KAJIAN FRAKTAL *k-FIBONACCI WORD* MENGGUNAKAN *NATURAL DRAWING RULE*

SKRIPSI

Oleh

Ulfi Mega Prastiwi

141810101011

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS JEMBER

2018

KAJIAN FRAKTAL *k-FIBONACCI WORD* MENGGUNAKAN *NATURAL DRAWING RULE*

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh
Ulfi Mega Prastiwi
141810101011

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2018

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ibunda Kusmi Astuti dan Ayah Sutoyo yang telah memberikan motivasi, doa, kasih sayang dan pengorbanan selama ini untuk putrinya;
2. Kakakku tercinta Ullum Kusumaningtyas yang telah memberikan doa, keceriaan serta semangat dalam menyelesaikan skripsi ini;
3. guru-guruku sejak Sekolah Dasar sampai dengan Perguruan Tinggi, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. Almamater Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

“Kamu mungkin bisa menunda waktu,

tapi waktu tidak akan bisa menunggu”

(Benjamin Franklin)*)

*)Benjamin Franklin. 2009. Brainy. Massachusetts: Boston.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ulfi Mega Prastiwi

NIM : 141810101011

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul "Kajian Fraktal *k-Fibonacci Word* Menggunakan *Natural Drawing Rule*" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya dan belum pernah diajukan pada institusi manapun serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juli 2018

Yang menyatakan,

Ulfi Mega Prastiwi

141810101011

SKRIPSI

KAJIAN FRAKTAL *k-FIBONACCI WORD* MENGGUNAKAN *NATURAL DRAWING RULE*

Oleh

Ulfi Mega Prastiwi

NIM. 141810101011

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si

Dosen Pembimbing Anggota : Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Kajian Fraktal *k-Fibonacci Word* Menggunakan *Natural Drawing Rule"* telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Tim Penguji:

Ketua,	Anggota I,
Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si	Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.
NIP. 196908281998021001	NIP. 197006061998031003
Anggota II,	Anggota III,
Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si	Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si.
NIP. 197408132000032004	NIP. 198610142014041001

Mengesahkan

Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D

NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

Kajian Fraktal *k-Fibonacci Word* Menggunakan *Natural Drawing Rule*; Ulfi Mega Prastiwi; 141810101011; 2018; 46 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Fraktal *Fibonacci Word* adalah salah satu jenis fraktal yang pertama kali dikenalkan oleh Dumaine pada tahun 2009. *Fibonacci Word* kemudian berkembang salah satunya menjadi *k-Fibonacci Word* yang pertama kali diperkenalkan oleh Ramirez dan Rubiano pada tahun 2013. Barisan ini didefinisikan sebagai $f_{k,0} = 0, f_{k,1} = 0^{k-1}1, f_{k,n} = f_{k,n-1}^{k} f_{k,n-2}$ untuk $n \geq 2$ dan $k \geq 1$, n menunjukkan suku ke-n dan k menunjukkan kesamaan barisan *k-Fibonacci Word*.

Fraktal *k-Fibonacci Word* dapat dibangun menggunakan aturan ganjil genap berdasarkan barisan *Fibonacci Word* yang telah diterapkan pertama kali oleh Dumaine pada tahun 2009. Barisan *Dense Fibonacci Word* adalah salah satu modifikasi yang digunakan untuk membangkitkan fraktal *k-Fibonacci Word* dengan menggunakan tiga digit {0,1,2}, kemudian untuk membangkitkan kurva fraktalnya menggunakan aturan garis sederhana yang disebut *natural drawing rule* aturan menggambarnya yaitu dengan cara menghubungkan suatu kurva menggunakan gambar garis mengikuti gerak dari simbol barisan *Dense Fibonacci Word*. Aturan menggambar *natural drawing Rule* adalah jika "0" maka menggambar suatu segmen garis, jika "1" maka menggambar segmen garis dan berbelok ke kanan, jika "2" maka menggambar segmen garis dan berbelok ke kiri. Pada penelitian Kajian Fraktal *k-Fibonacci Word* Menggunakan *Natural Drawing Rule* ini dibagi menjadi empat tahap yaitu, penafsiran Fraktal *k-Fibonacci Word* berdasarkan barisan *Dense Fibonacci Word* , penafsiran Fraktal *Dense Fibonacci Word* menggunakan *natural drawing rule* secara Grafis, pembuatan program dan Analisis Hasil.

Penafsiran barisan *Dense Fibonacci Word* menggunakan morfisme $\mu\,(00) = 0$, $\mu\,(01) = 1$, $\mu\,(10) = 2$. Barisan *k-Fibonacci Word* dinotasikan dengan f_n sedangkan barisan *Dense Fibonacci Word* dinotasikan dengan f_n'. Hasil yang diperoleh dari penafsiran barisan *Dense Fibonacci Word* tersebut dibangkitkan menggunakan *natural drawing rule* dan hasil yang didapat berupa visualisasi kurva *k-Fibonacci Word* yang dinotasikan dengan $\mathcal{F}_{k,n}$.

Karakteristik yang diperoleh untuk generalisasi *k* ganjil dan *k* genap untuk sudut $\frac{\pi}{2}$ adalah, pada generalisasi *k* ganjil bentuk kurva fraktalnya hampir sama antara *k* ganjil yang satu dengan lainnya yaitu $\mathcal{F}_{k-2,n}$. Semakin besar *k* dan *n* maka gerigi pada kurvanya tidak nampak dan hanya menggambarkan seperti garis lurus saja, hal ini kerena dipengaruhi oleh banyaknya segmen garis yang terbentuk sedangkan pada generalisasi *k* genap bentuk kurva fraktalnya mempunyai kesamaan yaitu $\mathcal{F}_{k-4,n}$. Semakin bertambahnya *k* dan *n* maka kurva fraktal yang dihasilkan akan menunjukkan bentuk persegi yang semakin jelas dan kurva *k-Fibonacci Word* merupakan *family curve* dari fraktal *Fibonacci word* karena karakteristiknya memiliki kemiripan, setelah menganalisis perubahan generalisasi *k* ganjil dan *k* genap diperoleh bahwa fraktal *k-Fibonacci Word* memenuhi sifat sebagai fraktal yaitu *self-similarity*, *self-affinity*, *self-inverse* dan *self-squaring.*

PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Kajian Fraktal *k-Fibonacci Word* Menggunakan *Natural Drawing Rule*". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari perhatian, bimbingan, motivasi, dan petunjuk dari beberapa pihak, baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si, selaku Dosen Pembimbing Utama sekaligus Dosen Pembimbing Akademik dan Bapak Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si, selaku Dosen Pembimbing Anggota yang dengan penuh kesabaran membimbing, mengarahkan, memberikan saran dan petunjuk dalam penyusunan skripsi ini;
2. Ibu Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si dan Bapak Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si, selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyusunan skripsi;
3. seluruh staf pengajar Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember yang telah memberikan ilmu serta bimbingannya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
4. ibunda Kusmi Astuti dan ayah Sutoyo yang selalu mendoakan serta memberikan kasih sayang dan pengorbanan selama ini, kakakku tercinta Ullum Kusumaningtyas yang telah memberikan keceriaan dan motivasi;
5. sahabat Faisol Setiawan yang telah memberi semangat dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini;
6. para sahabat yang selalu setia di sampingku, Liatri, Elsha, Puni, Frisca, Desi, Mita dan Merrin;
7. teman-teman seperjuangan fraktal, Nupy, Riza dan Anin yang selalu memotivasiku untuk menyelesaikan skripsi ini;

8. sahabat Extreme'14 yeng telah menemani selama masa perkuliahan;
9. serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu

Akhir kata penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat dan bisa dikembangkan lagi agar lebih sempurna.

Jember, Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu matematika memberikan pengetahuan yang luas dalam kehidupan era modern seperti saat ini. Matematika lebih berkembang pesat saat mulai ditemukannya teknologi komputer. Melalui komputer manusia lebih mudah dalam mempelajari ilmu pengetahuan dalam berbagai bidang, salah satunya adalah perhitungan matematika. Geometri fraktal merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang berkembang pesat dengan adanya komputer.

Geometri fraktal adalah ilmu matematika yang digunakan untuk mempelajari sifat-sifat dan prilaku fraktal yang tidak beraturan dan terpecah-pecah, serta mempelajari aspek-aspek rumit di alam sebagai suatu basis matematika (Peitgen, 1988). Geometri fraktal atau yang lebih dikenal dengan fraktal pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan berasal dari Polandia yang bernama Benoid Mandelbrot. Fraktal berasal dari bahasa latin *"fractus"* yang mempunyai arti patah atau bentuknya tidak beraturan (Mandelbrot, 1977). Fraktal memiliki sifat *self-similarity*, yaitu setiap bagian kecil dalam sebuah fraktal dapat dipandang sebagai replikasi skala kecil dari bentuk keseluruhan.

Objek fraktal dibagi menjadi dua jenis yaitu himpunan fraktal dan fraktal alam. Beberapa contoh dari himpunan fraktal yaitu *himpunan Cantor, segitiga Sierpinski, Koch snowflake, Mandelbrot set dan Julia set.* Sedangkan contoh dari fraktal alam yaitu awan, gunung, jaringan sungai dan garis pantai (Mandelbrot, 1977).

Fraktal *Fibonacci Word* adalah salah satu jenis fraktal yang pertama kali dikenalkan oleh Dumaine pada tahun 2009. Fraktal *Fibonacci Word* dihasilkan dari barisan *Fibonacci Word* yang berisi angka 1 dan 0 yang mempunyai makna geometris yaitu menggambarkan segmen garis pada arah tertentu. *Fibonacci Word* kemudian berkembang salah satunya yaitu menjadi *k-Fibonacci Word* yang pertama kali diperkenalkan oleh Ramirez dan Rubiano pada tahun 2013. Barisan dari *k-Fibonacci Word* ini dapat didefinisikan secara rekursif sebagai $F_{k,0} = 0$; $F_{k,1} = 1$; $F_{k,n+1} = F_{k,n} + F_{k,n-1}$, $n \geq 1$ simbol *n* menunjukkan suku ke-*n* dan *k* menunjukkan generalisasi dari *k-Fibonacci Word*.

Pembangkitan fraktal *k-Fibonacci Word* menggunakan aturan ganjil genap mengacu berdasarkan pada barisan *Fibonacci Word*, sedangkan untuk menggambar barisan dari *k-Fibonacci Word* dapat dilakukan dengan cara memodifikasi barisan baru sehingga menjadikan aturan menggambarnya lebih sederhana. Barisan *Dense Fibonacci Word* adalah salah satu modifikasi yang digunakan untuk menghasilkan kurva fraktal dengan menggunakan tiga digit {0,1,2}, kemudian untuk membangkitkan kurva fraktalnya menggunakan aturan garis sederhana yang disebut *natural drawing rule*. *Natural drawing rule* merupakan aturan konstruksi dengan menghubungkan suatu kurva menggunakan gambar garis, mengikuti gerak dari simbol barisan *Dense Fibonacci Word* (Dumaine, 2009).

Berdasarkan uraian di atas, pada tugas akhir ini penulis tertarik untuk mengkaji lebih lanjut mengenai pembangkitan kurva fraktal *k-Fibonacci Word* berdasarkan barisan *Dense Fibonacci Word* dengan menggunakan *natural drawing rule* dan memvisualisasikan metode tersebut menggunakan *software Matlab*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang tersebut, permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah :

a. Bagaimana membangkitkan kurva fraktal *k-Fibonacci Word* dengan menggunakan *natural drawing rule* ?
b. Bagaimana identifikasi perubahan fraktal *k-Fibonacci Word* untuk generalisasi *k* ganjil dan *k* genap?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah :

a. Menerapkan *natural drawing rule* untuk membangkitkan kurva fraktal *k-Fibonacci Word*
b. Mengetahui karakteristik fraktal *k-Fibonacci Word* untuk generalisasi *k* ganjil dan *k* genap

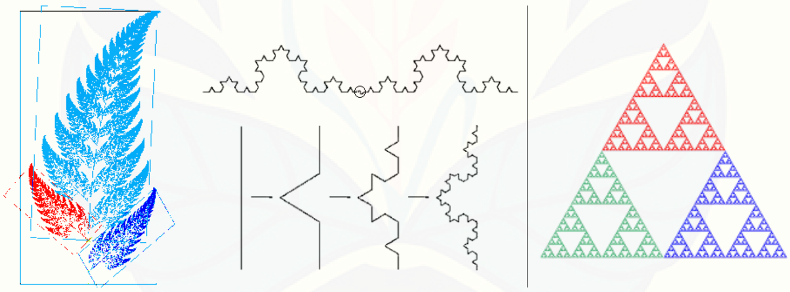
1.4 Manfaat

Manfaat dari penelitian ini antara lain yaitu untuk menerapkan *natural drawing rule* dalam membangkitkan kurva fraktal *k-Fibonacci Word* guna mempermudah visualisasi fraktal *k-Fibonacci Word*. Selain itu program yang diperoleh dapat membantu mengetahui perubahan dari karakteristik fraktal *k-Fibonacci Word*.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fraktal

Fraktal berasal dari bahasa latin *"fractus"* yang mempunyai arti patah atau bentuknya tidak beraturan. Akan tetapi dari ketidakteraturan tersebut fraktal mempunyai beberapa sifat yaitu *self-similarity, self-affinity, self-inverse* dan *self-squaring* dapat dilihat pada Gambar 2.1. Sifat *self-similarity* menunjukkan bahwa fraktal terdiri dari bagian-bagian yang berbentuk serupa satu sama lain. *Self-affinity* menggambarkan bahwa fraktal disusun atas bagian-bagian yang sering terangkai satu sama lain. *Self-inverse* artinya suatu bagian dari bangun fraktal dapat merupakan susunan terbalik dari susunan lainnya, sedangkan *self-squaring* dapat diartikan bahwa suatu bagian dari bangun fraktal merupakan peningkatan kerumitan dari bagian terdahulu (Kusumayudha, 2005).



Gambar 2.1 Contoh Fraktal

(Sumber.www.wikipedia.com)

2.2 Fraktal *Fibonacci Word*

Fraktal *Fibonacci Word* adalah suatu kurva fraktal yang memiliki sifat *self-similarity* melalui aturan gambar berdasarkan pada barisan *Fibonacci Word.* Barisan *Fibonacci Word* dapat dihubungkan menjadi suatu kurva menggunakan gambar garis, mengikuti gerak dari simbol barisan *Fibonacci Word*. Barisan *Fibonacci* pertama kali diperkenalkan oleh Leonardo Fibonacci pada tahun 1202 barisan Fibonacci ini didefinisikan secara rekursif sebagai: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

untuk $n \geq 3$, $F_1 = 1$ dan $F_2 = 1$ setiap bilangan dalam barisan ini merupakan jumlah dari dua bilangan sebelumnya, sehingga untuk barisan *Fibonacci* adalah 1,1,2,3,5,8,13,21,34,... (Dumaine, 2009).

Barisan *Fibonacci Word* adalah suatu bilangan khusus dari bilangan biner yang merupakan simbol dari dua digit yaitu (0,1) yang barisannya didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

$f_0 = 1$

$f_1 = 0$

$f_n = f_{n-1}f_{n-2}$, untuk $n \geq 3$ (2.1)

Maksud dari $f_n = f_{n-1}f_{n-2}$ ini adalah gabungan hasil dari f_{n-1} dan f_{n-2} jadi bukan operasi penjumlahan maupun perkalian, melainkan adalah penggabungan angka yang diperoleh. Simbol F_n menyatakan banyaknya n dalam barisan *Fibonacci Word*, sedangkan f_n menunjukan barisan dari *Fibonacci Word* dan $\mathcal{F}_n$ lebih menunjukkan gambar kurva fraktalnya.

Berikut adalah barisan *Fibonacci Word* berturut-turut:

$f_1 = 1$

$f_2 = 0$

$f_3 = 01$

$f_4 = 010$

$f_5 = 01001$

$f_6 = 01001010$

$f_7 = 0100101001001$

Fungsi f_n merupakan gabungan dari dua sifat sebelumnya.

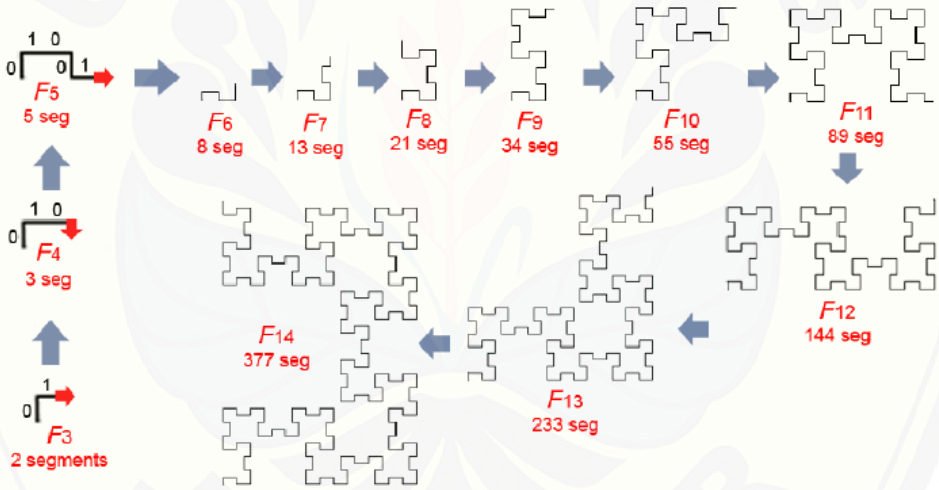
Aturan konstruksi fraktal *Fibonacci Word* dari simbol barisan *Fibonacci Word* dapat dilakukan dengan cara mengambil barisan *Fibonacci Word* ke-*n*, selanjutnya gambar suatu segmen garis. Apabila digitnya “0” belok kiri untuk *n* genap dan belok kanan untuk *n* ganjil, kemudian lanjutkan untuk iterasi berikutnya. Aturan konstruksi ini disebut aturan garis ganjil-genap. Garis pertama pada aturan garis ganjil-genap dapat digambar dengan cara berikut:

a. Digit pertama adalah 0, maka gambar garis vertikal dan belok kanan
b. Digit kedua adalah 1, maka gambar garis horizontal

c. Digit ketiga adalah 0, maka lanjutkan menggambar garis horizontal dan belok kanan

d. Digit keempat adalah 0, maka gambar garis vertikal dan belok kiri, (Dumaine, 2009).

Konstruksi fraktal *Fibonacci Word* menggunakan aturan garis ganjil-genap dapat dilihat pada Gambar 2.2. Kurva fraktal dan barisan *Fibonacci Word* masing-masing dinotasikan dengan $\mathcal{F}_n$ dan f_n. Pada Gambar 2.2 menunjukkan pembangkitan kurva fraktal, yang dimulai dari F_3 hingga F_{14}. Dalam gambar tersebut terdapat sifat dari fraktal yaitu *self-similarities* antara kurva $\mathcal{F}_{11}$ dan $\mathcal{F}_8$. Hal ini menunjukkan bahwa fraktal *Fibonacci Word* untuk kurva $\mathcal{F}_n$ memiliki kemiripan dengan $\mathcal{F}_{n-3}$. Aturan penggambaran *Fibonacci Word* sama dengan aturan penggambaran dalam *k-Fibonacci Word.*



Gambar 2.2 Konstruksi Fraktal *Fibonacci Word* (Dumaine, 2009)

2.3 Fraktal *k-Fibonacci Word*

2.3.1 Pengertian Fraktal *k-Fibonacci Word*

Barisan *k-Fibonacci Word* pertama kali dikenalkan oleh Ramirez dan Rubiano pada tahun 2013. Barisan tersebut didefinisikan secara rekursif sebagai: $F_{k,n+1} = F_{k,n} + F_{k,n-1}$, untuk $n \geq 1$ dengan $F_{k,0} = 0$, $F_{k,1} = 1$ sedangkan *n* menunjukkan suku ke-*n* dan *k* menunjukkan generalisasi dari barisan *k-Fibonacci Word*. Berikut adalah urutan dari barisan *k-Fibonacci Word* :

$f_{1,0} = 0$

$f_{1,1} = 1$

$f_{1,2} = 10$

$f_{1,3} = 101$

$f_{1,4} = 10110$

$f_{1,5} = 10110101$

$f_{1,6} = 1011010110110$

$f_{1,7} = 101101011011010110101$

Fraktal *k-Fibonacci Word* adalah suatu barisan khusus dari bilangan biner (0,1) dengan parameter *n* dan *k*. Barisan ini didefinisikan sebagai berikut ,

$$f_{k,0} = 0\,, f_{k,1} = 0^{k-1}1, f_{k,n} = f_{k,n-1}^{k} f_{k,n-2} \text{ untuk } n \geq 2 \; dan \; k \geq 1 \qquad (2.2)$$

sedangkan *n* menunjukkan suku ke-*n* dan *k* menunjukkan kesamaan barisan *k-Fibonacci Word*. Berikut adalah barisan *k-Fibonacci Word* untuk *k*=1,2,3,4,5, dan 6 berturut-turut adalah sebagai berikut :

$f_1 = 1011010110110 \cdots$

$f_2 = 010100101010 \cdots$

$f_3 = 001001001000100100010001 \cdots$

$f_4 = 00010001000100010000100010001000100010 \cdots$

$f_5 = 0000100001000010000100001000001000010000100001000001 \cdots$

$f_6 = 0000010000010000010000010000010000010000000100000010 \cdots$

Maka barisan tak terbatas dari $f_k = \lim_{n\to\infty} f_{k,n}$, dikenal dengan *k-Fibonacci Word.*

2.3.2 Karakteristik Fraktal *k-Fibonacci Word*

Barisan *k-Fibonacci Word* mempunyai karakteristik sebagai berikut:

a. Pada barisan *k-Fibonacci Word* tidak ditemukan digit 1 sebanyak dua kali berturut-turut (11), untuk $k \geq 2$.

b. Misalkan *ab* merupakan digit terakhir dari $f_{k,n}$, maka untuk $n \geq 1$ dan $k \geq 2$, *ab* = 10 jika *n* genap dan *ab* = 01 jika *n* ganjil.

c. Jika $\emptyset: \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ adalah fungsi $\emptyset$ menghapus dua simbol terakhir dari $f_{k,n}$ untuk $n \geq 2$ maka $\emptyset(f_{k,n})$ adalah *palindrome* untuk semua $k \geq 1$. *Palindrome* adalah bilangan simetris dalam artian jika digit-digitnya dibalik akan tetap menghasilkan bilangan yang sama. Himpunan $\{0,1\}^*$ menyatakan bahwa domain dan rangenya berisi barisan yang terdiri atas digit 0 dan 1.

Barisan *k-Fibonacci Word* dapat diaplikasikan menggunakan aturan ganjil genap sehingga dapat membentuk sebuah kurva yang biasa disebut dengan fraktal *k-Fibonacci Word* dan dinotasikan sebagai $\mathcal{F}_{k,n}$. Fraktal *k-Fibonacci Word* didefinisikan sebagai: $\mathcal{F}_k = \lim_{n\rightarrow\infty} \mathcal{F}_{k,n}$, fungsi $\mathcal{F}_k$ dikatakan sebagai kurva berhingga dari *k-Fibonacci word*.

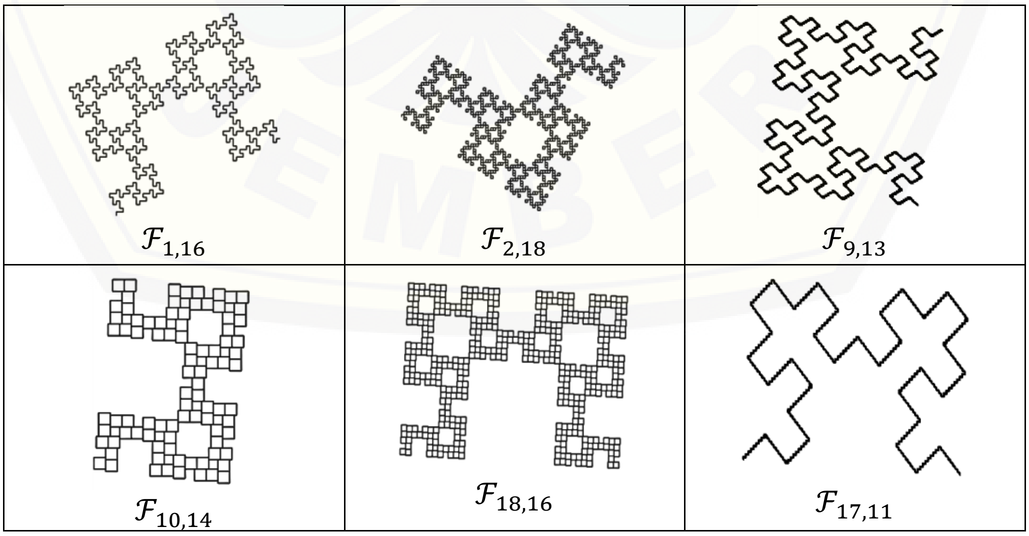
Kurva fraktal *k-Fibonacci Word* $\mathcal{F}_{k,n}$ memiliki karakteristik berikut:

a. Kurva *k-Fibonacci Word* $\mathcal{F}_{k,n}$ terdiri dari beberapa segmen garis.

b. $\mathcal{F}_{k,n}$ bersifat simetris artinya sebuah benda atau gambar yang memiliki sisi yang bisa menyatu dengan cocok jika dibelah dua, tidak lebih dan tidak kurang.

c. Jika k adalah kurva genap maka $\mathcal{F}_{k,n}$ sama dengan $\mathcal{F}_{k-4,n}$ sedangkan jika k ganjil maka kurva $\mathcal{F}_{k,n}$ sama dengan $\mathcal{F}_{k-2,n}$.

Bentuk gambar dari kurva $\mathcal{F}_{k,n}$ untuk k genap dan k ganjil ditampilkan pada Gambar 2.3 berikut:



Gambar 2.3 Kurva $\mathcal{F}_{k,n}$ untuk k = 1,2,9,10,18 dan 17.

2.3.3 *Dense Fibonacci Word*

Dense Fibonacci Word merupakan barisan yang didefinisikan menggunakan tiga digit $\{0,1,2\}$ yang berasal dari *Fibonacci Word*, dengan demikian barisan *Dense Fibonacci Word* dapat didefinisikan dengan morfisme sebagai berikut:

$$\mu\,(00) = 0\,,\ \mu\,(01) = 1,\ \mu\,(10) = 2, \mu\,(0) = \mu\,(1) = \varepsilon \qquad (2.3)$$

Notasi ε dalam hal ini dianggap string kosong.

Penerapan morfisme di atas berasal dari konversi bilangan biner ke desimal $\{0,1,2\}$ untuk setiap pasangan angka dari barisan *Fibonacci Word* (Ramirez, 2014).

2.4 *Natural Drawing Rule*

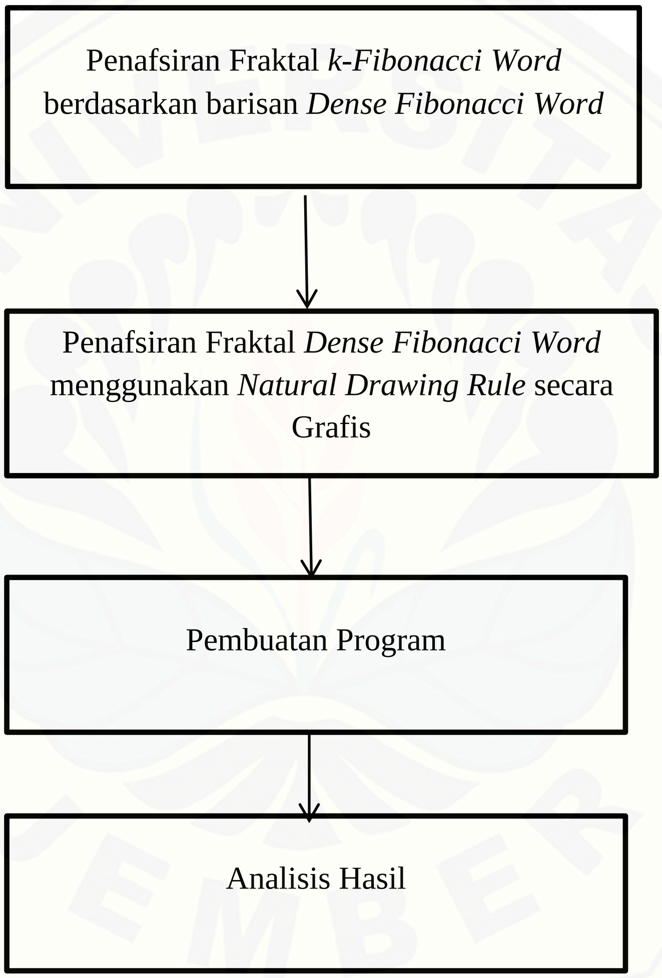
Jean-Paull Allouche adalah ilmuwan yang pertama kali mengemukakan *natural drawing rule*, yang dapat digunakan untuk membangkitkan kurva *k-Fibonacci Word* menggunakan aturan menggambar yang lebih sederhana dengan memakai tiga digit $\{0,1,2\}$. Aturan menggambarnya yaitu dengan cara menghubungkan suatu kurva menggunakan gambar garis mengikuti gerak dari simbol barisan *Dense Fibonacci Word*. Aturan menggambar *Natural Drawing Rule* adalah sebagai berikut:

a. Jika “0” maka menggambar suatu segmen garis
b. Jika “1” maka menggambar segmen garis dan berbelok ke kanan
c. Jika “2” maka menggambar segmen garis dan berbelok ke kiri

(Dumaine, 2009).

BAB 3. METODE PENELITIAN

Pada bab ini akan dibahas prosedur yang akan digunakan untuk menyelesaikan penelitian ini. Secara skematik, langkah-langkah yang akan dilakukan dapat digambarkan dengan diagram alir pada Gambar 3.1



Gambar 3.1 Skema Metode Penelitian

Berdasarkan skema pada Gambar 3.1, langkah-langkah penelitian dapat dijelaskan sebagai berikut:

3.1 Penafsiran Fraktal *k-Fibonacci Word* Berdasarkan Barisan *Dense Fibonacci Word*

Langkah awal untuk melakukan penelitian ini adalah dengan cara menafsirkan fraktal *k-Fibonacci Word* berdasarkan barisan *Dense Fibonacci*

Word. Pada langkah ini akan ditentukan aturan produksi untuk membangun fraktal *k-Fibonacci Word*, dengan cara mengacu pada Persamaan (2.3). Bentuk fraktal *k-Fibonacci Word* juga dapat diperoleh dari hasil aturan produksi dengan menggunakan aturan ganjil-genap. Berdasarkan aturan yang tersedia maka akan diperoleh beberapa aturan dari fraktal *k-Fibonacci Word*.

3.2 Penafsiran Fraktal *Dense Fibonacci Word* Menggunakan *Natural Drawing Rule* Secara Grafis

Pada langkah ini akan dilakukan penafsiran Fraktal *k-Fibonacci Word* menggunakan *natural drawing rule* secara grafis sesuai dengan hasil dari generasi dan aturan produksi yang telah diberikan. Penafsiran fraktal *k-Fibonacci Word* menggunakan *natural drawing rule* secara grafis ini akan digambarkan hingga beberapa generasi sebagai pembanding dengan hasil visualisasi pada program.

3.3 Pembuatan Program

Langkah selanjutnya yaitu pembuatan program *k-Fibonacci Word* menggunakan *natural drawing rule*. Algoritma program penerapan *natural drawing rule* dalam membangun fraktal *k-Fibonacci word* diuraikan sebagai berikut:

a. Menggunakan aksioma dan aturan produksi pada Persamaan (2.2) untuk menafsirkan barisan *k-Fibonacci Word*;

b. Menggunakan aksioma dan aturan produksi pada Persamaan (2.3) untuk menafsifkan barisan *Dense Fibonacci Word*;

c. Menggunakan aksioma dan aturan produksi untuk variasi kurva berdasarkan hasil dari point b;

d. Mendefinisikan simbol untuk menggambar $\{0,1,2\}$ sesuai dengan aturan *natural drawing rule*;

e. Posisi titik awal adalah $(X_0, Y_0) = (0,0)$ dan menghadap utara;

f. Mengiterasikan nilai generasi hingga iterasi ke-*n* berdasarkan aksioma dan aturan produksi yang diberikan.

3.4 Analisis Hasil

Hasil yang diperoleh dari pembuatan program adalah visualisasi fraktal *k-Fibonacci Word* yang digunakan untuk mengetahui perubahan fraktal *k-Fibonacci Word* untuk *k* ganjil dan *k* genap secara visual. Analisis secara matematis juga digunakan untuk mengetahui perubahan *k-Fibonacci Word* untuk *k* ganjil dan *k* genap berdasarkan Persamaan (2.2) dan untuk mengetahui bentuk kurva *k-Fibonacci Word* dengan menggunakan morfisme pada Persamaan (2.3). Berdasarkan definisi barisan *k-Fibonacci Word* akan dikaji bagaimana identifikasi perubahan fraktal *k-Fibonacci Word* untuk generalisasi *k* ganjil dan *k* genap.

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

a. Fraktal *k-Fibonacci Word* dapat dibangkitkan menggunakan *natural drawing rule* berdasarkan barisan *Dense Fibonacci Word* dengan cara mengkonversi bilangan biner ke desimal $\{0,1,2\}$ untuk setiap pasangan angka dari barisan k-*Fibonacci Word* menjadi barisan *Dense Fibonacci Word*, dengan menggunakan metode *natural drawing rule* dapat digunakan untuk membangkitkan kurva *k-Fibonacci Word* menggunakan aturan menggambar yang lebih sederhana dengan aturan menggambarnya yaitu dengan cara menghubungkan suatu kurva menggunakan gambar garis mengikuti gerak dari simbol barisan *Dense Fibonacci Word.*

b. Karakteristik fraktal *k-Fibonacci Word* generalisasi *k* ganjil dan genap untuk sudut $\frac{\pi}{2}$ adalah sebagai berikut:

   1. Pada generalisasi *k* ganjil bentuk kurva fraktalnya hampir sama antara *k* ganjil yang satu dengan yang lain yaitu $\mathcal{F}_{k-2,n}$. Semakin besar *k* dan *n* maka gerigi pada kurvanya tidak nampak dan hanya menggambarkan seperti garis lurus saja, hal ini kerena dipengaruhi oleh banyaknya segmen garis yang terbentuk.
   2. Pada generalisasi *k* genap bentuk kurva fraktalnya mempunyai kesamaan yaitu $\mathcal{F}_{k-4,n}$. Semakin bertambahnya *k* dan *n* maka kurva fraktal yang dihasilkan akan menunjukkan bentuk persegi yang semakin jelas.
   3. Kurva *k-Fibonacci Word* merupakan *family curve* dari fraktal *Fibonacci word* karena karakteristiknya memiliki kemiripan.

5.2 Saran

Penelitian selanjutnya masih dapat mengembangkan Fraktal *k-Fibonacci Word* ini dengan menggunakan metode lain misalnya *L-System* atau dapat menggembangkan dengan cara memvariasikan besar sudut untuk mengetahui perubahan *k* ganjil maupun *k* genap.

DAFTAR PUSTAKA

Dumaine, A. M. 2009. *The Fibonacci Word Fractal*. https://hal.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/367972/filename/The_Fibonacci_word_fractal.pdf.[11 November 2017].

Kusumayudha,S.B. 2005. *Hidrogeologi Karst dan Geometri Fraktal*. Yogyakarta: Mitra Gama Widya.

Liyani, N. 2018. Kajian Morfisme untuk Variasi Kurva *Dense Fibonacci Word*. Skripsi. Jember: Fakultas MIPA Universitas Jember.

Mandelbrot, B. B. 1977. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman and Company.

Peitgen, H.O. dan Soupe, D. 1988. *The Science of Fractal Images*. New York: Springer-Verlag.

Purnomo, K. D., Alyagustin, R. D., dan Kusbudiono. 2015. Variasi Fraktal Fibonacci word. Universitas Negeri Yogyakarta: Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika. ISBN 978-602-73403-0-5.

Ramirez, Jose L dan G.N.Rubiano. 2013. *Properties and Generalizations of the Fibonacci Word Fractal*. London: IOP Publishing.

Wright, D. J. *Dynamical Systems and Fractals Lecture*. http://www.math.okstate. /fractals/mathdept/dynamics/lecnotes/lecnotes.html.[11 November 2017].

LAMPIRAN

A1. *Script* Program untuk Barisan *k-Fibonacci Word*

```
function j=kfibo(k,n)
f(1)={'0'};
if k>=2
    f(2)={num2str([zeros(1,k-1) 1])};
else
     f(2)={num2str([zeros(1,k) 1])};
end
as='';
for i=3:n
    for ka=1:k
        if i==3
            as=[as char(f(i-1))];
        else
            as=char(f(i-1));
        end
    end
    f(i)={[as char(f(i-2))]};
    as=char(f(i));
end
n=length(as);
t=0;
for i=1:n
    if as(i)~=' '
        t=t+1;
        j(t)=as(i);
    end
end
```

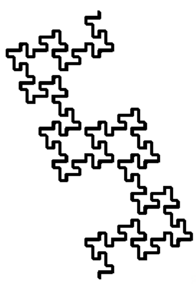
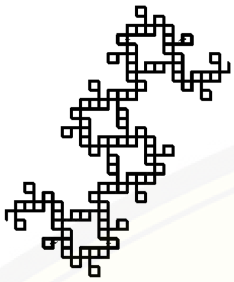
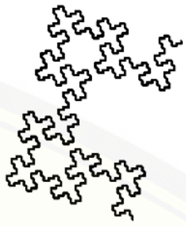
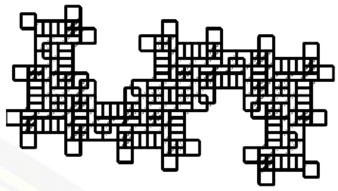
A2. *Script* Program untuk Barisan *k-Fibonacci Word* Menjadi *Dense Fibonacci Word*

```
function axioma=kfibo2(axiom)
t=1;
for z=1:length(axiom)/2
    a=axiom(t:t+1);
    axioma(z)=num2str(bin2dec(a));
    t=t+2;
end
```

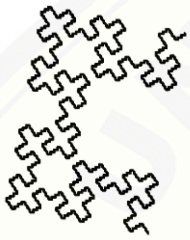
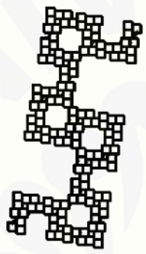
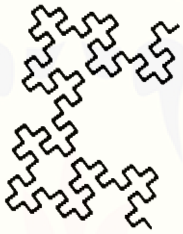
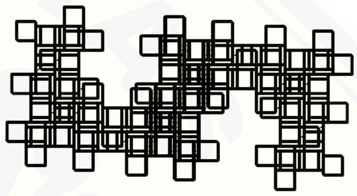
A3. *Script* Program untuk Membangkitkan *k-Fibonacci Word* Berdasarkan Barisan *Dense Fibonacci Word.*

```
function [x y axiom]=gambar(axiom,delta)
x=0;y=0;
aT=pi/2;
ind=0;
delta=pi/(180/delta);
for i=1:length(axiom)
    cmdt=axiom(i);
    ind=ind+1;
    x(ind+1)=x(ind)+cos(aT);
    y(ind+1)=y(ind)+sin(aT);
    if cmdt=='1'
            aT=aT-delta;
    elseif cmdt=='2'
            aT=aT+delta;
    end
end
```

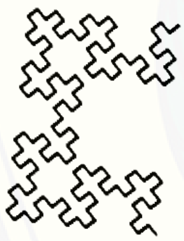
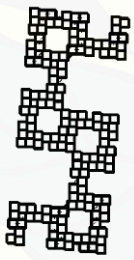
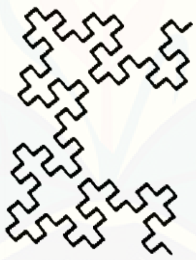
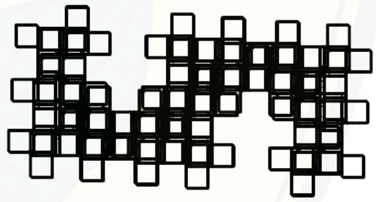
B1. Visualisasi Fraktal *k-Fibonacci Word* $\mathcal{F}_{k,14}$

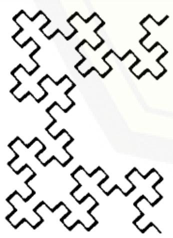
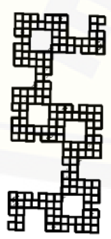
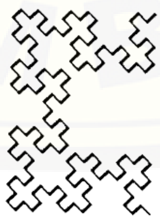
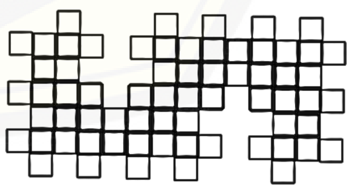
$\mathcal{F}_{1,14}$ $\mathcal{F}_{2,14}$ $\mathcal{F}_{3,14}$ $\mathcal{F}_{4,14}$

$\mathcal{F}_{5,14}$ $\mathcal{F}_{6,14}$ $\mathcal{F}_{7,14}$ $\mathcal{F}_{8,14}$

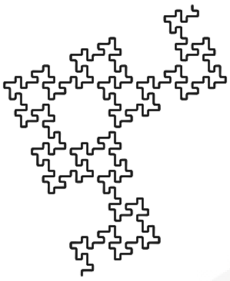





$\mathcal{F}_{9,14}$ $\mathcal{F}_{10,14}$ $\mathcal{F}_{11,14}$ $\mathcal{F}_{12,14}$

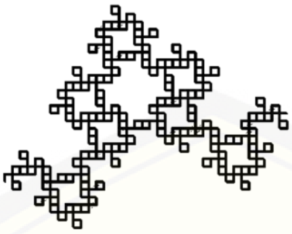





$\mathcal{F}_{29,14}$ $\mathcal{F}_{30,14}$ $\mathcal{F}_{31,14}$ $\mathcal{F}_{32,14}$

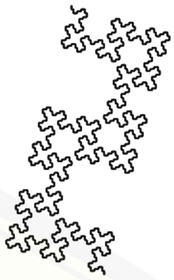
B2. Visualisasi Fraktal *k-Fibonacci Word* $\mathcal{F}_{k,15}$



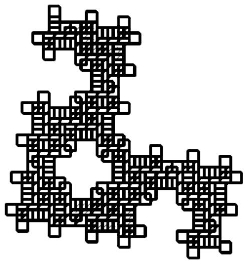
$\mathcal{F}_{1,15}$



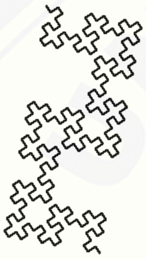
$\mathcal{F}_{2,15}$



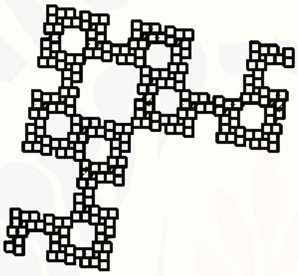
$\mathcal{F}_{3,15}$



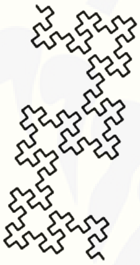
$\mathcal{F}_{4,15}$



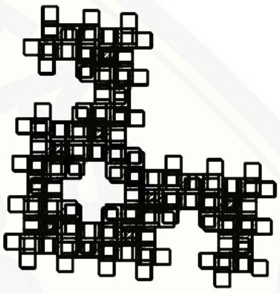
$\mathcal{F}_{5,15}$



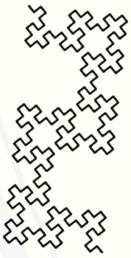
$\mathcal{F}_{6,15}$



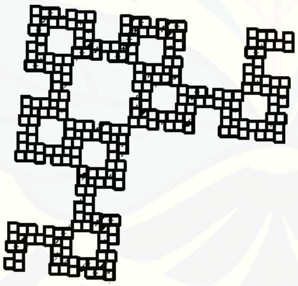
$\mathcal{F}_{7,15}$



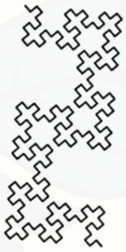
$\mathcal{F}_{8,15}$



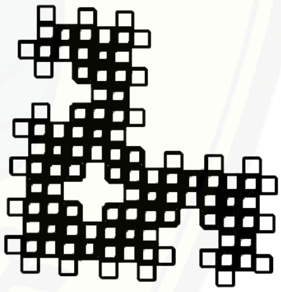
$\mathcal{F}_{9,15}$



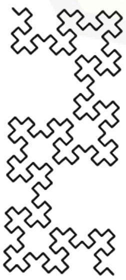
$\mathcal{F}_{10,15}$



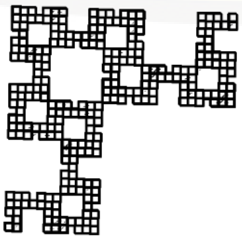
$\mathcal{F}_{11,15}$



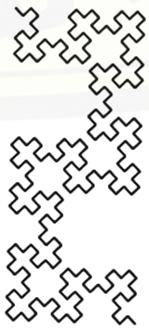
$\mathcal{F}_{12,15}$



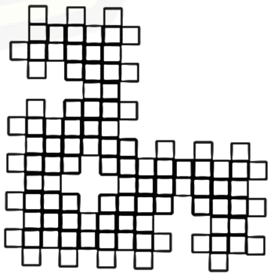
$\mathcal{F}_{29,15}$



$\mathcal{F}_{30,15}$

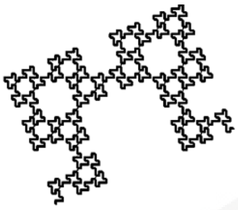


$\mathcal{F}_{31,15}$

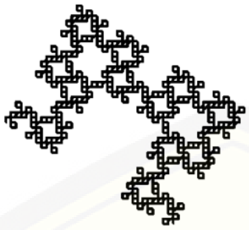


$\mathcal{F}_{32,15}$

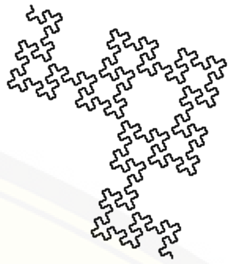
B3. Visualisasi Fraktal *k-Fibonacci Word* $\mathcal{F}_{k,16}$



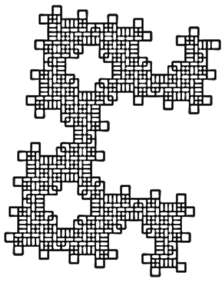
$\mathcal{F}_{1,16}$



$\mathcal{F}_{2,16}$

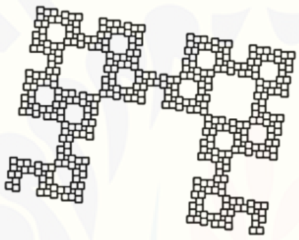


$\mathcal{F}_{3,16}$

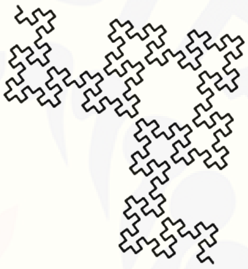


$\mathcal{F}_{4,16}$

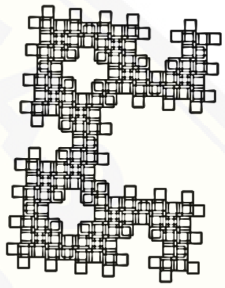
$\mathcal{F}_{5,16}$



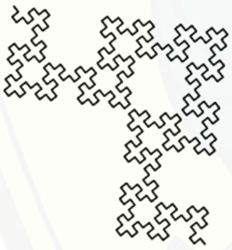
$\mathcal{F}_{6,16}$



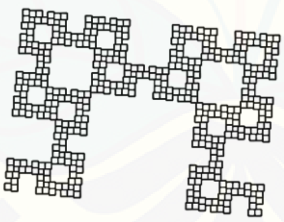
$\mathcal{F}_{7,16}$



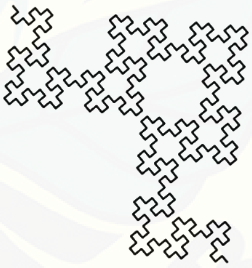
$\mathcal{F}_{8,16}$



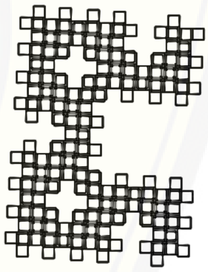
$\mathcal{F}_{9,16}$



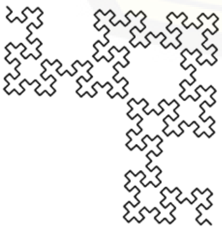
$\mathcal{F}_{10,16}$



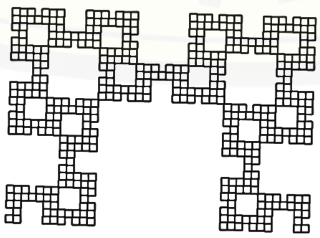
$\mathcal{F}_{11,16}$



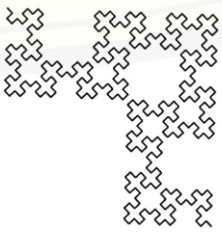
$\mathcal{F}_{12,16}$



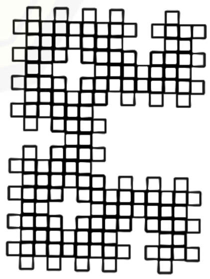
$\mathcal{F}_{29,16}$



$\mathcal{F}_{30,16}$

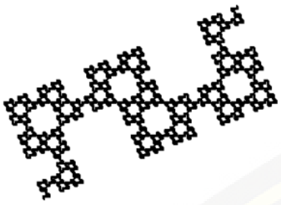


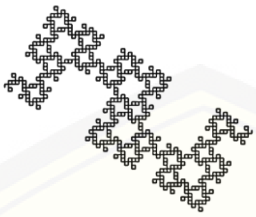
$\mathcal{F}_{31,16}$

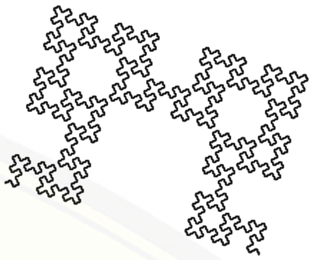


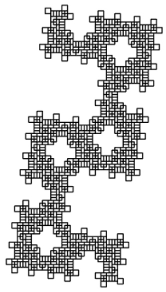
$\mathcal{F}_{32,16}$

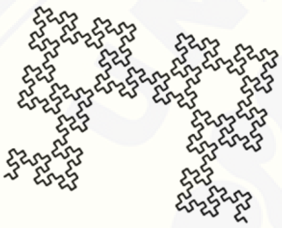
B4. Visualisasi Fraktal *k-Fibonacci Word* $\mathcal{F}_{k,17}$

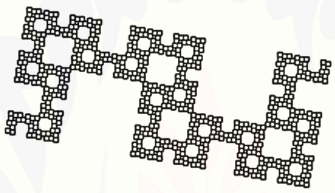

$\mathcal{F}_{1,17}$

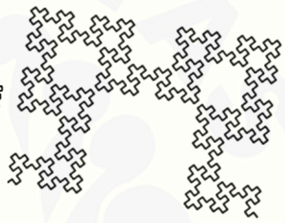

$\mathcal{F}_{2,17}$

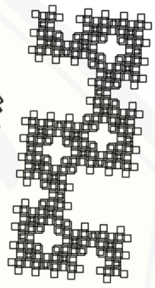

$\mathcal{F}_{3,17}$

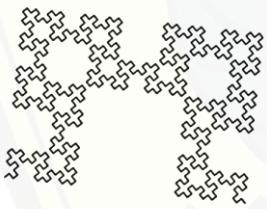

$\mathcal{F}_{4,17}$

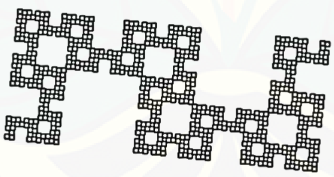

$\mathcal{F}_{5,17}$

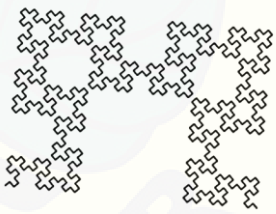

$\mathcal{F}_{6,17}$

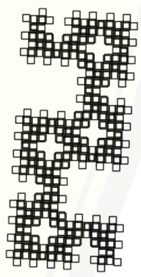

$\mathcal{F}_{7,17}$

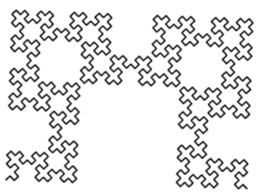

$\mathcal{F}_{8,17}$

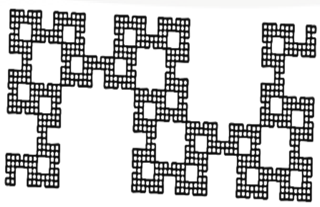

$\mathcal{F}_{9,17}$

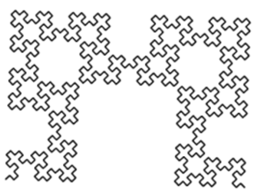

$\mathcal{F}_{10,17}$

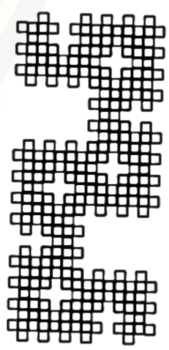

$\mathcal{F}_{11,17}$


$\mathcal{F}_{12,17}$

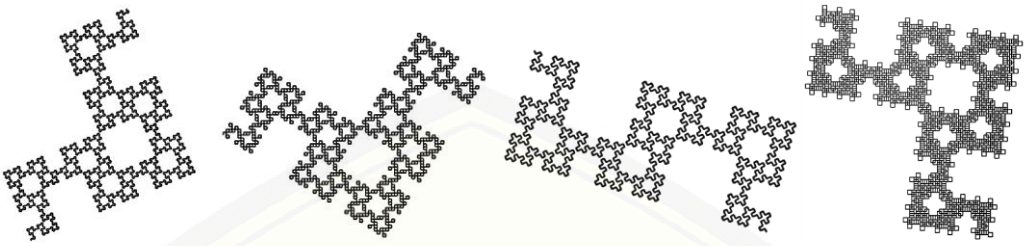

$\mathcal{F}_{25,17}$


$\mathcal{F}_{26,17}$

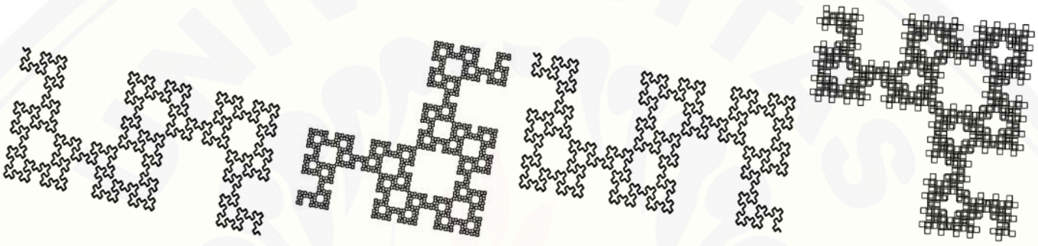

$\mathcal{F}_{27,17}$


$\mathcal{F}_{28,17}$

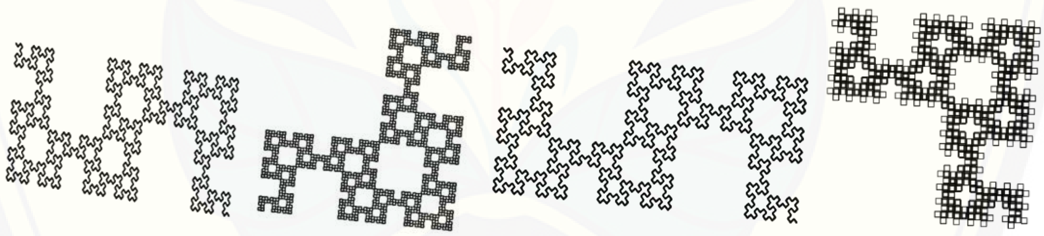
B5. Visualisasi Fraktal *k-Fibonacci Word* $\mathcal{F}_{k,18}$



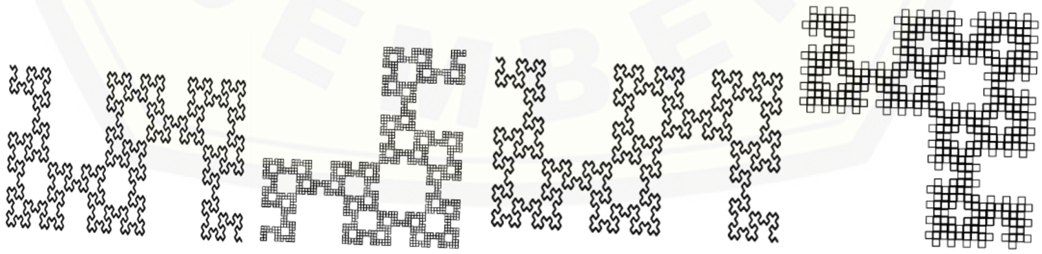
$\mathcal{F}_{1,18}$ $\mathcal{F}_{2,18}$ $\mathcal{F}_{3,18}$ $\mathcal{F}_{4,18}$



$\mathcal{F}_{5,18}$ $\mathcal{F}_{6,18}$ $\mathcal{F}_{7,18}$ $\mathcal{F}_{8,18}$

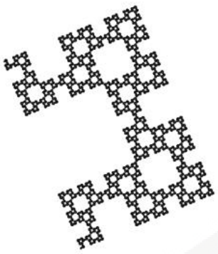


$\mathcal{F}_{9,18}$ $\mathcal{F}_{10,18}$ $\mathcal{F}_{11,18}$ $\mathcal{F}_{12,18}$

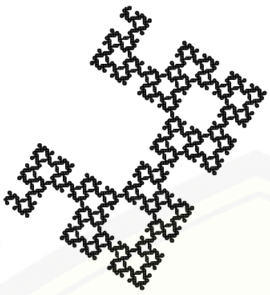


$\mathcal{F}_{25,18}$ $\mathcal{F}_{26,18}$ $\mathcal{F}_{27,18}$ $\mathcal{F}_{28,18}$

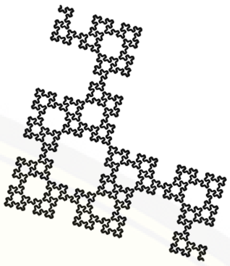
B5. Visualisasi Fraktal *k-Fibonacci Word* $\mathcal{F}_{k,19}$



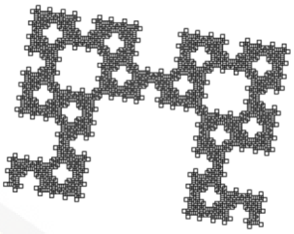
$\mathcal{F}_{1,19}$



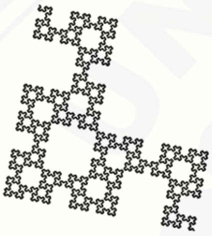
$\mathcal{F}_{2,19}$



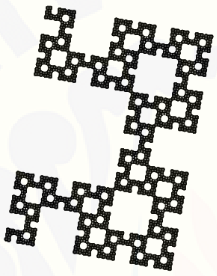
$\mathcal{F}_{3,19}$



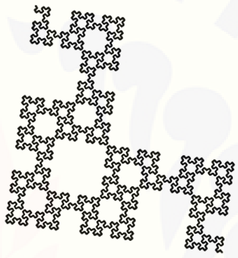
$\mathcal{F}_{4,19}$



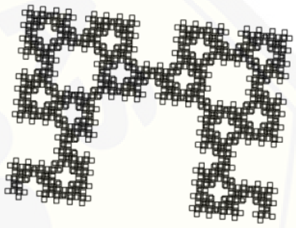
$\mathcal{F}_{5,19}$



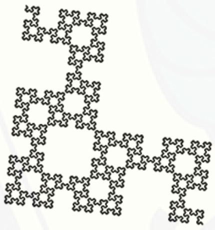
$\mathcal{F}_{6,19}$



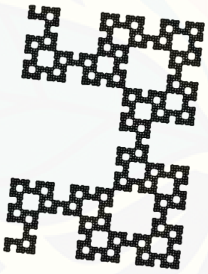
$\mathcal{F}_{7,19}$



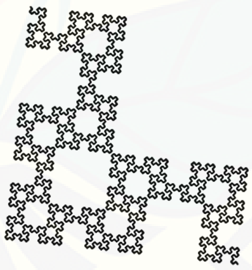
$\mathcal{F}_{8,19}$



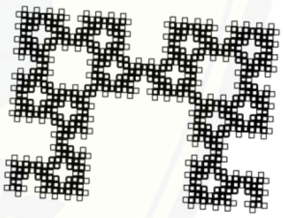
$\mathcal{F}_{9,19}$



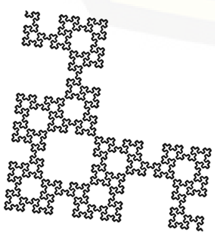
$\mathcal{F}_{10,19}$



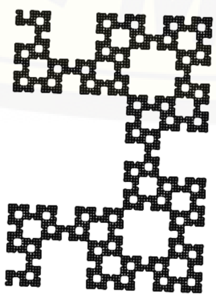
$\mathcal{F}_{11,19}$



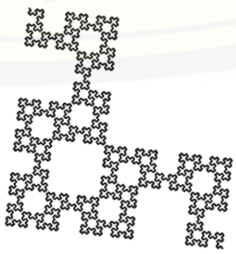
$\mathcal{F}_{12,19}$



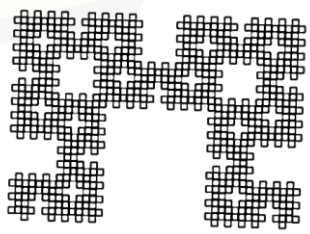
$\mathcal{F}_{25,19}$



$\mathcal{F}_{26,19}$

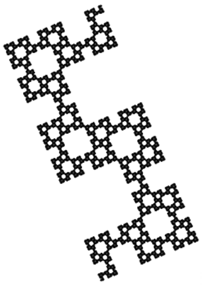


$\mathcal{F}_{27,19}$

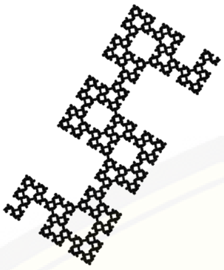


$\mathcal{F}_{28,19}$

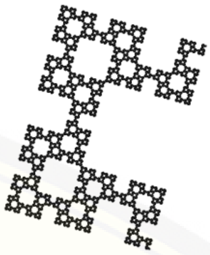
B6. Visualisasi Fraktal *k-Fibonacci Word* $\mathcal{F}_{k,20}$



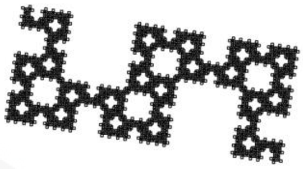
$\mathcal{F}_{1,20}$



$\mathcal{F}_{2,20}$

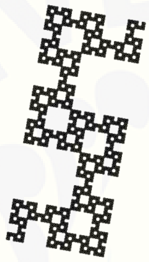


$\mathcal{F}_{3,20}$



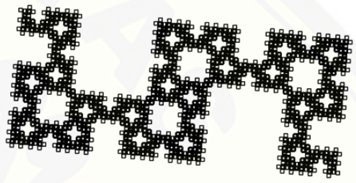
$\mathcal{F}_{4,20}$

$\mathcal{F}_{5,20}$



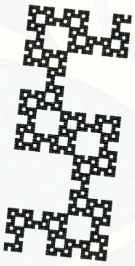
$\mathcal{F}_{6,20}$

$\mathcal{F}_{7,20}$



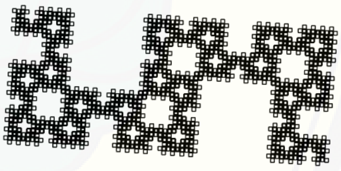
$\mathcal{F}_{8,20}$

$\mathcal{F}_{9,20}$

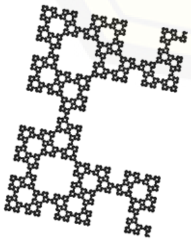


$\mathcal{F}_{10,20}$

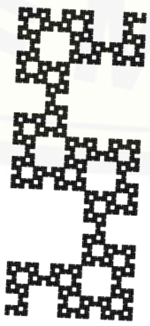
$\mathcal{F}_{11,20}$



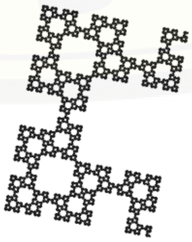
$\mathcal{F}_{12,20}$



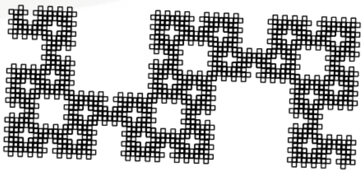
$\mathcal{F}_{21,20}$



$\mathcal{F}_{22,20}$



$\mathcal{F}_{23,20}$



$\mathcal{F}_{24,20}$