KAJIAN MORFISME UNTUK VARIASI KURVA *DENSE FIBONACCI WORD*

SKRIPSI

Oleh

Niya Liyani
NIM. 141810101012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2018

KAJIAN MORFISME UNTUK VARIASI KURVA *DENSE FIBONACCI WORD*

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Niya Liyani
NIM. 141810101012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2018

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ayahanda Sukiran dan almarhumah Ibu tercinta yang telah memberikan motivasi, doa, kasih sayang dan pengorbanan selama ini untuk putrinya;
2. adik-adikku tercinta Reni Dwi Listiani dan Dita Jeni Puspita yang telah memberikan keceriaan serta semangat dalam suka dan duka;
3. nenek, bibi dan pakdhe tercinta yang telah mendoakan, memberikan semangat dan kasih sayang;
4. guru-guruku sejak taman kanak-kanak sampai dengan Perguruan Tinggi, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
5. Almamater Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka mengubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri"
(Q.S. Ar- Rad: 13)*)

"Barangsiapa bertawakal kepada Allah niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya"
(QS. At – Thalaq: 65)**)

---

*) dan **) Departemen Agama Republik Indonesia. 2006. *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Surabaya: Duta Ilmu Surabaya.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Niya Liyani

NIM : 141810101012

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul: "Kajian Morfisme untuk Variasi Kurva *Dense Fibonacci Word*" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2018

Yang menyatakan,

Niya Liyani

141810101012

SKRIPSI

KAJIAN MORFISME UNTUK VARIASI KURVA
DENSE FIBONACCI WORD

Oleh

Niya Liyani
NIM. 141810101012

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si

Dosen Pembimbing Anggota : Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Kajian Morfisme untuk Variasi Kurva *Dense Fibonacci Word*" telah diuji dan disahkan pada:

Hari, tanggal :

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji,

Ketua,

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.
NIP. 196908281998021001

Anggota I,

Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.
NIP. 197006061998031003

Anggota II,

Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si.
NIP. 196906061998031001

Anggota III,

Ikhsanul Halikin, S.Pd, M.Si.
NIP. 198610142014041001

Mengesahkan
Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D.
NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

Kajian Morfisme untuk Variasi Kurva *Dense Fibonacci Word*; Niya Liyani; 141810101012; 2018; 37 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Barisan *Fibonacci* pertama kali dikemukakan oleh Leonardo Fibonacci atau lebih dikenal sebagai *Fibonacci*. Barisan ini merupakan sebuah barisan dengan pola teratur yang didefinisikan $F_1 = 1,\ F_2 = 1$ dan $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ untuk $n \geq 3$. Barisan *Fibonacci word* adalah suatu barisan khusus dari bilangan biner yang terdefinisi induktif mengikuti aturan $f_1 = 1,\ f_2 = 0$ dan $f_n = f_{n-1}f_{n-2}\,, n \geq 3$. Fraktal *Fibonacci word* adalah suatu kurva fraktal dengan aturan menggambar berdasarkan pada barisan *Fibonacci word.*

Fraktal *Fibonacci word* dibangun pertama kali oleh Dumaine pada tahun 2009 menggunakan aturan garis ganjil-genap berdasarkan simbol barisan *Fibonacci word*. Berdasarkan barisan *Fibonacci word*, kemudian Jean-Paull Allouche mengemukakan sebuah barisan baru yang disebut *Dense Fibonacci Word.* Barisan tersebut menggunakan tiga digit $\{0, 1, 2\}$ yang didefinisikan berdasarkan barisan *Fibonacci word*. *Dense Fibonacci Word* dapat digunakan untuk membangkitkan kurva dengan aturan menggambar yang lebih sederhana. Pada penelitian ini menggunakan barisan *Dense Fibonacci Word* untuk membangkitkan sebuah kurva dan morfisme yang ditetapkan untuk variasi kurva dengan menggunakan metode *natural drawing rule*. Selain itu, mengetahui bagaimana hubungan kurva *Dense Fibonacci Word* dengan fraktal *Fibonacci word.*

Penelitian tentang Kajian Morfisme untuk Variasi Kurva *Dense Fibonacci Word* ini dibagi menjadi empat tahap yaitu, penafsiran *Dense Fibonacci Word* dan

variasi morfisme berdasarkan barisan *Fibonacci Word*, penafsiran grafis variasi morfisme *Dense Fibonacci Word* dengan *natural drawing rule*, pembuatan program dan analisis hasil. Morfisme $\eta(00) = 0, \eta(01) = 1, \eta(10) = 2$ digunakan untuk mendefinisikan barisan *Dense Fibonacci Word*. Berdasarkan morfisme η maka dilakukan penafsiran barisan *Dense Fibonacci Word*, setelah itu dilakukan penafsiran morfisme μ yaitu variasi barisan yang telah ditetapkan. Morfisme μ yang digunakan adalah morfisme $\mu_1 : 0 \to 0 ; 1 \to 1 ; 2 \to 2$, morfisme $\mu_2 : 0 \to 12 ; 1 \to 10 ; 2 \to 02$, morfisme $\mu_3 : 0 \to \varepsilon ; 1 \to 1 ; 2 \to 2$, morfisme $\mu_4 : 0 \to 21 ; 1 \to 02 ; 2 \to 10$ dan morfisme $\mu_5 : 0 \to 12; 1 \to 1 ; 2 \to 2$. Barisan *Dense Fibonacci Word* dinotasikan dengan (f'_n). Penafsiran variasi barisan dilakukan mulai f'_5 hingga f'_8 kemudian digambarkan secara grafis sebagai pembanding hasil visualisasi pada program. Visualisasi program kurva *Dense Fibonacci Word* tersebut dihasilkan mulai dari f'_5 hingga f'_{23}. Berdasarkan hasil visualisasi kurva setiap morfisme μ memiliki bentuk yang berbeda dan juga menghasilkan gambar kurva yang sejajar atau berotasi terhadap sumbu x. Morfisme μ_1, μ_3 dan μ_4 merupakan kurva yang tidak sejajar terhadap sumbu x sedangan morfisme μ_2 dan μ_5 sejajar terhadap sumbu x. Namun demikian, untuk setiap morfisme μ terdapat kesamaan pola dengan kurva yang belum divariasikan yaitu morfisme μ_1.

Berdasarkan hasil penafsiran barisan dan juga visualisasi kurva, maka pembangkitan kurva *Dense Fibonacci Word* beserta variasi morfisme dapat dilakukan dengan *natural drawing rule* dengan memperhatikan setiap digit barisannya. Karakteristik barisan dan kurva *Dense Fibonacci Word* secara garis besar memiliki kemiripan dengan *Fibonacci word*. Berdasarkan hasil karakteristik yang diperoleh kurva *Dense Fibonacci Word* merupakan *family curve* dari fraktal *Fibonacci word*.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Kajian Morfisme untuk Variasi Kurva *Dense Fibonacci Word*"**. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan dan kerjasama berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si, selaku Dosen Pembimbing Utama sekaligus Dosen Pembimbing Akademik dan Bapak Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si, selaku Dosen Pembimbing Anggota yang dengan penuh kesabaran membimbing, mengarahkan, memberikan saran dan petunjuk dalam penyusunan skripsi ini;
2. Bapak Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si dan Bapak Ikhsanul Halikin, S.Pd, M.Si selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran dalam penyusunan skripsi ini;
3. seluruh staf pengajar Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember yang telah memberikan ilmu serta bimbingannya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
4. ayah tercinta, Bapak Sukiran, yang telah banyak berkorban untuk anak-anaknya dan memberikan doa, tauladan serta dukungan semangat. Almarhumah Ibu tercinta, yang telah membina dan mendidik anak-anaknya dengan penuh kesabaran, kasih sayang dan semoga diampuni segala dosa dan diberi rahmat oleh Allah Swt, amin. Demikian juga kedua adikku tercinta Reni dan Dita yang telah memberikan keceriaan.

5. sahabat Jefri Ardian yang telah memberi semangat dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini;
6. orang-orang terbaik di sekelilingku, Hanifah Husnul Umami, Novi Intan Sari dan Latifah Anggraeni Suyono yang telah memberikan motivasi, canda tawa dan keceriaan;
7. teman-teman angkatan 2014 (EXTREME) yang senantiasa ikut memberikan keceriaan, dukungan, dan semangat dalam penyusunan skripsi ini;
8. serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Jember, Januari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu matematika berkembang luas dan memberikan peranan penting dalam aspek kehidupan. Saat ini, ilmu matematika berkembang sangat pesat seiring perkembangan teknologi komputer. Adanya komputer memudahkan manusia untuk mempelajari berbagai bidang ilmu pengetahuan terutama perhitungan matematika dan perhitungan lainnya. Salah satu bidang matematika yang berkembang cukup pesat dengan adanya komputer adalah geometri fraktal atau lebih dikenal dengan fraktal.

Istilah fraktal pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan kelahiran Polandia bernama Benoid B. Mandelbrot. Fraktal berasal dari bahasa Latin, yaitu kata sifat *fractus* dan kata kerja *frangere* yang berarti menguraikan menjadi kepingan-kepingan yang tak beraturan (Mandelbrot, 1977). Sedangkan geometri fraktal adalah ilmu matematika yang mendefinisikan berbagai pola tak beraturan dan terpecah-pecah serta mempelajari aspek-aspek rumit di alam sebagai suatu basis matematika (Peitgen, 1988). Fraktal memiliki sifat *self-similarity*, yaitu setiap bagian kecil dalam sebuah fraktal dapat dipandang sebagai replikasi skala kecil dari bentuk keseluruhan.

Beberapa contoh objek fraktal antara lain: *Koch Snowflake, Sierpinski Triangle, Sierpinski Carpet, Hilbert Curve, Mandelbrot Set* dan *Julia Set* (Mandelbrot, 1977). Objek-objek fraktal tersebut dapat dikonstruksi dengan beberapa cara. Salah satunya menggunakan aturan garis ganjil-genap yang disebut fraktal *Fibonacci word* (Dumaine, 2009). Penelitian tentang fraktal *Fibonacci word* telah dilakukan sebelumnya oleh Purnomo dkk. (2015) menggunakan metode *L-Systems* yaitu dengan cara mengganti secara bergantian bagian-bagian dari objek sederhana yang berupa segmen garis menggunakan aturan penulisan kembali atau produksi. Pembangkitan fraktal *Fibonacci word* menggunakan aturan garis ganjil-genap mengacu berdasarkan pada barisan *Fibonacci word* (Dumaine, 2009).

Barisan *Fibonacci word* merupakan acuan dasar untuk membangkitkan fraktal menggunakan aturan garis ganjil-genap. Apabila digitnya "0" belok kiri untuk "n" genap dan belok kanan untuk "n" ganjil (Dumaine, 2009). Barisan *Fibonacci word* dapat dimodifikasi menjadi barisan baru dengan aturan menggambar yang lebih sederhana. Modifikasi barisan *Fibonacci word* untuk membangkitkan sebuah kurva dapat dilakukan dengan mengubah barisan menggunakan aturan tiga digit $\{0, 1, 2\}$. Modifikasi barisan tersebut disebut *Dense Fibonacci Word.* Berdasarkan hasil modifikasi dapat diperoleh variasi kurva dengan menerapkan morfisme yaitu aturan untuk mendefinisikan suatu barisan. Kurva *Dense Fibonacci Word* dibangkitkan dengan aturan garis sederhana yang disebut *natural drawing rule.* Aturan konstruksi dengan menghubungkan suatu kurva menggunakan gambar garis, mengikuti gerak dari barisan *Dense Fibonacci Word* (Dumaine, 2009).

Berdasarkan uraian di atas, pada tugas akhir ini penulis tertarik untuk mengkaji lebih lanjut pembangkitan kurva berdasarkan barisan *Dense Fibonacci Word.* Kurva *Dense Fibonacci Word* tersebut dibangkitkan menggunakan *natural drawing rule*. Selain itu penulis akan membangkitkan beberapa morfisme untuk menghasilkan variasi kurva dan memvisualisasikan menggunakan *software Matlab*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan diperoleh permasalahan:

a. bagaimana membangkitkan kurva *Dense Fibonacci Word* beserta variasi morfisme dengan *natural drawing rule?*

b. bagaimana hubungan kurva *Dense Fibonacci Word* dengan fraktal *Fibonacci word*?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

a. mengetahui pembangkitan kurva *Dense Fibonacci Word* beserta variasi morfisme dengan *natural drawing rule;*
b. mengetahui hubungan kurva *Dense Fibonacci Word* dengan fraktal *Fibonacci word.*

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah dapat membangun kurva dari barisan *Dense Fibonacci Word* dengan *natural drawing rule* dan diaplikasikan menggunakan program. Program yang diperoleh dari penelitian ini dapat digunakan untuk menunjukkan variasi kurva jika ditetapkan beberapa morfisme dari barisan *Dense Fibonacci Word*. Selain itu, dapat menunjukkan hubungan kurva *Dense Fibonacci Word* dengan fraktal *Fibonacci word*.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fraktal

Fraktal berasal dari kata *fractus* (pecah), yaitu geometri yang dibangun oleh pengulangan dan perangkaian bentuk primitif geometri tersebut. Pada dasarnya fraktal merupakan geometri sederhana yang digandakan dan digabungkan satu sama lain dalam skala yang beragam. Fraktal memiliki sifat-sifat *self-similarity*, *self-affinity*, *self-inverse*, dan *self-squaring*. Sifat *self-similarity* menunjukkan bahwa fraktal terdiri dari bagian-bagian yang berbentuk serupa satu sama lain. *Self-affinity* menggambarkan bahwa fraktal disusun atas bagian-bagian yang saling terangkai satu sama lain. *Self-inverse* artinya suatu bagian dari bangun fraktal dapat merupakan susunan terbalik dari susunan lainnya, sedangkan *self-squaring* dapat diartikan bahwa suatu bagian dari bangun fraktal merupakan peningkatan kerumitan (secara matematis: pengkuadratan) dari bagian terdahulu (Kusumayudha, 2005).

Karakteristik kunci lain sebuah fraktal adalah sebuah parameter matematika yang disebut dimensi fraktal. Mandelbrot (1977) menggunakan definisi dimensi yang lebih abstrak daripada yang digunakan dalam geometri Euclid, dimana dimensi pada sebuah fraktal dinyatakan dengan bilangan pecahan. Dimensi pada fraktal tidak lagi sama dengan dimensi pada euclid karena bentuk kurva fraktal yang semakin kompleks. Hasilnya adalah sebuah fraktal tidak mungkin diperlakukan seperti benda-benda geometris lain yang berdimensi bilangan bulat. Akan tetapi, diperlakukan secara matematis sebagai bentuk-bentuk geometris yang berdimensi pecahan.

2.2 Barisan *Fibonacci Word*

Suatu barisan $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ adalah suatu bilangan yang terurut sesuai dengan urutan bilangan asli. Barisan takhingga adalah suatu fungsi yang daerah asalnya adalah himpunan bilangan asli. Suatu barisan $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ dapat ditulis dengan $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, atau lebih singkat (a_n) (Purcell, 1987).

Barisan *Fibonacci* pertama kali dikemukakan oleh Leonardo Fibonacci atau lebih dikenal sebagai *Fibonacci*. Barisan ini merupakan sebuah barisan bilangan yang memiliki bentuk unik. Suku pertama dari barisan bilangan ini adalah 1, kemudian suku keduanya juga 1, lalu untuk suku berikutnya ditentukan dengan menjumlahkan kedua suku sebelumnya begitulah seterusnya. Berdasarkan aturan tersebut maka diperoleh barisan bilangan $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$ ... bilangan tersebut memiliki pola yang teratur yang dapat didefinisikan.

$F_1 = 1$ dan $F_2 = 1$ sehingga,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{2.1}$$

dengan syarat $n \geq 3$ untuk (Suzyanna, 2011).

Barisan *Fibonacci word* adalah suatu barisan khusus dari bilangan biner yang terdefinisi induktif mengikuti aturan sebagai berikut.

$f_1 = 1$

$f_2 = 0$

$$f_n = f_{n-1}f_{n-2}, n \geq 3 \tag{2.2}$$

dimana f_n merupakan gabungan dari dua sifat sebelumnya yaitu f_{n-1} dan f_{n-2}. Fungsi f_n dikatakan sebagai barisan berhingga dari *Fibonacci word*. Barisan *Fibonacci word* didefinisikan dengan morfisme σ.

$$\sigma : 0 \to 01, 1 \to 0 \tag{2.3}$$

Berikut adalah barisan *Fibonacci word* berturut-turut.

$f_1 = 1$

$f_2 = 0$

$f_3 = 01$

$f_4 = 010$

$f_5 = 01001$

$f_6 = 01001010$

$f_7 = 0100101001001$

$f_8 = 010010100100101001010$

$f_9 = 0100101001001010010100100101001001$

Barisan *Fibonacci word* mempunyai beberapa karakteristik, diantaranya:

a. Pada barisan *Fibonacci word* tidak ditemukan digit 11 dan 000 secara berturut-turut,

b. Misalkan ab merupakan dua digit terakhir dari f_n, maka untuk $n \geq 3, ab = 01$ untuk n ganjil dan $ab = 10$ untuk n genap. Hal tersebut dapat ditunjukkan dengan $f_3 = 01$ dan $f_4 = 010$ dengan rumus $f_n = f_{n-1}f_{n-2}$,

c. Jika $f_n = p_n ab$, dimana ab merupakan dua digit terakhir dari f_n, maka p_n adalah *palindrome* yang artinya suatu susunan yang dapat dibaca dengan sama baik dari depan maupun belakang. Ketentuan tersebut dilakukan dengan menghapus dua digit terakhir dari f_n akan membuat sebuah *palindrome* untuk semua $n \geq 3$,

d. Jika $f_n = p_n ab$, maka $bap_n ab$ juga *palindrome* atau dinotasikan dengan p'_n. Ini berarti bahwa dengan menambahkan dua digit terakhir (terbalik) pada barisan sebelum f_n dapat disebut juga *palindrome* yang dituliskan dengan $p'_n = baf_n = bap_n ab$ untuk $n \geq 3$,

e. Untuk $n \geq 6$, $f_n = f_{n-3}f_{n-3}f_{n-6}t_{n-3}t_{n-3}$, dimana $t_n = f_{n-2}f_{n-1}$

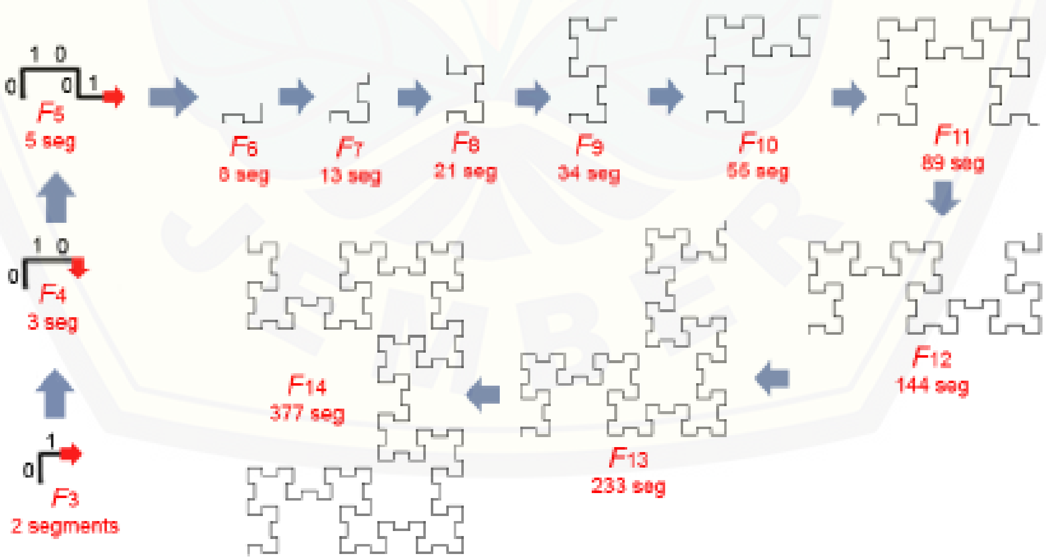
(Dumaine, 2009).

2.3 Fraktal *Fibonacci Word*

Fraktal *Fibonacci word* adalah suatu kurva fraktal yang memiliki sifat *self-similarity* melalui aturan gambar berdasarkan pada barisan *Fibonacci word*. Barisan *Fibonacci word* dapat dihubungkan menjadi suatu kurva menggunakan gambar garis, mengikuti gerak dari simbol barisan *Fibonacci word*. Kurva ini kemudian dikenal dengan istilah fraktal *Fibonacci word.* Aturan konstruksi fraktal *Fibonacci word* dari simbol barisan *Fibonacci word* dapat dilakukan dengan cara mengambil barisan *Fibonacci word* ke-n, selanjutnya gambar suatu segmen garis. Apabila digitnya “0” belok kiri untuk "n" genap dan belok kanan untuk "n" ganjil, kemudian lanjutkan iterasi. Aturan konstruksi ini disebut aturan garis ganjil-genap. Garis pertama pada aturan garis ganjil-genap, dapat digambar dengan cara berikut:

a. digit pertama adalah 0, maka gambar garis vertikal dan belok kanan,
b. digit kedua adalah 1, maka gambar garis horizontal,
c. digit ketiga adalah 0, maka lanjutkan menggambar garis horizontal dan belok kanan,
d. digit keempat adalah 0, maka gambar garis vertikal dan belok kiri. Lanjutkan secara induktif (Dumaine, 2009).

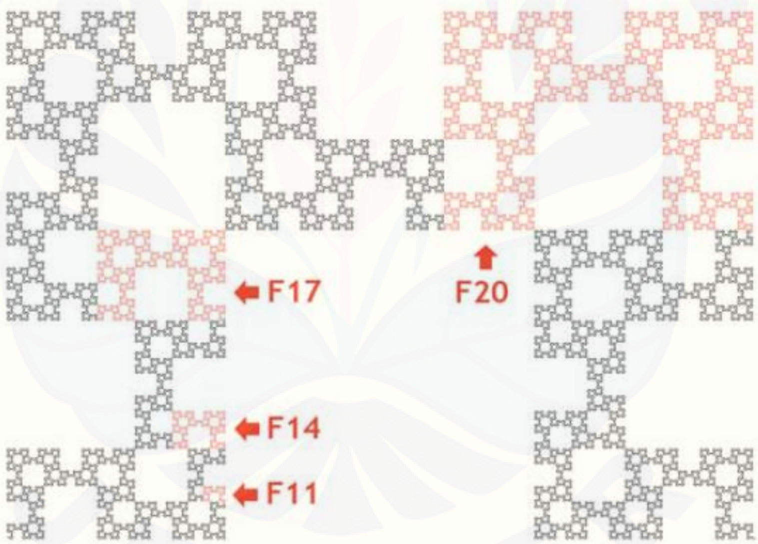
Konstruksi fraktal *Fibonacci word* menggunakan aturan garis ganjil-genap dapat dilihat pada Gambar 2.1. Pada Gambar 2.1 menunjukkan pembangkitan kurva fraktal, ketika aturan garis ganjil-genap diterapkan pada f_3 hingga f_{14}. Kurva fraktal dan barisan *Fibonacci word* masing-masing dinotasikan dengan $\mathcal{F}_n$ dan f_n. Berdasarkan Gambar 2.1, terdapat kemiripan (*self-similarity*) antara kurva $\mathcal{F}_{11}$ dan $\mathcal{F}_8$. Hal ini menunjukkan sifat dari fraktal *Fibonacci word* dimana kurva $\mathcal{F}_n$ memiliki kemiripan dengan $\mathcal{F}_{n-3}$.



Gambar 2.1 Konstruksi Fraktal *Fibonacci word* (Dumaine, 2009).

Fraktal *Fibonacci word* memilki beberapa karakteristik yang dapat ditunjukkan berdasarkan hasil kurva. Berikut ini adalah beberapa karakteristik tersebut diantaranya:

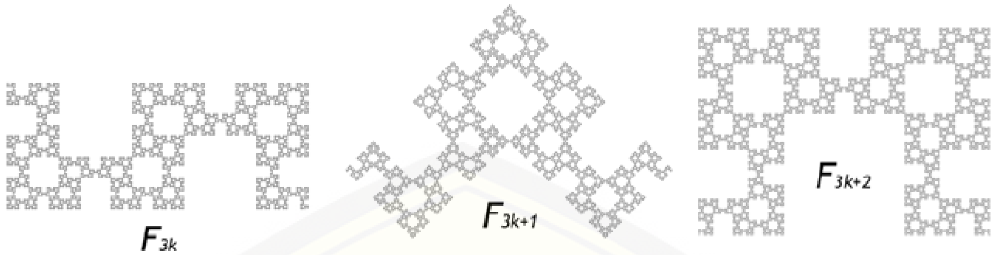
1. Kurva $\mathcal{F}_n$ tersusun dari satu atau dua segmen garis, karena tidak mungkin ada digit 1 sebanyak dua kali berturut-turut (11),
2. Jumlah segmen garis pada $\mathcal{F}_n$ sama dengan suku barisan *Fibonacci* ke-n (F_n),
3. Jumlah belokan pada kurva $\mathcal{F}_n$ adalah suku barisan *Fibonacci* F_{n-1} dan jumlah susunan yang terdiri atas dua segmen garis adalah F_{n-2},
4. Kurva $\mathcal{F}_n$ memiliki kemiripan dengan $\mathcal{F}_{n-3}$
   a. Gambar di bawah ini menunjukkan bahwa kurva $\mathcal{F}_{23}$ mempunyai kemiripan dengan kurva $\mathcal{F}_{20}, \mathcal{F}_{17}, \mathcal{F}_{14}$ dan $\mathcal{F}_{11}$.



Gambar 2.2 *Self-similarity* pada Kurva Fraktal $\mathcal{F}_{23}$ (Dumaine, 2009).

   b. Kemiripan juga dapat diperlihatkan pada kurva $\mathcal{F}_{22}$ dengan kurva $\mathcal{F}_{19}, \mathcal{F}_{16}, \mathcal{F}_{13}, \ldots$ dan kurva $\mathcal{F}_{21}$ dengan kurva $\mathcal{F}_{18}, \mathcal{F}_{15}, \mathcal{F}_{12}, \ldots$

Berdasarkan kemiripan, maka kurva fraktal *Fibonacci word* dikelompokkan menjadi tiga tipe yaitu $\mathcal{F}_{3k}, \mathcal{F}_{3k+1}$ dan $\mathcal{F}_{3k+2}$ dengan $k \geq 2$ yang dapat ditunjukkan pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Tiga Tipe Fraktal *Fibonacci word* (Dumaine, 2009).

2.4 *Dense Fibonacci Word*

Dense Fibonacci Word merupakan sebuah barisan yang dikemukakan oleh Jean-Paull Allouche. Barisan ini ialah sebuah barisan yang didefinisikan menggunakan tiga digit $\{0, 1, 2\}$. Barisan *Dense Fibonacci Word* yang menggunakan tiga digit tersebut berasal dari barisan *Fibonacci word*. Barisan *Fibonacci Word* sendiri mempunyai karakteristik bahwa tidak ditemukan digit 1 sebanyak dua kali berturut-turut (11), sehingga barisan *Dense Fibonacci Word* dapat didefinisikan dengan morfisme η sebagai berikut.

$$\eta(00) = 0,\ \eta(01) = 1,\ \eta(10) = 2, \qquad (2.4)$$

Penerapan morfisme di atas berasal dari konversi bilangan biner ke desimal $\{0, 1, 2\}$ untuk setiap pasangan huruf dari barisan *Fibonacci word*. Barisan *Dense Fibonacci Word* dapat didefinisikan dari iterasi morfisme ρ:

$$\rho(0) = 10221, \rho(1) = 1022, \rho(2) = 1021, \qquad (2.5)$$

dimana morfisme ρ merupakan morfisme dengan awalan barisan digit "1". Berdasarkan morfisme ρ, maka barisan *Dense Fibonacci Word* berturut-turut sebagai berikut:

$$102210221102110211022102211021102110221022102211021 \ldots \qquad (2.6)$$

Dense Fibonacci Word sangat berkaitan dengan fraktal *Fibonacci word* karena dapat menghasilkan keluarga kurva yang dibatasi oleh fraktal *Fibonacci word* (Ramirez, 2014).

Menurut Dumaine (2009) ada beberapa morfisme yang dapat digunakan untuk menghasilkan variasi kurva *Dense Fibonacci Word.* Morfisme tersebut adalah.

1. Morfisme $\mu_1 : 0 \rightarrow 0\,; 1 \rightarrow 1\,; 2 \rightarrow 2$, kurva dengan aturan morfisme standar *Dense Fibonacci Word*;
2. Morfisme $\mu_2 : 0 \rightarrow 12\,; 1 \rightarrow 10\,; 2 \rightarrow 02$,
3. Morfisme $\mu_3 : 0 \rightarrow \varepsilon\,; 1 \rightarrow 1\,; 2 \rightarrow 2$, dengan ε merupakan digit kosong,
4. Morfisme $\mu_4 : 0 \rightarrow 21\,; 1 \rightarrow 02\,; 2 \rightarrow 10$,
5. Morfisme $\mu_5 : 0 \rightarrow 12\,; 1 \rightarrow 1\,; 2 \rightarrow 2$.

2.5 *Natural Drawing Rule*

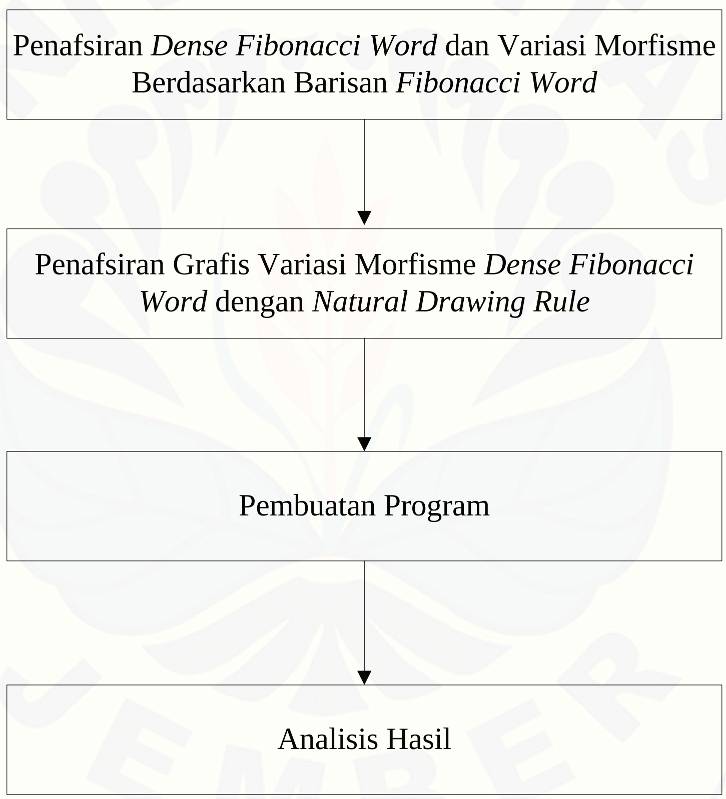
Natural drawing rule merupakan aturan menggambar yang lebih sederhana untuk membangkitkan variasi kurva *Dense Fibonacci Word.* Seperti yang dikemukakan oleh Jean-Paul Allouche, untuk aturan menggambar yang lebih sederhana dengan menggunakan tiga digit $\{0, 1, 2\}$. Aturan konstruksi dengan menghubungkan suatu kurva menggunakan gambar garis, mengikuti gerak dari simbol barisan *Dense Fibonacci Word*. Aturan konstruksi dari simbol barisan *Dense Fibonacci Word* dapat dilakukan dengan cara mengambil barisan *Dense Fibonacci Word* ke-n, selanjutnya gambar suatu segmen garis dengan menggunakan tiga digit $\{0, 1, 2\}$ dengan aturan menggambar yang lebih sederhana sebagaimana dijelaskan berikut ini:

a. Jika "0" maka menggambar suatu segmen garis,
b. Jika "1" maka menggambar segmen garis dan berbelok ke kanan,
c. Jika "2" maka menggambar segmen garis dan berbelok ke kiri.

Aturan menggambar di atas disebut dengan *natural drawing rule* (Dumaine, 2009).

BAB 3. METODE PENELITIAN

Pada bab ini membahas tentang prosedur yang akan digunakan untuk menyelesaikan penelitian ini. Secara skematik, langkah-langkah yang akan dilakukan dapat digambarkan dengan diagram alir pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Skema Metode Penelitian

Berdasarkan skema pada Gambar 3.1, langkah-langkah penelitian dapat dijelaskan sebagai berikut:

3.1 Penafsiran *Dense Fibonacci Word* dan Variasi Morfisme Berdasarkan Barisan *Fibonacci Word*

Langkah awal untuk memperoleh barisan *Dense Fibonacci Word* adalah penafsiran barisan berdasarkan barisan *Fibonacci word*. Penafsiran dilakukan dengan menerapkan morfisme η pada Persamaan (2.4). Berdasarkan penafsiran tersebut maka ditetapkan beberapa morfisme untuk menghasilkan variasi kurva *Dense Fibonacci Word*. Morfisme dalam hal ini merupakan aturan baru dari barisan *Dense Fibonacci Word* yang dinotasikan dengan morfisme μ. Seperti yang telah dikemukakan oleh Dumaine (2009) pada Bab 2 mengenai beberapa morfisme *Dense Fibonacci Word* untuk menghasilkan variasi kurva, maka beberapa morfisme yang akan digunakan adalah sebagai berikut:

1. Morfisme $\mu_1 : 0 \to 0\,; 1 \to 1\,; 2 \to 2$, morfisme standar *Dense Fibonacci Word*;
2. Morfisme $\mu_2 : 0 \to 12\,; 1 \to 10\,; 2 \to 02$;
3. Morfisme $\mu_3 : 0 \to \varepsilon\,; 1 \to 1\,; 2 \to 2$, dengan ε merupakan digit kosong;
4. Morfisme $\mu_4 : 0 \to 21\,; 1 \to 02\,; 2 \to 10$;
5. Morfisme $\mu_5 : 0 \to 12;\ 1 \to 1\,; 2 \to 2$.

3.2 Penafsiran Grafis Variasi Morfisme *Dense Fibonacci Word* dengan *Natural Drawing Rule*

Pada tahap ini variasi barisan *Dense Fibonacci Word* yang dihasilkan oleh beberapa morfisme μ akan digambarkan secara grafis berdasarkan aturan konstruksi yang disebut *natural drawing rule*. Aturan tersebut menggunakan tiga digit $\{0, 1, 2\}$ dengan aturan menggambar yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya. Berdasarkan aturan konstruksi tersebut, maka hasil pembangkitan kurva *Dense Fibonacci Word* akan dinotasikan dengan $\mathcal{F}_n'$. Beberapa morfisme μ akan digambarkan hingga $\mathcal{F}_n'$ menunjukkan bentuk kurva pertama yang memiliki kemiripan dengan $\mathcal{F}_n'$ lainnya sebagai pembanding dengan hasil visualisasi pada program.

3.3 Pembuatan Program

Langkah selanjutnya yaitu pembuatan program visualisasi kurva *Dense Fibonacci Word* berdasarkan hasil konstruksi dengan *natural drawing rule*. Algoritma program penerapan *natural drawing rule* dalam membangkitkan kurva *Dense Fibonacci Word* diuraikan sebagai berikut:

a. Menentukan aksioma dan aturan produksi pada Persamaan (2.3) untuk menafsirkan barisan *Fibonacci word;*
b. Menentukan aksioma dan aturan produksi pada Persamaan (2.4) untuk menafsirkan barisan *Dense Fibonacci Word;*
c. Menentukan aksioma dan aturan produksi untuk variasi kurva berdasarkan hasil dari point b;
d. Mendefiniskan simbol $\{0, 1, 2\}$ untuk menggambar sesuai dengan *natural drawing rule*;
e. Posisi titik awal adalah $(X_0, Y_0) = (0,0)$ dan menghadap utara;
f. Visualisasi input hingga iterasi ke-n.

3.4 Analisis Hasil

Hasil yang diperoleh dari pembuatan program adalah visualisasi kurva *Dense Fibonacci Word* dalam dimensi dua. Program tersebut digunakan untuk memvariasikan kurva berdasarkan morfisme yang telah ditetapkan, sehingga dapat diketahui perbedaan bentuk kurva *Dense Fibonacci Word* dari beberapa morfisme tersebut. Kurva yang dihasilkan akan dianalisis karakteristik dan bagaimana hubungan antar kurva barisan *Dense Fibonacci Word* dengan barisan *Fibonacci word* dari satu iterasi ke iterasi lain.

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

a. Pembangkitan kurva *Dense Fibonacci Word* beserta variasi morfisme dapat dilakukan dengan *natural drawing rule* dengan memperhatikan setiap digit barisannya.
b. Variasi morfisme μ dapat mempengaruhi bentuk kurva secara detail tetapi tidak mempengaruhi pola kurva yang dihasilkan secara global.
c. Hasil modifikasi barisan *Fibonacci word* menjadi barisan *Dense Fibonacci Word* dapat membangun kurva yang disebut fraktal karena memenuhi karakteristik fraktal.
d. *Dense Fibonacci Word* merupakan *family curve* dari fraktal *Fibonacci word* karena karakteristiknya memiliki kemiripan.

5.2 Saran

Penelitian selanjutnya untuk pembangkitan kurva *Dense Fibonacci Word* masih dapat dikembangkan menggunakan metode lain misalnya pembangkitan dengan *L-System* atau dapat mengembangkan morfisme untuk memperoleh variasi baru.

DAFTAR PUSTAKA

Dumaine, A. M. 2009. *The Fibonacci Word Fractal*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00367972/filename/The_Fibonacci_Word_Fractal.pdf.[03 Maret 2017].

Kusumayudha, S. B. 2005. *Hidrogeologi Karst dan Geometri Fraktal*. Yogyakarta: Mitra Gama Widya.

Mandelbrot, B. B. 1977. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman and Company.

Peitgen, H.O. dan Soupe, D. 1988. *The Science of Fractal Images*. New York: Springer-Verlag.

Purcell, E. J. dan Varberg, D. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2*. Edisi V. Diterjemahkan oleh Susila, I. N., Kartasasmita, B., dan Rawuh. Jakarta: Erlangga.

Purnomo, K. D., Alyagustin, R. D., dan Kusbudiono. 2015. Variasi Fraktal Fibonacci word. Universitas Negeri Yogyakarta: *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*. ISBN 978-602-73403-0-5.

Ramirez, J. S. dan Gustavo, N. R. 2014. *Properties and Generalizations of the Fibonacci Word Fractal*. Colombia: Wolfram Media

Suzyanna. 2011. *Hubungan antara Formula Biner dan Bilangan Fibonacci*. Surabaya: Media Kita.

LAMPIRAN

4.1 Script Program

1. Script untuk membangkitkan *Fibonacci word*

```
function axiom=gendfw(n,pro,aksiom,Iter)
for i=1:n
    nj=length(pro{i});
    produksi1(i)={pro{i}(1)};
    produksi2(i)={pro{i}(4:nj)};
end
for i=1:Iter
    if i==1
        axiom=aksiom;
    else
        for z=1:length(aksiom)
            a=aksiom(z);
            for j=1:n
                if char(produksi1(j))==a
                    axioma=char(produksi2(j));
                    break
                end
            end
            if z==1
                axiom=axioma;
            else
                axiom=[axiom axioma];
            end
        end
    end
    aksiom=axiom;
end
```

2. Script untuk membangkitkan *Dense Fibonacci Word*

```
function axioma=gendfw2(axiom)
t=1;
for z=1:length(axiom)/2
    a=axiom(t:t+1);
    axioma(z)=num2str(bin2dec(a));
    t=t+2;
end
```

3. Script untuk menggambar *Dense Fibonacci Word*

```
function [x y axiom]=dfw(n,pro,aksiom,delta,x,y)
for i=1:n
    nj=length(pro{i});
    produksi1(i)={pro{i}(1)};
    produksi2(i)={pro{i}(4:nj)};
end
for z=1:length(aksiom)
        a=aksiom(z);
        tnda=0;
        for j=1:n
            if char(produksi1(j))==a
               axioma=char(produksi2(j));
               tnda=1;
               break
            end
        end
        if z==1
            axiom=axioma;
        elseif z~=1 && tnda==1
            axiom=[axiom axioma];
        end
end
aT=pi/2;
ind=0;
delta=pi/(180/delta);
for i=1:length(axiom)
    cmdt=axiom(i);
    if cmdt~='e'
        ind=ind+1;
        x(ind+1)=x(ind)+cos(aT);
        y(ind+1)=y(ind)+sin(aT);
    end
    if cmdt=='1'
            aT=aT-delta;
    elseif cmdt=='2'
            aT=aT+delta;
    end
end
```

4.2 Hasil Penafsiran Barisan

Berikut ini adalah penafsiran barisan *Dense Fibonacci Word*

f'_5: 10

f'_6: 1022

f'_7: 102210

f'_8: 1022102211

f'_9: 10221022110211021

f'_{10}: 10221022110211021102210221 1

f'_{11}: 10221022110211021102210221102110211022102210

f'_{12}: 102210221102110211022102211021102110221022102211021102210221022110211022

f'_{13}: 1022102211021102110221022110211021102210221022110211022102210221102110221
0221022110211021102210221102110211022102210

f'_{14}: 1022102211021102110221022110211021102210221022110211022102210221102110221
0221022110211021102210221102110211022102210221102110221022102211021102210221
022110211021102210221102110211022102211

f'_{15}: 1022102211021102110221022110211021102210221022110211022102210221102110221
0221022110211021102210221102110211022102210221102110221022102211021102210221
0221102110211022102211021102110221022110211021102210221022110211022102210221
1021102110221022110211021102210221102110211022102210221102110221022102211021
1021

f'_{16}: 1022102211021102110221022110211021102210221022110211022102210221102110221
0221022110211021102210221102110211022102210221102110221022102211021102210221
0221102110211022102211021102110221022110211021102210221022110211022102210221
1021102110221022110211021102210221102110211022102210221102110221022102211021
1021102210221102110211022102211021102110221022102211021102210221022110211022
1022102211021102110221022110211021102210221022110211022102210221102110221022
1022110211021102210221102110211022102211

f'_{17}: 10221022110211021102210221102110211022102210221102110221022102211021102210
2210221102110211022102211021102110221022102211021102210221022110211022102210
2211021102110221022110211021102210221102110211022102210221102110221022102211
0211021102210221102110211022102211021102110221022102211021102210221022110211
0211022102211021102110221022110211021102210221022110211022102210221102110221
0221022110211021102210221102110211022102210221102110221022102211021102210221
0221102110211022102211021102110221022110211021102210221022110211022102210221
1021102110221022110211021102210221102110211022102210221102110221022102211021
1021102210221102110211022102211021102110221022102211021102210221022110211022

1022102211021102110221022110211021102210221022110211022102210221102110221022
10221102110211022102211021102110221022 10

f'_{18}:10221022110211021102210221102110211022102210221102110221022102211021102210
2210221102110211022102211021102110221022102211021102210221022110211022102210
2211021102110221022110211021102210221102110211022102210221102110221022102211
0211021102210221102110211022102211021102110221022102211021102210221022110211
0211022102211021102110221022110211021102210221022110211022102210221102110221
0221022110211021102210221102110211022102210221102110221022102211021102210221
0221102110211022102211021102110221022110211021102210221022110211022102210221
1021102110221022110211021102210221102110211022102210221102110221022102211021
1021102210221102110211022102211021102110221022102211021102210221022110211022
1022102211021102110221022110211021102210221022110211022102210221102110221022
1022110211021102210221102110211022102210221102110221022102211021102210221022
1102110211022102211021102110221022110211021102210221022110211022102210221102
1102110221022110211021102210221102110211022102210221102110221022102211021102
2102210221102110211022102211021102110221022102211021102210221022110211022102
2102211021102110221022110211021102210221022110211022102210221102110221022102
2110211021102210221102110211022102211021102110221022102211021102210221022110
2110211022102211021102110221022110211021102210221022110211022102210221102110
22

dan seterusnya hingga f'_{23}