ANALISIS DIMENSI METRIK DENGAN HIMPUNAN PEMBEDA TERHUBUNG PADA GRAF KHUSUS KELUARGA POHON DIKAITKAN KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI

SKRIPSI

Oleh

Wahyu Sulistio

NIM 130210101073

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS JEMBER

2016

ANALISIS DIMENSI METRIK DENGAN HIMPUNAN PEMBEDA TERHUBUNG PADA GRAF KHUSUS KELUARGA POHON DIKAITKAN KETERAMPILAN BERPIKIR TINGKAT TINGGI

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

Wahyu Sulistio

NIM 130210101073

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS JEMBER

2016

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk :

1. Ayahanda Paino, Ibunda Suwarti, Kakak Inno Cahyaning Tyas dan semua keluarga tersayang yang selalu memberikan motivasi dan dukungan;
2. Guru-guruku sejak taman kanak-kanak sampai dengan perguruan tinggi yang selalu sabar memberikan bimbingan;
3. Sahabat-sahabat terbaik dari ICIKIPRIT: Adi, Alfan, Ali, Bima, Darian, Indra dan Rudi yang memberikan pengalaman tak terlupakan;
4. Teman-teman pejuang graf: Lisa, Putu, Hasan, Lita, Alif, Mita, Darian, Dita, Anggun, Rudi, Aghni, Yuli, Ulul, Kholis, Ali, Nuning dan Vutikatul ;
5. Saudara-saudaraku Kelas C dan CUCOK MANIA 2013 yang selalu memberikan dukungan untuk terus semangat selama perkuliahan;
6. Almamater Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

MOTTO

"Walau saya tidak punya bakat, Keberhasil akan saya raih dengan 100 persen usaha".

"Saat kamu menemui jalan yang lain saat mencari apa yang kamu inginkan. Nikmatilah jalan itu, mungkin kamu akan menemukan sesuatu yang lebih berharga daripada apa yang kamu inginkan."
(Ging Freecss)*)

"*Make the world revolve around you. Its more fun to think that way.*"
*(Tendou Souji)**)*

---

*) Hunter x Hunter 2013

**) Kamen Rider Kabuto 2007

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Wahyu Sulistio

NIM : 130210101073

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: "Analisa Dimensi Metrik Dengan Himpunan Pembeda Terhubung pada Graf Khusus Keluarga Pohon Dikaitkan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Desember 2016

Yang menyatakan,

Wahyu Sulistio

NIM. 130210101073

SKRIPSI

Analisa Dimensi Metrik Dengan Himpunan Pembeda Terhubung pada Graf Khusus Keluarga Pohon Dikaitkan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi

Oleh

Wahyu Sulistio
NIM 130210101073

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Slamin M.Comp.Sc., Ph.D.
Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Analisa Dimensi Metrik Dengan Himpunan Pembeda Terhubung pada Graf Khusus Keluarga Pohon Dikaitkan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi" telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember pada:

hari :
tanggal :
tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,	Sekretaris,
Prof. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D	Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP.19670420 199201 1 001	NIP.19680802 199303 1 004
Anggota I,	Anggota II,
Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.	Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.
NIP.19820529 200912 1 003	NIP.19700307 199512 2 001

Mengesahkan,
Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Jember

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP.19680802 199303 1 004

RINGKASAN

Analisa Dimensi Metrik Dengan Himpunan Pembeda Terhubung pada Graf Khusus Keluarga Pohon Dikaitkan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi; Wahyu Sulistio, 130210101073; 2015: 57 halaman; Jurusan Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Teori graf termasuk dalam cabang ilmu matematika diskrit yang merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Salah satu konsep ilmu dalam teori graf yang dapat menyelesaikan permasalahan adalah dimensi metrik. Pada tahun 1975, konsep dimensi metrik diperkenalkan oleh Slater (Chartrand et al). Konsep tersebut muncul dari himpunan pembeda yang dikenal dengan istilah *locating set*. Himpunan pembeda W didefinisikan sebagai himpunan dari *vertex-vertex* pada suatu graf G sedemikian sehingga untuk setiap *vertex* di G menghasilkan jarak yang berbeda terhadap setiap *vertex* di W. Dimensi metrik adalah kardinalitas terkecil dari himpunan pembeda.

Salah satu kajian yang ada pada dimensi metrik dan sedang marak diteliti adalah dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung (*connected resolving set*). Dimana pada kajian ini himpunan pembeda yang mempunyai kardinalitas minimum haruslah saling terhubung, hal ini tentu sangat berguna untuk pembahasan pada bidang lain nantinya.

Pada penelitian ini menggunakan metode penelitian eksploratif dan terapan. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya. Penelitian ini bertujuan untuk mencari nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung pada graf khusus keluarga pohon. graf E_n, graf bintang (S_n), graf kembang api teratur $(F_{m,n})$, graf pohon pisang teratur $(B_{m,n})$ dan graf ulat teratur $(C_{m,n})$ (*catepillar*), sehingga pada penelitian ini dihasilkan 5 teorema, antara lain:

Teorema 4.1.1 Untuk $n \geq 2$, nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung dari graf bintang S_n adalah $\mathrm{nr}(S_n) = n$.

Teorema 4.1.2 Untuk $n \geq 2$, nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung dari graf E (E_n) adalah nr(E_n) = 3.

Teorema 4.1.3 Untuk $n \geq 2$, nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung dari graf kembang api teratur ($F_{m,n}$) adalah

$$nr(F_{m,n}) = \begin{cases} n & \text{, untuk } m = 1 \\ \\ m(n+1) & \text{, untuk } m \geq 2 \end{cases}$$

.

Teorema 4.1.4 Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$, nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung dari graf ulat teratur ($C_{m,n}$) adalah nr($C_{m,n}$)=mn.

Teorema 4.1.5 Untuk $n \geq 3$, nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung dari graf pohon pisang teratur ($B_{m,n}$) adalah

$$nr(B_{m,n}) = \begin{cases} n & \text{, untuk } m = 1 \\ \\ mn+1 & \text{, untuk } m \geq 2 \end{cases}$$

.

Berpikir tingkat tinggi dalam menentukan dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung pada graf khusus keluarga pohon yakni dalam menentukan graf yang digunakan (mengingat), menentukan kardinalitas dari himpuan pembeda terhubung (memahami), menentukan himpunan pembeda W (menerapkan), menghitung koordinat representasi setiap titik pada graf terhadap W (menganalisa), melakukan pengecekan terhadap representasi dari setiap titik (mengevaluai), menentukan fungsi dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung, dan menemukan teorema baru (Mencipta).

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT, atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ”Analisa Dimensi Metrik Dengan Himpunan Pembeda Terhubung pada Graf Khusus Keluarga Pohon Dikaitkan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi ”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada :

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Jember;
4. Prof. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Utama, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si., selaku dosen Penguji I, dan Susi Setiawani, S.Si., M.Sc., selaku dosen penguji II, yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian selama penulisan skripsi ini;
5. Arika Indah Kristiani, S.Si., M.Pd., dan Dian Kurniati, S.Pd., M.Pd., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis selama menjadi mahasiswa;
6. Dosen dan karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
7. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Desember 2016

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMBANG

G	$=$	Graf G
$V(G)$	$=$	Himpunan Titik pada Graf G
$E(G)$	$=$	Himpunan Sisi pada Graf G
$p = \|V(G)\|$	$=$	Banyaknya Titik pada Graf G
$q = \|E(G)\|$	$=$	Banyaknya Sisi pada Graf G
$\Delta(G)$	$=$	Derajat Terbesar pada Graf G
$\delta(G)$	$=$	Derajat Terkecil pada Graf G
E_n	$=$	Graf E dengan n Titik
S_n	$=$	Graf Bintang dengan n Titik
$B_{m,n}$	$=$	Graf Pohon Pisang teratur dengan m Titikdan n Cabang
$C_{m,n}$	$=$	Graf Ulat teratur dengan m Titikdan n Cabang
$F_{m,n}$	$=$	Graf Kembang Api teratur dengan m Titikdan n Cabang
$W(G)$	$=$	Himpunan Pembeda pada Graf G
$r(v\|W)$	$=$	Himpunan Representasi titik v terhadap W G
$dim(G)$	$=$	Dimensi Metrik dari graf G
$nr(G)$	$=$	Dimensi Metrik dengan Himpunan Pembeda Terhubung dari graf G
$pd(G)$	$=$	Dimensi Partisi dari graf G
$Cpd(G)$	$=$	Dimensi Partisi dengan Himpunan Pembeda Terhubung dari graf G

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Pendidikan adalah hal yang sangat penting dan sangat dibutuhkan oleh semua orang. Akan tetapi pendidikan sendiri tidak akan berhenti berkembang. Pendidikan selalu berkembang setiap saat, berkembangnya pendidikan ini tentunya harus diikuti dengan perkembangan dari manusia itu sendiri. Seperti yang kita ketahui, pendidikan yang ada saat ini menuntut manusia untuk dapat berpikir lebih kritis dan lebih analisis dalam menanggapi setiap permasalahan yang ada. oleh karena itu manusia perlu menguasai keterampilan berpikir yang lebih baik daripada sebelumnya. Salah satu cara untuk meningkatkan keterampilan berpikir dari manusia adalah dengan membiasakan diri menggunakan keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam kehidupan sehari- hari. Dimana keterampilan berpikir tingkat tinggi termasuk dalam ranah kognitif yang merupakan bagian dari taksonomi bloom revisi.

Dalam taksonomi bloom revisi ranah kognitif dibagi menjadi tiga yang mencakup aspek analisa, aspek evaluasi dan aspek mencipta. Ranah kognitif taksonomi bloom revisi sendiri biasanya dibagi dalam beberapa tingkatan yang sering disebut dengan istilah C1, C2, C3, C4, C5, dan C6. C1 sampai C6 disini melambangkan tingkatan-tingkatan dalam keterampilan berpikir dari seseorang. dimana C1 melambangkan keterampilan berpikir yang masih sederhana dan C6 melambangkan keterampilan berpikir yang paling tinggi yang salah satu syaratnya adalah harus bisa mencipta. yang dimaksud dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi disini adalah keterampilan berpikir yang sudah berada pada tingkatan C6.

Banyak cara yang dapat dilakukan untuk mengembangakan keterampilan berpikir tingkat tinggi. Cara yang paling sederhana adalah dengan membiasakan diri untuk terus menerapkan keterampilan berpikir tingkat tinggi ini dalam permasalahan kehidupan sehari-hari. Cara lain yang bisa digunakan untuk mengembangkan keterampilan berpikir tingkat tinggi ini adalah dengan menyelesaikan masalah-masalah matematika. Salah satunya adalah dengan menyelesaiakan masalah matematika yang terkait dengan teori graf.

Teori graf sendiri termasuk dalam cabang ilmu matematika diskrit yang merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek diskrit tersebut. Representasi visual dari graf tersebut adalah dengan menyatakan objek sebagai titik (*vertex*) dan hubungan antara objek sebagai sisi (*edge*). Graf adalah suatu himpunan vertex dan edge yang merupakan representasi dari titik dan garis. Secara umum, graf merupakan pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertex*) dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ dan E adalah himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang simpul pada graf tersebut yaitu $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ atau $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \ldots, (v_{n-1}, v_n)\}$, dimana $e = (v_i, v_j)$ yang artinya sisi yang menghubungkan simpul v_i dan v_j.

Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui makalah tulisan Leonhard Euler seorang ahli matematika dari Swiss. Euler adalah orang pertama yang berhasil memecahkan masalah jembatan Konigsberg di sungai Pregal yang sangat terkenal di Eropa. Euler menyatakan bahwa teka-teki jembatan Konigsberg adalah mustahil. Euler membuktikan pernyataannya dengan memformulasikan masalah jembatan Konigsberg ke dalam teori graf. Masalah tersebut dikembangkan oleh Euler seperti berikut ini, ketika seseorang diminta untuk menyusun rute yang melintasi semua jembatan tetapi tidak perlu punya titik awal dan akhir yang sama. Hal tersebut dimungkinkan ada jika dan hanya jika representasi dari graf tersebut tidak punya titik yang berderajat ganjil dan tepat ada dua titik yang berderajat ganjil tetapi kedua titik tersebut akan menjadi titik awal dan titik akhir. Hal tersebut juga yang mustahil untuk graf dari representasi jembatan Konigsberg.

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang dapat diterapkan pada permasalahan di dunia nyata. Beberapa aplikasi dari teori graf terdapat pada bidang sains, komputasi, dan rabotika. Salah satu konsep ilmu dalam teori graf yang dapat menyelesaikan permasalahan adalah dimensi metrik. Pada tahun 1975, konsep dimensi metrik diperkenalkan oleh Slater (Chartrand et al). Konsep tersebut muncul dari himpunan pembeda yang dikenal dengan istilah *locating set*. Himpunan pembeda W didefinisikan sebagai himpunan dari *vertex-vertex* pada suatu graf G sedemikian sehingga untuk setiap *vertex* di G menghasilkan jarak yang berbeda terhadap setiap *vertex* di W. Dimensi metrik adalah kardinalitas terkecil dari himpunan pembeda.

Secara umumnya dimensi metrik dari graf G atau biasa dinotasikan $\dim(G)$ adalah menentukan banyaknya titik pada basis graf G, dimana basis merupakan himpunan pembeda yang mempunyai kardinalitas minimal. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n\}$ dari himpunan titik di graf terhubung G dan sebuah titik v di G, k-vektor (k-tuple terurut) $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \ldots,$ $d(v, w_k))$.

Kajian tentang dimensi metrik pada graf ini merupakan kajian yang sedang marak dibicarakan. Terbukti dengan adanya banyak jurnal dan penelitian-penelitian yang membahas tentang kajian ini. Dimensi metrik menjadi menarik untuk dibahas karena konsep himpunan pembeda yang mempunyai kardinalitas minimum telah terbukti sangat berguna untuk pembahasan pada bidang lain.

Salah satu kajian yang ada pada dimensi metrik dan sedang marak diteliti adalah dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung (*connected resolving set*). Dimana pada kajian ini himpunan pembeda yang mempunyai kardinalitas minimum haruslah saling terhubung, hal ini tentu sangat berguna untuk pembahasan pada bidang lain nantinya. Dalam hal ini yang akan diteliti adalah kaitannya pada bidang keterampilan berpikir dari seseorang. Berdasarkan hal tersebut, maka peneliti akan mengambil judul "**Analisis Dimensi Metrik dengan Himpunan Pembeda Terhubung Pada Graf Khusus Keluarga Pohon Dikaitkan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1) Berapa kardinalitas elemen graf dan himpunan pembeda dari graf khusus?;
2) Berapa nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung dari graf-graf khusus?;

3) Bagaimana kaitan dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung dengan keterampilan bepikir tingkat tinggi?

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian graf khusus yang digunakan adalah graf khusus keluarga pohon. Alasan peneliti mengambil graf khusus keluarga pohon karena belum ada penelitian tentang dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung pada keluarga graf pohon. Selain itu peneliti juga memulai dari graf yang paling dasar dan berkembang pada graf yang sudak komplek untuk mendapatkan kesimpulan yang umum tentang dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung pada graf khusus keluarga pohon. Oleh karena itu, peneliti mengambil graf yang akan diteliti adalah

1) Graf E_n;
2) Graf bintang S_n;
3) Graf ulat ulat teratur *catepilar*;
4) Graf kembang api teratur;
5) Graf pohon pisang teratur.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1) menentukan kardinalitas terkecil himpunan pembeda W dari graf khusus.;
2) Menentukan nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung dari graf-graf khusus.;
3) Menentukan kaitan dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung dengan keterampilan bepikir tingkat tinggi.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1) Menambah wawasan baru dalam bidang teori graf, khususnya mengenai teori dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung;

2) Memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung pada graf khusus dengan jenis graf lainnya;
3) Hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan keterampilan berpikir tingkat tinggi.

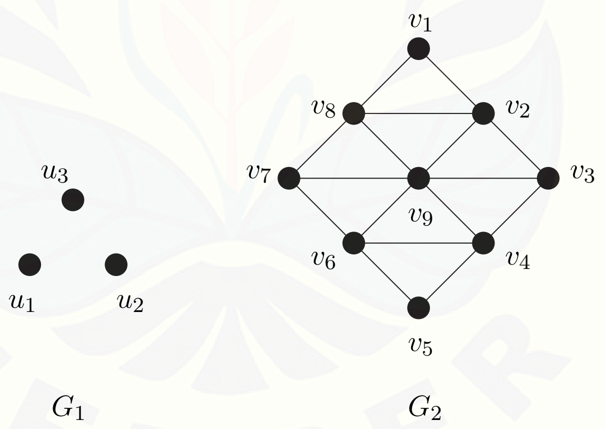
1.6 Kebaharuan

1) Kebaharuan yang ada dalam penelitian ini adalah dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung. Dimana dalam penelitian-penelitian sebelumnya belum ada. Dalam penelitian sebelumnya hanya diteliti mengenai dimensi metrik saja.;
2) Pembuktian dalam penelitian ini menggunakan pembuktian dengan kontradiksi dan penyajiannya menggunakan metrik representasi.
3) Jenis graf yang digunakan dalam penelitian ini berbeda dengan jenis graf yang digunakan dalam penelitian sebelumnya.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan ($V(G)$, $E(G)$) dimana $V(G)$ adalah sebuah himpunan berhingga tak kosong yang elemen-elemennya dinamakan titik (*vertex*), sedangkan $E(G)$ adalah sebuah himpunan sisi (*edge*) berbentuk garis lurus atau lengkung yang menghubungkan dua buah titik. Irwanto dan Dafik (2014) menyebutkan bahwa sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi harus terdapat minimal satu buah titik. Munir (2009) mengungkapkan bahwa sebuah graf yang tidak mempunyai sisi tetapi memiliki sebuah titik saja disebut graf *trivial*. Menurut Slamin (2009) sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu. Contoh graf dengan 3 titik dan 9 titik dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Graf G_1 dan G_2

Dari suatu graf yang memiliki p buah titik dan q buah sisi ditulis dengan $G(p, q)$. Iswadi (2011) menyatakan bahwa banyaknya titik dari sebuah graf G disebut *order* dari G yang dinotasikan dengan p atau $|V(G)|$, sedangkan banyaknya sisi dari sebuah graf G disebut *size* dari G yang dinotasikan dengan q atau $|E(G)|$.

Pada gambar 2.1, G_1 adalah graf dengan $|V(G_1)| = 3$ dan $|E(G_1)| = 0$, sedangkan G_2 adalah graf dengan $|V(G_2)| = 9$ dan $|E(G_2)| = 14$. G_1 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G_1) = \{u_1, u_2, u_3\}$ dan $E(G_1) = \emptyset$. G_2 adalah graf yang mempunyai himpunan titik $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ dan $E(G_2) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_8, v_8v_9, v_8v_1, v_9v_2, v_9v_3, v_9v_4, v_9v_6, v_9v_7\}$. Sebuah sisi dinamakan *loop* jika sisi tersebut berawal dan berakhir pada titik yang sama. Pada sebuah graf, sebuah sisi dinamakan sisi ganda (*parallel*) apabila terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik.

Dua buah titik pada suatu graf dikatakan bertetangga (*adjacent*) apabila terdapat sebuah sisi yang menghubungkan dua titik tersebut. Misalkan v_1 dan v_2 titik yang ada pada graf G, titik v_1 dikatakan *adjacent* dengan titik v_2 jika ada sisi e_1 yang menghubungkan titik v_1 dengan titik v_2, yaitu $e_1 = v_1v_2$. Sebuah titik pada suatu graf dikatakan bersisian (*incident*) dengan sisi lain pada graf tersebut apabila titik tersebut merupakan titik ujung dari sisi tersebut. Menurut Hartsfield dan Ringel (1990), sebuah titik v_1 dikatakan *incident* dengan sebuah sisi e_1 jika v_1 merupakan titik ujung dari e_1, demikian juga e_1 dikatakan *incident* dengan v_1 jika v_1 merupakan titik ujung dari e_1. Sebagai contoh, pada graf G_2 Gambar 2.1, v_1 *adjacent* dengan v_2 dan v_8, namun v_1 tidak *adjacent* dengan $v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_9$. Pada graf G_2 Gambar 2.1, v_1 dan v_2 *incident* dengan v_1v_2.

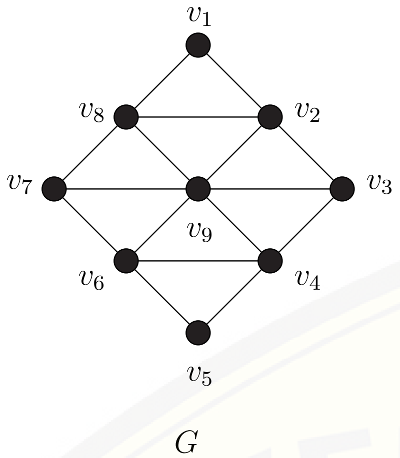
Banyaknya sisi yang *incident* pada suatu titik dinamakan derajat (*degree*). Derajat dinotasikan dengan d_i (*index* i menunjukkan titik ke-i dari sebuah graf). Sebuah titik yang mempunyai derajat 0 (nol) disebut titik terisolasi (*isolated vertex*), yang artinya titik tersebut tidak bertetangga dengan titik lain. Jika ada sebuah graf yang setiap titiknya memiliki derajat yang sama, maka graf tersebut dinamakan graf regular. Derajat terkecil dari suatu graf G adalah banyaknya minimal sisi yang *incident* pada suatu titik v_i di graf G diantara titik-titik lainnya di graf G yang dinotasikan dengan $\delta\ (G)$. Derajat terbesar dari suatu graf G adalah banyaknya maksimal sisi yang *incident* pada suatu titik v_i di graf G diantara titik-titik lainnya di graf G yang dinotasikan dengan $\Delta\ (G)$. Sebagai contoh, graf G_2 pada Gambar 2.1 memiliki $\delta\ (G) = 2$ dan $\Delta\ (G) = 4$.

Suatu jalan yang ada pada graf G didefinisikan sebagai barisan titik dan sisi yang berhingga dan saling bergantian dengan ketentuan setiap sisi *incident* pada titik yang mengapitnya pada barisan tersebut, titik dan sisinya boleh berulang serta diawali dan diakhiri oleh titik, sebagai contoh pada graf G_2 Gambar 2.1, $v_1-v_2-v_3-v_4-v_9-v_3-v_4-v_5$ merupakan jalan dengan panjang 7. Sebuah jalan yang berawal dan berakhir dengan titik yang sama dinamakan jalan tertutup, contohnya $v_1-v_2-v_3-v_4-v_9-v_3-v_4-v_5-v_6-v_9-v_8-v_1$ yang merupakan jalan tertutup dengan panjang 11. Panjang suatu jalan didefinisikan sebagai banyaknya sisi yang terdapat dalam jalan tersebut. Sebuah jalan dinamakan jejak (*trail*) apabila jalan tersebut tidak memiliki sisi yang berulang, tetapi titiknya boleh berulang, contohnya $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7 - v_9 - v_2$ yang merupakan jejak dengan panjang 8. Menurut Hartsfield dan Ringel (1990), jika sebuah jejak memiliki titik-titik ujung yang sama, maka jejak tersebut disebut jejak tertutup (sirkuit). Jika sebuah jalan tidak memiliki titik dan sisi yang berulang, dengan kata lain setiap titik dan sisi yang dilaluinya berbeda, maka jalan tersebut disebut lintasan (*path*), contohnya $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5$ yang merupakan lintasan dengan panjang 4. Suatu lintasan dinamakan *cycle* apabila lintasan tersebut membentuk lintasan tertutup, dengan kata lain lintasan tersebut diawali dan diakhiri oleh titik yang sama. Panjang dari *cycle* terpendek disebut *girth*, contohnya $v_1 - v_2 - v_9 - v_8 - v_1$ yang merupakan *cycle* dengan panjang 4.

Suatu graf dapat dinyatakan dengan menggunakan matriks. Matriks ketetanggaan (*adjency matrix*) dinyatakan dengan $A = [a_{ij}]$, i dan j adalah titik pada graf tersebut, dimana:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i \text{ } \textit{adjacent} \text{ terhadap } v_j. \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

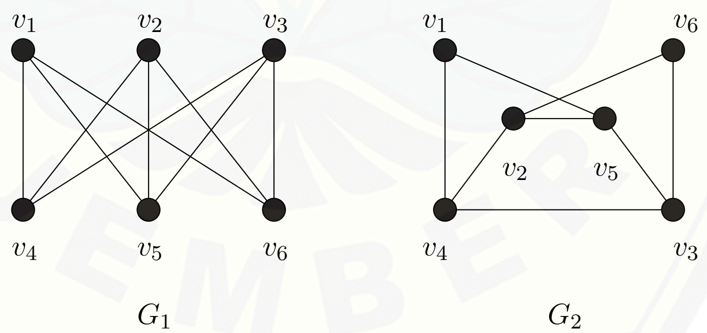
Gambar 2.2 menunjukkan *adjency matrix* dari graf G.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 2.2 *Adjency Matrix* dari Graf G

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah subgraf dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$, dengan kata lain G_1 adalah subgraf dari G jika setiap titik pada G_1 merupakan titik pada G dan setiap sisi pada G_1 merupakan sisi pada G. Dua buah graf yang sama tetapi secara geometri berbeda disebut graf yang isomorfis. Dua buah graf dikatakan isomorfis jika terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan titik pada kedua graf tersebut dan antara himpunan sisi pada kedua graf tersebut (Munir, 2009). Contoh dua graf yang isomorfis dapat dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Dua Graf yang Isomorfis

Graf dibedakan atas dua jenis, diantaranya :

a. Berdasarkan orientasi arah

1. Graf berarah (*direct graph*) adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah;
2. Graf tak berarah (*undirect graph*) adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah.

b. Berdasarkan ada tidaknya *loop* ataupun sisi ganda

1. Graf sederhana (*simple graph*) adalah graf yang tidak mengandung *loop* ataupun sisi ganda;
2. Graf tak sederhana (*unsimple graph*) adalah graf yang mengandung *loop* ataupun sisi ganda.

c. Berdasarkan jumlah titik

1. Graf berhingga (*limited graph*) adalah graf yang jumlah titiknya berhingga;
2. Graf tak berhingga (*unlimited graph*) adalah graf yang jumlah titiknya tidak berhingga.

d. Berdasarkan titik yang terhubung

1. Graf terhubung (*connected graph*)
   Graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda v_i dan v_j di G terdapat lintasan dari v_i ke v_j;
2. Graf tak terhubung (*disconnected graph*)
   Graf G dikatakan tak terhubung jika ada minimal dua titik yang berbeda v_i dan v_j di G, sehingga tidak terdapat lintasan dari v_i ke v_j.

2.2 Graf Khusus

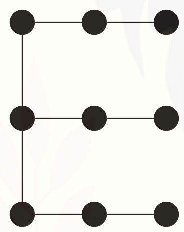
Graf khusus adalah graf yang memiliki karakteristik bentuk khusus. Graf ini memiliki keunikan yaitu tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karekteristik bentuknya dapat diperluas sampai *order* n tetapi simetris. Graf khusus yang sudah populer dinamakan *well-known special graph*, sedangkan graf khusus yang belum populer tetapi dengan karakteristik graf khusus dinamakan *well-defined special graph*.

2.2.1 Graf Khusus Keluarga Pohon

Munir (2009) graf pohon *(Tree)* adalah graf tidak berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit . Sehingga yang dimaksud dengan graf khusus keluarga pohon adalah graf-graf khusus yang memiliki sifat isomorfis dengan graf pohon. Yaitu adalah graf khusus yang tidak berarah terhubung serta tidak mengandung sirkuit. Berikut ini beberapa contoh graf khusus yang termasuk kedalam keluarga pohon, diantaranya :

a. Graf E_n

Graf E dinotasikan dengan E_n dimana $n \geq 2$, yaitu graf yang didapat dengan menghubungkan titik dari graf lintasan P_n hingga membentuk huruf E. Graf E E_n terdiri dari $3n$ titik dan $3n + 2$ sisi. Contoh graf E E_n dapat dilihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Graf E E_n

b. Graf Bintang (*Star Graph*)

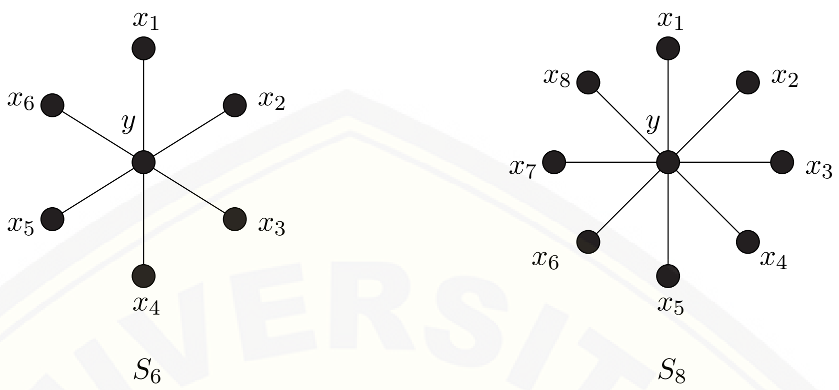
Graf bintang adalah graf pohon yang terdiri dari satu titik yang berderajat n dan n titik yang berderajat 1. Graf bintang S_n terdiri dari $n+1$ titik dan n sisi dengan $n \geqslant 3$. Sebagai contoh yaitu graf S_8 pada gambar 2.5.

c. Graf Pohon Pisang teratur (*Banana Tree*)

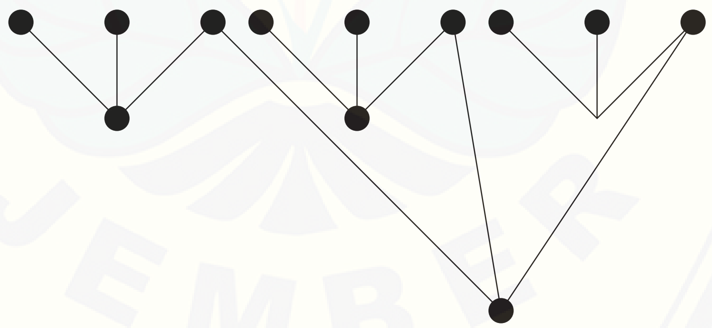
Graf pohon pisang Bm,n adalah sebuah graf yang diperoleh dengan menghubungkan satu simpul anting dari setiap m buah salinan graf bintang $K_{1,n}$ ke sebuah simpul baru yang disebut simpul akar s. Dapat dilihat pada gambar 2.6

d. Graf Ulat teratur (*Catepillar*)

Graf ulat didapatkan dengan menghubungkan simpul pusat c dari graf bintang secara berurutan. Lintasan yang menghubungkan simpul-simpul anting

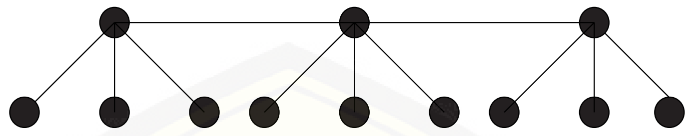


Gambar 2.5 Graf Bintang S_n



Gambar 2.6 Graf Pohon Pisang teratur

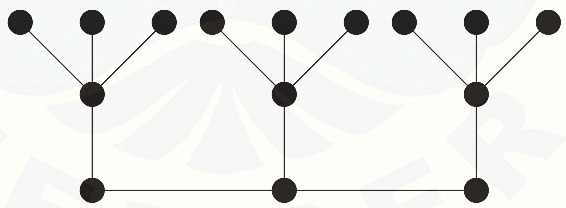
dari barisan graf bintang disebut simpul *backbone* dari graf ulat. Jika banyaknya simpul anting sama maka graf tersebut merupakan graf ulat teratur. Dinotasikan dengan $C_{m,n}$ dengan m adalah jumlah simpul *backbone* dan n adalah jumlah simpul anting, dapat dilihat pada gambar 2.7



Gambar 2.7 Graf Ulat teratur

e. Graf Kembang Api teratur (*Firework*)

Graf kembang api merupakan salah satu pohon yang mirip dengan graf ulat, perbedaannya terletak pada simpul *backbone* m yang terhubung dengan simpul anting n dari graf ulat. Sebelum simpul *backbone* m yang terhubung dengan simpul anting n terdapat satu buah simpul yang menghubungkan simpul *backbone* dengan simpul anting dari graf ulat. Graf kembang api dapat diperoleh dengan menambahkan sebuah sisi dan sebuah simpul pada setiap simpul *backbone* yang akan menghubungkan antara simpul *backbone* dengan simpul daun dari sebuah graf ulat. Dinotasikan dengan $F_{m,n}$ dengan m adalah jumlah simpul *backbone* dan n adalah jumlah anting. Dapat dilihat pada gambar 2.8

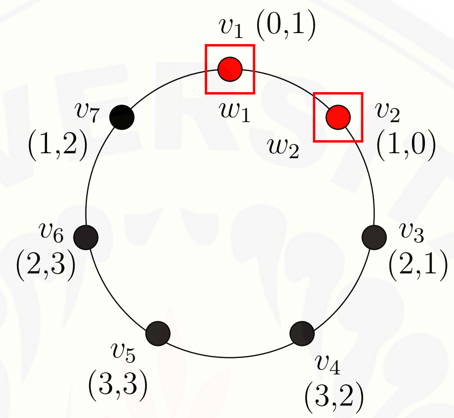


Gambar 2.8 Graf Kembang Api teratur

2.3 Dimensi Metrik

Chartrand, Salehi, dan Zhang (2000) menyebutkan bahwa dalam memberikan definisi jarak pada graf terhubung G dengan titik u dan v, jarak $d(u, v)$

adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v di G. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_k\}$ dari himpunan titik di graf terhubung G dan sebuah titik v di G, k-vektor (k-tuple terurut) $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \ldots, (v, w_k))$ merupakan koordinat metrik dari v terhadap W. Himpunan W disebut himpunan pembeda untuk G jika setiap titik pada G memiliki koordinat titik yang berbeda. Minimum kardinalitas dari himpunan pembeda atau basis dari G disebut dimensi metrik yang dinotasikan dengan dim(G).



Gambar 2.9 Contoh Dimensi Metrik

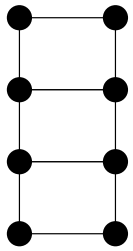
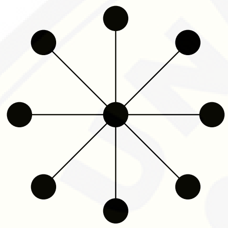
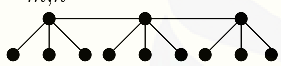
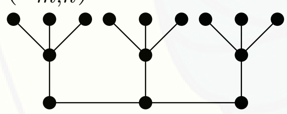
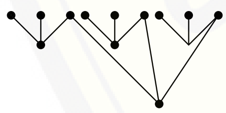
Sebagai contoh, Gambar 2.9 memiliki $W = \{v_1, v_2\}$ sehingga $\dim(G) = 2$, dengan koordinat setiap titik terhadap W yaitu :

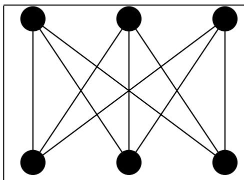
$r(v_1|W) = (0, 1)$ $\quad$ $r(v_2|W) = (1, 0)$
$r(v_3|W) = (2, 1)$ $\quad$ $r(v_4|W) = (3, 2)$
$r(v_5|W) = (3, 3)$ $\quad$ $r(v_6|W) = (2, 3)$
$r(v_7|W) = (1, 2)$

2.4 Hasil Penelitian Dimensi Metrik

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman terkait dimensi metrik yang dapat digunakan sebagai rujukan. Beberapa hasil penelitian tersebut diantaranya dapat dilihat pada tabel 2.1.

Tabel 2.1: Hasil Penelitian Dimensi Metrik Terdahulu

Graf	Hasil $dim(G)$	Keterangan
Graf Tangga (L_n) 	$\dim(L_n) = 2$ untuk $n \geq 2$	Saifudin, I. 2015
Graf Bintang S_n (S_n) 	$\dim(S_n) = n - 1$ untuk $n \geq 3$	Darmaji. 2012
Graf Ulat Teratur $C_{m,n}$ 	$\dim(C_{m,n}) = m(n-1)$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$	Darmaji. 2012
Graf Kembang Api Teratur ($F_{m,n}$) 	$\dim(F_{m,n}) = m(n-1)$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$	Darmaji. 2012
Graf Pohon Pisang Teratur 	$\dim(B_{m,n}) = m(n-2)$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$	Darmaji. 2012
Graf Bipartit Komplit ($K_{m,n}$)	$\dim(K_{m,n}) = n - 1$ untuk $n \geq 4$	Septiani, dkk. 2012

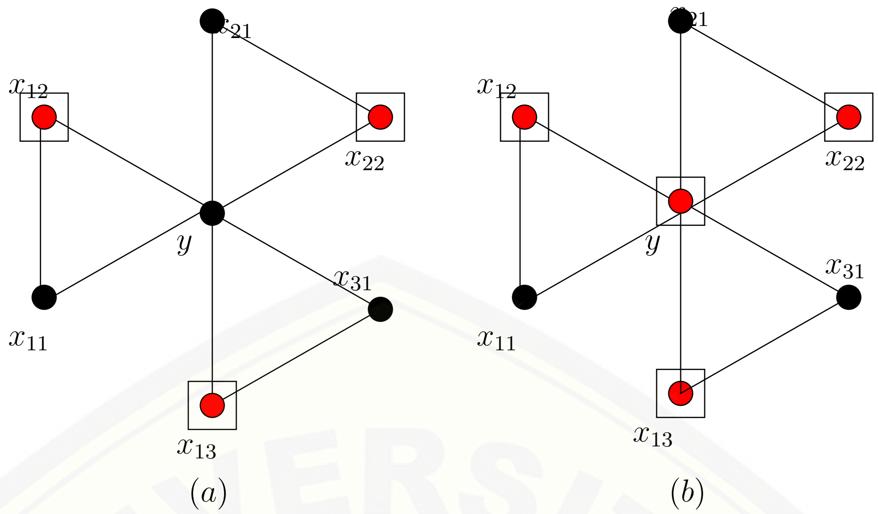
Graf	Hasil $dim(G)$	Keterangan
		

2.5 Dimensi Metrik dengan Himpunan Pembeda Terhubung

Menurut definisi dari dimensi metrik. salah satu jenis dari dimensi metrik adalah dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung. Slamin, Tomescu, dan Javaid (2007) menyebutkan bahwa nilai minimum dari k yang merupakan himpunan pembeda dari k -partisi dari $V(G)$ disebut sebagai dimensi partisi dari G, yang disimbolkan dengan $pd(G)$. Sebuah himpunan pembeda k -partisi $\prod = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ dari $V(G)$ dikatakan terhubung jika setiap graf bagian $< S_i >$ yang diinduksi oleh $S_i (1 \leq i \leq k)$ terhubungkan di G. Nilai minimum dari k yang merupakan himpunan pembeda terhubung k -partisi dari $V(G)$ disebut sebagai dimensi partisi dengan himpunan pembeda terhubung dari G, disimbolkan dengan $cpd(G)$.

Sedangkan untuk dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung. Chitra dan Arumugam (2015) menyebutkan bahwa himpunan pembeda W dari sebuah graf G dikatakan sebagai himpunan pembeda terhubung jika sebuah subgraf $< W >$ yang diinduksi oleh W tidak memiliki titik yang berjauhan. Kardinalitas minimum dari sebuah himpunan pembeda terhubung dari sebuag graf G adalah banyaknya himpunan pembeda terhubung $nr(G)$. sebuah himpunan pembeda terhubung dari kardinalitas $nr(G)$ disebut dengan himpunan nr dari G.

Sebagai contoh, untuk graf G yang ada pada Gambar2.10 dibawah, $W = \{x_1, x_3, x_5\}$ adalah basis dari graf G dan $W = \{x_1, x_3, x_5, y\}$ adalah basis dari graf G yang terhubung. yang dinotasikan sebagai $\dim(G) = 3$ dan $\mathrm{nr}(G) = 4$



Gambar 2.10 (a) Dimensi Metrik (b) Dimensi Metrik dengan Himpunan Pembeda Terhubung

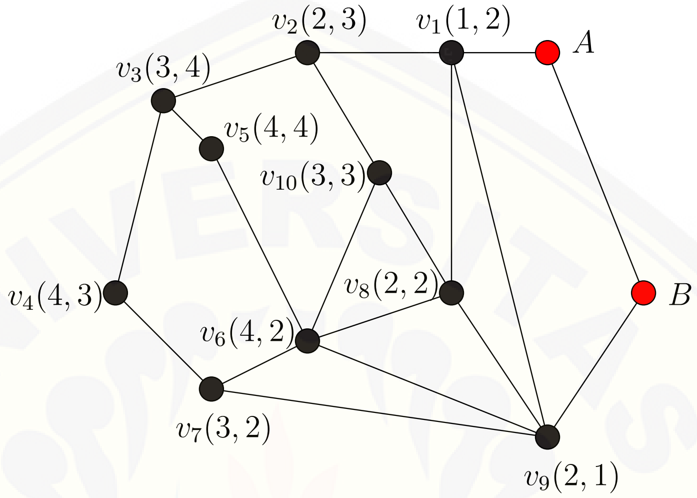
2.6 Batas Bawah Dimensi Metrik Dengan Himpunan Pembeda Terhubung

Batas bawah dari suatu dimensi metrik dari sebuah graf G adalah nilai terkecil dari himpunan pembeda W. Batas bawah dari dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung adalah nilai terkecil dari himpunan pembeda W dari sebuah graf G dimana semua himpunan pembeda W harus saling terhubung satu dengan yang lain. Menurut Chitra dan Arumugam (2015) nilai terkecil dari himpunan pembeda W dari dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung adalah $nr(G) \geq dim(G) + 1$.

Cara yang digunakan dalam menentukan batas bawah dari dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung W pada suatu graf G adalah dengan melihat batas bawah dimensi metrik dari graf G tersebut. Apabila batas bawah dari $dim(G)$ sudah saling terhubung, maka batas $nr(G) \doteq dim(G)$

2.7 Aplikasi Dimensi Metrik dengan Himpunan Pembeda Terhubung

Aplikasi dimensi metrik salah satunya diterapkan untuk manajemen pengelolaan nomer telepon dari suatu daerah yang dikelola oleh sistem komputer yang berada dalam satu gedung. Untuk memudahkan manajemen sistem pengelolaan nomer telepon, maka setiap tujuan nomer telepon harus memiliki kode koordinat yang berbeda. Koordinat berbeda itu dibentuk dari elemen himpunan pembeda dengan jumlah minimal karena sekaligus merupakan unit sistem pengendali manajemen pengelolaan nomer telepon. Gambar 2.11 menunjukkan graf representasi lokasi daerah yang akan dikelola nomer teleponnya .



Gambar 2.11 Graf Representasi Daerah Pengelolaan Nomor Telepon

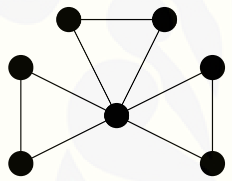
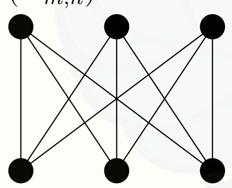
Berdasarkan Gambar 2.11, diketahui bahwa jumlah unit sistem pengendali ada 2 yaitu terletak pada A dan B yang sudah saling terhubung dan berdekatan, sehingga didapatkan representasi lokasi distribusi terhadap titik pengendali. Selanjutnya akan dipetakan beban usaha terhadap 2 sistem tersebut.

Dalam hal ini ditentukan sistem A menangani untuk jumlah koordinat $x + y \leq 5$ dan sistem B menangani untuk jumlah koordinat $x+y \geq 6$, sehingga sistem A menangani $v_1(1,2)$, $v_2(2,3)$, $v_7(3,2)$, $v_8(2,2)$, dan $v_9(2,1)$ sedangkan sistem B menangani $v_3(3,4)$, $v_4(4,3)$, $v_5(4,4)$, $v_6(4,2)$, dan $v_{10}(3,3)$. Secara berkala beban usaha juga dapat dirubah dengan A menangani $x + y \leq n$ dan B menangani $x + y \geq n + 1$

2.8 Hasil Penelitian Dimensi Metrik Dengan Himpunan Pembeda Terhubung

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman terkait dimensi metrik yang dapat digunakan sebagai rujukan. Beberapa hasil penelitian tersebut diantaranya dapat dilihat pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2: Hasil Penelitian Dimensi Metrik dengan Himpinan Pembeda Terhubung Terdahulu

Graf	Hasil $dim(G)$	Keterangan
Graf Lintasan (P_n) 	$\mathrm{nr}(P_n) = 2$ untuk $n \geq 2$	Chitra dan Arumugam. 2015
Graf Amalgamasi (C_3, v, n) 	$\mathrm{nr}(C_3, v, n) = n + 1$ untuk $n \geq 2$	Chitra dan Arumugam. 2015
Graf Bipartit Komplit ($K_{m,n}$) 	$\mathrm{nr}(K_{m,n}) = m + n - 2$ untuk $n \geq 2$	Chitra dan Arumugam. 2015

2.9 Fungsi dan Barisan Aritmatika

Fungsi lebih dikenal sebagai pemetaan. Istilah fungsi, pemetaan, peta, transformasi, dan operator biasanya dipakai secara sinonim. Pada umumnya, fungsi dari himpunan A ke himpunan B didefinisikan sebagai aturan yang memetakan setiap anggota himpunan daerah *domain* kepada anggota himpunan daerah *kodoma-*

in. Anggota himpunan yang dipetakan dapat berupa apa saja (kata, orang, atau objek lain), namun biasanya yang dibahas adalah besaran matematika seperti bilangan riil. Fungsi didefinisikan dengan notasi $f : A \rightarrow B$, yang artinya bahwa fungsi f yang memetakan setiap elemen himpunan A kepada B.

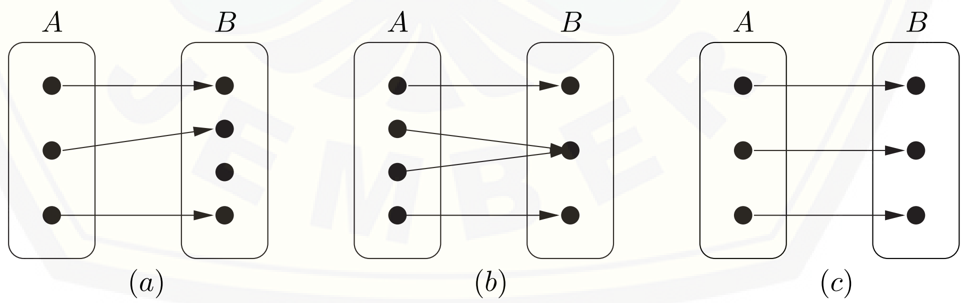
Jenis fungsi ada tiga yaitu :

a. Fungsi satu-satu (injektif) adalah pemetaan dimana setiap elemen di daerah *kodomain* yang berpasangan mempunyai pasangan elemen tepat satu di daerah *domain*, $\forall\ a_1$ dan $a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$. Dengan kata lain, $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi satu-satu atau fungsi injektif jika dan hanya jika untuk sebarang a_1 dan $a_2 \in A$ dengan a_1 tidak sama dengan a_2 maka berlaku $f_(a_1)$ tidak sama dengan $f(a_2)$.

b. Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi kepada atau fungsi surjektif $\Leftrightarrow \forall\ b \in B$, $\exists\ a \in A \Rightarrow f(a) = b$. Dengan kata lain, suatu *kodomain* fungsi surjektif sama dengan kisarannya *(range)*. Dengan kata lain, $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi kepada atau fungsi surjektif jika dan hanya jika untuk setiap b dalam *kodomain* B terdapat paling tidak satu a dalam *domain* A sehingga berlaku $f(a) = b$. Dengan kata lain, suatu *kodomain* fungsi surjektif sama dengan kisarannya *(range)*.

c. Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi bijektif apabila fungsi tersebut merupakan fungsi injektif sekaligus surjektif.

Gambar 2.12 menunjukkan fungsi injektif, surjektif dan bijektif.



Gambar 2.12 (a) Fungsi Injektif, (b) Fungsi Surjektif dan (c) Fungsi Bijektif

Barisan yang dibentuk dengan cara menambah atau mengurangi suku sebelumnya dengan suatu bilangan tetap tertentu disebut barisan aritmatika. Secara umum, barisan aritmatika suku ke-n dirumuskan :

$$U_n = a + b(n-1)$$

Barisan mempunyai suku pertama (U_1) yang biasa disebut a dan beda yang disebut b. Barisan bilangan ($U_1, U_2, U_3, \ldots, U_{n-1}, U_n$) disebut barisan aritmatika jika $U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \ldots = U_n - U_{n-1} =$ konstanta. Berikut merupakan salah satu contoh barisan aritmatika :
Misalkan 25, 30, 35, 40, 45, . . . adalah barisan aritmetika maka :
$U_1 = 25 = 25 + 5(0)$
$U_2 = 30 = 25 + 5 = 25 + 5(1)$
$U_3 = 35 = 25 + 5 + 5 = 25 + 5(2) \ldots U_n = 25 + 5(n-1)$
Oleh sebab itu, suku ke-n dapat dirumuskan $U_n = a + b(n-1)$.

2.10 Aksioma, Lemma, Teorema, Corollary, Konjektur dan Open Problem

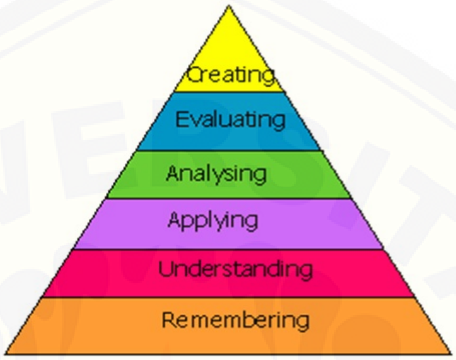
Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi. Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar. Bentuk khusus dari teorema adalah lemma dan *corolarry* (akibat). Lemma adalah teorema sederhana yang digunakan dalam pembuktian teorema lain. Lemma biasanya tidak menarik namun berguna pada pembuktian proposisi yang lebih kompleks, yang dalam hal ini pembuktian tersebut dapat lebih mudah dimengerti bila menggunakan sederetan lemma, setiap lemma dibuktikan secara individual. Corollary (akibat) adalah teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan, atau dapat dikatakan corollary adalah teorema yang mengikuti dari teorema lain. Konjektur adalah sebuah proposisi yang dipradugakan sebagai hal yang nyata, benar, atau asli, sebagian besarnya didasarkan pada landasan inkonklusif (tanpa simpulan). Konjektur bertentangan dengan hipotesis (oleh karenanya bertentangan pula dengan teori, aksioma, atau prinsip), yang merupakan pernyataan yang mengandung perjanjian menurut landasan yang dapat diterima. Di dalam matematika, konjektur adalah proposisi yang tidak terbuktikan atau tidak memerlukan bukti atau juga teorema yang dianggap pasti benar adanya. *Open problem* (masalah terbuka atau pertanyaan terbuka) adalah beberapa masalah yang dapat secara akurat dinyatakan, dan belum diselesaikan (tidak ada solusi untuk diketahui). Contoh *open problem* dalam matematika, yang telah diselesaikan dan ditutup oleh peneliti di akhir abad kedua puluh, adalah Teorema Terakhir Fermat dan empat warna teorema peta. Sedangkan *open problem* yang belum terselesaikan contohnya adalah permasalahan jembatan Königsberg.

2.11 Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi

Menurut Santrock (2008) berpikir melibatkan kegiatan memanipulsasi dan mentransformasi informasi dalam memori. Keterampilan berpikir dapat didefinisikan sebagai proses kognitif yang dipecah-pecah ke dalam langkah-langkah nyata yang kemudian digunakan sebagai pedomak berpikir. Satu contoh keterampilan berpikir adalah menarik kesimpulan, yang didefinisikan sebagai kemampuan untuk menghubungkan berbagai petunjuk dan fakta atau informasi dengan pengetahuan yang telah dimiliki untuk membuat suatu prediksi hasil akhir yag terumuskan. Untuk mengajarkan keterampilan berpikir menarik kesimpulan tersebut yaitu proses kognitif harus dipecah ke dalam langkah-langkah sebagai berikut:

1. mengidentifikasi pertanyaan atau fokus kesimpulan yang akan dbuat;
2. mengidentifikasi fakta yang diketahui;
3. mengidentifikasi pengetahuan yang relevan yang telah diketahui sebelumya;
4. membuat perumusan prediksi hasil akhir, berdasarkan Taksonomi Bloom yang telah direvisi terdapat enam tahapan ranah kognitif yaitu mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, dan mengkreasi.

Taksonomi Bloom Revisi dianggap merupakan dasar bagi proses berpikir. Taksonomi Bloom Revisi yang digambarkan dalam Gambar 2.13 memuat enam level : mengingat(*remembering*),memahami (*understanding*), menerapkan (*applying*), menganalisis (*analysing*), mengevaluasi (*evaluating*) dan mencipta (*creating*). Kebiasaan berpikir akan memacu munculnya kreativitas, inovasi, dan kecerdasan. Semakin tinggi level berpikir seseorang dikatakan semakin tinggi pula keterampilan berpikir. Sebaliknya semakin rendah level berpikir seseorang dikatakan semakin rendah pula keterampilan berpikirnya.



Gambar 2.13 Tahapan Taksonomi Bloom yang Telah Direvisi (gurupembaharu.com)

Aspek mengingat, memahami, dan menerapkan merupakan kategori berpikir tingkat rendah, sedangkan aspek menganalisis, mengevaluasi, dan mengkreasi termasuk kategori berpikir tingkat tinggi. Hal tersebut bukan berart bahwa aspek mengingat, memahami, dan menerapkan tidak penting, namun untuk menuju dalam berpikir tingkat tinggi seseorang harus melalui tiga aspek tersebut. Berikut ini adalah penjelasan dan pilihan kata kerja kunci dari ranah kognitif yang telah direvisi: (Utari, R :10)

1. Mengingat adalah Kemampuan menyebutkan kembali informasi/ pengetahuan yang tersimpan di dalam ingatan. Kata kerja kuncinya: mendefinisikan, menyusun daftar, menjelaskan, mengingat, mengenali, menemukan kembali, menyatakan, mengulang, mengurutkan, menamai, menempatkan, menyebutkan.

2. Memahami adalah Kemampuan memahami instruksi dan menegaskan pengertian/ makna ide atau konsep yang telah diajarkan baik dalam bentuk

lisan, tertulis maupun grafik/ diagram. Kata kerja kuncinya: Menerangkan, menjelaskan, menterjemahkan, menguraikan, mengartikan, menafsirkan, menginterpretasikan, mendiskusikan, menyeleksi, mendeteksi, melaporkan, menduga, mengelompokkan, memberi contoh, merangkum, menganalogikan, mengubah, memperkirakan.

3. Menerapkan adalah Kemampuan melakukan sesuatu dan mengaplikasikan konsep dalam situasi tertentu. Kata kerja kuncinya: memilih, menerapkan, melaksanakan, menggunakan, mendemonstrasikan, memodifikasi, menunjukkan, membuktikan, menggambarkan, memprogramkan, mempraktekkan.

4. Menganalisis adalah Kemampuan memisahkan konsep kedalam beberapa komponen dan menghubungkan satu sama lain untuk memperoleh pemahaman atas konsep tersebut secara utuh. Kata kerja kuncinya: mengkaji ulang, membedakan, membandingkan, memisahkan, menghubungkan, menunjukkan hubungan antara variabel, memecah menjadi beberapa bagian, menyisihkan menjadi beberapa bagian, mengorganisir, mengkerangkakan.

5. Mengevaluasi adalah Kemampuan menetapkan derajat sesuatu berdasarkan norma, kriteria atau patokan tertentu. Kata kerja kuncinya: menilai, mengevaluasi, menjustifikasi, mengecek, mengkritik, memprediksi, membenarkan, menyalahkan, menyeleksi.

6. Mengkreasi adalah Kemampuan memadukan unsur-unsur menjadi suatu bentuk yang utuh dan koheren, atau membuat sesuatu yang orisinil. Kata kerja kuncinya: merakit, merancang, menemukan, menciptakan, memperoleh, mengmbangkan, memformulasikan, membangun, membentuk, membuat, melakukan inovasi, mendesain, menghasilkan karya.

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan ke dalam Penelitian eksploratif yaitu penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.

3.2 Definisi Operasional

Definisi operasional dalam penelitian ini adalah dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung, yaitu representasi dari koordinat titik pada graf G terhadap himpunan pembeda W dimana setiap titik anggota himpunan pembeda W saling terhubung satu dengan yang lain. Selain itu, graf khusus yang akan diteliti adalah graf khusus keluarga pohon. Graf khusus keluarga pohon adalah graf tidak berarah dan tidak memiliki sirkuit yang isomorfis dengan graf pohon. Dalam proses penelitian, alur dalam melakukan penelitian adalah dimulai dari graf khusus keluarga pohon yang paling dasar, kemudian berkembang menuju graf yang lebih komplek.

3.3 Data Penelitian

Data dalam penelitian ini data yang digunakan adalah data sekunder berupa graf khusus yaitu graf E_n, graf bintang (S_n), graf kembang api teratur ($F_{m,n}$), graf pohon pisang teratur ($B_{m,n}$) dan graf ulat teratur ($C_{m,n}$) (*catepillar*).

3.4 Rancangan Penelitian

Dalam menyelesaikan permasalahan, penelitian ini menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) dan deduktif aksiomatik.

a. Metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) yaitu mencari pola untuk dilakukan konstruksi himpunan pembeda untuk mendapatkan nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung sedemikian hingga didapatkan nilai kardinalitas minimum dengan koodinat titik yang berbeda.

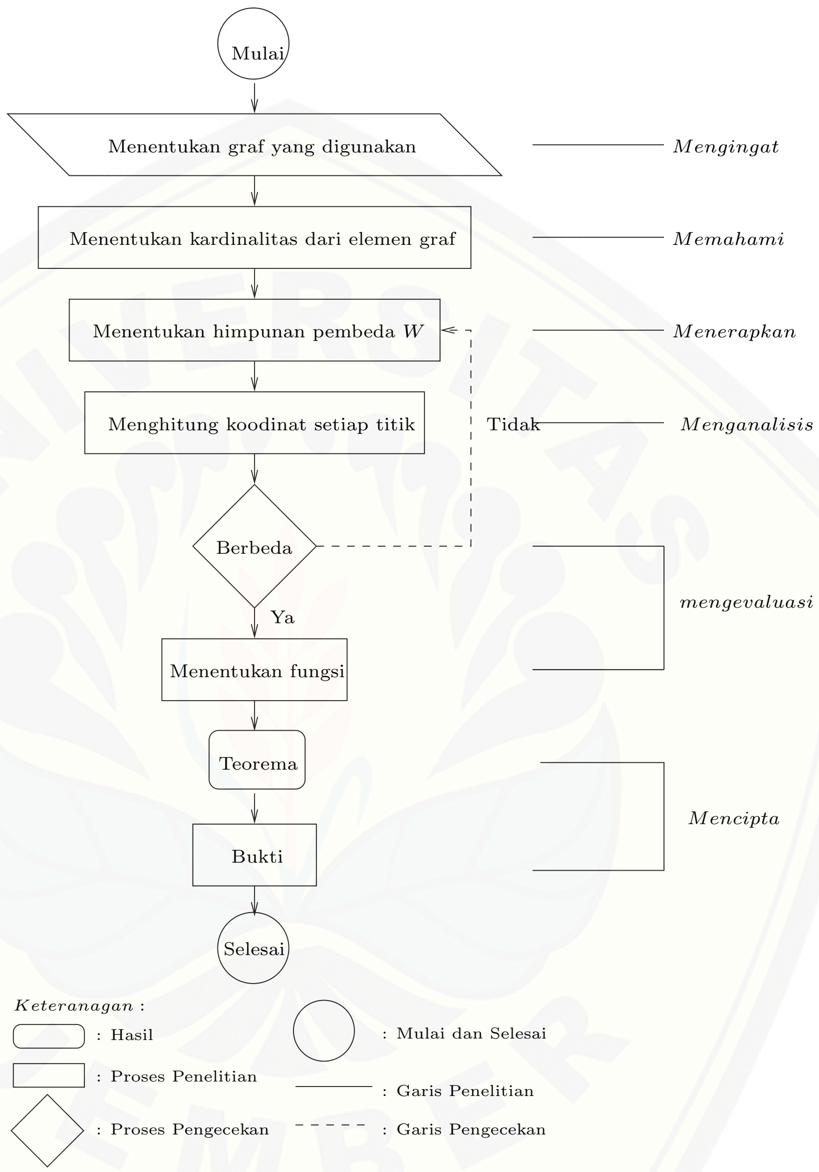
b. Metode deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah.

Rancangan penelitian untuk dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung pada graf khusus digambarkan dalam bagan yang diilustrasikan oleh Gambar 3.1. Uraian dari rancangan peneliti-an ini adalah sebagai berikut :

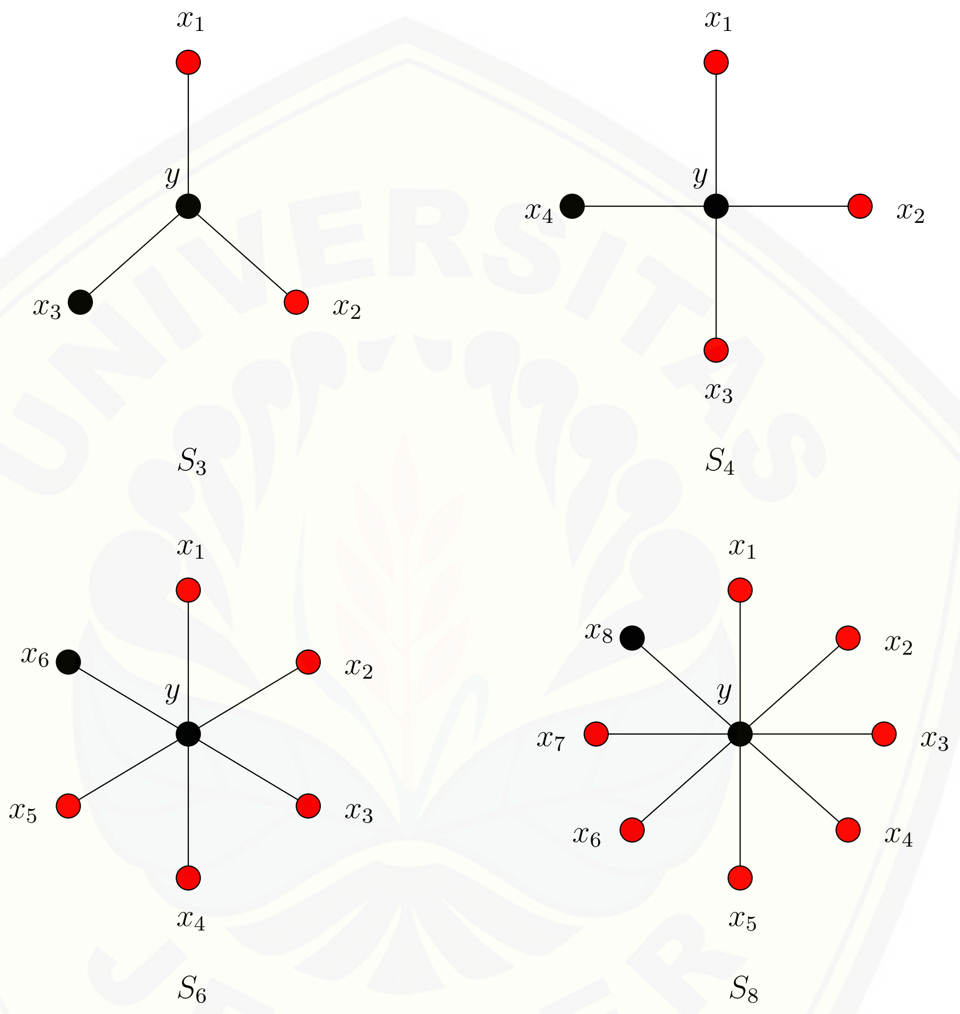
a. Menentukan graf yang akan digunakan untuk dianalisa dimensi matrik dengan himpunan pembeda terhubung;
b. Menentukan kardinalitas setiap elemen-elemen graf yang digunakan;
c. Menentukan himpunan pembeda W;
d. Menghitung representasi titik terhadap W hingga mendapatkan hasil yang berbeda setiap titiknya;
e. Menghitung kardinalitas minimum himpunan pembeda untuk menentukan nilai dimensi matrik dengan himpunan pembeda terhubung;
f. Menentukan fungsi $\dim(G)$ dan $\mathrm{nr}(G)$;
g. Menentukan teorema hasil penelitian pada graf khusus;
h. Membuktikan dengan menghitung formulasi koordinat titik.

3.5 Observasi Awal

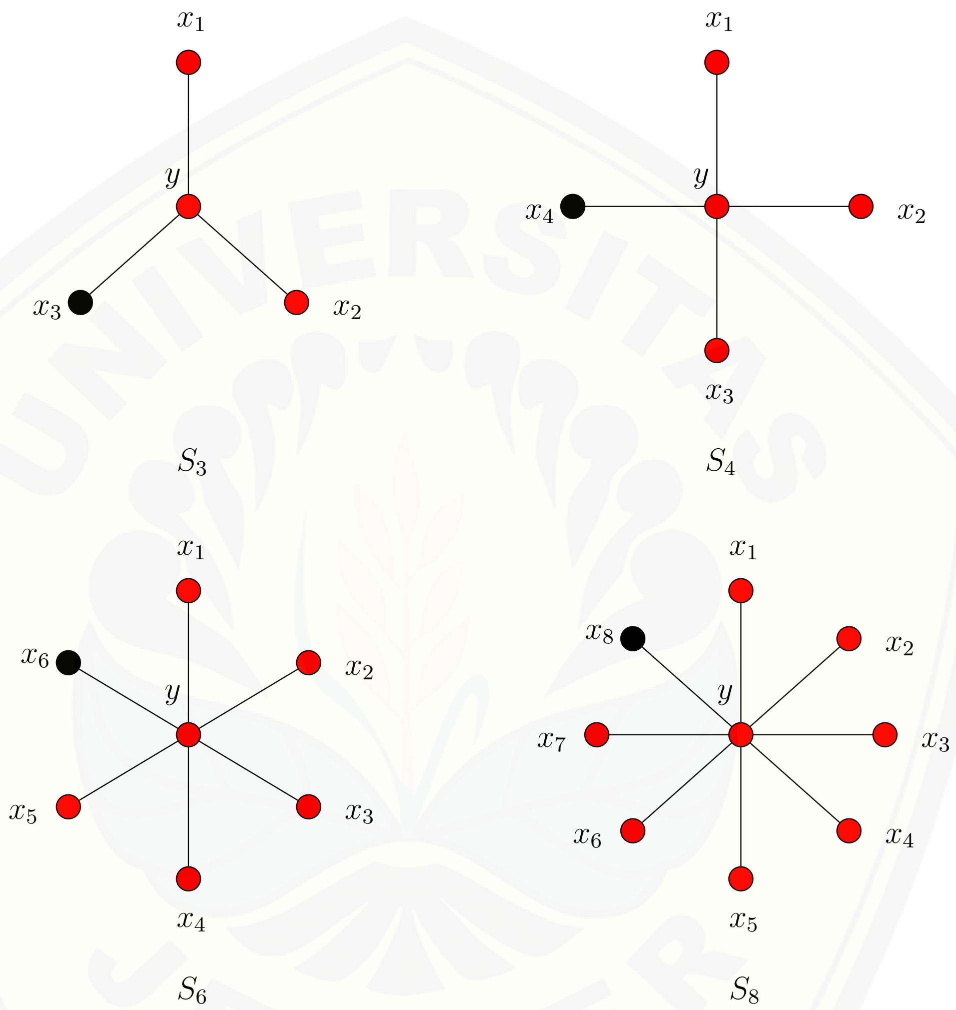
Dalam penelitian ini digunakan data sekunder berupa beberapa graf khusus. Penelitian awal mendapatkan hasil sebagai berikut pada Gambar 3.2 untuk nilai dimensi metrik dari graf S_n dan Gambar 3.3 untuk nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubungnya.



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian



Gambar 3.2 Dimensi metrik dari S_n adalah $dim(S_n) = n - 1$, untuk $n \geq 2$



Gambar 3.3 Observasi Awal $nr(S_n) = n$, untuk $n \geq 2$

2. Pilih titik dengan derajat terkecil pada graf yang akan diteliti sebagai himpunan pembeda.;
3. Kumpulkan titik-titik tadi menjadi sebuah himpunan.
4. Pastikan semua titik tersebut sudah terhubung satu dengan lainnya.
5. Lanjutkan dengan teknik yang sama dengan ekspansi graf yang lebih besar.

Beberapa graf dapat langsung ditentukan himpunan pembeda terhubungnya dengan cara melihat kardinalitas dari himpunan pembeda untuk dimensi metriknya. Sebagai contoh untuk graf bintang (S_n) nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubungnya dapat ditentukan dengan menambahkan titik pusat kedalam himpunan pembedanya.

Tahap 4 : Menganalisis

Kata kerja operasional : Menghitung representasi koordinat dari setiap titik terhadap himpunan pembeda W dan melakukan pengecekan

Tahap menganalisis dalam kegiatan ini yaitu menghitung representasi dari setiap titik yang ada pada graf terhadap himpunan pembeda terhubung dari graf tersebut. Pada saat menghitung representasi dari setiap titik haruslah konstan untuk setiap titiknya, yang dimaksud dengan konstan adalah melakukan perhitungan secara teratur. Sebagai contoh misalkan himpunan pembeda $W = \{x_1, x_2, x_3\}$, maka setiap titik haruslah direpresentasikan terurut terhadap $\{x_1, x_2, x_3\}$. Tidak diperbolehkan misalkan untuk titik y_1 melakukan representasi terhadap $\{x_2, x_1, x_3\}$. Karena tidak sesuai dengan himpunan pembeda yang sudah ditentukan. Selain itu dalam tahap menganalisis, juga dilakukan proses pengecekan terhadap representasi dari setiap titik apakah sudah berbeda atau belum, apabila masih ada yang belum berbeda, maka akan ditentukan kembali himpunan pembeda yang baru sampai setiap titik pada graf tersebut memliki representasi yang berbeda terhadap himpunan pembeda W.

Tahap 5 : mengevaluasi

Kata kerja operasional : Menentukan fungsi untuk mencari dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung

Tahap mengevaluasi dalam penelitian ini yaitu pada tahap menentukan fungsi kardinalitas minimal dari himpunan pembeda terhubung W. Dalam menentukan fungsi dari himpunan pembeda terhubung dilakukan menggunakan pendeteksian pola yang ada dalam barisan aritmatika, dimana dalam mencari fungsi ini haruslah berlaku untuk ekspansi dari graf tersebut secara umum.

Tahap 6: Mencipta

Kata kerja operasional : Menemukan teorema baru Tahap mencipta, dalam tahapan ini kegiatan dalam penelitian ini berupa menciptakan teorema baru yang terkait dengan dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung dari graf-graf yang diteliti, yaitu graf bintang (S_n), graf (E_n), graf ulat teratur ($C_{m,n}$), graf kembang api teratur ($F_{m,n}$) dan graf pohon pisang teratur $B_{m,n}$.

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa:

1. Kardinalitas elemen dari graf khusus keluarga pohon yang diteliti adalah
   - $|V(S_n)| = n + 1$ dan $|E(S_n)| = n$;
   - $|V(E_n)| = 3n + 6$ dan $|E(E_n)| = 3n + 5$;
   - $|V(F_{m,n})| = m(n + 2)$ dan $|E(F_{m,n})| = m(n + 2) - 1$;
   - $|V(C_{m,n})| = m(n + 1)$ dan $|E(C_{m,n})| = m(n + 1) - 1$;
   - $|V(B_{m,n})| = m(n + 1) + 1$ dan $|E(B_{m,n})| = m(n + 1)$.;
2. Dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung nr sebagai berikut:
   - Untuk $n \geq 2$, nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung dari graf bintang S_n adalah $\mathrm{nr}(S_n) = n$;
   - Untuk $n \geq 2$, nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung dari graf E (E_n) adalah $\mathrm{nr}(E_n) = 3$;
   - Untuk $n \geq 2$, nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung dari graf kembang api teratur $(F_{m,n})$ adalah

$$nr(F_{m,n}) = \begin{cases} n & \text{, untuk } m = 1 \\ m(n+1) & \text{, untuk } m \geq 2 \end{cases}$$

.

   - Untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$, nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung dari graf ulat teratur $(C_{m,n})$ adalah $\mathrm{nr}(C_{m,n}) = mn$;

- Untuk $n \geq 3$, nilai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung dari graf pohon pisang teratur $(B_{m,n})$ adalah

$$nr(B_{m,n}) = \begin{cases} n & , \text{untuk } m = 1 \\ \\ mn + 1 & , \text{untuk } m \geq 2 \end{cases}$$

.

3. Berpikir tingkat tinggi dalam menentukan dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung pada graf khusus keluarga pohon yakni dalam menentukan graf yang digunakan adalah tahapan dari C1, menentukan kardinalitas dari himpuan pembeda terhubung adalah tahap C2, menentukan himpunan pembeda W adalah tahap C3, menghitung koordinat representasi setiap titik pada graf terhadap W termsuk kedalam tahap C4, melakukan pengecekan terhadap representasi dari setiap titik menjadi tahap C5, menentukan fungsi dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung dan menemukan teorema baru adalah tahap C6.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung pada graf khusus keluarga pohon yaitu pada graf E_n, graf bintang (S_n), graf Udang (Lobster), graf kembang api teratur $(F_{m,n})$, graf pohon pisang teratur $(B_{m,n})$ dan graf ulat teratur $(C_{m,n})$ (*caterpillar*), maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar dapat mengembangkan analisa dimensi metrik dengan himpunan pembeda terhubung pada graf khusus lainnya serta mencari cara penyajian representasi titik terhadap himpunan pembeda dengan cara lain.

DAFTAR PUSTAKA

Arumugam. S dan Mathewc. V (2012).*The fractional metric dimension of graphs.* Discrete Mathematics. No. 312,1584-1590.

Budi. A, dan Darmaji. 2012. *Dimensi Metrik Graf Pohon Bentuk Tertentu.* Jurnal: Teknik Institut Teknologi Surabaya. No. 1, Vol: 1.

Chitra,P.J.B dan S. Arumugam. (2015).*Resolving Set without Isolated vertices.* Procedia Computer Science. No. 74,38-42.

Dafik, A.K. Purnapraja, R. Hidayat.(2015). *Cycle-Super Antimagicness of Connected and Disconnected Tensor Product of Graphs.* Procedia Computer Science . No. 74,93 99.

Dafik , Miller. M, Ryana. J, Baca. M. (2009). *On super (a,d)-edge-antimagic total labeling of disconnected graphs.* Discrete Mathematics 309, 49094915

Grigorious. C, Manuel. P ,Miller. M, Rajan. B ,Stephen. S(2014).*On the metric dimension of circulant and Harary graphs.* Applied Mathematics and Computation . No. 248,47-54.

Harary, F dan R. A. Melter. 1976. *On the metric dimension of a graph.* (Tesis) Ars Combin. No. 2, 191-195.

Harary, F. 1969. *Graph Teory.* Wesley Publishing Company,Inc.

Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory.* Boston San Diego New York London: Academic Press.

Hernando, Carmen, dkk. *On The Metric Dimension of Some Families of Graphs.* Electronic Notes in Discrete Mathematics. Vol.22,129-133

I. Tomescu, I. Javaid dan Slamin. (2007).*On The Partition Dimension and Connected Partition Dimension of Whells.* Arc Combinatoria. No. 84,311-318.

Irwanto, J. dan Dafik. 2014. *Pewarnaan Titik pada Graf Spesial dan Operasinya.* Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember, 1 (1).

Iswadi, H. 2011. *Batas Atas Bilangan Dominasi Lokasi Metrik dari Graf Hasil Operasi Korona.* Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember, 1 (1).

Mudjiati, T. 2008. *Dimensi Metrik Graph Kincir.* Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Yogyakarta. ISBN : 978 979 16353 6 3

Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit.* Informatika Bandung.

Saifudin, I. 2015. *Dimensi Partisi Dari Graf Khusus Dan Operasinya.*Digital Repository Universitas Jember.

Saputro, Hendri D. 2015. *Dominating Set pada Hasil Operasi Graf Khusus dan Aplikasinya.* Digital Repository Universitas Jember.

Septiana, E dan Budi, R. 2012. *Dimensi Metrik Pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang, dan Graf Bipartit Komplit.* Jurnal: Universitas Negeri Surabaya. No. 1, Vol: 1.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.

Utari, R. 2008. *Taksonomi Bloom: Apa dan Bagaimana Cara Menggunakannya.* Pusdiklat KNPK, Widyaiswara Madya.