4-e_4-v_5-e_5-v_6-e_7-v_3 adalah sikel.

2.2.2 Subgraf

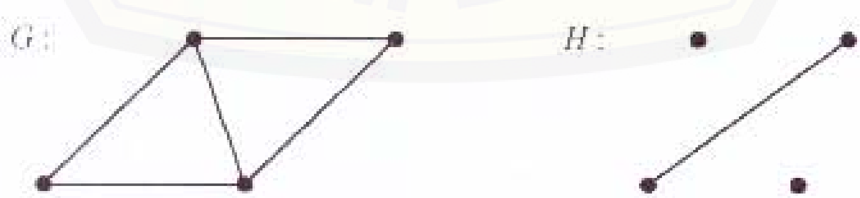
Graf H merupakan *subgraf* dari graf G jika setiap titik di H adalah titik di G dan setiap sisi di H adalah sisi di G. Dengan kata lain $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Gambar 2.7 menunjukkan G_1 adalah subgraf dari G tetapi G_2 bukan subgraf dari G karena terdapat sisi v_2v_3 di G_2 yang bukan merupakan elemen dari $E(G)$.



Gambar 2.7 Graf dan subgraf

2.2.3 Graf Terhubung (*Connected Graph*)

Graf G dinamakan *graf terhubung* (*connected graph*) jika setiap dua titik u,v di G terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Graf G dikatakan *graf tak terhubung* (*disconnected graph*) jika ada dua titik di G yang tidak terdapat lintasan. *Komponen* dari graf G adalah subgraf terhubung maksimal dari G. Dengan demikian, setiap graf terhubung hanya mempunyai satu komponen, sedangkan untuk graf tak terhubung, mempunyai sedikitnya dua komponen. Gambar 2.8 mengilustrasikan G adalah graf terhubung dan H adalah graf tak terhubung dengan 3 komponen.



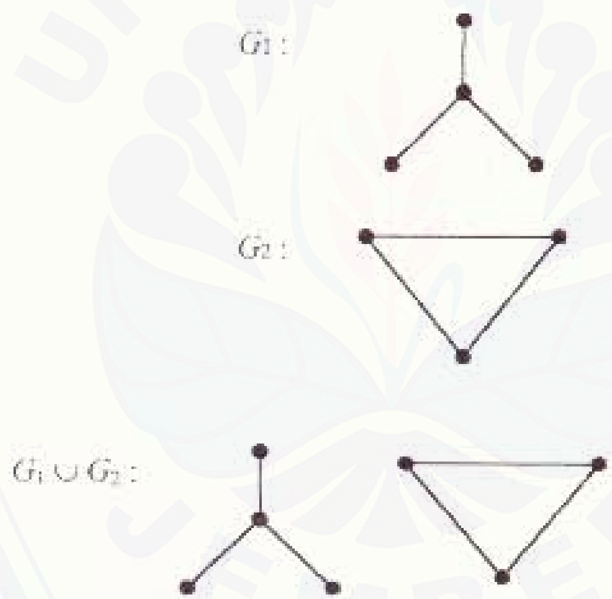
Gambar 2.8 Graf terhubung dan graf tak terhubung

2.3 Operasi Pada Graf

Dalam teori graf terdapat beberapa operasi, diantaranya gabungan (*union*) graf, penjumlahan (*join*) dua graf dan hasil kali kartesius (*cartesian product*) dua graf. Misalkan G_1 dan G_2 adalah dua graf yang saling asing, yaitu $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ dan $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$.

2.3.1 Gabungan Graf

Gabungan graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$ adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Contoh gabungan dua graf ditunjukkan pada Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Gabungan dari dua graf

2.3.2 Penjumlahan Dua Graf

Penjumlahan dari graf G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $G_1 + G_2$, adalah graf yang terdiri dari gabungan G_1 dan G_2, dengan

$$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}.$$

Sebagai contoh, Gambar 2.10 menunjukkan penjumlahan dua graf.

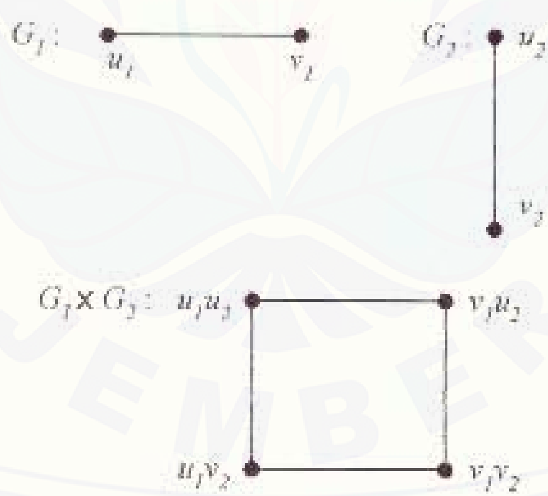
Gambar 2.10 Penjumlahan dua graf

2.3.3 Hasil Kali Kartesius Dua Graf

Hasil kali kartesius dari graf G_1 dan G_2, dinotasikan dengan $G_1 \times G_2$ adalah graf yang mempunyai himpunan titik

$$V = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2)\},$$

dengan titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2), untuk $u_1, v_1 \in V(G_1)$ dan $u_2, v_2 \in V(G_2)$ adjacent di $G_1 \times G_2$ jika hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1v_1 \in E(G_1)$. Untuk mengilustrasikan hasil kali kartesius dua graf, perhatikan Gambar 2.11.



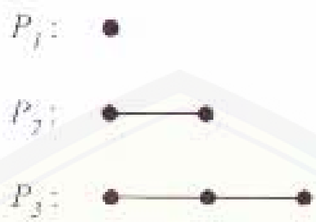
Gambar 2.11 Hasil kali kartesius dua graf

2.4 Kelas-kelas Graf

Teori graf mengenal beberapa macam graf yang dikelompokkan ke dalam beberapa kelas graf. Kelas-kelas graf tersebut diantaranya adalah graf lintasan (*path*), graf sikel (*cycle*), dan graf lengkap (*complete*).

2.4.1 Graf Lintasan (*Path*)

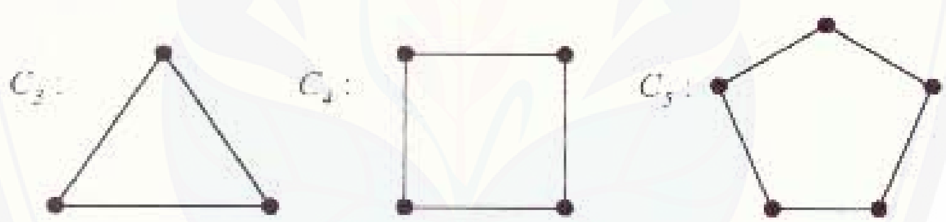
Graf lintasan dengan n titik, dinotasikan dengan P_n adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Contoh dari graf lintasan diberikan pada Gambar 2.12.



Gambar 2.12 Graf lintasan

2.4.2 Graf Sikel (*Cycle*)

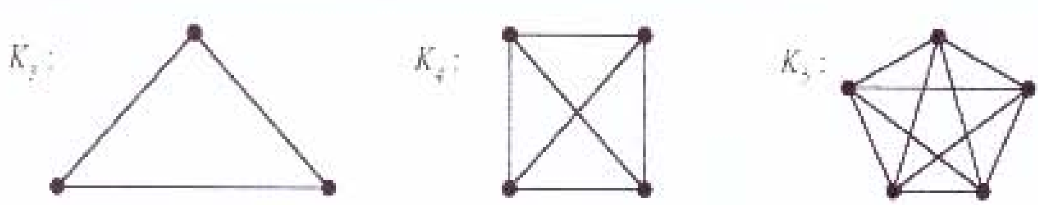
Graf sikel adalah graf yang terdiri dari satu sikel, dinotasikan dengan C_n yang berarti graf sikel dengan n titik, dengan $n \geq 3$. Gambar 2.13 merupakan contoh graf sikel C_3, C_4, dan C_5.



Gambar 2.13 Graf sikel

2.4.3 Graf Lengkap (*Complete*)

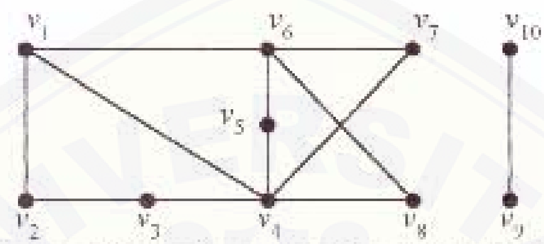
Graf lengkap didefinisikan sebagai graf dengan setiap titik yang berbeda di G dihubungkan dengan sisi. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n. Beberapa contoh dari graf lengkap, diberikan pada Gambar 2.14.



Gambar 2.14 Graf lengkap

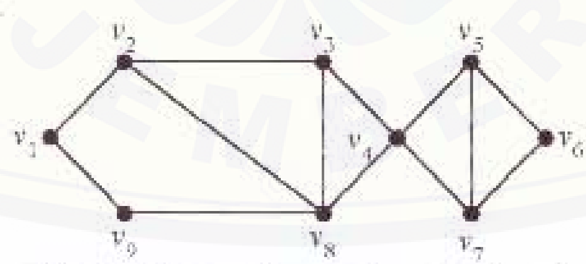
2.5 Eksentrisitas

Jarak (distance) antara dua titik u dan v dalam graf G, dinotasikan $d(u,v)$, adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v. Jika u dan v merupakan titik-titik dalam komponen yang berbeda, maka $d(u,v) = \infty$. Pada Gambar 2.15 menunjukkan, $d(v_1, v_3) = d(v_1, v_5) = d(v_1, v_7) = 2$, $d(v_2, v_7) = d(v_1, v_8) = d(v_3, v_6) = 3$, $d(v_1, v_9) = \infty$.



Gambar 2.15 Graf untuk mengilustrasikan jarak

Eksentrisitas dari titik v, dinotasikan dengan $ec(v)$ pada graf terhubung G adalah jarak terjauh dari titik v ke setiap titik di G, yaitu $ec(v) = max\{d(v,u) \mid u \in V(G)\}$. *Jari-jari (radius)* dari G, dinotasikan dengan $rad(G)$ adalah eksentrisitas minimum pada G, sedangkan *diameter* G, dinotasikan dengan $diam(G)$ adalah eksentrisitas maksimum pada G. Gambar 2.16 menunjukkan $rad(G) = 3$ dan $diam(G) = 5$. Titik v adalah *titik eksentrik* dari u jika jarak dari titik u ke v sama dengan eksentrisitas dari titik v ke titik u.



Gambar 2.16 Graf ilustrasi eksentrisitas, radius dan diameter

Dari graf G pada Gambar 2.16 didapatkan:

$ec(v_1) = 5$ dengan titik eksentrik v_6.

$ec(v_2) = 4$ dengan titik eksentrik v_6.

$ec(v_3) = 3$ dengan titik eksentrik v_6.

$ec(v_4) = 3$ dengan titik eksentrik v_1.

$ec(v_5) = 4$ dengan titik eksentrik v_1,

$ec(v_6) = 5$ dengan titik eksentrik v_1,

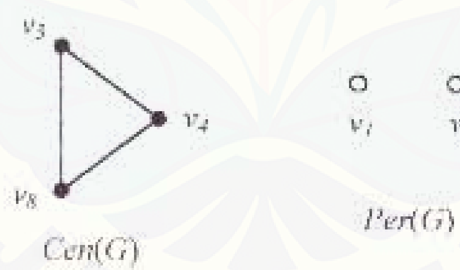
$ec(v_7) = 4$ dengan titik eksentrik v_1,

$ec(v_8) = 3$ dengan titik eksentrik v_6,

$ec(v_9) = 4$ dengan titik eksentrik v_6.

2.6 Titik Sentral dan Titik Keliling

Sebuah titik v di G dinamakan *titik sentral (central vertex)* dari G jika eksentrisitasnya sama dengan radius G yaitu $ec(v) = rad(G)$, dan dinamakan *titik keliling (peripheral vertex)* jika eksentrisitasnya sama dengan diameter G yaitu $ec(v) = diam(G)$. *Senter (center)* G, dinotasikan $Cen(G)$ adalah subgraf yang diinduksi dari titik-titik sentral di G, sedangkan *keliling (periphery)* dari G, dinotasikan $Per(G)$ adalah subgraf yang diinduksi dari titik-titik keliling di G. Gambar 2.17 menunjukkan pengilustrasian senter dan keliling dari graf G, Gambar 2.16, dengan titik-titik v_3, v_4, dan v_8 sebagai titik sentral dan titik-titik v_1 dan v_6 adalah titik keliling.



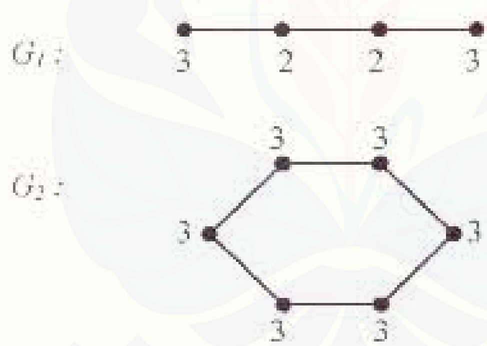
Gambar 2.17 Ilustrasi senter dan keliling

2.7 Graf Mode

Barisan eksentrisitas dari graf G, dinotasikan $ES(G)$ adalah barisan dari eksentrisitas G yang dituliskan dalam derajat kenaikan (dimulai dengan nilai terkecil). Barisan eksentrisitas di G dapat dituliskan $ES(G) = \left(ec_1^{k_1}, ec_2^{k_2}, \cdots, ec_n^{k_n}\right)$. *Titik mode (mode vertex)* dari graf terhubung G didefinisikan sebagai titik yang eksentrisitasnya paling sering terjadi dalam barisan eksentrisitas $ES(G)$. Sebagai contoh, pada Gambar 2.18, $ec(v_1) = 4$, $ec(v_2) = 4$, $ec(v_3) = 3$, $ec(v_4) = 2$, $ec(v_5) = 3$, $ec(v_6) = 4$, dan titik mode dari graf G adalah titik-titik v_1, v_2, dan v_6.

Gambar 2.18 Ilustrasi titik mode

Graf mode adalah graf terhubung yang setiap titiknya merupakan titik mode. Graf Mode - $(ec_1, ec_2, \ldots, ec_n)$ adalah graf mode dengan eksentrisitas $ec_1, ec_2, \ldots, ec_n$. Jika radius graf G sama dengan diameternya, maka graf G dinamakan graf *self-centered*. Graf *self-centered* G dapat dinyatakan sebagai graf mode-(f^p), dengan eksentrisitas $f = rad(G)$ dan p adalah order dari G. Sebagai catatan, graf mode merupakan generalisasi dari graf *self-centered*. Gambar 2.19 menunjukkan G_1 adalah graf mode-(2,3) dan G_2 adalah graf *self-centered* dan dapat dituliskan sebagai graf mode-(3^6).



Gambar 2.19 Graf mode dan graf *self-centered*

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat diambil kesimpulan mengenai graf mode, sebagai berikut :

1. penambahan titik-titik baru dan sisi pada setiap graf sederhana dapat menghasilkan graf mode yang bereksentrisitas sama dengan graf semula,
2. penambahan $2n$ titik dan n sisi pada suatu graf sederhana menghasilkan graf sederhana yang dapat dinyatakan sebagai senter dari sebuah graf mode,
3. hasil kali kartesius dua graf merupakan salah satu operasi graf untuk mempermudah perhitungan eksentrisitas titik,
4. penjumlahan graf lengkap dan graf dengan radius lebih besar dari satu dapat menghasilkan graf mode-(1,2).

4.2 Saran

Penelitian mengenai graf mode ini masih bisa dikembangkan pada kelas-kelas graf yang lain seperti: graf pohon dan corona.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Boland J, Kauffman J, and Panrong X, 2000, *Mode Graphs, Congressus Numeratium*, Departement of Mathematics East Tennesee State University Johnson City, TN 37614

[2]. Chartrand G, and Lesniak L, 1996, *Graphs & Digraphs, 3rd ed*, New York: Chapman and Hall

[3]. Kreyszig E, 1998, *Advanced Mathematics, 6th edition*, John Wiley and Sons

[4]. Grimaldi, R. P., 1999, *Discrete and Combinatorial Mathematics*, United State of America: Addison Wesley Longman, Inc.

[5]. Matausek, J. and Nesetril, J., 1998, *Invitation to Discrete Mathematics*, New York: Oxford University Press, Inc.