# PENYELESAIAN MODIFIKASI MODEL *PREDATOR PREY* LESLIE GOWER DENGAN SEBAGIAN *PREY* TERINFEKSI MENGGUNAKAN METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON ORDE EMPAT

**SKRIPSI**

Oleh
**Liatri Arianti**
**NIM 141810101048**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS JEMBER**
**2018**

# PENYELESAIAN MODIFIKASI MODEL *PREDATOR PREY* LESLIE GOWER DENGAN SEBAGIAN *PREY* TERINFEKSI MENGGUNAKAN METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON ORDE EMPAT

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Liatri Arianti**
**NIM 141810101048**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS JEMBER**
**2018**

# PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. kedua orang tuaku tercinta Bapak Paidi dan Ibu Mijem, serta kedua kakakku Sigit Wahono dan Andri Saputro yang telah memberikan limpahan kasih sayang, dukungan, doa yang tiada henti, serta memotivasi untuk setiap langkah saya. Tidak ada yang dapat membalas semua jasa dan kasih sayang yang telah kalian berikan kecuali Allah SWT;
2. Drs. Rusli Hidayat, M.Sc. selaku Dosen Pembimbing Utama, Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota dan juga M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Pembimbing Anggota sebelumnya yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
3. seluruh dosen FMIPA Jurusan Matematika, terimakasih atas ilmu, bimbingan serta motivasi selama saya menjadi mahasiswa;
4. Bapak dan Ibu guru SDN Kunden 01, SDN Malangan 03, SMPN 1 Tawangsari, SMAN 1 Sukoharjo yang telah berjasa membimbing, memotivasi, dan memberikan ilmunya kepada penulis. Semoga ilmu yang telah diberikan ini akan berguna di kemudian hari. Amin;
5. Almamater Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

# MOTO

" Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Maka apabila engkau telah selesai (dari sesuatu urusan), tetaplah bekerja keras (untuk urusan yang lain). Dan hanya kepada Tuhanmulah (Allah SWT) engkau berharap"

(Surat Al Insyirah ayat 5-8)[*)]

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. Al-Quran dan Terjemahnya. Bandung: J-ART

**PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Liatri Arianti

NIM : 141810101048

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya tulis ilmiah yang berjudul "Penyelesaian Modifikasi Model *Predator Prey* Leslie Gower dengan Sebagian *Prey* Terinfeksi Menggunakan Metode Adams Bashforth-Moulton Orde Empat" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademis jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juli 2018
Yang menyatakan,

Liatri Arianti
141810101048

**SKRIPSI**

**PENYELESAIAN MODIFIKASI MODEL *PREDATOR PREY* LESLIE GOWER DENGAN SEBAGIAN *PREY* TERINFEKSI MENGGUNAKAN METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON ORDE EMPAT**

Oleh

Liatri Arianti
NIM 141810101048

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.
Dosen Pembimbing Anggota : Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.

# PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Penyelesaian Modifikasi Model *Predator Prey* Leslie Gower dengan Sebagian *Prey* Terinfeksi Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji:

| | |
|---|---|
| Ketua, | Anggota I, |
| Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.<br>NIP. 196610121993031001 | Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.<br>NIP. 196908281998021001 |
| Anggota II, | Anggota III, |
| Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si<br>NIP. 197006061998031003 | Abduh Riski, S.Si., M.Si.<br>NIP. 199004062015041001 |

Mengesahkan
Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D
NIP.196102041987111001

## RINGKASAN

**Penyelesaian Modifikasi Model *Predator Prey* Leslie Gower dengan Sebagian *Prey* Terinfeksi Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat;** Liatri Arianti, 141810101048; 2018: 76 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Makhluk hidup tidak bisa hidup sendiri maka dari itu terjadilah interaksi antara makhluk hidup satu dengan yang lain. Salah satu model interaksi antar makhluk hidup adalah *predator prey*. Masalah lain yang dapat terjadi pada suatu populasi adalah terjadinya epidemi. Eko-epidemiologi adalah ilmu yang mempelajari penyebaran penyakit menular pada sebuah populasi di suatu ekosistem di mana dua atau lebih spesies berinteraksi seperti *predator prey*. Mangsa yang terinfeksi akan lebih lemah sehingga mudah diserang untuk dimangsa oleh pemangsa. Zhou dkk (2010) telah mengusulkan modifikasi model *predator prey* Leslie Gower (dengan fungsi respons Holling II) dengan sebagian *prey* terinfeksi. Zhou dkk menggunakan model penyebaran penyakit yang sederhana yaitu *Susceptible-Infected* (SI). Zhou dkk membagi *prey* ke dalam dua kelompok, yaitu kelompok rentan dan kelompok terinfeksi.

Pemodelan matematika biasanya menggunakan sistem persamaan diferensial nonlinier. Sistem persamaan diferensial nonlinier ini sulit diselesaiakan dengan menggunakan metode analitik, oleh karena itu digunakan metode numerik. Metode Runge-Kutta adalah salah satu metode penyelesaian persamaan dierensial nonlinier satu langkah di mana metode ini hanya memerlukan informasi satu nilai awal yang biasanya sudah diketahui, sehingga metode Runge-Kutta sering digunakan untuk awalan dari metode banyak langkah. Metode Adams Bashforth Moulton adalah metode penyelesaian diferensial banyak langkah karena untuk menyelesaikannya diperlukan lebih dari satu informasi nilai awal, sehingga metode ini harus menggunakan metode lain untuk mencari nilai awal.

Penelitian ini diawali dengan mengenalkan model yang diusulkan oleh Zhou dkk (2010), kemudian menganalisis kestabilan model. Analisis kestabilan model dilakukan dengan linierisasi menggunakan matriks Jacobian. Langkah selanjutnya, menyelesaiakan model menggunakan metode Adams Basforth Moulton orde empat yang diimplementasikan menggunakan *software* MATLAB R2015b. Setelah itu, dilakukan simulasi numerik dengan memberikan beberapa kasus untuk mengetahui dinamika perubahan populasi dalam model. Bagian akhir dilakukan interpretasi mengenai hasil simulasi.

Berdasarkan hasil analisis model diperoleh enam titik kesetimbangan, yaitu titik setimbang kepunahan setiap populasi $(E_1)$, titik setimbang *prey* rentan dan *prey* terinfeksi mengalami kepunahan $(E_2)$, titik setimbang *prey* terinfeksi dan *predator* mengalami kepunahan $(E_3)$, titik setimbang *prey* terinfeksi mengalami kepunahan $(E_4)$, titik setimbang *predator* mengalami kepunahan $(E_5)$ dan titik setimbang tidak ada kepunahan $(E^*)$. Titik setimbang $E_1, E_2, E_3, E_5$ bersifat tidak stabil sedangkan $E_4$ dan $E^*$ bersifat stabil asimtotik. Penyelesaian menggunakan Adams Bashforth Moulton orde empat memberikan hasil yang akurat yang dibuktikan dengan solusi yang sama dengan hasil analitik di titik kesetimbangan. Interpretasi simulasi numerik didapatkan bahwa parameter laju infeksi dan predasi berpengaruh besar dalam sistem.

# PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Penyelesaian Modifikasi Model *Predator Prey* Leslie Gower dengan Sebagian *Prey* Terinfeksi Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Drs. Rusli Hidayat, M.Sc. selaku Dosen Pembimbing Utama, Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota dan juga M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Pembimbing Anggota sebelumnya yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji I dan Abduh Riski, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik serta sarannya terhadap penulisan skripsi ini;
3. Seluruh staf pengajar jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember yang telah memberikan ilmu serta bimbingannya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
4. Bapak dan Ibu tercinta yang telah memberikan do’a, kasih sayang dan motivasi yang sangat berharga dalam menyelesaikan skripsi ini;
5. Guru-guruku sejak taman kanak – kanak sampai dengan perguruan tinggi yang telah memberikan ilmu yang bermanfaat;
6. keluarga di Jember yang telah memberikan dukungan dan bantuan moral serta materi untuk pengerjaan skripsi ini;
7. para sahabat yang selalu setia di sampingku, Ulfi, Puni, Elsha, Frisca, Sinta, dan Dinar;

8. teman-teman seperjuanganku Ema, Novi, Rizki, Ana dan Bima yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat;
9. teman-teman angkatan 2014 (EXTREME) yang telah memberikan dukungan, keceriaan, dan canda-tawa yang telah diberikan;
10. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan memberikan sumbangan pengetahuan bagi pembaca.

Jember, Juli 2018
Penulis

# DAFTAR ISI

# DAFTAR TABEL

Halaman

# DAFTAR GAMBAR

Halaman

# DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

# BAB 1. PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Pemodelan matematika merupakan suatu proses merepresentasikan dan menjelaskan permasalahan pada dunia nyata ke dalam pernyataan matematis. Model matematika bukan hanya digunakan dalam ilmu pengetahuan alam dan disiplin ilmu teknik, tetapi juga dalam ilmu kedokteran, ilmu biologi, dan ilmu sosial.

Ekologi merupakan cabang ilmu biologi yang mempelajari tentang makhluk hidup dan habitatnya. Makhluk hidup tidak bisa hidup sendiri maka dari itu terjadilah interaksi antara makhluk hidup satu dengan yang lain. Salah satu model interaksi antar makhluk hidup adalah *predator prey*. *Prey* adalah spesies yang dimangsa dan *predator* sebagai spesies pemangsa. Alfred James Lotka dan Vito Volterra pada pertengahan tahun 1920 mengembangkan sepasang persamaan diferensial sederhana yang menggambarkan fenomena *predator prey* untuk pertama kali dikenal sebagai model Lotka-Volterra (Bacaer, 2011). Model sederhana tersebut kemudian dimodifikasi oleh Leslie dan Gower dengan memperkenalkan model *predator prey* di mana *carrying capacity* lingkungan *predator* sebanding dengan banyaknya *prey* (Lesli & Gower, 1960). Holling pada tahun 1959 memperkenalkan fungsi respons. Holling membagi fungsi respons menjadi tiga tipe, yaitu fungsi respons tipe I, tipe II, dan tipe III (Boyce dan Diprima, 2012). Adanya peristiwa mangsa pemangsa atau predasi tersebut akan mempengaruhi kepadatan populasi suatu spesies.

Masalah lain yang dapat terjadi pada suatu populasi adalah terjadinya epidemi. Peristiwa epidemi adalah ketika suatu penyakit terjadi pada frekuensi yang lebih tinggi dari yang diperkirakan, dan sebuah epidemi lokal dapat disebut sebagai wabah. Epidemiologi adalah ilmu yang mempelajari pola kesehatan dan penyakit serta faktor yang terkait di tingkat populasi. Pemodelan matematika epidemi ini telah menjadi topik penelitian yang penting. Model penyebaran penyakit yang paling sederhana/klasik adalah model SI. Pada model tersebut, populasi yang diamati terbagi menjadi dua kompartemen, yaitu kelompok individu yang rentan S (*susceptible*) dan kelompok individu terinfeksi I (*infectives*). Sub-populasi rentan, rentan terhadap infeksi dan sub-populasi terinfeksi dapat memindahkan infeksi ke individu rentan.

Eko-epidemiologi adalah ilmu yang mempelajari penyebaran penyakit menular pada sebuah populasi di suatu ekosistem di mana dua atau lebih spesies berinteraksi seperti *predator prey*. Mangsa yang terinfeksi akan lebih lemah sehingga mudah diserang untuk dimangsa oleh pemangsa. Chattopadhyay dkk (2007) telah mengembangkan model matematika *predator prey* dengan mangsa yang terinfeksi. Zhou dkk (2010) telah mengusulkan modifikasi model *predator prey* Leslie Gower (dengan fungsi respons Holling II) dengan sebagian *prey* terinfeksi. Zhou dkk menggunakan model penyebaran penyakit yang sederhana yaitu *Susceptible-Infected* (SI). Zhou dkk membagi *prey* ke dalam dua kelompok, yaitu kelompok rentan dan kelompok terinfeksi.

Model *predator prey* merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier. Persamaan diferensial nonlinier yang sering digunakan sulit apabila diselesaikan dengan cara analitik, maka dari itu digunakan metode numerik. Metode numerik tidak mengutamakan jawaban yang eksak, tetapi mengusahakan jawaban pendekatan dari jawaban eksak sebesar nilai yang diterima sesuai dengan pertimbangan praktis. Ada dua macam metode numerik untuk mencari penyelesaian dari persamaan diferensial yaitu metode satu langkah dan metode banyak langkah. Metode Runge-Kutta adalah metode satu langkah di mana metode ini hanya memerlukan informasi satu nilai awal yang biasanya sudah diketahui, sehingga metode Runge-Kutta sering digunakan untuk awalan dari metode banyak langkah. Metode Adams Bashforth Moulton adalah metode penyelesaian diferensial banyak langkah karena untuk menyelesaikannya diperlukan lebih dari satu informasi nilai awal, sehingga metode ini harus menggunakan metode lain untuk mencari nilai awal.

Metode Runge-Kutta dipilih untuk pengambilan nilai awal karena pada penelitian sebelumnya oleh Putri (2013) dalam skripsinya telah menyelesaikan model *predator prey* klasik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan Gill. Penelitian tersebut menyimpulkan kedua metode tersebut baik dalam penyelesain model. Metode Adams Bashforth Moulton merupakan metode yang sederhana dalam penyelesaian numerik, karena tidak perlu mencari turunan fungsinya, melainkan hanya menentukan persamaan prediktor korektor. Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat adalah metode yang banyak digunakan karena mempunyai ketelitian yang tinggi. Nurindah (2011) dalam penelitiannya menyelesaikan nilai batas dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton menyimpulkan bahwa kelebihan metode ini memberikan solusi yang cukup akurat dan stabil baik solusi eksak maupun aproksimasinya. Mardiana (2015) dalam penelitiannya menyelesaikan model *predator prey* Holling dengan faktor pemanenan menyimpulkan bahwa hasil yang diperoleh dari penyelesaian numerik dengan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat sama dengan hasil analitik pada titik kesetimbangan.

Berdasarkan uraian di atas, metode Runge-Kutta dan metode Adams Bashforth Moulton mempunyai kelebihan masing-masing, peneliti ingin memadukan kedua metode tersebut yang mana Metode-Runge-Kutta digunakan untuk mencari nilai awal dilanjutkan menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton orde empat. Penulis tertarik untuk melakukan analisis kestabilan dan menyelesaikan modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi, kemudian diselesaikan menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan, adapun rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Bagaimana analisis kestabilan modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi?
b. Bagaimana penyelesaian modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat?

c. Bagaimana interpretasi simulasi program dari modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Mengetahui analisis kestabilan modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi
b. Menyelesaikan modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi secara numerik menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat
c. Mengetahui profil metode Adams Bashforth Moulton orde empat dalam menyelesaikan modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diambil dari penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Menambahkan wawasan, khususnya model matematika pada bidang biologi yang berhubungan dengan *predator prey*
2. Memberikan informasi tentang modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi
3. Memberikan informasi tentang profil dari modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi yang diselesaikan secara numerik menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat.

# BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan suatu fungsi yang dicari dan turunannya. Persamaan Diferensial Biasa (PDB) adalah suatu persamaan diferensial di mana fungsi yang tidak diketahui hanya terdiri dari satu variabel bebas. Jika fungsi yang tidak diketahui terdiri dari dua atau lebih variabel bebas, persamaan diferensial tersebut dinamakan Persamaan Diferensial Parsial (PDP) (Kartono, 2012).

PDB dapat dibedakan menjadi PDB linier dan PDB nonlinier. Persamaan diferensial biasa yang berbentuk $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ dikatakan linier jika $F$ adalah linier dalam variabel-variabel $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$. Secara umum persamaan diferensial biasa linier orde $n$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \qquad (2.1)$$

dan disebut sebagai persamaan diferensial biasa nonlinier apabila tidak dapat dinyatakan seperti dalam bentuk Persamaan (2.1) (Waluya, 2006).

Persamaan diferensial yang terdiri dari beberapa persamaan yang saling terkait dan melibatkan beberapa variabel terikat yang masing-masing variabel terikat tersebut merupakan fungsi dari satu variabel bebas disebut sistem persamaan diferensial. Suatu sistem persamaan diferensial dikatakan linier apabila sistem tersebut terdiri lebih dari satu persamaan linier yang terkait. Sedangkan sistem persamaan diferensial dikatakan nonlinier apabila sistem tersebut terdiri lebih dari satu persamaan nonlinier yang saling terkait (Boyce dan Diprima, 1999).

**Definisi 2.1** Sistem persamaan diferensial orde satu disebut sebagai sistem *autonomous* jika sistem dapat ditulis ke dalam bentuk:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

dengan fungsi $f_i$, $i = 1,2, \dots, n$ tidak memuat $t$ secara eksplisit (Zill dan Cullen, 2009).

## 2.2 Model Logistik

Model Logistik atau bisa disebut model verhulst adalah model matematika yang menggambarkan bahwa jumlah suatu populasi dipengaruhi oleh kapasitas pendukung lingkungan *(carrying capacity)*. Jika pertumbuhan jumlah populasi melebihi kapasitas pendukung lingkungan yang tersedia, maka hal ini akan berdampak terhadap turunnya laju kelahiran populasi tersebut yang dinyatakan dalam persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

dengan $x$ menyatakan jumlah populasi, konstanta $r$ merupakan laju petumbuhan intrinsik, sedangkan konstanta $K$ adalah kapasitas pendukung lingkungan yaitu populasi maksimum yang dapat ditampung oleh lingkungan dan $t$ adalah satuan waktu (Hofbauer dan Sigmund, 1998).

## 2.3 Model Leslie Gower

Leslie memperkenalkan model *predator-prey* berikut, di mana *“carrying capacity*” lingkungan *predator* sebanding dengan jumlah *prey*. Adapun model Leslie Gower adalah sebagai berikut:

$$\frac{dH}{dt} = H(r_1 - a_1H - a_2P)$$
$$\frac{dP}{dt} = r_2P\left(1 - \frac{a_3P}{H}\right)$$

dengan

$H(t)$ = kepadatan populasi prey pada waktu t ($H(t) > 0$)

$P(t)$ = kepadatan populasi predator pada waktu t ($P(t) > 0$)

$r_1$ = koefisien laju pertumbuhan intrinsik populasi *prey* ($r_1 > 0$)

$r_2$ = koefisien laju pertumbuhan populasi *predator* ($r_2 > 0$)

$a_1$ = angka penurunan kepadatan populasi *prey* karena terjadinya interaksi antar *prey* ($a_1 > 0$)

$a_2$ = angka penurunan kepadatan populasi *prey* karena terjadinya interaksi antara *prey* dan *predator* ($a_2 > 0$)

$a_3$ = angka penurunan kepadatan populasi *predator* karena terjadinya interaksi antar *predator* ($a_3 > 0$) (Leslie dan Gower, 1960).

## 2.4 Fungsi Respons Holling

Holling pada akhir 1950-an menurunkan model yang membatasi laju pemangsa menangkap mangsa atau laju predasi. Tipe Holling dibagi menjadi tiga antara lain respons Holling tipe I, II, dan III. Fungsi respons Holling tipe I merupakan hubungan antara kepadatan populasi *prey* dan tingkat konsumsi. Tingkat konsumsi *predator* meningkat linier dengan kepadatan *prey*, tetapi akan konstan ketika *predator* berhenti memangsa. Fungsi respons Holling tipe I terjadi *predator* yang memiliki karakteristik pasif, atau lebih suka menunggu *prey*-nya. Fungsi respons Holling tipe III terjadi pada *predator* yang cenderung akan mencari populasi *prey* yang lain ketika populasi *prey* yang dimakan mulai berkurang.

Fungsi respons Holling tipe II menggambarkan rata-rata tingkat konsumsi dari *predator*, ketika *predator* menghabiskan waktu untuk mencari *prey*. Fungsi respons Holling tipe II terjadi pada *predator* dengan karakteristik aktif dalam mencari mangsanya, sebagai contoh *predator*-nya adalah serigala. Fungsi ini akan meningkat jika tingkat konsumsi menurun dan akan konstan jika mencapai titik jenuh (*half saturation*). Hal ini disebabkan setiap *predator* hanya dapat memakan sejumlah *prey* pada satu waktu. Adapun bentuk fungsi respons Holling tipe II diberikan oleh persamaan,

$$F^{(II)} = \frac{aN}{1 + bN}$$

dengan : $F^{(II)}$ = fungsi Holling tipe II

$a$ = tingkat konsumsi maksimum *predator* terhadap *prey*

$b$ = waktu pencarian *prey*

$N$ = kepadatan populasi *prey*

Pada model tersebut diasumsikan bahwa pemangsa menghabiskan waktunya untuk dua aktivitas ketika sedang memangsa yaitu mencari mangsa dan menangani mangsa. Laju konsumsi pemangsa dalam model ini dibatasi waktu. Hal ini terjadi saat jumlah berlimpah, maka pemangsa tidak perlu waktu untuk mencari, tetapi tetap menghabiskan waktu untuk menangani mangsa. Pada penulisan skripsi ini hanya menggunakan respons Holling tipe II. (Skalski dan Gilliam, 2001).

## 2.5 Modifikasi Model *Predator Prey* Leslie Gower dengan Sebagian *Prey* Terinfeksi

Pemodelan matematika epidemi telah menjadi topik penelitian yang menarik dan penting. Perkembangan pemodelan matematika epidemi ini meliputi model penularan penyakit, pengendalian dampak penyakit sampai pengembangan strategi vaksinasi yang sesuai.

Makhluk hidup tidak dapat hidup sendiri agar tidak terjadi kepunahan, oleh karena itu terjadilah interaksi antara makhluk hidup satu dengan yang lain. Interaksi antar individu ini tidak selalu menguntungkan, contohnya *predator prey*. Untuk mempelajari pengaruh penyakit pada lingkungan di mana terdapat dua atau lebih spesies yang saling berinteraksi, maka akan diasumsikan beberapa kondisi di bawah ini.

Terdapat dua populasi:

1. *Prey*, yang kepadatan populasi totalnya dinotasikan dengan $N$.
2. *Predator*, yang kepadatan populasi dilambangkan dengan $y$.

Dalam hal ini diasumsi sebagai berikut:

a. Dengan tidak adanya penyakit, kepadatan populasi *prey* tumbuh sesuai dengan model logistik dengan daya dukung $K$ $(K > 0)$, dengan konstanta laju kelahiran intrinsik $r > 0$

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

b. Dengan adanya infeksi, populasi *prey* total $N$ dibagi menjadi dua kelompok yang berbeda, yaitu populasi *prey* rentan yaitu $S$, dan populasi yang *prey* terinfeksi yaitu $I$. Oleh karena itu, kepadatan populasi *prey* pada waktu $t$ adalah

$$N(t) = S(t) + I(t)$$

c. Diasumsikan bahwa hanya *prey* yang rentan yang mampu bereproduksi dengan hukum logistik, *prey* yang terinfeksi hilang karena kematian (konstanta kematiannya adalah positif $(c)$), atau dimangsa sebelum terjadi kemungkinan untuk bereproduksi. Namun, populasi infektif $I$ masih berkontribusi dengan $S$ untuk pertumbuhan populasi dengan daya dukung.

d. Diasumsikan bahwa penyakit ini menyebar di antara populasi *prey* saja dan penyakit ini tidak diwariskan secara genetis. Populasi yang terinfeksi tidak pulih atau menjadi kebal. Insiden ini diasumsikan sebagai kejadian sederhana $\beta SI$, di mana $\beta > 0$ disebut koefisien penularan. Oleh karena itu, model $SI$ dari *prey* terinfeksi adalah

$$\left.\begin{aligned} \dot{S} &= rS\left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI \\ \dot{I} &= \beta SI - cI \end{aligned}\right\}$$

e. Diasumsikan *predator* dapat membedakan antara *prey* yang terinfeksi dan sehat. Diasumsikan bahwa *predator* hanya memakan *prey* yang terinfeksi dengan skema Leslie-Gower Holling-type II. *Predator* memiliki konstanta laju pertumbuhan $a_2 > 0$. Nilai maksimum laju per kapita pengurangan $I$

karena $y$ adalah $c_1$, dan nilai maksimum laju per kapita pengurangan $y$ karena $I$ adalah $c_2$. Daya dukung lingkungan terhadap $I$ adalah $K_1$ dan daya dukung terhadap $y$ adalah $K_2$.

Dari asumsi di atas maka dibentuk model sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} \dot{S} &= rS\left(1-\frac{S+I}{K}\right)-\beta SI \\ \dot{I} &= \beta SI - cI - \frac{c_1 I y}{I+K_1} \\ \dot{y} &= \left(a_2 - \frac{c_2 y}{I+K_2}\right) y \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

dengan kondisi awal

$$S(0) = S_0 > 0 \qquad I(0) = I_0 > 0 \qquad y(0) = y_0 > 0$$

(Zhou dkk, 2010).

## 2.6 Linierisasi

Linierisasi merupakan proses membawa suatu sistem nonlinier menjadi sistem linier. Linierisasi dilakukan pada sistem nonlinier untuk mengetahui perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan sistem tersebut. Linierisasi pada sistem nonlinier dimaksudkan untuk memperoleh aproksimasi yang baik. Sistem Persamaan (2.2) dapat ditulis kembali menjadi

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{2.4}$$

dengan $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2 \dots, x_n) \in E$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} = (f_1,\ f_2 \dots, f_n)^T$, $\dot{\boldsymbol{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)^T$, dan syarat awal $\boldsymbol{x}(t_0) = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, \dots, x_{n0}) = x_0$.

**Definisi 2.2** Titik $\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan (titik ekuilibrium) sistem (2.4) jika $\boldsymbol{f_i}(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ (Winggins, 2003).

Analisis kestabilan sistem persamaan diferensial nonlinier dilakukan melalui linierisasi. Linierisasi dari sistem persamaan diferensial nonlinier menggunakan matriks Jacobian. Nilai eigen yang didapat dari matriks Jacobian akan digunakan untuk menganalisis kestabilan di sekitar titik setimbang.

**Definisi 2.3** Diberikan fungsi $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2 \dots, f_n)$ pada sistem $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan $\boldsymbol{f}_i \in C^1(E), i = 1,2, \dots, n$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $E$ adalah himpunan terbuka. Matriks

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{\boldsymbol{x}}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overline{\boldsymbol{x}}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{\boldsymbol{x}}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{\boldsymbol{x}}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overline{\boldsymbol{x}}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\overline{\boldsymbol{x}}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\overline{\boldsymbol{x}}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\overline{\boldsymbol{x}}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\overline{\boldsymbol{x}}) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

dinamakan matriks Jacobian dari $\boldsymbol{f}$ di titik $\overline{\boldsymbol{x}}$ (Perko, 2001).

Pada Definisi 2.3, simbol $\boldsymbol{f}_i \in C^1(E)$ menyatakan $\boldsymbol{f}_i$ mempunyai turunan di $E$ dan $Df$ kontinu pada $E$.

**Definisi 2.4** Jika A adalah sebuah matriks *n x n*, maka sebuah vektor taknol $x$ di dalam $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen (*eigenvector*) dari *A*. Jika $Ax$ adalah kelipatan skalar dari $x$, berlaku

$$Ax = \lambda x \quad (2.6)$$

untuk suatu skalar $\lambda$. Skalar $\lambda$ ini dinamakan nilai eigen dari $A$, sedangkan $x$ disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda$.

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks $A_{n\times n}$, tulis kembali Persamaan (2.6) sebagai

$$Ax = \lambda I x$$

atau secara ekuivalen

$$(A - \lambda I)x = (\lambda I - A)x = 0 \quad (2.7)$$

dengan $I$ merupakan matriks identitas. Persamaan (2.7) memiliki solusi taknol jika dan hanya jika

$$det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.8)$$

Persamaan (2.8) disebut persamaan karakteristik (*characteristic equation) A (*Anton, 1992).

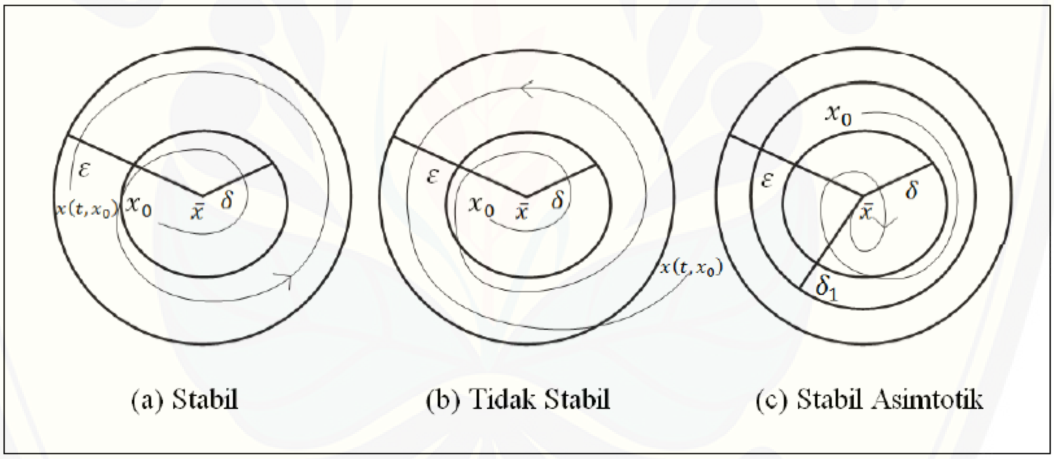
**Definisi 2.5** Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(x)$ dan $x(t, x_0)$ adalah solusi persamaan tersebut pada saat t dengan kondisi awal $x(0) = x_0$.

i. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil jika diberikan sembarang $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ , maka $\|x(t, x_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.

ii. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika titik-titik ekuilibriumnya stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| = 0$, asalkan $\|x_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta_1$.

iii. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan tidak stabil jika titik-titik ekuilibriumnya tidak memenuhi (i).

Pada Definisi 2.5, $\|.\|$ menyatakan norm atau panjang pada $\mathbb{R}^n$ .




Gambar 2.1 Ilustrasi tipe kestabilan titik kesetimbangan

Berdasarkan Gambar 2.1, titik kesetimbangan dikatakan stabil jika solusi sistem persamaan pada saat $t$ selalu berada pada jarak yang cukup dekat dengan titik kesetimbangan tersebut, titik kesetimbangan dikatakan stabil asimtotik jika solusi sistem persamaan pada saat $t$ akan menuju ke titik kesetimbangan, dan titik kesetimbangan dikatakan tidak stabil jika solusi sistem persamaan pada saat $t$ bergerak menjauhi titik kesetimbangan tersebut. Selanjutnya, diberikan Teorema 2.1 mengenai sifat kestabilan.

**Teorema 2.1** Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, dengan $A$ suatu matriks $n \times n$ yang mempunyai $k$ nilai eigen berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ dengan $k \leq n$.

i. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika $\Re e\ \lambda_i < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, k$.
ii. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}} = 0$ dikatakan stabil jika dan hanya jika $\Re e\ \lambda_i \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots k$ dan jika setiap nilai eigen $\lambda_i$ imajiner dengan $\Re e\ \lambda_i = 0$, maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.
iii. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}} = 0$ dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika terdapat paling sedikit satu $\Re e\ \lambda_i > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, k$.

(Olsder dan Woude, 2004).

## 2.7 Kriteria Routh-Hurwitz

Untuk mempermudah menentukan kestabilan dari titik kesetimbangan digunakan kriteria Routh-Hurwitz, yaitu nilai-nilai karakteristik dari matriks A adalah akar-akar karakteristik dari polinomial

$$q(s) = \det(\lambda I - A) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \qquad (2.9)$$

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dapat dipakai untuk mengecek langsung kestabilan melalui koefisien $a_i$ tanpa menghitung akar-akar dari polinomial yang ada, yaitu dengan melakukan pelabelan dan suatu aturan penghitungan dari koefisien $a_i$ akan diketahui bahwa apakah polinomial yang diberikan oleh Persamaan (2.9) semua akar bagian realnya adalah negatif. Diberikan pada kasus Persamaan (2.9) dengan $a_n \neq 0$, sehingga dapat disusun tabel sebagai berikut:

Tabel 2.1 Tabel Routh-Hurwitz

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lambda^n$ | $a_n$ | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | … |
| $\lambda^{n-1}$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | … |
| $\lambda^{n-2}$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | |
| $\lambda^{n-3}$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | | |
| $\lambda^0$ | $q$ | | | |

di mana

$$b_1 = \frac{(a_{n-1})(a_{n-2}) - (a_n)(a_{n-3})}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{(a_{n-1})(a_{n-4}) - (a_n)(a_{n-5})}{a_{n-1}} \quad \cdots$$

$$c_1 = \frac{(b_1)(a_{n-3}) - (b_2)(a_{n-1})}{b_1} \quad c_2 = \frac{(b_1)(a_{n-5}) - (b_3)(a_{n-1})}{b_1} \quad \cdots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Banyaknya perubahan tanda dalam kolom pertama pada Tabel 2.1 sama dengan banyaknya akar-akar polinomial $q(s)$ yang bagian realnya positif (sistem tak stabil). Syarat perlu dan cukup untuk stabil adalah bila semua koefisien dari persamaan karakteristik positif dan semua suku pada kolom pertama tabel Routh bertanda positif (Subiono, 2013).

## 2.8 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta orde empat merupakan metode yang paling populer. Oleh karena itu, metode Runge-Kutta orde empat sering digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial. Metode Runge-Kutta orde empat mempunyai bentuk sebagai berikut.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \tag{2.10}$$

dengan

$k_1 = f(t_i, x_i)$

$k_2 = f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}hk_1)$

$k_3 = f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}hk_2)$

$k_4 = f(t_i + h, x_i + hk_3)$

Metode Runge- Kutta orde empat juga mudah diprogram, stabil, kecil kesalahan pemotongan dan juga kecil kesalahan pembulatan (Triatmodjo, 1992).

## 2.9 Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat

Metode Adams Bashforth Moulton merupakan salah satu metode banyak langkah *(multi step)* yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial dengan cukup akurat. Tujuan dari metode ini adalah menggunakan informasi dari beberapa titik sebelumnya $x_i, x_{i-1}, x_{i-2} \dots, x_{i-n}$ yang dapat diperoleh dari metode satu langkah untuk menghitung nilai hampiran $x_{i+1}$ yang lebih baik.

Adapun persamaan *predictor-corrector* metode Adams Bashforth-Moulton orde empat adalah:

*Predictor*: $$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(-9f_{i-3} + 37f_{i-2} - 59f_{i-1} + 55f_i) \quad (2.11)$$

*Corrector:* $$y^*{}_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(f_{i-2} - 5f_{i-1} + 19f_i + 9f_{i+1}) \quad (2.12)$$

Metode ini adalah metode implisit yang memerlukan tiga buah nilai awal $y_1, y_2,$ dan $y_3$. Oleh karena yang diketahui hanya $y_0 = y(t_0)$, nilai $y_1, y_2,$ dan $y_3$ perlu dihitung dengan menggunakan metode lain yang memiliki galat hampiran setiap langkah $O(h^m)$ dengan $h$ merupakan ukuran langkah $(\Delta t)$, $m$ merupakan orde dari metode lain dan nilai $m \geq 4$, misalnya metode Runge-Kutta orde empat (Sahid, 2006).

# BAB 3. METODE PENELITIAN

Secara skematik, langkah-langkah penelitian yang dilakukan dalam tugas akhir ini dapat dilihat pada Gambar 3.1.

Kajian pustaka mengenai modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi

↓

Analisis kestabilan model

↓

Penyelesaian modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi menggunakan Adams Bashforth Moulton Orde Empat

↓

Membuat program pada MATLAB

↓

Simulasi program

↓

Interpretasi hasil simulasi

Gambar 3.1 Skema metode penelitian

Adapun penjelasan dari Gambar 3.1 adalah sebagai berikut:

a. Kajian Pustaka

Kajian pustaka merupakan suatu tahapan awal yang digunakan untuk mendapatkan informasi dari buku-buku, jurnal, maupun skripsi yang berkaitan dengan modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi yang diselesaikan secara numerik.

b. Analisis Kestabilan Model

Modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier. Untuk analisis kestabilan terlebih dahulu menemukan titik kesetimbangan. Setelah titik kesetimbangan ditemukan kemudian melakukan linierisasi di sekitar titik kesetimbangan menggunakan matriks Jacobian. Titik kesetimbangan disubtitusikan ke dalam matriks Jacobian dari model menghasilkan matriks $A$, kemudian dicari nilai eigennya dengan menggunakan Persamaan (2.8). Selanjutnya, kestabilan di sekitar titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan melihat nilai eigen berdasarkan kriteria pada Teorema 2.1.

c. Penyelesaian Model Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat

Penyelesaian modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi dilakukan dengan menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton Orde Empat. Model ini akan diselesaikan dengan memasukkan nilai parameter-parameter pada model.

d. Pembuatan Program

*Software* yang akan digunakan adalah *software* MATLAB R2015b. Prosedur untuk membuat program simulasi dari modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi adalah sebagai berikut:

1. Input: memasukkan nilai parameter dari model yaitu jumlah populasi *prey* rentan $(s)$, jumlah populasi *prey* terinfeksi $(I)$, jumlah populasi *predator* $(y)$, laju pertumbuhan intrinsik *prey* rentan $(r)$, kapasitas daya tampung *prey* rentan $(K)$, laju infeksi (penularan penyakit) $(\beta)$, laju kematian *prey* terinfeksi $(c)$, laju pertumbuhan *predator* $(a_2)$, nilai

maksimum laju per kapita pengurangan $I$ karena $y$ ($c_1$), nilai maksimum laju per kapita pengurangan $y$ karena $I$ ($c_2$), daya dukung lingkungan untuk *prey* terinfeksi ($K_1$), daya dukung lingkungan untuk *predator* ($K_2$).

2. Proses: membuat subprogram Metode Runge Kutta orde empat dan Metode Adams Bashforth Moulton orde empat
3. Output: output yang dihasilkan dari simulasi ini berupa grafik hasil penyelesaian yang berupa hubungan kepadatan populasi *predator*, *prey* rentan dan *prey* terinfeksi dengan waktu.

e. Simulasi Program

Langkah selanjutnya adalah simulasi beberapa parameter yang mempengaruhi modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi dengan menginputkan nilai-nilai parameter. Adapun input untuk simulasi beberapa kasus yang akan dilakukan adalah sebagai berikut :

1. $r = 2, a_2 = 1, c = 0{,}3, c_1 = 1, c_2 = 1, K = 3, K_1 = 0{,}6, K_2 = 0{,}5, \beta = 0{,}3$ sedangkan untuk nilai awal populasi $S(0) = 1,\ \ I(0) = 0{,}5,\ \ y(0) = 1{,}2$.
2. $r = 2, a_2 = 1, c = 0{,}3, c_1 = 1, c_2 = 1, K = 3, K_1 = 0{,}6, K_2 = 0{,}5, \beta = 1{,}1$ sedangkan untuk nilai awal populasi $S(0) = 1,\ \ I(0) = 0{,}5,\ \ y(0) = 1{,}2$.
3. $r = 2, K = 3, c = 0{,}3, c_1 = 1, c_2 = 1, K_1 = 0{,}6, K_2 = 0{,}5, a_2 = 1,\ S(0) = 1,\ I(0) = 0{,}5,\ y(0) = 1{,}2$ dengan variasi beberapa nilai $\beta$ yaitu $\beta = 0{,}1$, $\beta = 1{,}5,\ \beta = 8$.
4. $r = 2, K = 3, c = 0{,}3, \beta = 2, c_2 = 1, K_1 = 0{,}6, K_2 = 0{,}5,\ a_2 = 1,\ S(0) = 1,\ I(0) = 0{,}5,\ y(0) = 1{,}2$ dengan variasi beberapa nilai $c_1$ yaitu $c_1 = 0{,}1,\ c_1 = 3,\ c_1 = 8$.
5. $r = 2, K = 3, c = 0{,}3, c_1 = 1, \beta = 2,\ K_1 = 0{,}6, K_2 = 0{,}5, a_2 = 1,\ S(0) = 1,\ I(0) = 0{,}5,\ y(0) = 1{,}2$ dengan variasi beberapa nilai $c_2$ yaitu $c_2 = 0{,}1,\ c_2 = 0{,}2,\ c_2 = 0{,}6$.

f. Interpretasi Hasil Simulasi

Hasil simulasi selanjutnya akan dianalisis guna mengetahui profil perubahan kepadatan populasi *predator* dan *prey* dari modifikasi model *predator prey* Leslie Gower dengan sebagian *prey* terinfeksi.

rentan menurun. Populasi *predator* meningkat karena *prey* terinfeksi sebagai makanannya mengalami kenaikan.

2. Semakin besar nilai maksimum laju per kapita pengurangan *prey* terinfeksi karena *predator* $(c_1)$ maka populasi *prey* terinfeksi akan menurun kemudian punah. Kepadatan populasi *prey* rentan akan berangsur naik karena punahnya populasi yang menularkan penyakit. Populasi *predator* akan menurun karena *prey* terinfeksi sebagai makanannya menurun.
3. Nilai maksimum laju per kapita pengurangan *predator* karena *prey* terinfeksi $(c_2)$ mendekati satu, maka populasi *predator* bisa mempertahankan kepadatannya dan akan menurun jika nilai $c_2$ semakin besar. Kepadatan populasi *prey* terinfeksi akan naik. Populasi *prey* rentan menurun karena *prey* terinfeksi naik.

## 5.2 Saran

Pada tugas akhir ini, permasalahan yang dibahas hanya analisis kestabilan lokal dan penyelesaian model secara numerik menggunakan metode Adams Bashforth Moulton orde empat. Peneliti selanjutnya disarankan untuk menganalisis kestabilan global dari model. Selain itu, peneliti selanjutnya bisa membandingkan hasil yang didapat dari metode Adams Bashforth Moulton orde empat ini dengan metode lain yang berorde lebih tinggi.

# DAFTAR PUSTAKA


Anton, H. 1992. *Aljabar Linier Elementer Edisi ke-5*. Terjemahan Pantur Silaban dan I Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.

Bacaer, N. 2011. *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. New York (US): Springer-Verlag.

Boyce, W.E. dan Diprima, R.C.. 1999. *ODE Architect Companion*. New York: John Willey and Sons, Inc.

Boyce, W. E. dan Diprima, R. C. 2012. *Elementary Differensial Equations and Boundary Value Problems*. *Tenth Edition*. John Willey & Sons Inc. New York.

Chattopadhyay, J., Bairagi N., Chaudhuri S.. 2007. Harvesting as disease control measure in an eco-epidemiological system-atheoritical study. *Mathematical Biosciences*. 217(2): 14-144.

Hofbauer, J., dan Sigmund, K.. 1998. *Evoluntionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press, New York.

Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Leslie, P. H. & J. C. Gower. 1960. The Properties of a Stochastic Model for the Predator-Prey Type of Interaction between Two Species. *Biometrika*, 47 (3/4): 219-234

Mardiana, R. 2015. Analisis Solusi Numerik Model Predator Prey Tipe Holling dengan Faktor Pemanenan pada Prey Menggunakan Metode Adams Bashforth-Moulton. *Skripsi*. Jember: Universitas Jember.

Nurindah, E. 2011. Kajian Metode Adams Bashforth Moulton pada Masalah Nilai Batas. *Skripsi*. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Olsder dan Woude. 2004. “*Mathematical Systems Theory*”. Delft University of Technology.

Perko, L. 2001. *Differential Equations and Dynamical Systems*. *3rd.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg: New York.

Putri, PP. 2013. Analisis Solusi Numerik Model Predator-Prey dengan Metode Runge-Kutta Orde Empat dan Gill. *Skripsi*. Jember: Universitas Jember.

Sahid. 2006. *Pengantar Komputasi Numerik dengan MATLAB*. Yogyakarta: Andi.

Skalski GT & Gilliam JF, 2001. Unctional Response with Predator Interference: Viable Alternatives to the Holling Type II Model. *Ecology*. 82: 3083-3092.

Subiono. 2013. *Sistem Linier Kontrol Optimal*. Surabaya. Institut Teknologi Sepuluh November

Triatmodjo, B. 1992. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset.

Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Diferensial Edisi Pertama.*Yogyakarta: Graha Ilmu.

Winggins, S. 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical system and Chaos*. Second Edition. New York: Springer-Verlag.

Zhou, Xueyoung, Jingan Cui, Xiangyun Shi, Xinyu Song. 2010. A Modified Leslie-Gower predator-prey model with prey infection. *J Appl Math Comput*, 33:471-487.

Zill, D.G. dan Cullen, M.R. 2009. *Differential Equation with Boundary-Value Problem.* Seventh Edition. Nelson Education Ltd. Canada.

# LAMPIRAN 1

Script program

```
clc;

r=str2num(get(handles.edit1,'string'));
K=str2num(get(handles.edit2,'string'));
beta=str2num(get(handles.edit3,'string'));
c=str2num(get(handles.edit4,'string'));
c1=str2num(get(handles.edit5,'string'));
K1=str2num(get(handles.edit6,'string'));
a2=str2num(get(handles.edit7,'string'));
c2=str2num(get(handles.edit8,'string'));
K2=str2num(get(handles.edit9,'string'));

f1=inline('r*S*(1-(S+I)/K)-
beta*S*I','S','I','y','r','K','beta','c','c1','K1','a2','c2','K2')
;
f2=inline('beta*S*I-c*I-
(c1*I*y)/(I+K1)','S','I','y','r','K','beta','c','c1','K1','a2','c2
','K2');
f3=inline('(a2-
(c2*y)/(I+K2))*y','S','I','y','r','K','beta','c','c1','K1','a2','c
2','K2');

S0=str2num(get(handles.edit10,'string'));
I0=str2num(get(handles.edit11,'string'));
y0=str2num(get(handles.edit12,'string'));

t0=str2num(get(handles.edit13,'string'));
tmax=str2num(get(handles.edit14,'string'));
h=str2num(get(handles.edit15,'string'));

S(1)=S0;
I(1)=I0;
y(1)=y0;

t=t0:h:tmax;

str={'       t                        S(t)
I(t)                              y(t)';...
    sprintf('%8.4f %18.12f %18.12f %18.12f',t(1),S(1),I(1),y(1))};
set(handles.listbox1,'string',char(str),'value',2);
%% RungeKutta4
for n=1:3
    k11=f1(S(n),I(n),y(n),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2);
    k12=f2(S(n),I(n),y(n),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2);
    k13=f3(S(n),I(n),y(n),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2);

k21=f1(S(n)+h/2*k11,I(n)+h/2*k12,y(n)+h/2*k13,r,K,beta,c,c1,K1,a2,
c2,K2);
```

```
k22=f2(S(n)+h/2*k11,I(n)+h/2*k12,y(n)+h/2*k13,r,K,beta,c,c1,K1,a2,
c2,K2);

k23=f3(S(n)+h/2*k11,I(n)+h/2*k12,y(n)+h/2*k13,r,K,beta,c,c1,K1,a2,
c2,K2);

k31=f1(S(n)+h/2*k21,I(n)+h/2*k22,y(n)+h/2*k23,r,K,beta,c,c1,K1,a2,
c2,K2);

k32=f2(S(n)+h/2*k21,I(n)+h/2*k22,y(n)+h/2*k23,r,K,beta,c,c1,K1,a2,
c2,K2);

k33=f3(S(n)+h/2*k21,I(n)+h/2*k22,y(n)+h/2*k23,r,K,beta,c,c1,K1,a2,
c2,K2);

k41=f1(S(n)+h*k31,I(n)+h*k32,y(n)+h*k33,r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)
;

k42=f2(S(n)+h*k31,I(n)+h*k32,y(n)+h*k33,r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)
;

k43=f3(S(n)+h*k31,I(n)+h*k32,y(n)+h*k33,r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)
;
    S(n+1)=S(n)+h/6*(k11+2*k21+2*k31+k41);
    I(n+1)=I(n)+h/6*(k12+2*k22+2*k32+k42);
    y(n+1)=y(n)+h/6*(k13+2*k23+2*k33+k43);
    %Plot
    plot(t(1:n+1),S,'r','Linewidth',2);
    hold on
    plot(t(1:n+1),I,'b--','Linewidth',2);
    plot(t(1:n+1),y,'go','Linewidth',1);
    grid on
    mn=min([min(S),min(I),min(y)]);
    mx=max([max(S),max(I),max(y)]);
    dx=mx-mn;
    ylim([mn-dx/10 mx+dx/10]);
    xlabel('t');ylabel('Kepadatan Populasi');
    hold off
    %List
    str={char(str);sprintf('%8.4f %18.12f %18.12f
%18.12f',t(n+1),S(n+1),I(n+1),y(n+1))};
    set(handles.listbox1,'string',char(str),'value',n+1);
    pause(0.000001);
end

%% ABM
Ss=S; Is=I; ys=y;

for n=4:length(t)-1
    %Predictor

Ss(n+1)=S(n)+h/24*(55*f1(S(n),I(n),y(n),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)
-...
        59*f1(S(n-1),I(n-1),y(n-1),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)+...
        37*f1(S(n-2),I(n-2),y(n-2),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)-...
```

```
        9*f1(S(n-3),I(n-3),y(n-3),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2));

Is(n+1)=I(n)+h/24*(55*f2(S(n),I(n),y(n),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)
-...
        59*f2(S(n-1),I(n-1),y(n-1),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)+...
        37*f2(S(n-2),I(n-2),y(n-2),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)-...
        9*f2(S(n-3),I(n-3),y(n-3),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2));

ys(n+1)=y(n)+h/24*(55*f3(S(n),I(n),y(n),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)
-...
        59*f3(S(n-1),I(n-1),y(n-1),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)+...
        37*f3(S(n-2),I(n-2),y(n-2),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)-...
        9*f3(S(n-3),I(n-3),y(n-3),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2));
    %Corrector

S(n+1)=S(n)+h/24*(9*f1(Ss(n+1),Is(n+1),ys(n+1),r,K,beta,c,c1,K1,a2
,c2,K2)+...
        19*f1(S(n),I(n),y(n),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)-...
        5*f1(S(n-1),I(n-1),y(n-1),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)+...
        f1(S(n-2),I(n-2),y(n-2),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2));

I(n+1)=I(n)+h/24*(9*f2(Ss(n+1),Is(n+1),ys(n+1),r,K,beta,c,c1,K1,a2
,c2,K2)+...
        19*f2(S(n),I(n),y(n),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)-...
        5*f2(S(n-1),I(n-1),y(n-1),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)+...
        f2(S(n-2),I(n-2),y(n-2),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2));

y(n+1)=y(n)+h/24*(9*f3(Ss(n+1),Is(n+1),ys(n+1),r,K,beta,c,c1,K1,a2
,c2,K2)+...
        19*f3(S(n),I(n),y(n),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)-...
        5*f3(S(n-1),I(n-1),y(n-1),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2)+...
        f3(S(n-2),I(n-2),y(n-2),r,K,beta,c,c1,K1,a2,c2,K2));

    %Plot
    plot(t(1:n+1),S,'r','Linewidth',2);
    hold on
    plot(t(1:n+1),I,'b--','Linewidth',2);
    plot(t(1:n+1),y,'go','Linewidth',1);
    grid on
    mn=min([min(S),min(I),min(y)]);
    mx=max([max(S),max(I),max(y)]);
    dx=mx-mn;
    ylim([mn-dx/10 mx+dx/10]);
    xlabel('t');ylabel('Kepadatan Populasi');
    hold off
    %List
    str={char(str);sprintf('%8.4f %18.12f %18.12f
%18.12f',t(n+1),S(n+1),I(n+1),y(n+1))};
    set(handles.listbox1,'string',char(str),'value',n+1);
    pause(0.000001);
end
set(handles.axes1,'UserData',{S,I,y})
```

## LAMPIRAN 2

Perhitungan analitik untuk kasus 1

```
> restart;
> r:=2:a2:=1:c:=0.3:c1:=1:c2:=1:K:=3:K1:=0.6:K2:=0.5:
beta:=0.1:
> #ds=prey rentan
> #dw=prey terinfeksi
> #dy=predator
> ds:=r*s*(1-(s+w)/K)-beta*s*w;#PERSAMAAN PREY RENTAN
```

$$ds := 2\,s\left(1-\frac{s}{3}-\frac{w}{3}\right)-0.1\,s\,w$$

```
> dw:=beta*s*w-c*w-((c1*w*y)/(w+K1));#PERSAMAAN PREY
TERINFEKSI
```

$$dw := 0.1\,s\,w-0.3\,w-\frac{w\,y}{w+0.6}$$

```
> dy:=(a2-(c2*y)/(w+K2))*y;#PERSAMAAN PREDATOR
```

$$dy := \left(1-\frac{y}{w+0.5}\right)y$$

```
> titik:=solve({ds=0,dw=0,dy=0},{s,w,y});#TITIK
KESETIMBANGAN SISTEM
```

$$\begin{aligned}titik := &\{s=0.,w=0.,y=0.\},\{s=0.,w=0.,y=0.5000000000\},\\&\{s=3.,w=0.,y=0.\},\{s=3.,w=0.,y=0.5000000000\},\\&\{s=0.,w=\text{-}0.5230769231,y=\text{-}0.02307692308\},\\&\{s=3.568073687,w=\text{-}0.4939771191,y=0.006022880885\},\\&\{s=13.12192631,w=\text{-}8.801675055,y=\text{-}8.301675055\}\end{aligned}$$

```
> with(linalg):
> jac:=jacobian([ds,dw,dy],[s,w,y]);#MATRIKS JACOBIAN
```

$$jac := \begin{bmatrix} 2-\frac{4\,s}{3}-0.7666666667\,w & -0.7666666667\,s & 0 \\ 0.1\,w & 0.1\,s-0.3-\frac{y}{w+0.6}+\frac{w\,y}{(w+0.6)^2} & -\frac{w}{w+0.6} \\ 0 & \frac{y^2}{(w+0.5)^2} & -\frac{2\,y}{w+0.5}+1 \end{bmatrix}$$

```
> titik4:=titik[4];
```

$$titik4 := \{s=3.,w=0.,y=0.5000000000\}$$

```
> jac4:=subs(titik4,evalm(jac));
```

$$jac4 := \begin{bmatrix} \text{-}2.000000000 & \text{-}2.300000000 & 0 \\ 0. & \text{-}0.8333333333 & \text{-}0. \\ 0 & 1.000000000 & \text{-}1.000000000 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(jac4);
```

-2., -1., -0.8333333333

**LAMPIRAN 3**

Perhitungan analitik untuk kasus 2

```
> restart;
> r:=2:a2:=1:c:=0.3:c1:=1:c2:=1:K:=3:K1:=0.6:K2:=0.5:
beta:=1.1:
> #s=prey rentan
> #w=prey terinfeksi
> #y=predator
> ds:=r*s*(1-(s+w)/K)-beta*s*w;#PERSAMAAN PREY RENTAN
```

$$ds := 2\,s\left(1-\frac{s}{3}-\frac{w}{3}\right)-1.1\,s\,w$$

```
> dw:=beta*s*w-c*w-((c1*w*y)/(w+K1));#PERSAMAAN PREY
TERINFEKSI
```

$$dw := 1.1\,s\,w-0.3\,w-\frac{w\,y}{w+0.6}$$

```
> dy:=(a2-(c2*y)/(w+K2))*y;#PERSAMAAN PREDATOR
```

$$dy := \left(1-\frac{y}{w+0.5}\right)y$$

```
> titik:=solve({ds=0,dw=0,dy=0},{s,w,y});#TITIK
KESETIMBANGAN SISTEM
```

$$\begin{aligned} titik := & \{s=0.,\,w=0.,\,y=0.\},\,\{s=0.,\,w=0.,\,y=0.5000000000\},\\ & \{s=3.,\,w=0.,\,y=0.\},\,\{s=3.,\,w=0.,\,y=0.5000000000\},\\ & \{s=0.,\,w=-0.5230769231,\,y=-0.02307692308\},\\ & \{s=0.2727272727,\,w=1.029159520,\,y=0.\},\\ & \{s=1.112540850,\,w=0.7122487358,\,y=1.212248736\},\\ & \{s=4.659277332,\,w=-0.6261423893,\,y=-0.1261423893\} \end{aligned}$$

```
> with(linalg):
> jac:=jacobian([ds,dw,dy],[s,w,y]);#MATRIKS JACOBIAN
```

$$jac := \begin{bmatrix} 2-\frac{4\,s}{3}-1.766666667\,w & -1.766666667\,s & 0 \\ 1.1\,w & 1.1\,s-0.3-\frac{y}{w+0.6}+\frac{w\,y}{(w+0.6)^2} & -\frac{w}{w+0.6} \\ 0 & \frac{y^2}{(w+0.5)^2} & -\frac{2\,y}{w+0.5}+1 \end{bmatrix}$$

```
> titik7:=titik[7];
```

$$titik7 := \{s=1.112540850,\,w=0.7122487358,\,y=1.212248736\}$$

```
> jac7:=subs(titik7,evalm(jac));
```

$$jac7 := \begin{bmatrix} -0.741693900 & -1.965488835 & 0 \\ 0.7834736094 & 0.5014078173 & -0.5427696109 \\ 0 & 1.000000000 & -1.000000000 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(jac7);
```

$$-0.1497225217 + 1.283326220\ I, -0.1497225217 - 1.283326220\ I, -0.9408410392$$

**LAMPIRAN 4**

Perhitungan analitik untuk kasus 3

Kasus ketiga $\beta = 0.1$

```
> restart;
> r:=2:a2:=1:c:=0.3:c1:=1:c2:=1:K:=3:K1:=0.6:K2:=0.5:
beta:=0.1:
> #s=prey rentan
> #w=prey terinfeksi
> #y=predator
> ds:=r*s*(1-(s+w)/K)-beta*s*w;#PERSAMAAN PREY RENTAN
```

$$ds := 2\,s\left(1-\frac{s}{3}-\frac{w}{3}\right)-0.1\,s\,w$$

```
> dw:=beta*s*w-c*w-((c1*w*y)/(w+K1));#PERSAMAAN PREY TERINFEKSI
```

$$dw := 0.1\,s\,w-0.3\,w-\frac{w\,y}{w+0.6}$$

```
> dy:=(a2-(c2*y)/(w+K2))*y;#PERSAMAAN PREDATOR
```

$$dy := \left(1-\frac{y}{w+0.5}\right)y$$

```
> titik:=solve({ds=0,dw=0,dy=0},{s,w,y});#TITIK KESETIMBANGAN SISTEM
```

$$\begin{aligned} titik := {} & \{s=0.,\,w=0.,\,y=0.\},\ \{s=0.,\,w=0.,\,y=0.5000000000\},\\ & \{s=3.,\,w=0.,\,y=0.\},\ \{s=3.,\,w=0.,\,y=0.5000000000\},\\ & \{s=0.,\,w=-0.5230769231,\,y=-0.02307692308\},\\ & \{s=3.568073687,\,w=-0.4939771191,\,y=0.006022880885\},\\ & \{s=13.12192631,\,w=-8.801675055,\,y=-8.301675055\} \end{aligned}$$

```
> with(linalg):
> jac:=jacobian([ds,dw,dy],[s,w,y]);#MATRIKS JACOBIAN
```

$$jac := \begin{bmatrix} 2-\frac{4\,s}{3}-0.7666666667\,w & -0.7666666667\,s & 0 \\ 0.1\,w & 0.1\,s-0.3-\frac{y}{w+0.6}+\frac{w\,y}{(w+0.6)^2} & -\frac{w}{w+0.6} \\ 0 & \frac{y^2}{(w+0.5)^2} & -\frac{2\,y}{w+0.5}+1 \end{bmatrix}$$

```
> titik4:=titik[4];
```

$$titik4 := \{s=3.,\,w=0.,\,y=0.5000000000\}$$

```
> jac4:=subs(titik4,evalm(jac));
```

$$jac4 := \begin{bmatrix} -2.000000000 & -2.300000000 & 0 \\ 0. & -0.8333333333 & -0. \\ 0 & 1.000000000 & -1.000000000 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(jac4);
```

-2., -1., -0.8333333333

Kasus ketiga $\beta = 1.5$

```
> restart;
> r:=2:a2:=1:c:=0.3:c1:=1:c2:=1:K:=3:K1:=0.6:K2:=0.5:
beta:=1.5:
> #s=prey rentan
> #w=prey terinfeksi
> #y=predator
> ds:=r*s*(1-(s+w)/K)-beta*s*w;#PERSAMAAN PREY RENTAN
```

$$ds := 2\,s\left(1 - \frac{s}{3} - \frac{w}{3}\right) - 1.5\,s\,w$$

```
> dw:=beta*s*w-c*w-((c1*w*y)/(w+K1));#PERSAMAAN PREY
TERINFEKSI
```

$$dw := 1.5\,s\,w - 0.3\,w - \frac{w\,y}{w + 0.6}$$

```
> dy:=(a2-(c2*y)/(w+K2))*y;#PERSAMAAN PREDATOR
```

$$dy := \left(1 - \frac{y}{w + 0.5}\right) y$$

```
> titik:=solve({ds=0,dw=0,dy=0},{s,w,y});#TITIK
KESETIMBANGAN SISTEM
```

$$\begin{aligned} titik := &\{s = 0., w = 0., y = 0.\}, \{s = 0., w = 0., y = 0.5000000000\},\\ &\{s = 3., w = 0., y = 0.\}, \{s = 3., w = 0., y = 0.5000000000\},\\ &\{s = 0., w = -0.5230769231, y = -0.02307692308\},\\ &\{s = 0.2000000000, w = 0.8615384615, y = 0.\},\\ &\{s = 0.8142775928, w = 0.6725299714, y = 1.172529971\},\\ &\{s = 5.002389074, w = -0.6161197150, y = -0.1161197150\} \end{aligned}$$

```
> with(linalg):
> jac:=jacobian([ds,dw,dy],[s,w,y]);#MATRIKS JACOBIAN
```

$$jac := \begin{bmatrix} 2 - \frac{4\,s}{3} - 2.166666667\,w & -2.166666667\,s & 0 \\ 1.5\,w & 1.5\,s - 0.3 - \frac{y}{w + 0.6} + \frac{w\,y}{(w + 0.6)^2} & -\frac{w}{w + 0.6} \\ 0 & \frac{y^2}{(w + 0.5)^2} & -\frac{2\,y}{w + 0.5} + 1 \end{bmatrix}$$

```
> titik7:=titik[7];
```

$titik7 := \{s = 0.8142775928, w = 0.6725299714, y = 1.172529971\}$

```
> jac7:=subs(titik7,evalm(jac));
```

$$jac7 := \begin{bmatrix} -0.542851729 & -1.764268118 & 0 \\ 1.008794957 & 0.4869670277 & -0.5284983354 \\ 0 & 1.000000000 & -1.000000000 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(jac7);
```

$-0.07063838297 + 1.402003670\, I, -0.07063838297 - 1.402003670\, I, -0.9146079354$

Kasus ketiga $\beta = 8$

```
> restart;
> r:=2:a2:=1:c:=0.3:c1:=1:c2:=1:K:=3:K1:=0.6:K2:=0.5:
beta:=8:
> #s=prey rentan
> #w=prey terinfeksi
> #y=predator
> ds:=r*s*(1-(s+w)/K)-beta*s*w;#PERSAMAAN PREY RENTAN
```

$$ds := 2\, s \left(1 - \frac{s}{3} - \frac{w}{3}\right) - 8\, s\, w$$

```
> dw:=beta*s*w-c*w-((c1*w*y)/(w+K1));#PERSAMAAN PREY
TERINFEKSI
```

$$dw := 8\, s\, w - 0.3\, w - \frac{w\, y}{w + 0.6}$$

```
> dy:=(a2-(c2*y)/(w+K2))*y;#PERSAMAAN PREDATOR
```

$$dy := \left(1 - \frac{y}{w + 0.5}\right) y$$

```
> titik:=solve({ds=0,dw=0,dy=0},{s,w,y});#TITIK
KESETIMBANGAN SISTEM
```

$titik := \{s = 0., w = 0., y = 0.\}, \{s = 0., w = 0., y = 0.5000000000\},$
$\{s = 3., w = 0., y = 0.\}, \{s = 3., w = 0., y = 0.5000000000\},$
$\{s = 0., w = -0.5230769231, y = -0.02307692308\},$
$\{s = 0.03750000000, w = 0.2278846154, y = 0.\},$
$\{s = 0.1472457291, w = 0.2194426362, y = 0.7194426362\},$
$\{s = 10.81525427, w = -0.6011734055, y = -0.1011734055\}$

```
> with(linalg):
> jac:=jacobian([ds,dw,dy],[s,w,y]);#MATRIKS JACOBIAN
```

$$jac := \begin{bmatrix} 2 - \frac{4\,s}{3} - \frac{26\,w}{3} & -\frac{26\,s}{3} & 0 \\ 8\,w & 8\,s - 0.3 - \frac{y}{w+0.6} + \frac{w\,y}{(w+0.6)^2} & -\frac{w}{w+0.6} \\ 0 & \frac{y^2}{(w+0.5)^2} & -\frac{2\,y}{w+0.5} + 1 \end{bmatrix}$$

```
> titik7:=titik[7];
```

$titik7 := \{s = 0.1472457291\,,\ w = 0.2194426362\,,\ y = 0.7194426362\,\}$

```
> jac7:=subs(titik7,evalm(jac));
```

$$jac7 := \begin{bmatrix} -0.098163819 & -1.276129652 & 0 \\ 1.755541090 & 0.2351148558 & -0.2677949944 \\ 0 & 1.000000000 & -1.000000000 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(jac7);
```

$0.03376040306 + 1.552338649\ I,\ 0.03376040306 - 1.552338649\ I,\ -0.9305697693$

**LAMPIRAN 5**

Perhitungan analitik untuk kasus 4

Kasus keempat $c_1 = 0.1$

```
> restart;
> r:=2:a2:=1:c:=0.3:c1:=0.1:c2:=1:K:=3:K1:=0.6:K2:=0.5:
beta:=2:
> #s=prey rentan
> #w=prey terinfeksi
> #y=predator
> ds:=r*s*(1-(s+w)/K)-beta*s*w;#PERSAMAAN PREY RENTAN
```

$$ds := 2\,s\left(1-\frac{s}{3}-\frac{w}{3}\right)-2\,s\,w$$

```
> dw:=beta*s*w-c*w-((c1*w*y)/(w+K1));#PERSAMAAN PREY
TERINFEKSI
```

$$dw := 2\,s\,w-0.3\,w-\frac{0.1\,w\,y}{w+0.6}$$

```
> dy:=(a2-(c2*y)/(w+K2))*y;#PERSAMAAN PREDATOR
```

$$dy := \left(1-\frac{y}{w+0.5}\right)y$$

```
> titik:=solve({ds=0,dw=0,dy=0},{s,w,y});#TITIK
KESETIMBANGAN SISTEM
```

$$titik := \{s=0.,w=0.,y=0.\},\{s=0.,w=0.,y=0.5000000000\},$$
$$\{s=3.,w=0.,y=0.\},\{s=3.,w=0.,y=0.5000000000\},$$
$$\{s=0.,w=-0.5750000000,y=-0.07500000000\},$$
$$\{s=0.1500000000,w=0.7125000000,y=0.\},$$
$$\{s=0.1961566867,w=0.7009608283,y=1.200960828\},$$
$$\{s=5.403843313,w=-0.6009608283,y=-0.1009608283\}$$

```
> with(linalg):
> jac:=jacobian([ds,dw,dy],[s,w,y]);#MATRIKS JACOBIAN
```

$$jac := \begin{bmatrix} 2-\frac{4\,s}{3}-\frac{8\,w}{3} & -\frac{8\,s}{3} & 0 \\ 2\,w & 2\,s-0.3-\frac{0.1\,y}{w+0.6}+\frac{0.1\,w\,y}{(w+0.6)^2} & -\frac{0.1\,w}{w+0.6} \\ 0 & \frac{y^2}{(w+0.5)^2} & -\frac{2\,y}{w+0.5}+1 \end{bmatrix}$$

```
> titik7:=titik[7];
```

$titik7 := \{s = 0.1961566867, w = 0.7009608283, y = 1.200960828\}$

```
> jac7:=subs(titik7,evalm(jac));
```

$$jac7 := \begin{bmatrix} -0.130771124 & -0.5230844979 & 0 \\ 1.401921657 & 0.04973866795 & -0.05388024091 \\ 0 & 1.000000000 & -1.000000000 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(jac7);
```

$-0.05474403043 + 0.8673882526\ I, -0.05474403043 - 0.8673882526\ I, -0.9715443952$

Kasus keempat $c_1 = 3$

```
> restart;
> r:=2:a2:=1:c:=0.3:c1:=3:c2:=1:K:=3:K1:=0.6:K2:=0.5:
beta:=2:
> #s=prey rentan
> #w=prey terinfeksi
> #y=predator
> ds:=r*s*(1-(s+w)/K)-beta*s*w;#PERSAMAAN PREY RENTAN
```

$$ds := 2\,s\left(1 - \frac{s}{3} - \frac{w}{3}\right) - 2\,s\,w$$

```
> dw:=beta*s*w-c*w-((c1*w*y)/(w+K1));#PERSAMAAN PREY
TERINFEKSI
```

$$dw := 2\,s\,w - 0.3\,w - \frac{0.1\,w\,y}{w + 0.6}$$

```
> dy:=(a2-(c2*y)/(w+K2))*y;#PERSAMAAN PREDATOR
```

$$dy := \left(1 - \frac{y}{w + 0.5}\right)y$$

```
> titik:=solve({ds=0,dw=0,dy=0},{s,w,y});#TITIK
KESETIMBANGAN SISTEM
```

$titik := \{s = 0., w = 0., y = 0.\}, \{s = 0., w = 0., y = 0.5000000000\},$
$\{s = 3., w = 0., y = 0.\}, \{s = 3., w = 0., y = 0.5000000000\},$
$\{s = 0., w = -0.5750000000, y = -0.07500000000\},$
$\{s = 0.1500000000, w = 0.7125000000, y = 0.\},$
$\{s = 0.1961566867, w = 0.7009608283, y = 1.200960828\},$
$\{s = 5.403843313, w = -0.6009608283, y = -0.1009608283\}$

```
> with(linalg):
> jac:=jacobian([ds,dw,dy],[s,w,y]);#MATRIKS JACOBIAN
```

$$jac := \begin{bmatrix} 2 - \frac{4\,s}{3} - \frac{8\,w}{3} & -\frac{8\,s}{3} & 0 \\ 2\,w & 2\,s - 0.3 - \frac{0.1\,y}{w+0.6} + \frac{0.1\,w\,y}{(w+0.6)^2} & -\frac{0.1\,w}{w+0.6} \\ 0 & \frac{y^2}{(w+0.5)^2} & -\frac{2\,y}{w+0.5} + 1 \end{bmatrix}$$

```
> titik7:=titik[7];
```

$titik7 := \{s = 0.1961566867, w = 0.7009608283, y = 1.200960828\}$

```
> jac7:=subs(titik7,evalm(jac));
```

$$jac7 := \begin{bmatrix} -0.130771124 & -0.5230844979 & 0 \\ 1.401921657 & 0.04973866795 & -0.05388024091 \\ 0 & 1.000000000 & -1.000000000 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(jac7);
```

$-0.05474403043 + 0.8673882526\, I, -0.05474403043 - 0.8673882526\, I, -0.9715443952$

Kasus kempat $c_1 = 8$

```
> restart;
> r:=2:a2:=1:c:=0.3:c1:=8:c2:=1:K:=3:K1:=0.6:K2:=0.5:
beta:=2:
> #s=prey rentan
> #w=prey terinfeksi
> #y=predator
> ds:=r*s*(1-(s+w)/K)-beta*s*w;#PERSAMAAN PREY RENTAN
```

$$ds := 2\,s\left(1 - \frac{s}{3} - \frac{w}{3}\right) - 2\,s\,w$$

```
>   dw:=beta*s*w-c*w-((c1*w*y)/(w+K1));#PERSAMAAN   PREY
TERINFEKSI
```

$$dw := 2\,s\,w - 0.3\,w - \frac{8\,w\,y}{w+0.6}$$

```
> dy:=(a2-(c2*y)/(w+K2))*y;#PERSAMAAN PREDATOR
```

$$dy := \left(1 - \frac{y}{w+0.5}\right) y$$

```
>           titik:=solve({ds=0,dw=0,dy=0},{s,w,y});#TITIK
KESETIMBANGAN SISTEM
```

$titik := \{s = 0., w = 0., y = 0.\}, \{s = 0., w = 0., y = 0.5000000000\},$
$\{s = 3., w = 0., y = 0.\}, \{s = 3., w = 0., y = 0.5000000000\},$
$\{s = 0., w = -0.5036144578, y = -0.003614457831\},$
$\{s = 0.1500000000, w = 0.7125000000, y = 0.\},$
$\{s = 3.364104894, w = -0.09102622351, y = 0.4089737765\},$
$\{s = 6.185895106, w = -0.7964737765, y = -0.2964737765\}$

```
> with(linalg):
> jac:=jacobian([ds,dw,dy],[s,w,y]);#MATRIKS JACOBIAN
```

$$jac := \begin{bmatrix} 2 - \frac{4s}{3} - \frac{8w}{3} & -\frac{8s}{3} & 0 \\ 2w & 2s - 0.3 - \frac{8y}{w + 0.6} + \frac{8wy}{(w + 0.6)^2} & -\frac{8w}{w + 0.6} \\ 0 & \frac{y^2}{(w + 0.5)^2} & -\frac{2y}{w + 0.5} + 1 \end{bmatrix}$$

```
> titik4:=titik[4];
```

$titik4 := \{s = 3., w = 0., y = 0.5000000000\}$

```
> jac4:=subs(titik4,evalm(jac));
```

$$jac4 := \begin{bmatrix} -2.000000000 & -8.000000000 & 0 \\ 0. & -0.966666666 & -0. \\ 0 & 1.000000000 & -1.000000000 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(jac4);
```

-2., -1., -0.9666666660

**LAMPIRAN 6**

Perhitungan analitik untuk kasus 5

Kasus kelima $c_2$

```
> restart;
> r:=2:a2:=1:c:=0.3:c1:=1:c2:=0.1:K:=3:K1:=0.6:K2:=0.5:
beta:=2:
> #s=prey rentan
> #w=prey terinfeksi
> #y=predator
> ds:=r*s*(1-(s+w)/K)-beta*s*w;#PERSAMAAN PREY RENTAN
```

$$ds := 2\,s\left(1-\frac{s}{3}-\frac{w}{3}\right)-2\,s\,w$$

```
> dw:=beta*s*w-c*w-((c1*w*y)/(w+K1));#PERSAMAAN PREY
TERINFEKSI
```

$$dw := 2\,s\,w-0.3\,w-\frac{w\,y}{w+0.6}$$

```
> dy:=(a2-(c2*y)/(w+K2))*y;#PERSAMAAN PREDATOR
```

$$dy := \left(1-\frac{0.1\,y}{w+0.5}\right)y$$

```
> titik:=solve({ds=0,dw=0,dy=0},{s,w,y});#TITIK
KESETIMBANGAN SISTEM
```

$$titik := \{s=0.,w=0.,y=0.\},\{s=0.,w=0.,y=5.\},\{s=3.,w=0.,y=0.\},$$
$$\{s=3.,w=0.,y=5.\},\{s=0.,w=-0.5029126214\,,y=-0.02912621359\,\},$$
$$\{s=0.1500000000\,,w=0.7125000000\,,y=0.\},$$
$$\{s=3.855272914\,,w=-0.2138182284\,,y=2.861817716\,\},$$
$$\{s=6.694727086\,,w=-0.9236817716\,,y=-4.236817716\,\}$$

```
> with(linalg):
> jac:=jacobian([ds,dw,dy],[s,w,y]);#MATRIKS JACOBIAN
```

$$jac := \begin{bmatrix} 2-\frac{4\,s}{3}-\frac{8\,w}{3} & -\frac{8\,s}{3} & 0 \\ 2\,w & 2\,s-0.3-\frac{y}{w+0.6}+\frac{w\,y}{(w+0.6)^2} & -\frac{w}{w+0.6} \\ 0 & \frac{0.1\,y^2}{(w+0.5)^2} & -\frac{0.2\,y}{w+0.5}+1 \end{bmatrix}$$

```
> titik4:=titik[4];
```

$$titik4 := \{s=3.,w=0.,y=5.\}$$

```
> jac4:=subs(titik4,evalm(jac));
```

$$jac4 := \begin{bmatrix} -2.000000000 & -8.000000000 & 0 \\ 0. & -2.633333333 & -0. \\ 0 & 10.00000000 & -1.000000000 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(jac4);
```

-2., -1., -2.633333333

Kasus kelima $c_2 = 0.2$

```
> restart;
> r:=2:a2:=1:c:=0.3:c1:=1:c2:=0.2:K:=3:K1:=0.6:K2:=0.5:
beta:=2:
> #s=prey rentan
> #w=prey terinfeksi
> #y=predator
> ds:=r*s*(1-(s+w)/K)-beta*s*w;#PERSAMAAN PREY RENTAN
```

$$ds := 2\,s\left(1 - \frac{s}{3} - \frac{w}{3}\right) - 2\,s\,w$$

```
> dw:=beta*s*w-c*w-((c1*w*y)/(w+K1));#PERSAMAAN PREY
TERINFEKSI
```

$$dw := 2\,s\,w - 0.3\,w - \frac{w\,y}{w + 0.6}$$

```
> dy:=(a2-(c2*y)/(w+K2))*y;#PERSAMAAN PREDATOR
```

$$dy := \left(1 - \frac{0.2\,y}{w + 0.5}\right)y$$

```
> titik:=solve({ds=0,dw=0,dy=0},{s,w,y});#TITIK
KESETIMBANGAN SISTEM
```

$$\begin{aligned} titik := {} & \{s = 0., w = 0., y = 0.\}, \{s = 0., w = 0., y = 2.500000000\}, \{s = 3., w = 0., y = 0.\}, \\ & \{s = 3., w = 0., y = 2.500000000\}, \\ & \{s = 0., w = -0.5056603774, y = -0.02830188679\}, \\ & \{s = 0.1500000000, w = 0.7125000000, y = 0.\}, \\ & \{s = 2.324816186, w = 0.1687959534, y = 3.343979767\}, \\ & \{s = 5.725183814, w = -0.6812959534, y = -0.9064797670\} \end{aligned}$$

```
> with(linalg):
> jac:=jacobian([ds,dw,dy],[s,w,y]);#MATRIKS JACOBIAN
```

$$jac := \begin{bmatrix} 2 - \frac{4\,s}{3} - \frac{8\,w}{3} & -\frac{8\,s}{3} & 0 \\ 2\,w & 2\,s - 0.3 - \frac{y}{w + 0.6} + \frac{w\,y}{(w + 0.6)^2} & -\frac{w}{w + 0.6} \\ 0 & \frac{0.2\,y^2}{(w + 0.5)^2} & -\frac{0.4\,y}{w + 0.5} + 1 \end{bmatrix}$$

```
> titik7:=titik[7];
```

$titik7 := \{ s = 2.324816186, w = 0.1687959534, y = 3.343979767 \}$

```
> jac7:=subs(titik7,evalm(jac));
```

$$jac7 := \begin{bmatrix} -1.549877457 & -6.199509829 & 0 \\ 0.3375919068 & 0.9550002692 & -0.2195588474 \\ 0 & 4.999999998 & -1.000000000 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(jac7);
```

$-0.1772482766 + 1.354368771\ I, -0.1772482766 - 1.354368771\ I, -1.240380635$

Kasus kelima $c_2 = 0.6$

```
> restart;
> r:=2:a2:=1:c:=0.3:c1:=1:c2:=0.6:K:=3:K1:=0.6:K2:=0.5:
beta:=2:
> #ds=prey rentan
> #dw=prey terinfeksi
> #dy=predator
> ds:=r*s*(1-(s+w)/K)-beta*s*w;#PERSAMAAN PREY RENTAN
```

$$ds := 2\, s \left( 1 - \frac{s}{3} - \frac{w}{3} \right) - 2\, s\, w$$

```
> dw:=beta*s*w-c*w-((c1*w*y)/(w+K1));#PERSAMAAN PREY
TERINFEKSI
```

$$dw := 2\, s\, w - 0.3\, w - \frac{w\, y}{w + 0.6}$$

```
> dy:=(a2-(c2*y)/(w+K2))*y;#PERSAMAAN PREDATOR
```

$$dy := \left( 1 - \frac{0.6\, y}{w + 0.5} \right) y$$

```
> titik:=solve({ds=0,dw=0,dy=0},{s,w,y});#TITIK
KESETIMBANGAN SISTEM
```

$titik := \{ s = 0., w = 0., y = 0. \}, \{ s = 0., w = 0., y = 0.8333333333 \},$
$\{ s = 3., w = 0., y = 0. \}, \{ s = 3., w = 0., y = 0.8333333333 \},$
$\{ s = 0., w = -0.5152542373, y = -0.02542372881 \},$
$\{ s = 0.1500000000, w = 0.7125000000, y = 0. \},$
$\{ s = 0.9091090125, w = 0.5227227469, y = 1.704537911 \},$
$\{ s = 5.474224321, w = -0.6185560802, y = -0.1975934670 \}$

```
> with(linalg):
> jac:=jacobian([ds,dw,dy],[s,w,y]);#MATRIKS JACOBIAN
```

$$jac := \begin{bmatrix} 2-\frac{4\,s}{3}-\frac{8\,w}{3} & -\frac{8\,s}{3} & 0 \\ 2\,w & 2\,s-0.3-\frac{y}{w+0.6}+\frac{w\,y}{(w+0.6)^2} & -\frac{w}{w+0.6} \\ 0 & \frac{0.6\,y^2}{(w+0.5)^2} & -\frac{1.2\,y}{w+0.5}+1 \end{bmatrix}$$

```
> titik7:=titik[7];
```

$titik7 := \{s = 0.9091090125, w = 0.5227227469, y = 1.704537911\}$

```
> jac7:=subs(titik7,evalm(jac));
```

$$jac7 := \begin{bmatrix} -0.606072675 & -2.424290700 & 0 \\ 1.045445494 & 0.7068593730 & -0.4655848902 \\ 0 & 1.666666666 & -0.999999999 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(jac7);
```

$0.01039534771 + 1.673398702\,I, 0.01039534771 - 1.673398702\,I, -0.9200039964$