



**PEWARNAAN LOKAL TITIK *ANTIMAGIC*  
PADA GRAF BUKU SEGITIGA DAN GUNUNG API  
SERTA GRAF HASIL OPERASI JOIN**

**SKRIPSI**

Oleh

**Haris Setiya Budi  
NIM 141810101027**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2018**



**PEWARNAAN LOKAL TITIK *ANTIMAGIC*  
PADA GRAF BUKU SEGITIGA DAN GUNUNG API  
SERTA GRAF HASIL OPERASI JOIN**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika (S1)  
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Haris Setiya Budi  
NIM 141810101027**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2018**

## PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Kedua Kakekku S. Hadi Soemarto dan Marjuki, serta Kedua Nenekku Joemani dan Marijem;
2. Ayahanda Hasim dan Ibunda Rini Asmorowati tercinta, serta Adikku Della Novi Setiya Budi yang telah memberikan cinta kasih sayang dan motivasinya;
3. Segenap Keluarga Besarku yang tak henti mendukung dan mendoakanku;
4. Guru-guru TK Islam Darul Muttaqi'en, SD Islam Darul Muttaqi'en, SMPN 1 Muncar, SMAN 1 Giri dan segenap guru-guru yang telah membimbingku dari awal hingga sekarang;
5. Kakak tingkat, teman, serta adek tingkat dari Keramat'11, Bathics'12, Atlas'13, Extreme'14, Sigma'15, Misdirection'16 dan Konifertika'17;
6. Sahabat "Kuda Perjaka" yang selalu jadi penghibur;
7. HIMATIKA "Geokompstat";
8. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

**MOTO**

*“Lebih baik mengerjakan sesuatu tanpa berpikir daripada berpikir tanpa mengerjakan.  
Tapi yang terbaik tetaplah mengerjakan sambil berpikir.”*

*“Untuk menjadi yang terbaik tidaklah harus menjadi yang sempurna.  
Rukup menjadi diri sendiri dan lakukan yang terbaik.”*



**PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

nama : Haris setiya Budi

NIM : 141810101027

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul "Pewarnaan Lokal Titik *Antimagic* pada Graf Buku Segitiga dan Gunung Api serta Graf Hasil Operasi Join" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2018

Yang menyatakan,

Haris Setiya Budi

NIM 141810101027

**SKRIPSI**

**PEWARNAAN LOKAL TITIK *ANTIMAGIC*  
PADA GRAF BUKU SEGITIGA DAN GUNUNG API  
SERTA GRAF HASIL OPERASI JOIN**

Oleh

Haris Setiya Budi  
NIM 141810101027

Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utama : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D

Dosen Pembimbing Anggota : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

**PENGESAHAN**

Skripsi berjudul "Pewarnaan Lokal Titik *Antimagic* pada Graf Buku Segitiga dan Gunung Api serta Graf Hasil Operasi Join" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas  
Jember.

Tim Penguji:

Ketua,

Anggota I,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

NIP. 196808021993031004

NIP. 198408012008012006

Anggota II,

Anggota III,

Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.

Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si.

NIP. 197408132000032004

NIP. 198610142014041001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 196102041987111001

## RINGKASAN

**Pewarnaan Lokal Titik *Antimagic* pada Graf Buku Segitiga dan Gunung Api serta Graf Hasil Operasi Join**; Haris Setiya Budi, 141810101027; 2018; 44 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Teori graf merupakan salah satu bagian dari ilmu matematika yang biasa digunakan untuk menyelesaikan persoalan dalam kehidupan sehari-hari sehingga lebih mudah. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan sisi atau garis. Terdapat banyak pokok bahasan dalam teori graf, salah satunya adalah pewarnaan. Pewarnaan diartikan sebagai pemberian warna berbeda pada setiap elemen graf sehingga tidak ada dua elemen yang bertetangga dengan warna yang sama. Pewarnaan dibagi menjadi tiga, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan wilayah.

Pewarnaan titik pada graf adalah memberikan warna berbeda pada setiap titik yang bertetangga sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga dengan warna yang sama. Terdapat topik pewarnaan titik yang masih perlu perkembangan yaitu Pewarnaan Lokal Titik *Antimagic*. Misalkan graf  $G = (V, E)$  adalah suatu graf terhubung tak berarah yang tidak memiliki *loop* dan sisi ganda dengan  $|V| = n$  dan  $|E| = m$ . Suatu fungsi bijektif  $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$  disebut dengan pelabelan lokal *antimagic* jika untuk semua  $uv \in E$  dihasilkan  $w(u) \neq w(v)$  dimana  $w(u) = \sum_{e \in E(u)} f(e)$ . Banyaknya warna minimum yang diambil dari semua warna graf  $G$  yang dihasilkan oleh pelabelan lokal *antimagic* disebut bilangan kromatik  $\chi_{la}(G)$ . Untuk sebarang graf  $G$ ,  $\chi_{la}(G) \geq \chi(G)$ , dimana  $\chi(G)$  adalah bilangan kromatik dari pewarnaan biasa pada graf  $G$ .

Penelitian ini membahas lebih lanjut tentang pewarnaan lokal titik *antimagic* pada beberapa graf sederhana dan graf hasil operasi join. Graf-graf sederhana yang digunakan antara lain graf buku segitiga ( $BT_n$ ), graf gunung api ( $V_n$ ). Sedangkan



graf hasil operasi yang digunakan adalah graf join  $K_1 + BT_n$ , graf join  $K_1 + V_n$ , graf join  $K_1 + W_n$  untuk  $n \geq 3$ , graf join  $K_2 + BT_n$ , graf join  $K_3 + BT_n$ , graf join  $K_3 + V_n$  dan graf join  $W_3 + BT_n$ .

Dari hasil penelitian didapatkan bilangan kromatik pewarnaan lokal titik *antimagic* pada graf buku segitiga ( $BT_n$ ) yaitu  $\chi_{la}(BT_n) = 3$ ; graf gunung api ( $V_n$ ) yaitu  $\chi_{la}(V_n) = n + 1$  untuk  $n \geq 2$ ; graf join  $K_1 + BT_n$  yaitu  $\chi_{la}(K_1 + BT_n) = 4$ ; graf join  $K_1 + V_n$  yaitu  $\chi_{la}(K_1 + V_n) = 4$ ; graf join  $K_1 + W_n$  untuk  $n \geq 3$  yaitu  $\chi_{la}(K_1 + W_n) = 5$  untuk  $n$  ganjil dan  $\chi_{la}(K_1 + W_n) = 4$  untuk  $n$  genap; graf join  $K_2 + BT_n$  yaitu  $\chi_{la}(K_2 + BT_n) = 5$ , graf join  $W_3 + BT_n$  yaitu  $\chi_{la}(W_3 + BT_n) = 7$  dan graf join  $K_3 + V_n$  yaitu  $\chi_{la}(C_3 + V_n) = 6$ . Bilangan kromatik pewarnaan lokal titik *antimagic* pada graf buku segitiga sama dengan batas bawahnya yaitu  $\chi_{la}(BT_n) = \chi(BT_n)$ , sedangkan pada graf gunung api lebih besar atau sama dengan batas bawahnya yaitu  $\chi_{la}(V_n) \geq \chi(V_n)$ , karena graf gunung api memiliki  $n$  titik berderajat 1. Dari semua graf join yang digunakan, bilangan kromatik pewarnaan lokal titik *antimagic*-nya sama dengan batas bawahnya yaitu  $\chi_{la}(G_1 + G_2) = \chi(G_1 + G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$ .

## PRAKATA

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala kasih sayang-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul "Pewarnaan Lokal Titik *Antimagic* pada Graf Buku Segitiga dan Gunung Api serta Graf Hasil Operasi Join". Penulisan tugas akhir ini dilakukan guna memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Pada kesempatan ini, dengan segala hormat penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D selaku dosen pembimbing utama dan Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing anggota;
2. Ibu Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. dan Bapak Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun;
3. Dosen dan Karyawan jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
4. sahabat Extreme'14, khususnya "Kuda Perjaka" yang selalu setia memberikan dukungan;
5. serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian tugas ini.

Penulis menyadari bahwa penelitian ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis mengharap kritik dan saran demi kesempurnaan penelitian selanjutnya. Semoga tugas ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Jember, Januari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	ii
<b>HALAMAN MOTO</b> .....	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	iv
<b>HALAMAN PEMBIMBINGAN</b> .....	v
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	vi
<b>RINGKASAN</b> .....	vii
<b>PRAKATA</b> .....	ix
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>BAB 1. PENDAHULUAN</b> .....	1
<b>1.1 Latar Belakang</b> .....	1
<b>1.2 Rumusan Masalah</b> .....	2
<b>1.3 Tujuan Penelitian</b> .....	2
<b>1.4 Manfaat Penelitian</b> .....	2
<b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	3
<b>2.1 Definisi dan Terminologi Graf</b> .....	3
<b>2.2 Graf Sederhana</b> .....	3
<b>2.3 Graf Hasil Operasi</b> .....	6
<b>2.4 Pelabelan Graf</b> .....	6
<b>2.5 Pewarnaan Graf</b> .....	7
2.5.1 Macam-macam Pewarnaan Graf .....	7
2.5.2 Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> .....	8
2.5.3 Hasil-hasil Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> .....	9
<b>BAB 3. METODE PENELITIAN</b> .....	10
<b>3.1 Metode Penelitian</b> .....	10

3.2	Jenis Penelitian .....	10
3.3	Data Penelitian .....	10
3.4	Rancangan Penelitian .....	10
<b>BAB 4.</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN .....</b>	<b>13</b>
4.1	Hasil Penelitian .....	13
4.1.1	Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf Buku Segitiga .....	13
4.1.2	Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf Gunung Api	15
4.1.3	Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf $K_1 + BT_n$ .	17
4.1.4	Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf $K_1 + V_n$ ...	22
4.1.5	Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf $K_1 + W_n, n \geq 3$ .....	25
4.1.6	Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf $K_2 + BT_n$ .	30
4.1.7	Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf $W_3 + BT_n$ .	33
4.1.8	Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf $C_3 + V_n$ ....	37
4.2	Pembahasan .....	40
<b>BAB 5.</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN .....</b>	<b>42</b>
5.1	Kesimpulan .....	42
5.2	Saran .....	42
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>.....</b>	<b>43</b>

**DAFTAR TABEL**

	Halaman
2.1 Hasil Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> Penelitian Terdahulu .....	9



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Graf $G$ .....	3
2.2 Graf Lingkaran (a) $C_3$ , (b) $C_4$ , (c) $C_n$ .....	4
2.3 Graf Buku Segitiga (a) $BT_2$ , (b) $BT_3$ , (c) $BT_n$ .....	4
2.4 Graf Gunung Api (a) $V_2$ , (b) $V_3$ , (c) $V_n$ .....	5
2.5 Graf Roda (a) $W_3$ , (b) $W_4$ , (c) $W_n$ .....	5
2.6 Graf Lengkap (a) $K_1$ , (b) $K_2$ , (c) $K_3$ , (d) $K_4$ , (e) $K_n$ .....	6
2.7 Operasi Join .....	6
2.8 Contoh Pelabelan (a) Titik, (b) Sisi dan (c) Total .....	7
2.9 Contoh Pewarnaan (a) Titik, (b) Sisi dan (c) Wilayah .....	8
3.1 Rancangan Penelitian .....	12
4.1 Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> Graf Buku Segitiga .....	15
4.2 Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf Gunung Api .....	17
4.3 Graf Join $K_1 + BT_2$ , $K_1 + BT_3$ dan $K_1 + BT_n$ .....	18
4.4 Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf $K_1 + BT_n$ untuk $n$ Ganjil ..	20
4.5 Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf $K_1 + BT_n$ untuk $n$ Genap ..	22
4.6 Graf Join $K_1 + V_2$ , $K_1 + V_3$ dan $K_1 + V_n$ .....	23
4.7 Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf $K_1 + V_n$ .....	25
4.8 Graf Join $K_1 + W_3$ , $K_1 + W_4$ dan $K_1 + W_n$ .....	25
4.9 Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf $K_1 + W_n$ untuk $n$ Ganjil ...	28
4.10 Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf $K_1 + W_n$ untuk $n$ Genap ...	30
4.11 Graf Join $K_2 + BT_2$ , $K_2 + BT_3$ dan $K_2 + BT_n$ .....	31
4.12 Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf $K_2 + BT_n$ .....	33
4.13 Graf Join $W_3 + BT_2$ , $W_3 + BT_3$ dan $W_3 + BT_n$ .....	34
4.14 Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf $W_3 + BT_n$ .....	36
4.15 Graf Join $C_3 + V_2$ , $C_3 + V_3$ dan $C_3 + V_n$ .....	37
4.16 Pewarnaan Lokal Titik <i>Antimagic</i> pada Graf $C_3 + V_n$ .....	40

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu bagian dari ilmu matematika yang biasa digunakan untuk menyelesaikan persoalan dalam kehidupan sehari-hari sehingga lebih mudah. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan sisi atau garis. Terdapat banyak pokok bahasan dalam teori graf, salah satunya adalah pewarnaan. Pewarnaan diartikan sebagai pemberian warna berbeda pada setiap elemen graf sehingga tidak ada dua elemen yang bertetangga dengan warna yang sama. Berdasarkan domainnya, pewarnaan dibagi menjadi tiga, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan wilayah.

Topik-topik tentang pewarnaan graf khususnya pewarnaan titik telah berkembang cukup pesat dan telah menarik banyak perhatian para peneliti. Beberapa penelitian terdahulu terkait dengan pewarnaan titik antara lain, Ghofur (2008) melakukan pewarnaan terhadap graf-graf yang berkaitan dengan sikel, Jusuf (2009) tentang pewarnaan titik yang digunakan untuk mendeteksi konflik penjadwalan kuliah, Harsya dkk. (2014) yang mencari nilai kromatik dari pewarnaan titik graf hasil operasi graf lintasan dan graf lingkaran, Puspasari dkk. (2014) yang melakukan pewarnaan titik pada graf khusus: operasi dan aplikasinya.

Selain topik yang telah dibahas dalam penelitian-penelitian di atas, terdapat topik baru tentang pewarnaan titik yang terkait dengan pelabelan yang masih perlu perkembangan yaitu pewarnaan lokal titik *antimagic* yang pertama kali dikenalkan oleh Arumugam dkk. (2017) dalam penelitiannya tersebut. Pelabelan graf adalah pemetaan elemen-elemen graf dengan bilangan bulat positif, dimana ada dua buah elemen berbeda dan semua elemen pada graf dinomori dengan bilangan bulat positif yang berbeda. Dalam penelitian tersebut graf yang digunakan hanya terbatas beberapa graf khusus saja, antara lain: graf lengkap, pohon, lintasan, lingkaran, persahabatan, lengkap *bipartite*, tangga dan roda, serta satu graf hasil operasi join yaitu  $G + \overline{K_2}$ .

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk melakukan penelitian lebih lanjut tentang pewarnaan lokal titik *antimagic* pada beberapa graf sederhana yaitu buku segitiga ( $BT_n$ ) dan gunung api ( $V_n$ ), serta beberapa graf hasil operasi join lain yaitu  $K_1 + BT_n$ ,  $K_1 + V_n$ ,  $K_1 + W_n$  untuk  $n \geq 3$ ,  $P_2 + BT_n$ ,  $W_3 + BT_n$  dan  $C_3 + V_n$ .

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah berapa bilangan kromatik pada pewarnaan lokal titik *antimagic* dari graf buku segitiga ( $BT_n$ ), graf gunung api ( $V_n$ ), graf join  $K_1 + BT_n$ , graf join  $K_1 + V_n$ , graf join  $K_1 + W_n$  untuk  $n \geq 3$ , graf join  $K_2 + BT_n$ , graf join  $W_3 + BT_n$  dan graf join  $C_3 + V_n$ ?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan pada penelitian adalah menentukan bilangan kromatik pada pewarnaan lokal titik *antimagic* dari graf buku segitiga ( $BT_n$ ), graf gunung api ( $V_n$ ), graf join  $K_1 + BT_n$ , graf join  $K_1 + V_n$ , graf join  $K_1 + W_n$  untuk  $n \geq 3$ , graf join  $K_2 + BT_n$ , graf join  $W_3 + BT_n$  dan graf join  $C_3 + V_n$ .

## 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini antara lain:

- a. Memberi kontribusi dan wawasan terhadap perkembangan pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pewarnaan titik.
- b. Memberikan motivasi pada peneliti lain untuk melakukan penelitian tentang pewarnaan lokal titik *antimagic* pada jenis-jenis graf yang berbeda.

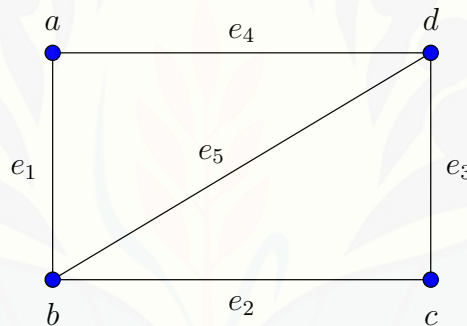


## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Definisi dan Terminologi Graf

Graf  $G$  adalah pasangan  $(V, E)$  dimana  $V$  adalah himpunan tak kosong yang anggotanya disebut dengan titik (*vertex*) dan  $E$  adalah himpunan yang anggotanya tak terurut dari *vertex*  $V$  yang disebut dengan sisi (*edges*). Definisi graf tersebut menyatakan bahwa  $V$  tidak boleh kosong, sedangkan  $E$  boleh kosong. Dengan demikian, sebuah graf dimungkinkan tidak memiliki sisi, akan tetapi harus memiliki minimal satu titik (Vasudev, 2006: 4).

Contoh dari graf  $G(V, E)$  dengan:  $V$  terdiri atas 4 titik, yaitu titik  $a, b, c$  dan  $d$  serta terdiri atas 5 sisi, yaitu  $e_1 = ab, e_2 = bc, e_3 = cd, e_4 = ad$  dan  $e_5 = bd$ .



Gambar 2.1 Graf  $G$

Titik  $u$  pada graf  $G$  dikatakan bertetangga (*adjacent*) dengan titik  $v$ , jika terdapat sisi  $e$  yang menghubungkan kedua titik tersebut dan ditulis  $e = uv$ . Dengan kata lain,  $u$  dan  $v$  bersisian (*incident*) dengan sisi  $e$ . Suatu titik  $u$  pada graf  $G$  memiliki derajat (*degree*) yaitu banyaknya sisi yang bersisian (*incident*) pada  $u$ . Jika titik  $u$  memiliki derajat 0, maka titik tersebut tidak memiliki tetangga atau disebut titik terisolasi (Hartsfield dan Ringel, 1990).

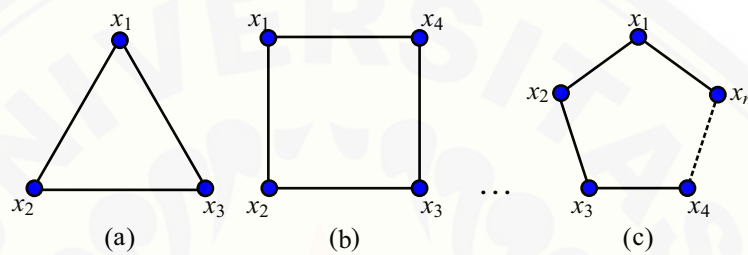
### 2.2 Graf Sederhana

Graf sederhana (*simple graph*) adalah graf yang tidak memiliki bobot dan arah, serta tidak terdapat sisi ganda dan *loop* (Gibbon, 1985). Graf dikatakan memiliki sisi ganda jika terdapat dua sisi atau lebih yang menghubungkan dua

titik yang sama. Sedangkan graf dikatakan memiliki *loop* jika terdapat sisi yang berpangkal dan berujung di satu titik. Beberapa graf sederhana yang biasa digunakan antara lain:

a. Graf Lingkaran (*Cycle Graph*)

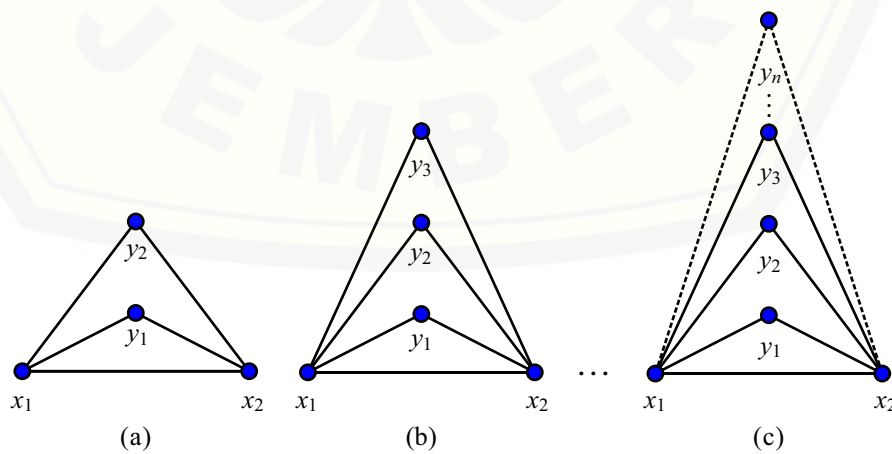
Graf lingkaran, dinotasikan dengan  $C_n$  dengan  $n \geq 3$  merupakan graf dengan *order*  $n$  dan *size*  $n$  yang memiliki titik-titik yaitu  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , dan sisi-sisinya adalah  $(x_1x_n)$  dan  $(x_i x_{i+1})$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  (Chartrand dkk., 2016).



Gambar 2.2 Graf Lingkaran (a)  $C_3$ , (b)  $C_4$ , (c)  $C_n$

b. Graf Buku Segitiga (*Triangular Book*)

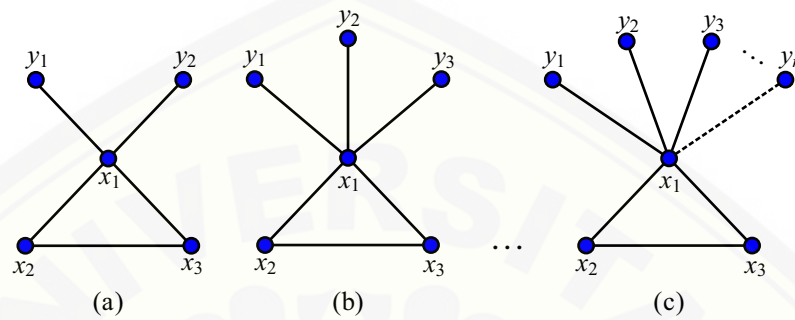
Graf buku segitiga, dinotasikan dengan  $BT_n$ , adalah graf yang dibentuk dari Lingkaran  $C_3$  yang digandakan sebanyak  $n$  dan satu sisi dari setiap Lingkaran tersebut merupakan sisi yang sama atau digunakan bersama. Graf buku segitiga ( $BT_n$ ) memiliki himpunan titik  $V = \{x_1, x_2\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$  dan himpunan sisi  $E = \{x_1x_2\} \cup \{x_1y_i, x_2y_i; 1 \leq i \leq n\}$  (Dafik dkk., 2013).



Gambar 2.3 Graf Buku Segitiga (a)  $BT_2$ , (b)  $BT_3$ , (c)  $BT_n$

c. Graf Gunung Api (*Volcano Graph*)

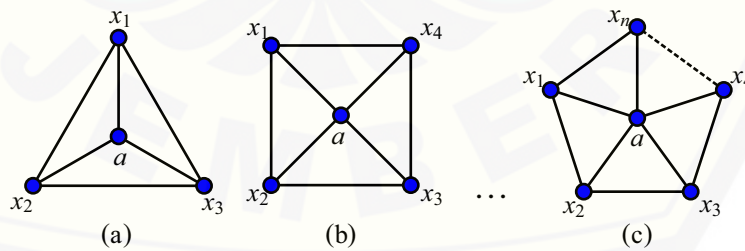
Graf gunung api, dinotasikan  $V_n$  dengan himpunan titik  $V = \{x_i; 1 \leq i \leq 3\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq n\}$  dan himpunan sisi  $E = \{x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1\} \cup \{x_1y_j; 1 \leq j \leq n\}$  (Dafik, 2013).



Gambar 2.4 Graf Gunung Api (a)  $V_2$ , (b)  $V_3$ , (c)  $V_n$

d. Graf Roda (*Wheel Graph*)

Graf roda, dinotasikan dengan  $W_n$ ,  $n \geq 3$ , yaitu sebuah graf yang diperoleh dengan menambahkan sebuah titik pada graf lingkaran ( $C_n$ ), untuk  $n \geq 3$ , dan menghubungkan titik baru tersebut pada setiap  $n$  titik pada  $C_n$  dengan sisi baru (Rosen, 2012). Himpunan titik graf roda ( $W_n$ ) adalah  $V = \{y\} \cup \{x_i, 1 \leq i \leq n\}$  dan himpunan sisinya adalah  $E = \{x_ix_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_nx_1\} \cup \{yx_i, 1 \leq i \leq n\}$ .

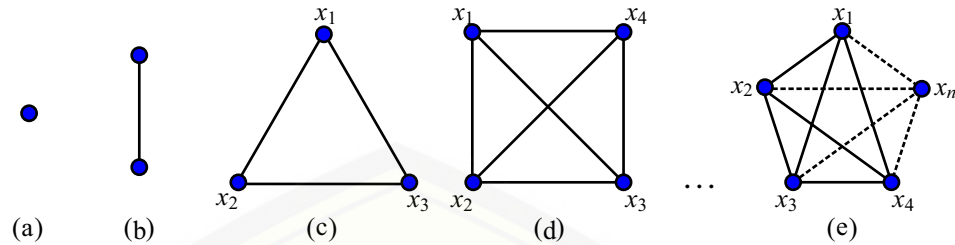


Gambar 2.5 Graf Roda (a)  $W_3$ , (b)  $W_4$ , (c)  $W_n$

e. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Graf lengkap, dinotasikan dengan  $K_n$  yaitu sebuah graf dengan  $n$  titik yang setiap titiknya terhubung dengan titik-titik lainnya (Harary, 1994). Graf lengkap memiliki himpunan titik yaitu  $V = \{x_i, 1 \leq i \leq n\}$  dan himpunan sisi yaitu

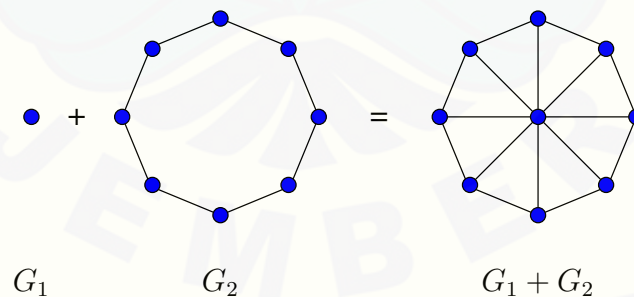
$$E = \{x_i x_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j\}$$



Gambar 2.6 Graf Lengkap (a)  $K_1$ , (b)  $K_2$ , (c)  $K_3$ , (d)  $K_4$ , (e)  $K_n$

### 2.3 Graf Hasil Operasi

Terdapat beberapa cara mengoperasikan graf sehingga menghasilkan graf yang baru, salah satunya adalah operasi join. Graf join ( $G_1 + G_2$ ) dari graf  $G_1$  dan  $G_2$ , dinotasikan dengan  $G = G_1 + G_2$ , adalah graf  $G$  dimana  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  dan  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$  (Harary, 1994). Graf join dihasilkan dengan cara menghubungkan setiap titik pada  $G_1$  dengan setiap titik pada  $G_2$ . Kardinalitas titik graf join  $G_1 + G_2$  adalah  $|V(G_1 + G_2)| = |V(G_1)| + |V(G_2)|$  dan kardinalitas sisinya adalah  $|E(G_1 + G_2)| = |E(G_1)| + |E(G_2)| + |V(G_1)| \cdot |V(G_2)|$ . Contoh dari operasi join dapat dilihat pada Gambar 2.7.

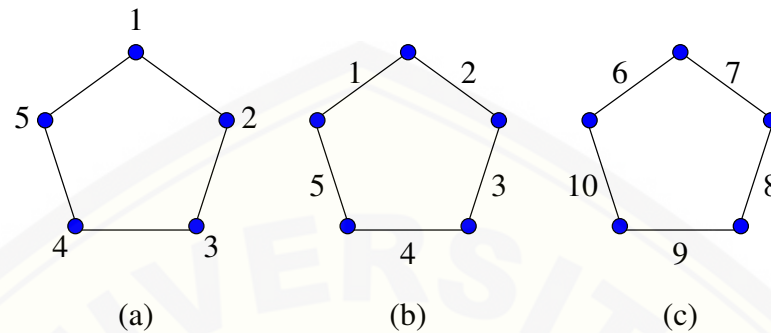


Gambar 2.7 Operasi Join

### 2.4 Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah pemetaan elemen-elemen graf dengan bilangan bulat positif, dimana ada dua buah elemen berbeda dan semua elemen pada graf dinomori dengan bilangan bulat positif yang berbeda. Pelabelan titik (*vertex labelling*) adalah

pelabelan dengan domain himpunan titik, jika domainnya berupa himpunan sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labelling*) dan jika domainnya gabungan dari himpunan titik dan sisi, maka pelabelannya disebut pelabelan total (*total labelling*).



Gambar 2.8 Contoh Pelabelan (a) Titik, (b) Sisi dan (c) Total

## 2.5 Pewarnaan Graf

### 2.5.1 Macam-macam Pewarnaan Graf

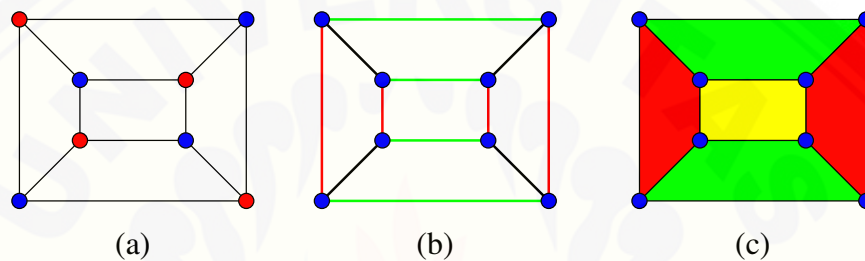
Terdapat tiga macam pewarnaan graf (*graph coloring*) berdasarkan domainnya yaitu, pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*) dan pewarnaan wilayah (*region coloring*). Pewarnaan titik pada graf adalah pemberian warna berbeda pada setiap titik sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga dengan warna yang sama (Chartrand & Zhang, 2009). Contoh pewarnaan titik pada Gambar 2.9(a). Pewarnaan titik dapat didefinisikan sebagai suatu fungsi  $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  sedemikian sehingga  $c(u) \neq c(v)$  jika  $u$  dan  $v$  merupakan titik yang bertetangga. Bilangan bulat positif  $k$  terkecil untuk mewarnai titik pada graf  $G$  disebut bilangan kromatik graf  $G$ , dinotasikan dengan  $\chi(G)$ .

**Teorema 2.1.** Untuk graf join  $G_1 + G_2$ , bilangan kromatiknya adalah  $\chi(G_1 + G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$  (West, 2002).

Suatu pewarnaan sisi pada graf  $G$  diartikan sebagai pemberian warna pada sisi dari graf  $G$  sedemikian sehingga sisi-sisi bertetangga menerima warna yang berbeda (Fiorini & Wilson, 1977). Pewarnaan sisi dapat digambarkan sebagai suatu

fungsi  $c : E(G) \rightarrow 1, 2, 3, \dots, k$  sedemikian sehingga  $c(e_i) \neq c(e_j)$  untuk setiap sisi  $e_i$  dan  $e_j$  yang bertetangga pada graf  $G$ . Graf  $G$  dikatakan sisi-sisi yang diwarnai dengan  $k$ , jika  $G$  mempunyai pewarnaan sisi- $k$ . Bilangan bulat positif  $k$  terkecil untuk mewarnai sisi pada graf  $G$  disebut bilangan kromatik graf  $G$ , dinotasikan dengan  $\gamma(G)$ . Contoh pewarnaan sisi pada Gambar 2.9(b).

Pewarnaan wilayah merupakan pewarnaan di setiap wilayah pada suatu graf dengan syarat wilayah yang bertetangga tidak diperbolehkan memiliki warna yang sama. Pewarnaan wilayah dapat dilihat pada Gambar 2.9(c).



Gambar 2.9 Contoh Pewarnaan (a) Titik, (b) Sisi dan (c) Wilayah

### 2.5.2 Pewarnaan Lokal Titik *Antimagic*

Misalkan graf  $G = (V, E)$  adalah suatu graf terhubung tak berarah tanpa *loop* dan sisi ganda. Graf  $G$  disebut *antimagic* jika  $G$  memiliki sebuah pelabelan *antimagic*. Suatu fungsi bijektif  $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, |E|\}$  disebut sebagai pelabelan *antimagic* jika untuk setiap  $u \in V(G)$  dan bobot  $w(u) = \sum_{e \in E(u)} f(e)$ , dimana  $E(u)$  adalah himpunan sisi yang *incident* ke  $u$ , dipenuhi  $w(u) \neq w(v)$  untuk dua titik  $u$  dan  $v$  yang berbeda (Hartsfield dan Ringel, 1990).

Menurut Arumugam dkk. (2017), misalkan graf  $G = (V, E)$  adalah suatu graf terhubung dengan  $|V| = n$  dan  $|E| = m$ . Fungsi bijektif  $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$  disebut pelabelan lokal *antimagic* jika untuk semua  $uv \in E$  dihasilkan  $w(u) \neq w(v)$  dimana  $w(u) = \sum_{e \in E(u)} f(e)$ . Dalam pewarnaan lokal *antimagic* terdapat bilangan kromatik  $\chi_{la}(G)$  yang didefinisikan sebagai banyaknya warna minimum dari semua warna graf  $G$  yang dihasilkan oleh pelabelan lokal *antimagic* graf tersebut. Untuk sebarang graf  $G$ ,  $\chi_{la}(G) \geq \chi(G)$ ,

dimana  $\chi(G)$  adalah bilangan kromatik dari pewarnaan biasa pada graf  $G$ .

### 2.5.3 Hasil-hasil Pewarnaan Lokal Titik *Antimagic*

Pada penelitian sebelumnya didapatkan beberapa teorema tentang bilangan kromatik  $\chi_{la}(G)$  dari hasil pewarnaan lokal titik *antimagic* yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Adapun beberapa hasil penelitian tersebut telah dirangkum dan dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Hasil Pewarnaan Lokal Titik *Antimagic* Penelitian Terdahulu

Graf	Nilai Kromatik	Keterangan
$T_l$	$\chi_{la}(T_l) \geq l + 1$	
$C_n$	$\chi_{la}(C_n) = 3$	
$F_n$	$\chi_{la}(F_n) = 3$	
$F_n - \{e\}; n \geq 2$	$\chi_{la}(F_n - \{e\}) = 3$	
$K_{2,n}; n$ genap dan $n \geq 4$	$\chi_{la}(K_{2,n}) = 2$	
$K_{2,n}; n$ ganjil atau $n = 2$	$\chi_{la}(K_{2,n}) = 3$	Arumugam, <i>et al.</i>
$L_n$	$\chi_{la}(L_n) = n + 1$	(2017)
$W_n; n \equiv 1, 3(mod 4)$	$\chi_{la}(W_n) = 4$	
$W_n; n \equiv 2(mod 4)$	$\chi_{la}(W_n) = 3$	
$W_n; n \equiv 0(mod 4)$	$3 \leq \chi_{la}(W_n) \leq 5$	
$G_n + K_2, n \geq 4$	$\chi_{la}(G) + 1 \leq \chi_{la}(G + K_2) \leq \begin{cases} \chi_{la}(G) + 1 & n \text{ genap} \\ \chi_{la}(G) + 2 & n \text{ lainnya} \end{cases}$	

## BAB 3. METODE PENELITIAN

### 3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini ada dua metode. Metode yang pertama adalah metode deduktif aksiomatik. Metode deduktif aksiomatik artinya kebenaran matematika didasarkan pada kebenaran-kebenaran yang sebelumnya yang telah disepakati. Metode yang kedua adalah metode pendeteksian pola. Metode pendeteksian pola adalah suatu metode penelitian yang menentukan suatu pola pewarnaan titik *local antimagic* sehingga diperoleh bentuk umum dari pola tersebut.

### 3.2 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan ke dalam penelitian eksploratif yaitu penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.

### 3.3 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf-graf yang digunakan antara lain adalah graf buku segitiga ( $BT_n$ ), graf gunung api ( $V_n$ ), graf join  $W_n + K_1$  untuk  $n \geq 3$ , graf join  $K_1 + BT_n$ , graf join  $P_2 + BT_n$ , graf join  $W_3 + BT_n$ , graf join  $K_1 + V_n$  dan graf join  $C_3 + V_n$ .

### 3.4 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian ini yang akan dilakukan diuraikan secara sistematis sebagai berikut.

#### a. Penentuan Graf

Dalam tahap ini, penulis akan mengumpulkan dan menentukan graf-graf sederhana dan graf hasil operasi join yang akan digunakan untuk pewarnaan lokal titik *antimagic*.



b. Pewarnaan Titik

Pada tahap ini, graf yang telah dipilih kemudian diwarnai dengan pewarnaan titik biasa sedemikian sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga dengan warna yang sama. Banyaknya warna yang dihasilkan merupakan bilangan kromatik  $\chi(G)$ , yang selanjutnya digunakan sebagai batas bawah pewarnaan lokal titik *antimagic*  $\chi_{la}(G) \geq \chi(G)$ .

c. Pelabelan Sisi Graf

Graf yang telah dipilih akan dilabeli sisinya terlebih dahulu dimana dalam pemberian label tidak boleh ada nilai yang berulang. Dalam hal ini artinya banyaknya label yang digunakan sesuai dengan kardinalitas sisi graf.

d. Perhitungan Bobot Titik

Pada langkah ini, setiap titik akan diberi bobot yang dihitung dari total label semua sisi yang terhubung dengan titik tersebut. Titik yang bertetangga tidak boleh memiliki bobot yang sama. Jika didapatkan titik bertetangga berbobot sama, maka kembali ke langkah c. Jika sudah tidak ada titik bertetangga yang memiliki bobot yang sama, maka dilanjutkan ke langkah e.

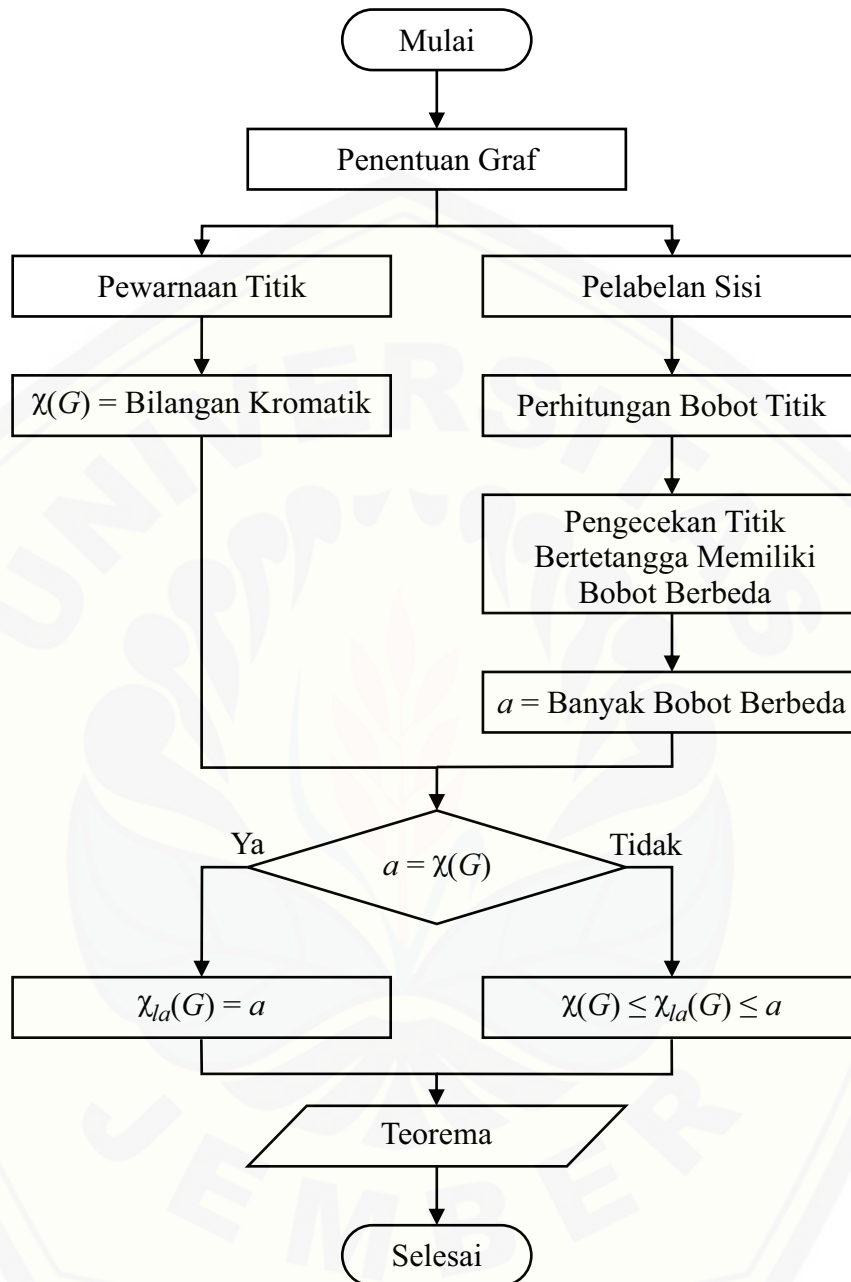
e. Pemeriksaan Nilai Kromatik

Pada tahap ini, nilai bobot merepresentasikan warna titik. Banyaknya bobot ( $a$ ) dibandingkan dengan bilangan kromatik pewarnaan biasa  $\chi(G)$  sebagai batas bawahnya. Jika  $a = \chi(G)$ , maka didapatkan bilangan kromatik pewarnaan lokal titik *antimagic*  $\chi_{la}(G) = a$ . Namun, jika  $a \neq \chi(G)$ , maka didapatkan bilangan kromatik pewarnaan lokal titik *antimagic*  $\chi(G) \leq \chi_{la}(G) \leq a$ .

f. Pembentukan Teorema

Hasil pewarnaan lokal titik *antimagic* yang telah didapatkan kemudian dibuktikan. Jika sudah terbukti maka akan dibentuk sebuah teorema yang berlaku pada graf yang digunakan.

Adapun skema dari rancangan penelitian sebagai berikut.



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

## BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik pewarnaan lokal titik *antimagic* pada graf buku segitiga sama dengan batas bawahnya yaitu  $\chi_{la}(BT_n) = \chi(BT_n) = 3$ , sedangkan pada graf gunung api lebih besar atau sama dengan batas bawahnya yaitu  $\chi_{la}(V_n) = n + 1 \geq \chi(V_n)$ , karena graf gunung api memiliki  $n$  titik berderajat 1. Bilangan kromatik pewarnaan lokal titik *antimagic* dari graf join yaitu  $\chi_{la}(K_1 + BT_n) = 4$ ;  $\chi_{la}(K_1 + V_n) = 4$ ;  $\chi_{la}(K_1 + W_n) = 5$  untuk  $n \geq 3$ ,  $n$  ganjil dan  $\chi_{la}(K_1 + W_n) = 4$  untuk  $n \geq 3$ ,  $n$  genap;  $\chi_{la}(K_2 + BT_n) = 5$ ;  $\chi_{la}(W_3 + BT_n) = 7$  dan  $\chi_{la}(C_3 + V_n) = 6$ . Dari semua graf join yang digunakan, bilangan kromatik pewarnaan lokal titik *antimagic*-nya sama dengan batas bawahnya yaitu  $\chi_{la}(G_1 + G_2) = \chi(G_1 + G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$ .

### 5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian, penulis memberikan saran kepada pembaca atau peneliti lain untuk mengembangkan lebih lanjut lagi pewarnaan lokal titik *antimagic* pada graf-graf hasil operasi lain, seperti operasi korona, komposisi, shackel, amalgamasi dan sebagainya. Penulis juga menyarankan agar penelitian selanjutnya dapat menerapkan pewarnaan lokal titik *antimagic* dalam permasalahan di kehidupan sehari-hari.

**DAFTAR PUSTAKA**

- Arumugam S, K. Premalatha, M. Baca dan A. Semanicova-Fenovcikova. 2017. Local Antimagic Vertex Coloring of a Graph. *Graphs and Combinatorics*, 33: 275-285.
- Bondy, J.A. dan U.S.R. Murty. 1979. *Graph Theory with Applications*. New York: North-Holland.
- Chartrand, G. dan P. Zhang. 2009. *Chromatic Graph Theory*. USA: CRC Press.
- Chartrand, G., L. Lesniak dan P. Zhang. 2016. *Graphs and Digraphs, 6th Ed*. California: Chapman & Hall.
- Dafik. 2013. *Antimagic Total Labelling of Disjoint Union of Graph*. Jember: CSS.
- Dafik, Slamun, F.R. Eka dan L. Syadiyah. 2013. Super Antimagicness of Triangular Book and Diamond Ladder Graphs. *Proceeding of International Conference on Mathematics and Its Applications (IICMA)*, 1-8.
- Fiorini, S. dan R.J. Wilson. 1977. *Edge-Colouring of Graphs*. London: Pitman.
- Ghofur, A. 2008. Pewarnaan Titik pada Graf yang Berkaitan dengan Sikel. *Disertasi*. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
- Gibbons, A. 1985. *Algorithmic Graph Theory*. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- Gross, J.T. dan J. Yellen. 2006. *Graph Theory and Its Applications, 2nd Ed*. Boca Raton, FL: CRC Press.
- Harary, F. 1994. *Graph Theory*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Harsya, A.T., I.H. Agustin dan Dafik. 2014. Bilangan Kromatik pada Pengoperasian Graf Lintasan dan Graf Lingkaran. *SENDIKMAD*, 1257-1262.
- Hartsfield, N and Ringel. 1990. *Pearls in Graph Theory*. Australia: Academic Press.
- Jusuf, H. 2009. Pewarnaan Graph pada Simpul untuk Mendeteksi Konflik Penjadwalan Kuliah. *Seminar Nasional Aplikasi Teknologi Informasi (SNATI)*.

Puspasari, D.T., Dafik dan Slamin. 2014. Pewarnaan Titik pada Graf Khusus: Operasi dan Aplikasinya. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik*, 2(1): 50-58.

Rosen, K.H. 2012. *Discrete Mathematics and Its Application, 7th Ed.* New York: VAGA.

Vasudev, C. 2006. *Graph Theory With Application.* New Delhi: New Age International (P), Ltd.

West, D.B. 2002. *Introduction to Graph Theory, 2nd Ed.* Delhi: Pearson Education (Singapore) Pte. Ltd.

